

## CALCULO DIFERENCIAL (MATEMATICAS II)

EXAMEN FINAL      SEPTIEMBRE DE 2013

### PARTE PRACTICA

1. (10 puntos) Sea  $(a_n)_n$  la sucesión en  $\mathbb{R}$  definida por

$$a_n = \frac{1 - \frac{1}{e} - \frac{1}{e^2} - \dots - \frac{1}{e^n}}{n!} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Sea  $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ . Calcular el supremo y el ínfimo de  $A$ . Razonar si son máximo y mínimo, respectivamente.

2. (10 puntos) Probar que la serie

$$\sum_n \frac{1 + 2 \sin(nx) x^n}{n(n+1)}$$

converge para todo  $x \in \mathbb{R}$  con  $|x| \leq 1$ .

3. Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} \arctan(x^2) - x^2 & \text{si } x \leq 0 \\ \ln(1+x) & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

(a) (10 puntos) Estudiar los valores de  $x$  para los que  $f$  es derivable y para los que no es derivable.

(b) (10 puntos) Probar que  $f(x) < 0$  para todo  $x < 0$ .

(c) (10 puntos) Utilizando el polinomio de Taylor de grado 3 de  $f$  en el punto adecuado, calcular una valor aproximado de  $\ln(2.001)$  con tres cifras decimales.

**Ayuda.** Tomar 0.693 como valor aproximado de  $\ln 2$ .

(d) (10 puntos) Hallar una cota del valor absoluto del error cometido en el cálculo aproximado realizado en (c).

4. Sea  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0 \text{ ó } y = 0\}$ . Sea  $f : \mathbb{R}^2 \setminus A \rightarrow \mathbb{R}^2$  la función definida por

$$f(x, y) = \left( \frac{(e^y - 1) \sin^2 x}{x^2 + y^2}, y \sin(1/x) + x \cos(1/y) \right) \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus A).$$

(a) (10 puntos) Calcular  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ .

(b) (10 puntos) Calcular la matriz jacobiana de  $f$  en  $(1, 1)$ .

**NOTAS.**

- La calificación de esta parte práctica será la media aritmética de las calificaciones obtenidas en cada una de las 8 preguntas de la misma.
- La calificación de este examen final será la media aritmética de las calificaciones obtenidas en su parte teórica y en su parte práctica.