RELACIONES DE ORDEN

Definiciones

- Una relación R en un conjunto A es una relación de orden si verifica las propiedades reflexiva, antisimétrica y transitiva.
- Un conjunto parcialmente ordenado (A, R) es un par formado por un conjunto A y una relación de orden R definida en él.
- Los elementos a y b del conjunto ordenado (A, R) se dicen comparables si a R b o b R a.
- (A, R) es un conjunto totalmente ordenado si dos elementos cualesquiera de A son comparables.

Ejemplos

1) (N, $\leq$) es un conjunto totalmente ordenado.

$$a \leq b \iff \text{existe } n \in \mathrm{N} \cup \{0\} \text{ tal que } b = a + n$$

2) (N, $\mid$), donde $\mid$ indica la relación de divisibilidad, es un conjunto parcialmente ordenado.

$$a \mid b \iff \text{existe } n \in \mathrm{N} \text{ tal que } b = a\, n$$

3) Sea $\mathrm{D}_n = \{ z \in \mathrm{N} \,/\, z \text{ divide a } n \}$

(D_n, $\mid$), donde $\mid$ indica la relación de divisibilidad, es un conjunto parcialmente ordenado.

4) ($\wp$(S), $\subseteq$) es un conjunto parcialmente ordenado.

DIAGRAMAS DE HASSE

(Helmut Hasse, 1898 – 1979)

1. El diagrama de Hasse de un conjunto ordenado finito es una representación del mismo en la que cada elemento se representa por un punto del plano.
2. Si a R b se dibuja a por debajo de b y se une a con b por medio de un segmento.
3. Finalmente se suprimen los segmentos que corresponden a la propiedad transitiva, es decir, si a R b y b R c se suprime el segmento correspondiente a a R c.

ELEMENTOS CARACTERÍSTICOS

Sea (A, $\leq$) un conjunto ordenado.

- $m \in$ A es maximal de A si no existe $x \in$ A tal que $m < x$.
- $m \in$ A es minimal de A si no existe $x \in$ A tal que $x < m$.
- $m \in$ A es máximo de A si $\forall\, x \in$ A, $x \leq m$.
- $m \in$ A es mínimo de A si $\forall\, x \in$ A, $m \leq x$.

El máximo de A, se nota I y se llama elemento unidad.

El mínimo de A, se nota O y se llama elemento cero.

Sea S un subconjunto no vacío del conjunto ordenado (A, $\leq$).

- $c \in$ A es cota superior de S si $\forall\, x \in$ S, $x \leq c$.
- $c \in$ A es cota inferior de S si $\forall\, x \in$ S, $c \leq x$.
- S está acotado si tiene una cota superior y una cota inferior.
- $s \in$ A es supremo (o mínima cota superior) de S si es cota superior de S y $\forall$ cota superior c de S se tiene que $s \leq c$.
- $i \in$ A es ínfimo (o máxima cota inferior) de S si es cota inferior de S y $\forall$ cota inferior c de S se tiene que $c \leq i$.

Ejercicio

Representar el diagrama de Hasse del conjunto ordenado $(D_{48}, |)$ y hallar los maximales y minimales, las cotas superiores e inferiores, el supremo, el ínfimo, el máximo y el mínimo (si los hay) del subconjunto $A = \{2, 3, 4, 6, 12\}$ en el conjunto ordenado $(D_{48},|)$.

Solución

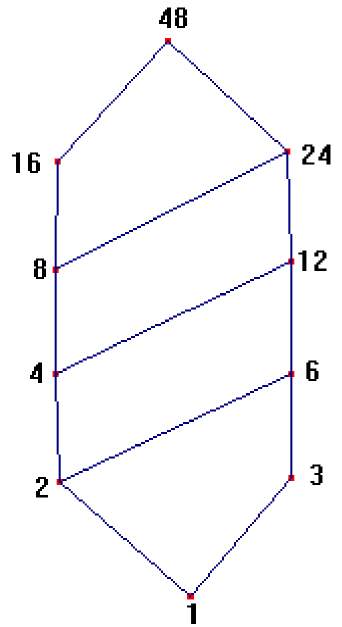
cotas superiores de $A = \{12, 24, 48\}$

cota inferior de $A = \{1\}$

supremo de $A = \{12\}$, ínfimo de $A = \{1\}$

maximal de $A = \{12\}$, minimales de $A = \{2, 3\}$

máximo de $A = \{12\}$ y no existe mínimo de A.



Definición

Si (A, R) y (B, S) son dos conjuntos ordenados, en el conjunto producto $A \times B$ se pueden definir dos relaciones de orden:

- Orden producto: $(a, b)\ Prod\ (c, d) \Leftrightarrow a \mathrm{R} c \ \text{ y } \ b \mathrm{S} d$
- Orden lexicográfico:

$$(a, b)\ Lex\ (c, d) \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq c \ \text{ y } \ a \mathrm{R} c \\ a = c \ \text{ y } \ b \mathrm{S} d. \end{cases}$$

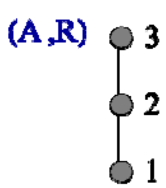
Si (A, R) y (B, S) son dos conjuntos totalmente ordenados,

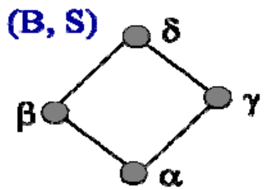
- $(A \times B, Lex)$ es totalmente ordenado.
- $(A \times B, Prod)$ no es necesariamente totalmente ordenado.

Ejemplo

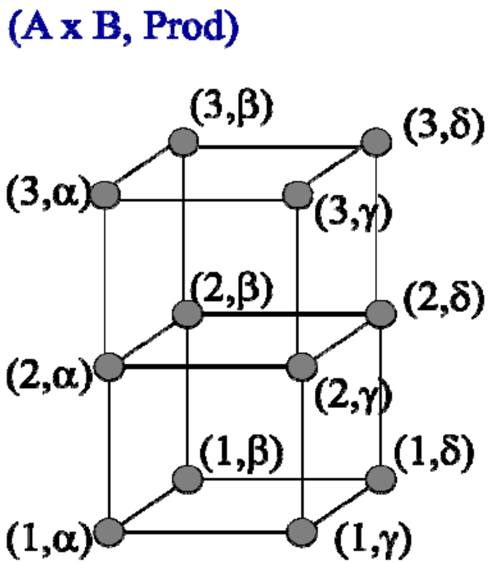
Sean $(A = \{1, 2, 3\}, R)$ y $(B = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}, S)$ conjuntos ordenados

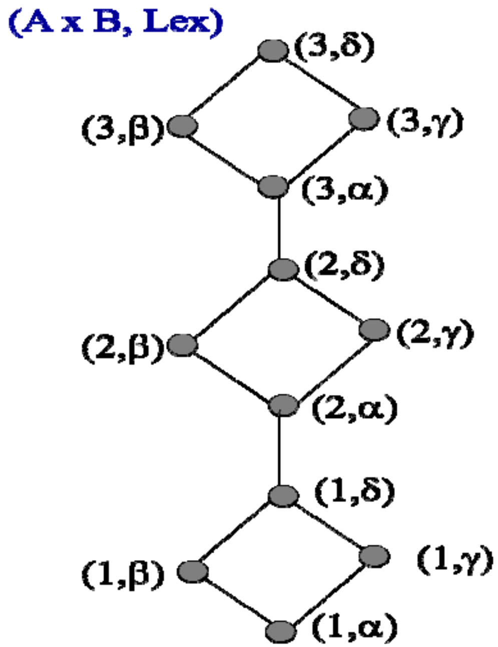
según los diagramas de Hasse siguientes





entonces





Ordenación topológica

Si $(A, \leq_P)$ es un conjunto finito ordenado, entonces existe un orden total $(A, \leq_T)$ que lo contiene, es decir, si $a \leq_P b$ entonces $a \leq_T b$.

Demostración

Sean

a_1 elemento minimal en A,

a_2 elemento minimal en $A - \{a_1\}$,

… ,

a_i minimal en $A - \{a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}\}$, …

Como A es finito, en un número finito de pasos se obtiene un orden total para los elementos de A:

$$a_1 \leq_T a_2 \leq_T \ldots \leq_T a_i \leq_T \ldots \leq_T a_n$$

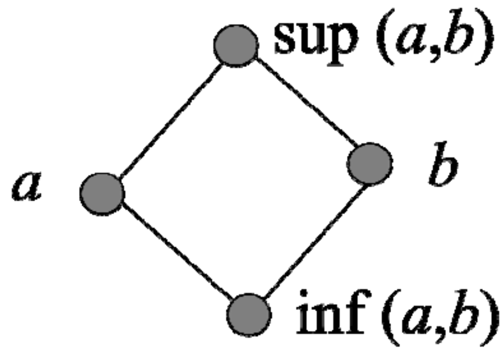
RETÍCULOS

Definición

A) Un conjunto ordenado $(L, \leq)$ es un retículo si

para todo par de elementos $a, b \in L$ existen

$sup\,\{a, b\} \in L$ e $inf\,\{a, b\} \in L$.



Ejemplos

1) $(\mathrm{N}, \leq)$ es un retículo.

$$Sup_{\leq}\{a, b\} = máx\,\{a, b\} \qquad inf_{\leq}\{a, b\} = mín\,\{a, b\}$$

2) $(\mathrm{N}, \mid)$, donde $\mid$ indica la relación de divisibilidad, es un retículo.

$$Sup_{\mid}\{a, b\} = mcm\,\{a, b\} \qquad inf_{\mid}\{a, b\} = mcd\,\{a, b\}$$

3) Sea $\mathrm{D}_n = \{ \mathrm{z} \in \mathrm{N} \,/\, \mathrm{z}$ divide a $n \}$

$(\mathrm{D}_n, \mid)$, donde $\mid$ indica la relación de divisibilidad, es un retículo.

$$Sup_{\mid}\{a, b\} = mcm\,\{a, b\} \qquad inf_{\mid}\{a, b\} = mcd\,\{a, b\}$$

4) $(\wp(\mathrm{S}), \subseteq)$ es un retículo.

$$Sup_{\subseteq}\{\mathrm{A}, \mathrm{B}\} = \mathrm{A} \cup \mathrm{B} \qquad inf_{\subseteq}\{\mathrm{A}, \mathrm{B}\} = \mathrm{A} \cap \mathrm{B}$$

5) Si (A, R) y (B, S) son retículos, entonces

❖ (A × B, *Prod*) es retículo

$$sup_{\,Prod} \{(a, b), (c, d)\} = (sup_{\mathrm{R}} \{ a, c \}, sup_{\mathrm{S}} \{ b, d \})$$

$$inf_{\,Prod} \{(a, b), (c, d)\} = (inf_{\mathrm{R}} \{ a, c \}, inf_{\mathrm{S}} \{ b, d \})$$

❖ (A × B, *Lex*) es retículo

$$sup_{\,Lex} \{(a, b), (c, d)\} = \begin{cases} (sup_{\mathrm{R}} \{ a, c \}, inf_{\mathrm{S}} \{ b, d \}), & \text{si } a \neq c \\ (a,\ sup_{\mathrm{S}} \{ b, d \}), & \text{si } a = c \end{cases}$$

$$inf_{\,Lex} \{(a, b), (c, d)\} = \begin{cases} (inf_{\mathrm{R}} \{ a, c \}, sup_{\mathrm{S}} \{ b, d \}), & \text{si } a \neq c \\ (a,\ inf_{\mathrm{S}} \{ b, d \}), & \text{si } a = c \end{cases}$$

Definición

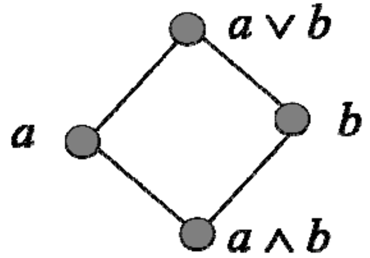
B) Un retículo es una terna $(L, \vee, \wedge)$ donde L es un conjunto y $\vee, \wedge$ son dos operaciones binarias definidas en L que cumplen las siguientes propiedades:

1. idempotente : $a \vee a = a$, $a \wedge a = a$
2. conmutativa : $a \vee b = b \vee a$, $a \wedge b = b \wedge a$
3. asociativa : $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$, $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$
4. absorción : $a \vee (a \wedge b) = a$, $a \wedge (a \vee b) = a$.

Proposición

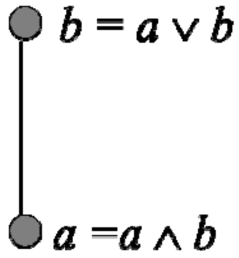
❖ Las dos definiciones anteriores son equivalentes:

$$a \vee b = sup \{ a, b \} \qquad\qquad a \wedge b = inf \{ a, b \}$$



❖ La relación entre las operaciones y el orden es:

$$a \leq b \quad \Leftrightarrow \quad a \vee b = b \quad \Leftrightarrow \quad a \wedge b = a$$



Definiciones

- Un retículo L es acotado si posee elemento máximo y mínimo.

  Se designa por 1 al elemento máximo y por 0 al mínimo.

  1 es el elemento neutro para $\wedge$: $x \wedge 1 = x, \ \forall x \in L$

  0 es el elemento neutro para $\vee$: $x \vee 0 = x, \ \forall x \in L$

- Un retículo $(L, \vee, \wedge)$ es distributivo si $\forall a, b, c \in L$ se cumple:

$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$$

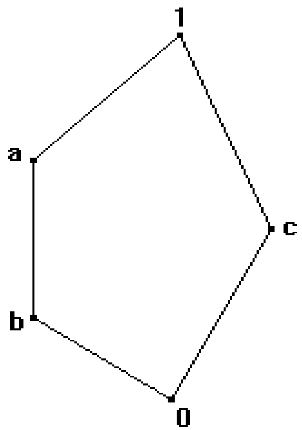
$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$$

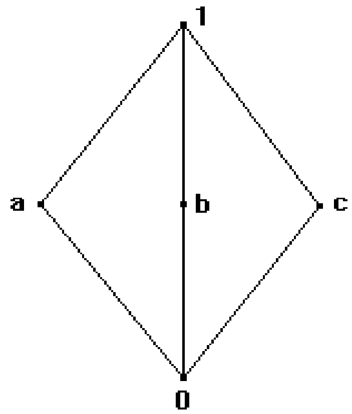
Ejemplos

1) $(D_n, \mid)$ es retículo acotado y distributivo $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

2) Los siguientes retículos acotados no son distributivos ya que

$$a \wedge (b \vee c) \neq (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$$





Teorema

Un retículo $(L, \vee, \wedge)$ es no distributivo si y sólo si contiene a uno de los dos retículos del ejemplo anterior 2).

Definiciones

- Sea $(L, \vee, \wedge)$ un retículo acotado.

  $\forall\, a \in L$ se dice que $a' \in L$ es complementario de a si

$$a \vee a' = 1 \qquad\qquad a \wedge a' = 0$$

- Un retículo acotado L es complementario si todos sus elementos poseen complementario.

Ejemplos

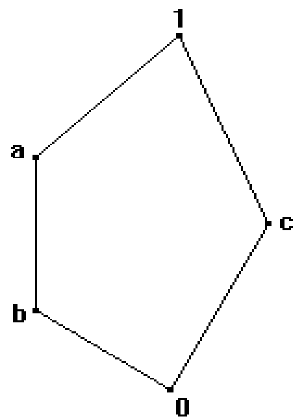
1) $(\wp(S), \subseteq)$ es retículo acotado, distributivo y complementario.

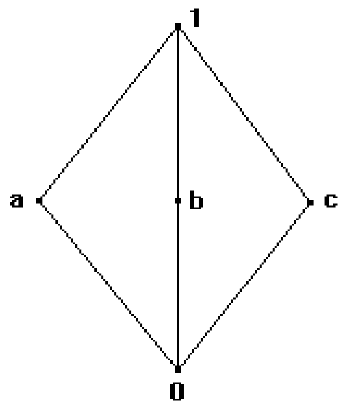
2) $(B^n=\{0,\ 1\}^n,\ \leq_{PROD})$ es retículo acotado, distributivo y complementario.

3) $(D_{30}, \mid)$ es retículo acotado, distributivo y complementario.

4) $(D_{20}, \mid)$ es acotado y distributivo, pero no es complementario.

5) Los siguientes retículos acotados, no distributivos, son complementarios, pero el complementario del elemento c no es único.





$$a' = c, \;\; b' = c, \;\; c' = \begin{cases} a \\ b \end{cases}$$

$$a' = \begin{cases} b \\ c \end{cases}, \;\; b' = \begin{cases} a \\ c \end{cases}, \;\; c' = \begin{cases} a \\ b \end{cases}$$

Teorema

Sea $(L, \vee, \wedge)$ un retículo acotado y distributivo.
El complementario de cada elemento, si existe, es único.

Definición

Un álgebra de Boole es un retículo acotado, distributivo y complementario.

- George Boole (1815 – 1864), en *"Las leyes de la verdad"* (1854) utiliza el álgebra para tratar expresiones de lógica proposicional.
- Claude Shannon (1916 – 2001), en su tesis doctoral demostró cómo utilizar las leyes de la lógica para diseñar circuitos (1938).