## Los números complejos.

 $\mathbb{C}$  es  $\mathbb{R}^2$  con las operaciones:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

$$a(x_1, y_1) = (ax_1, ay_1), a \in \mathbb{R}$$

$$(x_1, y_1).(x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + y_1x_2)$$

Los puntos (0, y) integran el eje imaginario y los puntos (x, 0)el eje real.

Notaciones:  $(x,0) \simeq x; (0,1) \simeq i; (x,y) = x + iy.a^2 + b^2$ 

#### Observaciones:

- $-i^2 = -1$ , entonces (a + bi)(c + di) = (ac bd) + i(ad + bc)
- $-a + bi = c + di \iff a = c, b = d$
- $-z = a + bi, a = \operatorname{Re} z, b = \operatorname{Im} z$

- Si  $z \in \mathbb{C}$  es  $z \neq 0$ , entonces existe  $z^{-1} \in \mathbb{C}$  tal que  $z.z^{-1} = 1$ . Si z = a + bi, entonces  $z^{-1} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{ib}{a^2 + b^2}$ . Como consecuencia si  $w \neq 0$ , entonces  $\frac{z}{w} = z.w^{-1} \in \mathbb{C}$ .

## Propiedades.

Aditivas:

$$z + w = w + z$$

$$z + (w + s) = (z + w) + s$$

$$z + 0 = z$$

$$z + (-z) = 0$$

# Multiplicativas:

$$zw = wz$$

$$(zw)s = z(ws)$$

$$1z = z$$

$$zz^{-1} = 1 \text{ si } z \neq 0$$

Distributiva:

$$z(w+s) = zw + zs$$

Las propiedades anteriores nos permiten afirmar que  $\mathbb C$  es un cuerpo.

## Raices cuadradas.

Si  $z \in \mathbb{C}$ , entonces existe  $w \in \mathbb{C}$  tal que  $w^2 = z$ .

D) Sea z = a + bi. Planteamos la ecuación

$$w = x + iy \operatorname{con} (x + iy)^2 = a + bi$$

es decir,

$$x^2 - y^2 = a; 2xy = b$$

Elevando al cuadrado

$$(x^2 - y^2)^2 = a^2; 4x^2y^2 = b^2$$

de donde concluimos que

$$x^2 = \frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}$$

Si llamamos  $\alpha = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}$  y  $\beta = \sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}$  resulta:

Si b > 0, entonces  $x = \alpha$  e  $y = \beta$  o  $x = -\alpha$  e  $y = -\beta$ 

Si b < 0, entonces  $x = \alpha$  e  $y = -\beta$  o  $x = -\alpha$  e  $y = \beta$ 

#### Corolario.

Toda ecuación del tipo  $az^2 + bz + c = 0$ , con  $a, b, c \in \mathbb{C}$  tiene soluciones

 $z = \frac{\left[ -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac} \right]}{2a}$ 

**Observación:**  $\mathbb{C}$  es el "más pequeño" de los cuerpos que contienen a  $\mathbb{R}$  y en los que toda ecuación cuadrática tiene solución.

Representación polar.

Si z = a + bi, llamaremos módulo de z al número real  $|z| = r = \sqrt{a^2 + b^2}$ .

Si  $\theta$  es el ángulo entre el vector z y el eje real positivo, que llamaremos argumento de z,  $0 \le \theta < 2\pi$ , se verifica

 $a = r \cos \theta, b = r \sin \theta, a + bi = r(\cos \theta + i \sin \theta), \theta = \arg z,$  (representación polar).

#### **Observaciones:**

- Una vez fijado un intervalo [a,b) de longitud  $2\pi$ , cada z tiene un único argumento perteneciente a ese intervalo.
  - $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$ y  $\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$  (\*) ya que

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 \begin{pmatrix} [\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2] + \\ i [\cos \theta_1 \sin \theta_2 + \cos \theta_2 \sin \theta_1] \end{pmatrix} =$$
$$= r_1 r_2 (\cos (\theta_1 + \theta_2) + i \sin (\theta_1 + \theta_2))$$

 $(\star)$  Si  $\arg(z_1) + \arg(z_2)$  se va fuera del intervalo asignado para los argumentos, tenemos que ajustar  $\arg(z_1) + \arg(z_2)$  a través de un múltiplo de  $2\pi$  para hacer caer el argumento del producto dentro del intervalo asignado.

# Ejemplo.

Intervalo elegido  $[0, 2\pi)$ .  $z_1 = -1$ ;  $z_2 = -i$ ; arg  $z_1 = \pi$ ; arg  $z_2 = \frac{3\pi}{2}$ ;  $z_1 z_2 = i$ ; arg $(z_1 z_2) = \frac{\pi}{2}$  y arg $(z_1) + \arg(z_2) = 2\pi + \frac{\pi}{2}$  Luego escribiremos:

$$\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) \pmod{2\pi}.$$

#### Fórmula de Moivre.

Si  $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$  y  $n \in \mathbb{N}$ , entonces  $z^n = r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta)$ 

D) Es inmediata por inducción.

#### Raices n-ésimas.

Dado  $w \in \mathbb{C}$  se trata de resolver la ecuación  $z^n = w$ . Si  $w = r(\cos \theta + i \sin \theta)$  y  $z = \rho(\cos \psi + i \sin \psi)$ , entonces

$$z^n = \rho^n(\cos n\psi + i\sin n\psi)$$
;  $\rho^n = r = |w|$ ;  $n\psi = \theta + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ 

.Entonces

$$z = \sqrt[n]{r} \left[ \cos \left( \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n} \right) + i \sin \left( \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n} \right) \right]$$

Cada valor de k da un valor de z, tenemos n-raices asociadas a los valores de k=0,1,2,...,(n-1).

Ejemplo.

Si  $z^3 = 1$ , obtenemos  $z_1 = 1$ ;  $z_2 = -1/2 + i\sqrt{3}/2$ ;  $z_3 = -1/2 - i\sqrt{3}/2$ . Tres raices "uniformemente distribuidas" en el círculo unidad.

# Conjugación.

Si z = a + bi, definimos  $\overline{z} = a - bi$  (conjugado de z)

#### Propiedades.

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$$

$$\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}.\overline{z_2}$$

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} \text{ si } z_2 \neq 0$$

$$z\overline{z} = |z|^2. \text{ Luego si } z \neq 0, z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$$

$$z = \overline{z} \iff z \in \mathbb{R}$$

$$\operatorname{Re} z = \frac{z + \overline{z}}{2}; \operatorname{Im} z = \frac{z - \overline{z}}{2i}; \overline{z} = z$$

Propiedades del módulo.

(i) 
$$|zz'| = |z| |z'|$$
  
(ii) Si  $z \neq 0$ , entonces  $|z/z'| = |z| / |z'|$   
(iii)  $-|z| \leq \text{Re } z \leq |z|$ ;  
 $-|z| \leq \text{Im } z \leq |z|$ ;  
 $|\text{Re } z| \leq |z|$ ;  $|\text{Im } z| \leq |z|$   
(iv)  $|z| = |\overline{z}|$   
(v)  $|z + z'| \leq |z| + |z'|$ ;  
 $||z| - |z'|| \leq |z - z'|$  (1)

$$(vi) |z_1w_1 + \dots z_nw_n| \le \sqrt{|z_1|^2 + \dots + |z_n|^2} \cdot \sqrt{|w_1|^2 + \dots + |w_n|^2}$$

Desigualdad de Cauchy-Schwarz.

D) Todas las demostraciones son triviales excepto la (v) y la (vi).

Prueba de (v).

$$|z + z'|^2 = (z + z')\overline{(z + z')} = |z|^2 + |z'|^2 + 2\operatorname{Re}(zz') \le$$
  
  $\le |z|^2 + 2|z||z'| + |z'|^2 = (|z| + |z'|)^2$ 

Por otra parte

$$|z| = |z - z' + z'| \le |z'| + |z - z'|$$
  
 $|z'| = |z' - z + z| \le |z| + |z - z'|$ 

Luego

$$||z| - |z'|| \le |z - z'|$$

Prueba de (vi).

Supongamos que no todos los  $w_k$  son cero. Sea

$$v = \sum_{k=1}^{n} |z_k|^2; t = \sum_{k=1}^{n} |w_k|^2 \text{ y } s = \sum_{k=1}^{n} z_k w_k$$

Consideremos

$$c = \frac{z_1 w_1 + \dots + z_n w_n}{|w_1|^2 + \dots + |w_n|^2} = \frac{s}{t}$$

Desarrollando la expresión

$$\sum_{k=1}^{n} |z_k - c\overline{w_k}|^2 \ge 0$$

obtenemos

$$\sum_{k=1}^{n} |z_k - c\overline{w_k}|^2 = v + |c|^2 t - c \sum_{k=1}^{n} \overline{z_k w_k} - \overline{c} \sum_{k=1}^{n} z_k w_k =$$

$$= v + |c|^2 t - 2 \operatorname{Re}(\overline{c}s) = v + \frac{|s|^2}{t} - 2 \operatorname{Re}(\overline{s}s)$$

.Teniendo en cuenta que

$$\overline{s}s = |s|^2 \in \mathbb{R},$$

obtenemos

$$v + \frac{|s|^2}{t} - 2\frac{|s|^2}{t} = v - \frac{|s|^2}{t} \ge 0,$$

es decir

$$|s|^2 \le vt$$

con lo que concluimos la prueba.

#### Métrica en $\mathbb{C}$ .

La función d(z,w) = |z-w| es una distancia en  $\mathbb{C}$ . Esta métrica origina la topología usual y ya es conocido para todos nosotros el manejo de los conceptos de convergencia de sucesiones, límites de funciones definidas en dominios de  $\mathbb{C}$ , continuidad, compacidad etc.

La completitud de  $\mathbb{C}$  con esta métrica es obvia ya que se deduce de la propia completitud de  $\mathbb{R}$  si tenemos en cuenta que:

 $(z_n)$  converge en  $\mathbb{C} \iff \operatorname{Re} z_n$  e  $\operatorname{Im} z_n$  convergen en  $\mathbb{R}$ .

En caso de convergencia

 $\lim_{n} z_n = \lim_{n} \operatorname{Re} z_n + i \lim_{n} \operatorname{Im} z_n.$ 

# Compacidad.

 $(\mathbb{C}, d)$  es un espacio métrico. Luego un subconjunto K es compacto si, y sólo si, toda sucesión de elementos de K admite una subsucesión convergente hacia un punto de K.

Es importante, ya que lo manejaremos frecuentemente, recordar que en  $\mathbb{C}$  un subconjunto K es compacto si, y sólo si, K es cerrado y acotado.

Además, y como corolario, tenemos el siguiente resultado:

#### Teorema de Bolzano-Weierstrass.

Cada sucesión acotada de números complejos admite una subsucesión convergente.

## Compactificación del plano complejo. El plano ampliado.

 $(\mathbb{C},d)$  es un espacio métrico completo pero no es compacto. Vamos a proceder a compactificarlo.

Sea  $\sum$  la esfera de Riemann, es decir,

$$\sum = \left\{ (x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + x_2^2 + \left( x_3 - \frac{1}{2} \right)^2 = \left( \frac{1}{2} \right)^2 \right\} \subset \mathbb{R}^3.$$

La proyección estereográfica (x, y, 0) del punto  $(x_1, x_2, x_3) \neq$ (0,0,1) de la esfera es:

$$x = \frac{x_1}{1 - x_3}, y = \frac{x_2}{1 - x_3}.$$

Esta proyección es una aplicación biyectiva entre  $\sum \setminus \{(0,0,1)\}$ 

y C. (Hacer el dibujo correspondiente). Una sucesión  $(x_{1n}, x_{2n}, x_{3n})$  en  $\sum \setminus \{(0, 0, 1)\}$  converge hacia (0, 0, 1), en la métrica usual de  $\mathbb{R}^3$  si, y sólo si, la sucesión de proyecciones  $z_n$  en  $\mathbb{C}$  verifica  $|z_n| \longrightarrow \infty$ .

Extendemos la proyección estreográfica haciendo corresponder al punto (0,0,1) el punto  $\infty$  que anadimos a  $\mathbb{C}$ . Obtenemos así el plano ampliado  $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ . La topología de  $\widehat{\mathbb{C}}$  viene descrita a través de las bases de entornos de cada uno de sus puntos. Las bases de entornos de los puntos  $z \in \mathbb{C}$  son lasmismas que en  $(\mathbb{C}, d)$ . es decir, discos de la forma  $\{D(z, r) : r > 0\}$ . La base de entornos de  $\infty$  es  $\{D(\infty,r): r>0\}$  donde  $D(\infty,r)=$   $\{z \in \mathbb{C} : |z| > r\} \cup \{\infty\}$ . Ahora ya damos sentido a expresiones del tipo:

$$(z_n) \subset \widehat{\mathbb{C}} \text{ con } (z_n) \longrightarrow \infty$$

$$\lim_{z \longrightarrow \infty} f(z) \text{ para funciones } f : \widehat{\mathbb{C}} \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}$$

#### Observación.

Si en la proyección anterior

$$(x_1, x_2, x_3) \longleftrightarrow z$$
  
 $(x'_1, x'_2, x'_3) \longleftrightarrow z'$ 

definimos  $\widehat{d}(z, z')$  =distancia euclídea entre  $(x_1, x_2, x_3)$  y  $(x'_1, x'_2, x'_3)$ , resulta que  $\widehat{d} \mid_{\mathbb{C}}$ es una métrica equivalente a d y

 $(\widehat{\mathbb{C}}, \widehat{d})$  es un espacio métrico completo y compacto.

#### Repaso sobre convergencia de sucesiones y series.

Recordemos las siguientes definiciones, conceptos y relaciones:

Vamos a considerar siempre sucesiones y series de números complejos.

Def.-

$$(z_n) \longrightarrow z \iff_{def} \forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : n \ge N \implies |z_n - z| < \epsilon$$

Def.-

$$\sum_{k=1}^{\infty} z_k \text{ es convergente} \iff_{def} \exists s \in \mathbb{C} : (s_n) = (\sum_{k=1}^n z_k) \longrightarrow s$$

En este caso escribiremos

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = s$$

Def.-

$$(z_n)$$
 es de Cauchy  $\iff_{def} \forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : p, q \geq N \implies |z_p - z_q| < \epsilon.$ 

Otra forma de escribir lo anterior es:

$$(z_n)$$
 es de Cauchy  $\iff_{def}$ 

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : n \ge N \Longrightarrow \forall p = 0, 1, 2, ..., |z_n - z_{n+p}| < \epsilon.$$

La completitud de  $\mathbb{C}$  nos permite afirmar:

$$(z_n)$$
 es convergente  $\iff$   $(z_n)$  es de Cauchy

# Criterio de Cauchy:

$$\sum_{k=1}^{\infty} z_k \ es \ convergente \iff$$

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : n \geq N \Longrightarrow \forall p = 1, 2, ..., \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} z_k \right| < \epsilon$$

## Convergencia absoluta.

Def.-

$$\sum_{k=1}^{\infty} z_k$$
 converge absolutamente si  $\sum_{k=1}^{\infty} |z_k|$  es convergente

## El Criterio de Cauchy nos dice que

## Convergencia absoluta ⇒ Convergencia

## Modos de convergencia en teoría de funciones.

En los próximos capítulos veremos como los procesos de límite nos permiten obtener nuevas funciones holomorfas además de los polinomios y funciones racionales.

En este capítulo vamos a considerar siempre  $X \subset \mathbb{C}$ , no vacío, y  $(f_n)$  una sucesión de funciones definidas en X con valores en  $\mathbb{C}$ .

#### Convergencia puntual.

Def.-

$$(f_n)$$
 converge puntualmente en  $A \subset X$  si  $\forall z \in A, \exists \lim_n (f_n(z))$ 

En este caso la función límite puntual es

$$f(z) := \lim_{n} (f_n(z)), z \in A$$

**Observación**. Incluso en funciones reales, la convergencia puntual no garantiza buenas propiedades en la función límite. Por ejemplo  $(x^n) \longrightarrow f(x)$  en [0,1], donde f(x) = 0, si  $x \in [0,1)$  y f(x) = 1 si x = 1. (f es discontinua). A pesar de esto, "No conocemos ninguna sucesión simple de

A pesar de esto, "No conocemos ninguna sucesión simple de funciones holomorfas en el disco unidad U que sea puntualmente convergente a una función no holomorfa en U ".(Tales funciones pueden construirse utilizando el Teorema de Runge que nosotros no veremos en este curso).

# Convergencia uniforme.

$$(f_n) \longrightarrow f$$
 uniformemente en  $A \subset X, f : A \longrightarrow \mathbb{C} \iff_{def} \forall \epsilon > 0, \exists N = N(\epsilon) \in \mathbb{N} : |f_n(z) - f(z)| < \epsilon, \forall n \geq N, \forall z \in A$ 

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_k \text{ converge uniformemente en } A \subset X \iff_{def}$$

$$(s_n) = \left(\sum_{k=0}^n f_k\right)$$
 converge uniformemente en  $A$ 

Notaciones: En lo sucesivo será de mucha utilidad utilizar las siguientes notaciones:

$$|f|_A := Sup\{|f(z)| : z \in A\}$$

Si consideramos V el espacio vectorial, sobre  $\mathbb{C}$ , definido por:

$$V := \{ f : X \longrightarrow \mathbb{C} : |f|_A < \infty \}$$

se verifican las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned} |f|_A &=& 0 \Longleftrightarrow f \mid_A = 0 \\ |cf|_A &=& |c| \mid f \mid_A, c \in \mathbb{C} \\ |f+g|_A &\leq& |f|_A + |g|_A \end{aligned}$$

Con esta notación

$$(f_n) \longrightarrow f$$
 uniformemente en  $A \iff \lim_n |f_n - f|_A = 0$ 

## Propiedades.

Si 
$$(f_n)$$
 y  $(g_n)$  conv. unif. en  $A$ , entonces
$$\forall a, b \in \mathbb{C}, (af_n + bg_n) \longrightarrow_{unif.enA} \left(a \lim_n f_n + b \lim_n g_n\right)$$

Si  $(f_n)$  y  $(g_n)$  conv. unif. en A y  $\lim_n f_n$ ,  $\lim_n g_n$  estan acotadas en A, entonces

$$\lim(f_ng_n) = \left(\lim_n f_n\right) \left(\lim_n g_n\right)$$
 uniformemente en A.

Observación.- Si  $(f_n) \subset C(X)$  y  $(f_n) \longrightarrow f$  uniformemente en X, entonces  $f \in C(X)$ .

## Criterios de Cauchy.

 $(f_n)$ converge uniformemente en  $A \iff$ 

 $(f_n)$  es uniformemente de Cauchy en A, es decir,

$$\forall \epsilon > 0, \exists N = N(\epsilon) \in \mathbb{N} : |f_n - f_m|_A < \epsilon, \forall m, n \ge N$$

Para series tendríamos:

$$\sum (f_n)$$
 converge uniformemente en  $A \Leftrightarrow$ 

$$\forall \epsilon > 0, \exists N = N(\epsilon) \in \mathbb{N} : |f_{m+1}(z) + \dots + f_n(z)| < \epsilon, \forall n > m \ge N, \forall z \in A$$

#### Criterio M-Weierstrass.

Supongamos que existe  $(M_n) \subset \mathbb{R}$ ,  $M_n \geq 0$  tal que  $|f_n|_A \leq M_n$  y  $\sum M_n < \infty$ . Entonces  $\sum (f_n)$  converge uniformemente en A.

D) Veamos que  $\sum (f_n)$  satisface el criterio de Cauchy en sentido uniforme.

$$\forall n > m, \forall z \in A, \left| \sum_{m+1}^{n} f_k(z) \right| \le \sum_{m+1}^{n} |f_k(z)| \le \sum_{m+1}^{n} M_k$$

Por otro lado la condición  $\sum M_n < \infty$ , nos dice que

$$\forall \epsilon > 0, \exists N = N(\epsilon) \in \mathbb{N} : \sum_{m+1}^{n} M_k < \epsilon, \forall n > m \ge N, \forall z \in A$$

es decir  $\sum (f_n)$  converge uniformemente en A.

#### Observación.

En las condiciopnes del Criterio M-Weierstrass, es obvio que la serie  $\sum (f_n)$  converge absolutamente en A, en el sentido de que  $\forall z \in A, \sum_{n=0}^{\infty} |f_n(z)|$  es convergente.

Def.  $\sum (f_n)$  converge normalmente en X si para todo compacto  $K \subset X$  se verifica:  $\sum |f_n|_K < \infty$ .

Si  $X = B(z_0; r)$  en  $\mathbb{C}$ , cada compacto  $K \subset X$  esta incluído en  $B(z_0; s)$  para algún s con s < r. Luego en este caso  $\sum (f_n)$  converge normalmente en X si, y solo si, para cada s con 0 < s < r se verifica  $\sum |f_n|_{B(z_0; s)} < \infty$ .

#### Convergencia uniforme sobre compactos.

 $(f_n)$  converge uniformemente sobre los compactos de  $X \iff_{def}$ 

Para cada compacto  $K \subset X$  se verifica :  $(f_n)$ converge uniformemente en KAnálogo para series.

 $\sum (f_n)$  converge uniformemente sobre los compactos de  $X \iff_{def}$ 

Para cada compacto  $K \subset X$  se verifica :  $\sum (f_n)$  converge uniformemente en K

**Observación**. Si  $(f_n) \subset C(X)$ , la convergencia uniforme sobre compactos de X asegura, tanto en el caso de sucesiones como de series, la continuidad en X del límite.

**Observación**. El criterio M-Weierstrass nos dice que toda serie normalmente convergente en X converge uniformemente sobre los compactos de X.

Ejemplos.

La sucesión  $(z^n)$  converge en cada disco B(0;r), r < 1, uniformemente hacia la función cero ya que  $|z^n|_{B(0;r)} = r^n$ , pero la convergencia no es uniforme en el disco unidad  $U = \{z : |z| < 1\}$ . En efecto si  $0 < \epsilon < 1$ , para cada  $n \in \mathbb{N}$  existe un punto  $z_0$  en U, por ejemplo  $z_0 = \sqrt[n]{\epsilon}$ , tal que  $|z_0|^n \ge \epsilon$ .

Esta situación es muy común en la teoría de funciones holomorfas.

La serie  $g(z) = \sum \frac{z^n}{n}$  converge normalmente en el disco unidad U. En efecto si 0 < r < 1, entonces

$$\sum |f_n|_{B(0;r)} \le \sum \frac{r^n}{n} \le r^n < \infty$$

Esta serie no converge uniformemente en el disco unidad U. En efecto, en caso contrario la serie  $\sum \frac{x^n}{n}$  debería de converger uniformemente en [0,1). En este caso

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : n \geq N \Longrightarrow$$

$$\forall x \in [0,1) \text{ y } \forall p = 0, 1, 2, ..., \frac{x^n}{n} + ... + \frac{x^{n+p}}{n+p} < \epsilon$$

Por otro lado la divergencia de la serie

$$\frac{1}{N} + \frac{1}{N+1} + \dots$$

nos permite elegir un  $p \in \mathbb{N}$ :

$$\frac{1}{N} + \frac{1}{N+1} + \ldots + \frac{1}{N+p} > 2\epsilon$$

Entonces si tomamos un x próximo a 1 de modo que  $x^{N+p}>1/2$  , obtenemos

$$\frac{x^{N}}{N} + \dots + \frac{x^{N+p}}{N+p} > x^{N+p} \left(\frac{1}{N} + \frac{1}{N+1} + \dots + \frac{1}{N+p}\right) > \epsilon$$

Observación.

Si las series  $f = \sum (f_n), g = \sum (g_n)$  convergen normalmente en X, entonces la serie producto de Cauchy

$$\sum p_{\lambda}, \operatorname{con} \, p_{\lambda} = \sum_{\mu + \nu = \lambda} f_{\mu} g_{\nu}$$

converge normalmente en X a f.g. (Verlo)