Dpto. Matemática Aplicada
Facultad de Informática. UPM

SOLUCIONES

24 de Octubre de 2014

ÁLGEBRA LINEAL Matemáticas e Informática

PRIMER PARCIAL: MATRICES, SISTEMAS, ESPACIOS VECTORIALES y HOMOMORFISMOS

Apellidos..**Nombre**......................**Nº Matrícula**..........

Ejercicio 1: (5 ptos)

Las demostraciones pedidas en este ejercicio se pueden consultar en los apuntes de clase o en cualquier libro de Álgebra Lineal.

Ejercicio 2: (5 ptos)
Estudia si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas: (**las respuestas correctas suman 0.5 puntos y las incorrectas restan 0.3 puntos**)

1 El siguiente conjunto es subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$, $T=\left\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3 : \begin{cases} x_1+x_3=0 \\ x_2-2x_3x_1=0\end{cases}\right\}$ ------------------- **F**

2 El siguiente conjunto es subespacio vectorial de $\mathbb{Z}_2^4$, C = {(0,0,0,0), (0,1,0,0), (0,1,1,0), (0,1,0,1)}.--------------- **F**

3 El siguiente conjunto es subespacio vectorial de $\mathbb{Z}_2^4$, C = {(0,0,0,0), (0,1,0,0), (0,1,1,0), (0,0,1,0)}. ------------- **V**

4 El siguiente conjunto es subespacio vectorial de $P_3(\mathbb{R})$: $S=\{p(x)\in P_3(\mathbb{R}) \,/\, p(0)p(1)=0\}$.--------------------- **F**

5 La aplicación $f(x,y,z)=(2x+y-z,\ 0)$ es lineal. --- **V**

6 La aplicación $f(x,y)=(2x+y,\ x-1)$ es lineal. --- **F**

7 Dada la aplicación lineal $f(x_1,\dots,x_n)=A\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$ con $A\in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ la imagen de f es un s.v. de $\mathbb{R}^n$.------------- **F**

8 Dado el homomorfismo $f(x_1,\dots,x_n)=A\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$ con $A\in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, se tiene que dim Im$f$=rango(A). -------------- **V**

9 Dado el homomorfismo $f(x_1,\dots,x_n)=A\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$ con $A\in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, se tiene que dim ker$f$=rango(A). -------------- **F**

10 Dado el homomorfismo $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=\begin{pmatrix}1&0&-1&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}$, se tiene que $\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\in$ Imf. ---------------------------- **F**

Ejercicio 3: (5 ptos Trabajo en Grupo)

a) Dado en $\mathbb{Z}_2^5$ el subespacio vectorial C = L{(1,1,1,0,0), (1,0,0,1,1), (0,1,1,1,1)}, obtener una matriz de paridad para el código lineal C, la dimensión de C, el número de palabras de C y la distancia de C ¿Cuántos errores detecta C? y ¿Cuántos corrige?.

b) Construir la matriz de paridad de un código lineal que codifique, al menos, 15 palabras y sea capaz de corregir un error.

a) $C=L\{(1,1,1,0,0),(1,0,0,1,1),(0,1,1,1,1)\}=L\{(1,1,1,0,0),(0,1,1,1,1)\}$

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\\0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\longrightarrow\left(\begin{array}{cc|c}1&0&x_1\\1&1&x_2\\1&1&x_3\\0&1&x_4\\0&1&x_5\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{cc|c}1&0&x_1\\0&1&x_4\\0&0&x_1+x_2+x_4\\0&0&x_1+x_3+x_4\\0&0&x_4+x_5\end{array}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1+x_2+x_4=0 \\ x_1+x_3+x_4=0 \\ x_4+x_5=0 \end{cases} \quad \text{Ecs Implícitas de } C \quad \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Matriz de Paridad de C

- dim $C = 2$, $|C| = 4$, $\delta(C) = 3$; C detecta dos errores y corrige 1.

b) Matriz de paridad de un código Hamming (7,4)

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 4: (10 ptos)

a) Demostrar si los siguientes subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^3$ son el mismo, $S_1 = L\{(0, -3,1), (2, 1, -1), (1, -1,0)\}$ y $S_2 = L\{(2, -5,1), (1, -4,1), (1, 2, -1), (3, 0, -1)\}$.

b) Para cada valor de $a \in \mathbb{R}$ obtener la dimensión y una base del subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$, $S_a = L\{(a, -a, 1), (1, 0, a), (a. -a, 2a)\}$, indicando en qué casos el subespacio S_a es el total.

c) Para cada valor de $a \in \mathbb{R}$ obtener la dimensión y una base del subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$, $T_a : \begin{cases} x + az + t = 0 \\ y + at = 0 \\ x + ay + az + (a+3)t = 0 \end{cases}$.

a)
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/3 \\ 0 & 1 & -1/3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -6 & 2 \\ 0 & -9 & 3 \\ 0 & -6 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1/3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/3 \\ 0 & 1 & -1/3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Luego $S_1 = S_2$.

b)
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ a & -a & 1 \\ a & -a & 2a \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & -a & 1-a^2 \\ 0 & -a & 2a-a^2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & a & a^2-1 \\ 0 & 0 & 2a-1 \end{pmatrix}$$

- Si $a=0 \Rightarrow \dim S_0 = 2$ y $B_{S_0} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$
- Si $a = \frac{1}{2} \Rightarrow \dim S_{1/2} = 2$ y $B_{S_{1/2}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}$
- $\forall a \in \mathbb{R}$ con $a \neq 0$ y $a \neq \frac{1}{2}$ se tiene $\dim S_a = 3 \Rightarrow S_a = \mathbb{R}^3$

c)
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & a & 0 \\ 1 & a & a & (a+3) & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & a & 0 \\ 0 & a & 0 & a+2 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a+2-a^2 & 0 \end{array}\right)$$

- Si $a = 2 \Rightarrow \dim T_2 = 4-2 = 2$ y $B_{T_2} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$
- Si $a = -1 \Rightarrow \dim T_2 = 4-2 = 2$ y $B_{T_{-1}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

- $\forall\, a \in \mathbb{R}$ con $a \neq 2$ y $a \neq -1$ se tiene $\dim T_a = 4 - 3 = 1$

y $B_{T_a} = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

Ejercicio 5: (**10** ptos)

Sean S y T los subespacios vectoriales del e.v. $\mathbb{R}^4$ definidos por:

$$S=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^4 : y+z+2t=0\right\} \text{ y } T=L\{(1,2,4,3),(2,-1,3,1),(1,0,2,1)\}$$

a) Obtener una base de S y un suplementario de S en $\mathbb{R}^4$.

b) Obtener las coordenadas del vector $(1,0,2,1)\in\mathbb{R}^4$ respecto de la base más sencilla de T.

c) Obtener la base más sencilla de S + T.

d) Obtener ecuaciones implícitas, paramétricas y una base de $S\cap T$.

e) Obtener un suplementario de $S\cap T$ en T.

a) $B_S=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\2\\-1\end{pmatrix}\right\}$, Suplementario de S en $\mathbb{R}^4 = L\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$.

b) Base usual o más sencilla de T:

$$\begin{pmatrix}1&0&2&1\\1&2&4&3\\2&-1&3&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&2&1\\0&2&2&2\\0&-1&-1&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&2&1\\0&1&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow B_T=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$$

coordenadas de $\bar v=\begin{pmatrix}1\\0\\2\\1\end{pmatrix}$ respecto de B_T : $\bar v_{B_T}=(1,0)$ ya que

$$\begin{pmatrix}1\\0\\2\\1\end{pmatrix}=1\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\2\\1\end{pmatrix}+0\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix}$$

c)

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&-1&0\\0&0&2&-1\\1&0&2&1\\0&1&1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&-1&0\\0&0&2&-1\\0&0&2&1\\0&0&2&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&-1&0\\0&0&1&-1/2\\0&0&0&2\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

Por tanto, la base más sencilla de S+T es: $B_{S+T}=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}=B_c^{\mathbb{R}^4}$

luego $S+T=\mathbb{R}^4$, $\dim S+T=4$ y $\dim S\cap T=\dim S+\dim T-\dim S+T=1$.

d) Para las implícitas de $S\cap T$ necesito las implícitas de S y de T.

· Implícitas de T :

$$\left(\begin{array}{cc|c}1&0&x\\0&1&y\\2&1&z\\1&1&t\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|c}1&0&x\\0&1&y\\0&0&z-2x-y\\0&0&t-x-y\end{array}\right)\Rightarrow\begin{cases}2x+y-z=0\\x+y-t=0\end{cases}$$

Ecs. Implícitas de T.

Ecs. Implícitas de $S \cap T$: $\begin{cases} y+z+2t=0 \\ 2x+y-z=0 \\ x+y-t=0 \end{cases}$ Resolvemos el stma. para obtener unas paramétricas y una base de $S \cap T$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-z-3t=0 \\ y+z+2t=0 \\ t=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} x=\lambda \\ y=-\lambda \\ z=\lambda \\ t=0 \end{array} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ecs. Paramétricas de $S \cap T$

$$\Rightarrow B_{S \cap T} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

e) Tomo $(0,1,1,1) \in T$ y como $rg\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2$ se tiene que el s.v. $T' = L\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ es un suplementario de $S \cap T$ en T.

Ejercicio 6: (**10** ptos)

a) Sea f: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ la aplicación lineal definida por $f(x,y,z)=(x-z,\ x+y,\ z,\ z)$. Se pide:

a1) Obtener los subespacios Imf y ker$f$, y estudiar si la aplicación lineal es monomorfismo, epimorfismo o isomorfismo.

a2) Obtener el subespacio contraimagen $f^{-1}\left(L\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}\right)$.

b) Sea f: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal tal que $f(1,1,0) = (1,-1,0)$, $f(0,1,0) = (0,1,1)$ y $f(0,1,-1) = (1,0,1)$. Obtener la matriz de la aplicación f respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^3$ y obtener $f(1,2,1)$.

a) a1) $\operatorname{Im} f = L\{f(1,0,0), f(0,1,0), f(0,0,1)\} = L\{(1,1,0,0), (0,1,0,0), (-1,0,1,1)\}$

$$\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&0\\-1&0&1&1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&0\\0&1&1&1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&1\end{pmatrix} \Rightarrow B_{\operatorname{Im} f} = \left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$$

$\Rightarrow \dim \operatorname{Im} f = 3$ y $\dim \ker f = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \operatorname{Im} f = 3-3 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \ker f = \{(0,0,0)\} \Rightarrow f$ Monomorfismo

Como $\dim \operatorname{Im} f \neq 4 \Rightarrow \operatorname{Im} f \neq \mathbb{R}^4 \Rightarrow f$ No Epimorfismo y no isomorfismo.

a2) $f^{-1}\left(L\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}\right) = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;/\; f(x,y,z) = \lambda\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$

$$\Rightarrow f(x,y,z) = \begin{pmatrix}x-z\\x+y\\z\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\\lambda\\0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l}x-z=0\\x+y-\lambda=0\\z=0\end{array} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l}x=0\\y=\lambda\\z=0\end{array}} \quad \lambda=\lambda$$

Por tanto, $f^{-1}\left(L\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}\right) = L\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$

b)
$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&0&f(1,1,0)\\0&1&0&f(0,1,0)\\0&1&-1&f(0,1,-1)\end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&1&-1&0\\0&1&0&0&1&1\\0&1&-1&1&0&1\end{array}\right) \xrightarrow{F_3-F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&1&-1&0\\0&1&0&0&1&1\\0&0&-1&1&-1&0\end{array}\right) \to$$

$$\xrightarrow[-F_3]{F_1-F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&-2&-1\\0&1&0&0&1&1\\0&0&1&-1&1&0\end{array}\right) \Rightarrow M(f, B_c^{\mathbb{R}^3}, B_c^{\mathbb{R}^3}) = \begin{pmatrix}1&0&-1\\-2&1&1\\-1&1&0\end{pmatrix} \Rightarrow f(x,y,z) = \begin{pmatrix}1&0&-1\\-2&1&1\\-1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

Luego $f(1,2,1) = \begin{pmatrix}1&0&-1\\-2&1&1\\-1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$