JUEGOS CON n JUGADORES EN FORMA NORMAL

Juegos que pueden ser jugados por **más de dos jugadores**. A veces, la diferencia entre si el juego tiene dos o más jugadores es importante.

El teorema de determinación para juegos tipo Ajedrez **y el teorema de solución para juegos de suma cero con dos jugadores ya no se cumplen cuando hay tres jugadores** donde **uno de ellos j**uega el papel de **aguafiestas.**

Para juegos con más de tres jugadores, el concepto de simetría proporciona una simplificación útil. **Un juego simétrico** tiene el mismo aspecto para cada jugador; **a cada jugador le debe proporcionar la misma ganancia** (condición suficiente).

El juego La tragedia de los ejidos es una alegoría de los aspectos negativos de los cambios medioambientales globales. También es malo para los negocios, como muestra el juego La tragedia geotérmica de los ejidos.

Los experimentos de laboratorio son una forma interesante de mejorar el grado de entendimiento del comportamiento estratégico, y también producen sorpresas.

4.1.- Diferencias fundamentales con tres jugadores: El aguafiestas:

Cuando hay **tres jugadores, n=3**, en un juego, aparecen **diferencias** fundamentales.

Un resultado que **no se cumple para n=3** es **el teorema de determinación para juegos tipo Ajedrez** → Esto se puede demostrar mediante un contraejemplo, un ejemplo que contradice la generalización.

La figura 4.1. muestra un juego en forma extensiva, **el aguafiestas**:

- Tiene **información perfecta**.
- Los **jugadores juegan uno después del otro.**
- Es un juego en el que **se gana, se pierde o se empata**.
- Es **finito**.

- Tiene **tres jugadores,**
    - **el j1 y el j2** obtienen **ganancias** pero **no tienen nada que decidir.** Son **títeres estratégicos**;
    - **el j3** es el **único que tiene que escoger**, lo hace entre arriba y abajo **aun perdiendo en ambos casos→** a ambas situaciones se les asigna una flecha.

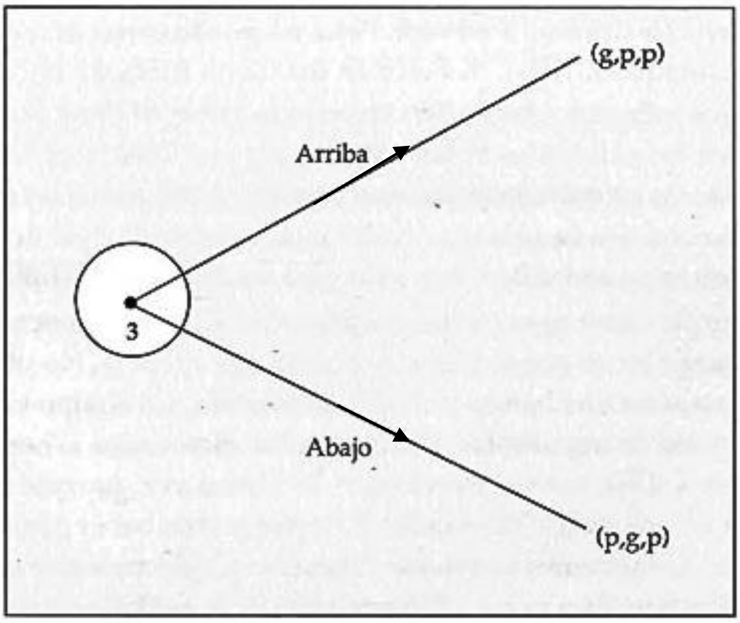


Figura 4.1. Juego de tres jugadores indeterminado.

- Los **vectores de ganancias**, u, son de la forma **u=(u1, u2, u3).**
- En esta situación el **juego** es **indeterminado:**
    - **el j1 podría ganar**: el j3 escoge arriba y el vector ganancias es:

u=(g, p, p)

    - el **j2 podría ganar**: el j3 escoge abajo y el vector ganancias es:

u=(p, g, p)

El contraejemplo de la figura 4.1. podría ser más complicado, haciendo que j1 y j2 tuvieran numerosas opciones. **Mientras** al final **el juego dependa de la determinación de j3 y las ganancias de su decisión sean (g, p, p)y (p, g, p), el juego es indeterminado.**

Otro resultado que no se puede generalizar a tres jugadores es **el teorema de solución para juegos de suma cero** con dos jugadores (sección 2.4.). **Cuando hay más de dos jugadores, un juego de suma cero en forma normal puede tener soluciones que no tengan el mismo valor.** Para conseguir el contraejemplo, necesitamos una consideración adicional: Como es habitual

j1 controla las filas de la matriz y

j2 las columnas;

j3 controla la matriz

→ el contraejemplo demuestra que el teorema de solución no se cumple para n=3:

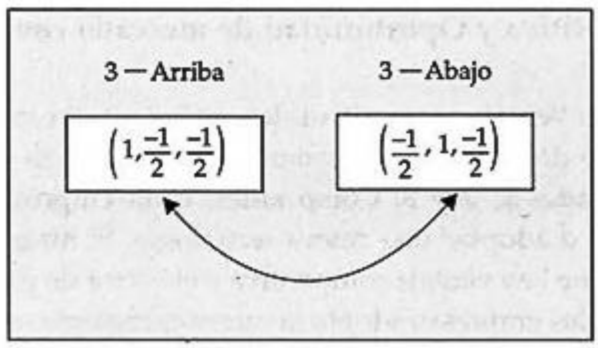


Figura 4.2. Múltiples soluciones, juego de suma cero con tres jugadores.

Sea la utilidad de ganar igual a 1 y

sea la utilidad de perder igual a -1/2.

*Como los jugadores **j1 y j2 son títeres estratégicos, la matriz del juego es 1x1.***

*El **j3 elige entre la matriz de la izquierda, opción arriba, y la matriz derecha, opción abajo.***

*El **j3 es indiferente entre ambas opciones (flecha bidireccional** entre ambas matrices); pierde haga lo que haga.*

Tenemos dos soluciones con valores muy diferentes, $(1, -1/2, -1/2)$ y $(-1/2, 1, -1/2)$.

*El **j3, al maximizar su utilidad, puede estar a la vez maximizando o minimizando la utilidad del j1, solo porque el j2 está presente**.*

En política, **un jugador es aguafiestas si no puede ganar pero si determinar quién gana.** Algo **imposible en una campaña con solo dos candidatos**.

En deportes, entre dos equipos se puede ganar, perder o empatar. Pero **en una liga entre equipos, un equipo sin posibilidades puede jugar el papel de aguafiestas.**

Cuando no hay aguafiestas, los resultados de los juegos con dos jugadores también se cumplen para juegos con tres jugadores. Esto se cumple en Ventaja Competitiva y en Oportunidad de Mercado.

4.2.- <u>**Ventaja Competitiva y Oportunidad de Mercado:**</u>

En el juego <u>**Ventaja Competitiva**</u> **pueden haber más de dos empresas**.

Sean j1, j2 y j3, tres empresas que han de elegir **quedarse como están o adoptar una tecnología nueva.**

- **Si ninguna cambia, o si las tres adoptan la nueva tecnología, no hay ventaja competitiva** → el **vector ganancias** es **(0, 0, 0)**

- **Si una adopta la nueva tecnología**, obtendrá una **ventaja competitiva, a**, frente a las otras y las **otras dos quedarán en desventaja -a/2 cada una**→ si lo hace **la primera, es como si se apropiara de la cuota de mercado de las otras dos:**

    Si j1 la adopta→ matriz (a, -a/2, -a/2)
    Si j2→ (-a/2, a, -a/2)
    Si j3→(-a/2, -a/2, a)

- **Si la adoptan dos empresas, ambas se repartirán la ventaja, a/2 cada una,** y **la otra perderá exactamente a:**

    Si adoptan j1 y j2→ (a/2, a/2,-a)
    Si j1 y j3→ (a/2, -a, a/2)
    Si j2 y j3→ (-a, a/2, a/2)

La forma normal de ventaja competitiva con tres jugadores es la figura 4.3:

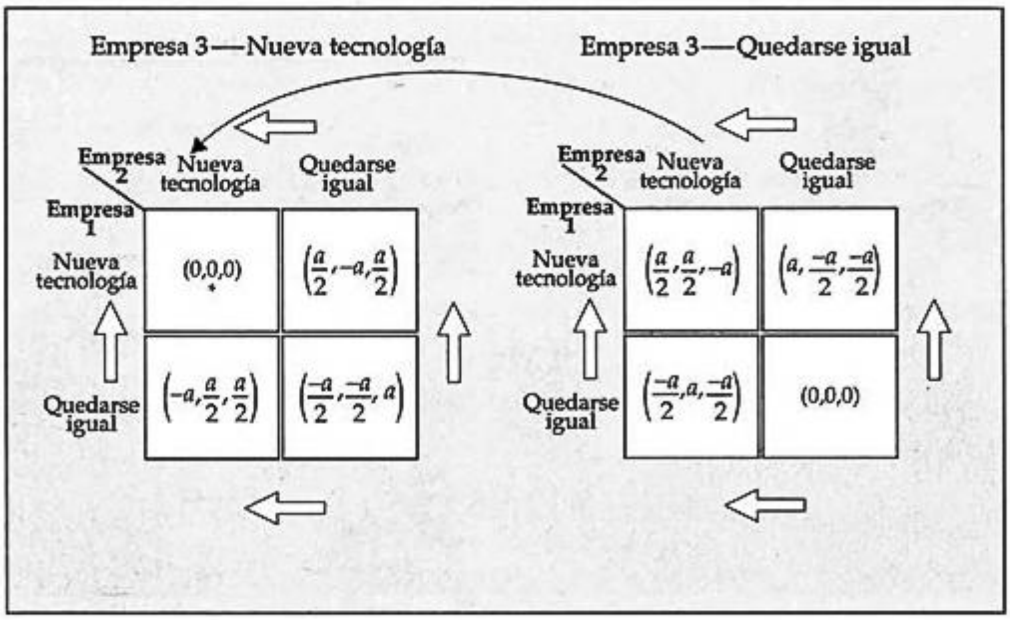


Figura 4.3. Ventaja competitiva, tres empresas.

El único equilibrio ocurre **cuando las tres empresas adoptan la nueva tecnología**; lo mismo que ocurre cuando hay dos empresas → **ninguna empresa puede quedarse atrás** en la carrera por adoptar nuevas tecnologías; aunque **a veces alguna empresa puede quedarse a jugar a ser aguafiestas.**

<u>**Oportunidad de mercado con tres empresas**</u> (figura 4.4)**:**

Sean j1, j2 y j3.

Cada empresa ha de **elegir entre entrar en el mercado o quedarse fuera**, y **en el mercado solo hay sitio para una empresa**.

La que se queda fuera, ni gana ni pierde.

Si solo entra una en el mercado, **gana 100**; **si entra más de una, cada una que lo hace pierde 50.**

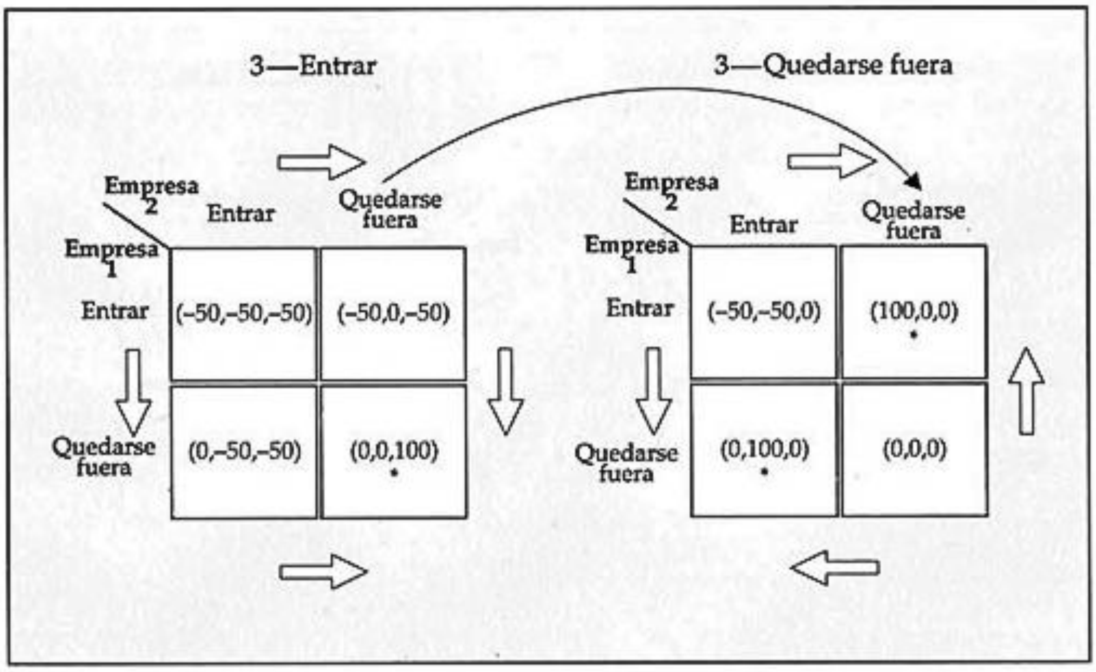


Figura 4.4. Oportunidad de mercado, tres empresas.

Este juego tiene **tres equilibrios (eficientes) en estrategias puras** en los que **solo una empresa ocupa el mercado y las otras dos quedan fuera**:

(quedar fuera, quedar fuera, entrar)

(entrar, quedar fuera, quedar fuera)

(quedar fuera, entrar, quedar fuera)

Pero **las ganancias** en ellos son **muy diferentes,** los **resultados asimétricos→ cada empresa desea ser la que entra** en el mercado.

Además tiene un **equilibrio simétrico en estrategias mixtas**, donde **las tres empresas reciben igual ganancia**.

Para calcular el **equilibrio en estrategias mixtas:**

Sea p(entrar) la probabilidad de que una empresa entre en el mercado

Sea p(quedar fuera) la probabilidad de que se quede fuera

*Si **e1 entra** en el mercado, **la distribución de probabilidad que encontrará** será:*

hay otras dos empresas en el mercado, con probabilidad ***p(entrar)²***

hay otra empresa en el mercado, con probabilidad ***2p(entrar)p(quedar fuera)***

no hay ninguna empresa en el mercado, con probabilidad ***p(quedarse fuera)***

***El valor esperado de e1 por entrar** en el mercado, **VE1(entrar), dada la estrategia mixta seguida por los competidores** es:*

$$VE_1(\text{entrar}) = (-50)[1 - p(\text{quedarse fuera})^2] + (100)p(\text{quedarse fuera})^2$$

*porque **si una o dos empresas están en el mercado, la e1 perderá 50**.*

*La **otra alternativa de la e1 es quedarse fuera, obteniendo 0** con total seguridad, luego la expectativa de obtener 0 es:*

$$VE_1(\text{quedarse fuera}) = 0.$$

***Igualando estos dos valores esperados**, obtendremos una ecuación con una incógnita:*

$$0 = (-50)[1 - p(\text{quedarse fuera})^2] + (100)p(\text{quedarse fuera})^2$$

que resuelta dará el resultado:

p(quedar fuera)=0,58*

p(entrar)=0,42*

que ***es el equilibrio simétrico*** *en el que* ***cada empresa no espera ni ganar ni perder****.*

La distribución del número de empresas en el mercado según el equilibrio en estrategias mixtas es:

entran tres empresas con probabilidad **p*(entrar)^3=0,08**

entran dos empresas con probabilidad **3p*(entrar)^{2}p(quedar fuera)*=0,31**

entra una empresa con probabilidad **3p*(entrar)p*(quedar fuera)^2=0,42**

no entra ninguna con probabilidad **p*(quedarse fuera)^3=0,19**

Es muy probable, 0,08+0,32+0,42, probabilidad **0,81, que el mercado esté abastecido**

Es **bastante probable**, 0,08+0,32, probabilidad **0,39 que lo esté en exceso**

Esta alta probabilidad es el precio que pagan las empresas si todas obtienen las mismas ganancias.

En un sentido, las empresas obtienen beneficio 0, este resultado es como la competencia perfecta. En otro sentido, no lo es.

Los únicos resultados que garantizan una presencia en el mercado, los **equilibrios en estrategias puras**, deben estar **apoyados por alguna limitación a la libre entrada→única forma de que una empresa sepa que en equilibrio se puede entrar en el mercado sin problemas**.

La expresión es:

VE_1 (Entrar) = -50 [1-p(quedarse fuera)^2] + 100p(quedarse fuera)^2

La probabilidad de que tiremos un dado y salga un uno es 1/6.

La probabilidad de que lo tiremos una segunda vez y vuelva a salir un uno es 1/6.

La probabilidad de que salgan dos unos si tiramos dos dados es (1/6)*(1/6) = 1/36.

La probabilidad de que *no* salgan dos unos es justo el resto de posibilidades, es decir (1 – 1/36).

Recordar que p = 1 cuando es seguro que algo ocurra, y es seguro que alguna combinación de números saldrá cuando tiremos los dados. Por eso p = 1 incluye todas las posibilidades.

Si le restamos la probabilidad de que salgan precisamente dos unos tenemos la probabilidad de que *no* salgan dos unos.

De igual forma, **la probabilidad de que una empresa se quede fuera del mercado es:**

p(quedarse fuera)

La probabilidad de que lo hagan dos empresas es

p(quedarse fuera)* p(quedarse fuera) = p(quedarse fuera)^2.

La probabilidad de que alguna empresa no se quede fuera es

1 - p(quedarse fuera)^2

La probabilidad de que tengamos dos empresas y una entre y la otra no es:

2*p(entrar)*p(quedarse fuera).

El dos que **multiplica** la expresión se explica **porque** tras el hecho de que una empresa entra y otra se queda fuera **hay que considerar las dos posibilidades: que sea la primera empresa la que entra y la segunda la que se queda fuera o lo contrario**. Por tanto, tras un único estado hay en realidad dos posibilidades.

VE_1(entrar) es el valor **esperado para el jugador 1 derivado de la decisión de entrar**. Esperado **quiere decir "promedio" →** el jugador 1 entra, y eso le reportará unos resultados ponderados por unas probabilidades.

Los resultados van unidos a las probabilidades porque en teoría de juegos los resultados de cualquier acción siempre **dependen de lo que hagan los demás jugadores**.

Las probabilidades "miden" con qué frecuencia podremos esperar que los otros jugadores hagan una cosa u otra.

El jugador 1 siempre se queda con **el valor más a la izquierda dentro de cada casilla** de la matriz.

El jugador 1 siempre obtiene **-50 cuando entran en el mercado una o dos empresas más→multiplicamos ese resultado por la probabilidad de que haya alguna otra empresa en el mercado.** Ésta se obtiene **a partir de la probabilidad de que no haya otra empresa en el mercado**, que es **p(quedarse fuera)^2**.

Recordamos que si la **probabilidad de que ocurra un evento A es p(A)**, la **probabilidad de que no ocurra es 1 - p(A)**; la **probabilidad de que ocurra dos veces es p(A)*p(A) = p(A)^2**.

Dado que **buscamos la probabilidad de que no haya ninguna otra empresa**, es decir, **que las otras dos se queden fuera**, hay que hacer:

$$p(\text{quedarse fuera}) * p(\text{quedarse fuera}) = p(\text{quedarse fuera})^2.$$

Después **se resta eso a 1 para obtener la probabilidad de que haya alguna empresa** (además de la 1).

El jugador obtiene 100 cuando entra sólo si las otras dos se quedan fuera. Por eso **sumamos el 100 multiplicado por la probabilidad de que las otras dos se queden fuera**.

Podemos decir s**implemente** que:

$$VE_1\ (\text{Entrar}) = (100)p(\text{quedarse fuera})^2 +$$

$$+(-50)p(\text{entrar})^2(-50)2p(\text{entrar})p(\text{quedarse fuera})$$

o bien:

$$VE_1\ (\text{Entrar}) = -50\ [1-p(\text{quedarse fuera})^2] + 100p(\text{quedarse fuera})^2$$

Ambas expresiones **son lo mismo**:

Para empezar, **p(entrar) = 1 - p(quedarse fuera)**, o dicho de otra forma, **p(entrar) + p(quedarse fuera) = 1**. Cada empresa, o entra o se queda fuera.

Como:

$$\mathbf{VE_1\ (Entrar) = -50\ [1\text{-}p(quedarse\ fuera)^2] + 100p(quedarse\ fuera)^2 =}$$

$$\mathbf{=\text{-}\ 50 + 50p(quedarse\ fuera)^2 + 100p(quedarse\ fuera)^2 =}$$

$$\mathbf{= 150p(quedarse\ fuera)^2 - 50}$$

Sustituimos en la segunda expresión, la que hemos planteado como alternativa, **la igualdad p(entrar) = 1 - p(quedarse fuera)**, y obtenemos:

$$\mathbf{VE_1\ (Entrar) = (100)p(quedarse\ fuera)^2 + (-50)p(entrar)^2 +}$$

$$\mathbf{+(-50)2p(entrar)\ p(quedarse\ fuera) =}$$

$$\mathbf{=(100)p(quedarse\ fuera)^2 + (-50)[1 - p(quedarse\ fuera)]^2 +}$$

$$\mathbf{+(-100)\ [1 - p(quedarse\ fuera)]\ p(quedarse\ fuera) =}$$

Es decir, son *lo mismo*.

Este **es un problema de coordinación**, y aquí:

- **el 1 indica que las tres empresas se han coordinado**, **adoptando un mismo estándar**.
- **Si solo una de ellas elige otro estándar, el valor de todas se va a 0.**

Después, en ese juego **hay un equilibrio en estrategias mixtas adicional a los dos** que se observan **en estrategias puras**. **Pero** ese equilibrio en estrategias mixtas a**cabará en un resultado de coordinación (1,1,1) en un porcentaje pequeño de los casos**.

Si el **equilibrio en estrategias mixtas es p = q = t = 0,5** (donde p, q y t son las probabilidades de **que cada empresa adopte el sistema Beta**) → **la probabilidad de que las tres coincidan eligiendo el mismo sistema es p*q*t = $0{,}5^3$ = 0,125, o un 12,5%** de los casos.

La misma probabilidad hay de que acaben coordinándose, **por azar**, en un **sistema VHS**.

En todos los demás casos el resultado será que alguno de los tres participantes elija un sistema distinto al de los otros dos, con lo que **el resultado es malo**, cero.

Si en vez de tres empresas **participan cinco**, la cosa es peor, es decir, si se deja la coordinación al azar, **la probabilidad de un buen resultado**

será aún menor (será 2*0,5^5) → la moraleja: **A veces la no coordinación es intencionada**, pues **se busca crear posiciones de monopolio** (sistemas operativos, probablemente formatos de video o discos digitales). Pero **otras veces son errores tontos, como** cuando las empresas **no se ponen de acuerdo en adoptar un estándar** (conexiones de video, datos, etc.).

4.3.- **<u>Versiones con tres jugadores de "Coordinación de sistemas de video", "Hagamos un trato" y "Publicidad de cigarrillos en TV".</u>**

Se trata de **tres juegos** del mundo de los negocios en los que **el aguafiestas no tiene ningún papel** y cuyos **resultados son similares al de dos jugadores**.

<u>Coordinación de Sistemas de Video con tres jugadores</u>, figura 4.5:

Cada empresa (que operan en el mismo ámbito) debe **adoptar el mismo sistema** para que pueda **existir comunicación entre ellos**.

Cualquiera de los dos sistemas, **VHS y PAL, funcionan igual de bien**.

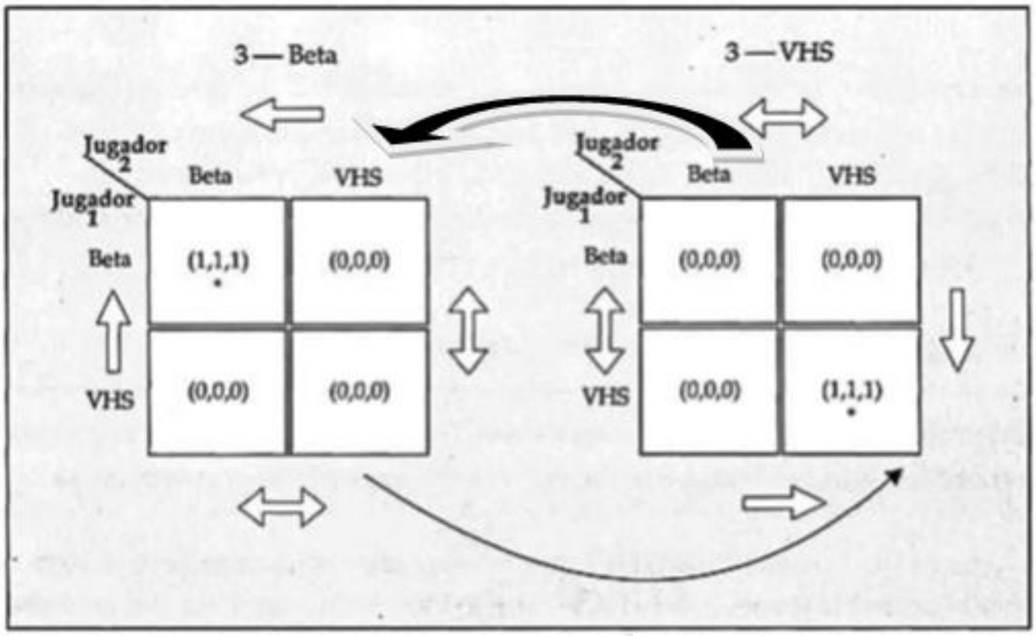


Figura 4.5. Coordinación de sistemas de vídeo, tres empresas.

Hay **dos equilibrios en estrategias puras (asterisco):**

- uno en el que **todas las empresas adoptan el sistema Beta (1, 1, 1)** y
- otro en el que **adoptan el VHS (1, 1, 1)**.

Las ganancias asociadas a ambos resultados **son las mismas** así que **no se puede decir que uno sea mejor que el otro.**

Las flechas superior e inferior, que une ambos juegos, son las del **j3** quien **compara**.

Aquí, como con dos jugadores, **hay un equilibrio adicional de estrategias mixtas**, en el que **cada empresa adopta cada uno de los sistemas con igual probabilidad:**

p*(Beta)=p*(VHS)=0,5

*Todas las empresas, **e1, e2 y e3**, adoptarán el sistema **Beta con probabilidad $0,5^3$=0,125***

*Todas las empresas, **e1, e2 y e3,** adoptarán el sistema **VHS con probabilidad $0,5^3$=0,125***

*Por tanto, **la probabilidad de que se coordinen en uno de los sistemas es solo del (0,125*2)*100= 25%** → implica una **elevada tasa de fallos de coordinación, 75%.** Esta **situación empeora a medida que aumente el número de empresas.***

La probabilidad de coordinarse en una versión **con n empresas en el equilibrio de estrategias mixtas tiende a cero a medida que n aumenta**→ las empresas **deberán resolver el juego en el que se hallan con una estrategia pura** o pagarán las consecuencias

¿Cómo entender la peculiar función de utilidad referida al juego "Coordinación de sistemas de video con tres empresas"?

Nos referimos a la figura 4.5, p. 114.

Si $\sum x_i = 3$ ello quiere decir que las 3 empresas adoptan la estrategia $x_i = 1$, que significa "adoptar sistema Beta". Es decir: $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$, y por tanto, $x_1+x_2+x_3 = 3$. En ese caso los sistemas están coordinados y la utilidad es 1, es decir, u = 1.

Si $\sum x_i = 0$ ello quiere decir que las 3 empresas adoptan la estrategia xi = 0, que significa "adoptar sistema VHS". Es decir: $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, y por tanto, $x_1+x_2+x_3 = 0$. En ese caso los sistemas están coordinados y la utilidad es 1, es decir, u = 1.

Ahora bien, si la suma no es ni 3 ni 0, los sistemas estarán descoordinados. Por ejemplo, dos empresas habrán adoptado VHS y una el Beta, o al revés. Siempre que la suma sea igual a 1 o 2 ($\sum x_i = 1$ o $\sum x_i = 2$) los sistemas estarán descoordinados y la utilidad será cero, es decir, u = 0.

<u>**Hagamos un trato, con tres jugadores, estrella de cine, director y productor**</u> **(figura 4.6):**

El productor es el importante pues **financia** la peli.

Hay 15 millones$ en juego →**Si los tres dicen si, se los reparten** equitativamente, **si uno dice no, no hay trato y se lleva 0** cada uno.

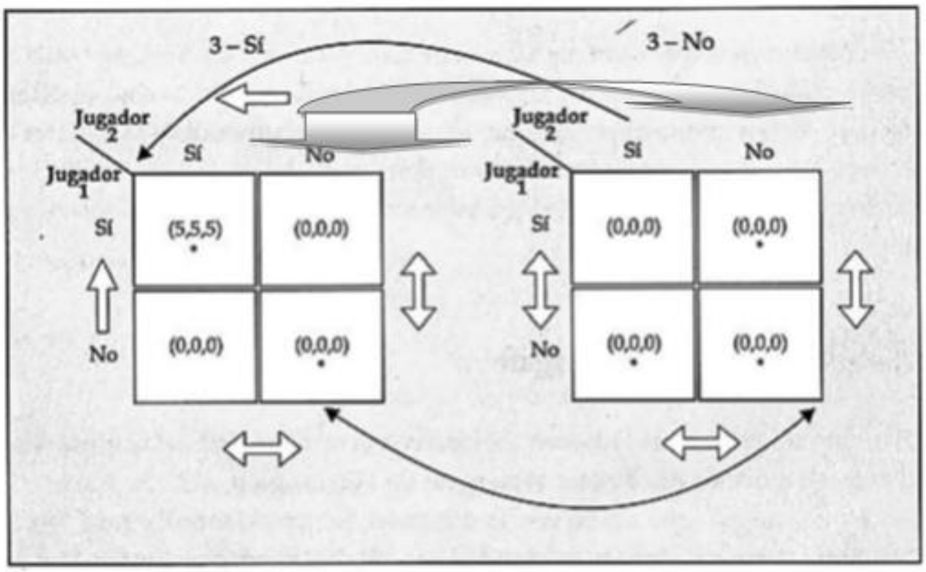


Figura 4.6. Hagamos un trato, tres jugadores. Las ganancias están en millones de dólares.

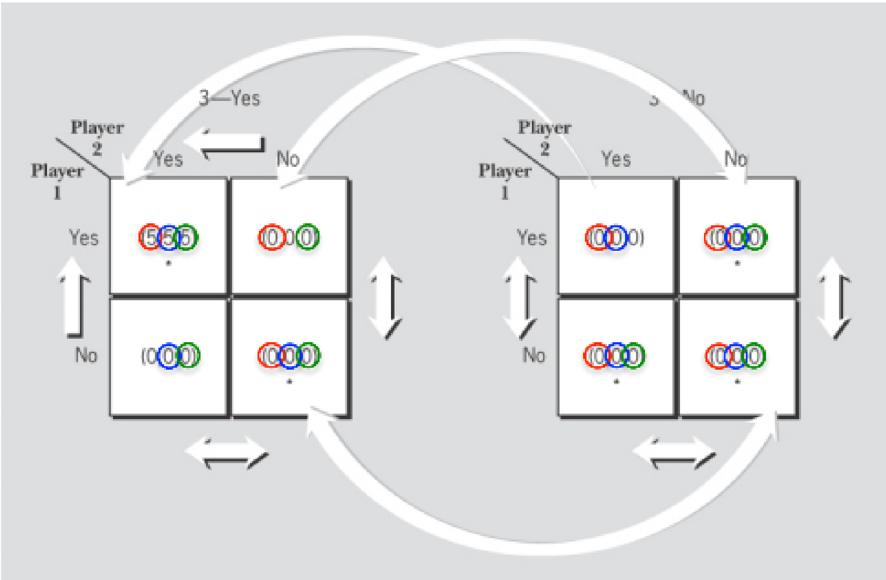
Tiene **cinco equilibrios en estrategias puras: (5, 5, 5), (0, 0, 0), (0, 0, 0), (0, 0, 0) y (0, 0, 0), marcadas con (*)** y a cada uno le corresponde la **ganancia elevada**, **todos dicen sí**.

Al resto de equilibrios (0, 0, 0), (0, 0, 0), (0, 0, 0), le corresponde una **ganancia cero**.

Cualquier **vector de estrategias en que al menos dos dicen no**, **es un equilibrio**. Por eso hay tantos equilibrios malos.

Pero **decir no está dominada por decir sí**.; **si los demás dicen sí, diciendo sí se obtiene ganancia de cinco** millones y **diciendo no se gana cero→** utilizando la condición suficiente de estrategias no dominada, **la solución de Hagamos un trato es el vector Sí (si, si, si)**

En la Figura 4.6 de Hagamos un trato con tres empresas faltan flechas entre las dos matrices, que señalan las preferencias del jugador 3 (que compara y elige la matriz que prefiere). La Figura corregida aparece en la segunda edición y es esta:



El jugador 1 elige fila, el jugador 2 elige columna y el jugador 3 elige matriz.

El jugador 1 se plantea qué hacer. Si el jugador 2 elige "Yes", el jugador 1 elegirá "Yes" en la primera matriz, y le dará igual en la segunda; si el jugador 2 elige "No", al jugador 1 le dará igual qué elegir en la primera matriz, y en la segunda. Marcamos en rojo sus preferencias.

El jugador 2 se plantea qué hacer. Si el jugador 1 elige "Yes", el jugador 2 elegirá "Yes" en la primera matriz, y le dará igual en la segunda; si el jugador 1 elige "No", al jugador 2 le dará igual qué elegir en la primera matriz, y en la segunda. Marcamos en azul sus preferencias.

El jugador 3 se plantea qué hacer. Si los jugadores 1 y 2 eligen "Yes", el jugador 3 elegirá "Yes" en la primera matriz; si los jugadores 1 y 2 eligen cualquier otra combinación al jugador 3 le da lo mismo "Yes" (matriz izquierda) o "No" (matriz derecha). Marcamos en verde sus preferencias.

Allí donde los tres números de una casilla están marcados, hay un equilibrio.

¿Qué significa la llamada "condición de intercambio"?

Esta condición significa, simplemente, que cuando el papel de los jugadores se intercambia en un juego simétrico, sus ganancias se intercambian también. El libro ilustra esta propiedad de los juegos simétricos con el juego de Hagamos un trato, cuya figura (la figura 4.6 de la página 115). Veamos que se cumple la mencionada condición:

$$u_1(1, 0, 0) = u_2(0, 1, 0) = 0$$

$$u_1(0, 1, 0) = u_2(1, 0, 0) = 0$$

$$u_1(1, 0, 1) = u_2(0, 1, 1) = 0$$

$$u_1(0, 1, 1) = u_2(1, 0, 1) = 0$$

donde $u_1()$ es la función que nos da el beneficio del jugador 1, y $u_2()$ la función que nos da el beneficio del jugador 2. Estas funciones tienen tres argumentos, es decir, $u_i(a, b, c)$, donde a, b y c pueden valer 1 o 0, siendo 1 = Sí, y 0 = No, siendo a la elección del jugador 1, b la elección del jugador 2 y c la elección del jugador 3. Vamos a ver un caso.

$u_1(1, 0, 0)$ nos da el resultado para el jugador 1 del siguiente conjunto de elecciones: el jugador 1 dice Sí, el jugador 2 dice No y el jugador 3 dice No. Con esas elecciones el jugador 1 obtiene 0. Como puede verse, si los jugadores 1 y 2 invierten los papeles, sus resultados también se invierten. En este caso la inversión de resultados no se ve claramente porque estos son 0 en uno y otro caso:

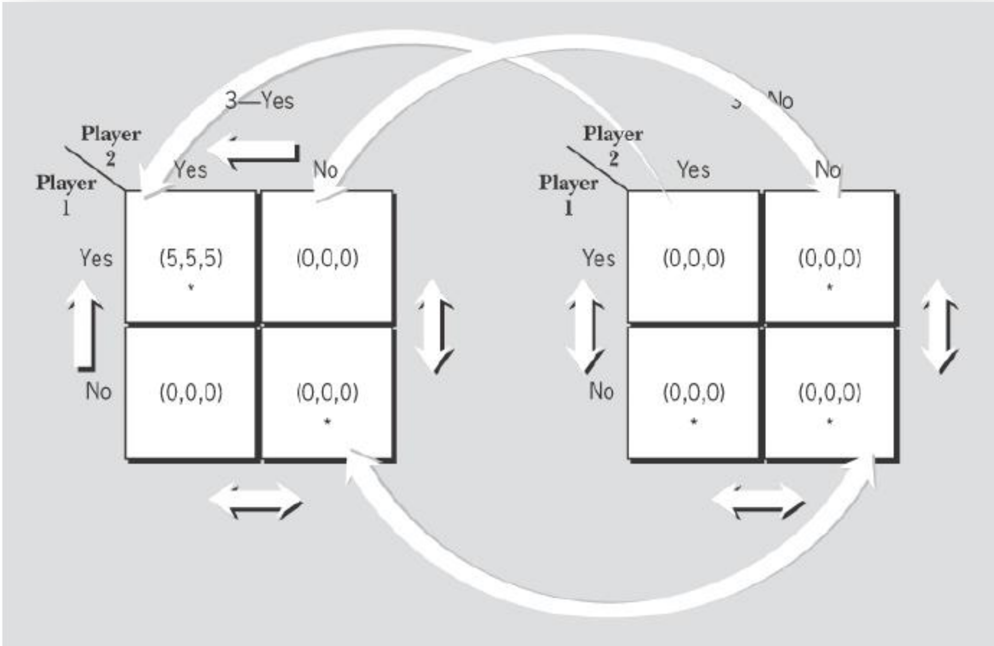
$$u_1(1, 0, 0) = u_2(0, 1, 0) = 0$$

$$u_1(0, 1, 0) = u_2(1, 0, 0) = 0$$

y, también, en este otro caso:

$$u_1(1, 0, 1) = u_2(0, 1, 1) = 0$$

$$u_1(0, 1, 1) = u_2(1, 0, 1) = 0$$



<u>**Publicidad de cigarrillos en tv**</u>:

Sean **las compañías** fabricantes de cigarrillos: **1, 2, 3** y **4** cada una con **una estrategia dominante, anunciarse en tv.**

Igual que antes, **la solución, la estrategia dominante, es que cada una se anuncie en tv.**

Cuando todas se anuncian sus ganancias son inferiores que cuando no se anuncian: **el dilema de los presos.**

¿**Si uno hace publicidad, los demás deben hacerla** porque es una estrategia dominante, pero en caso de hacerla todos, nadie gana?

Las dos (o cuatro) empresas tienen una **estrategia dominante** que es **hacer publicidad**, básicamente porque: **si no la hacen pero las demás sí, el coste puede ser elevado**. La explicación es que **las que sí hacen publicidad se quedan con la cuota de mercado de la que no hace publicidad.**

Ahora bien, **si todas hacen** publicidad **las cuotas de mercado no cambian,** las **ventas totales de la industria podrían crecer marginalmente**, pero también **hay nuevos costes** (las campañas publicitarias), **y estos pueden sobrepasar a los beneficios**.

Es el caso del **dilema del prisionero**. En este juego **los jugadores tienen estrategias dominantes que les conducen a un equilibrio de Nash, que es la solución del juego**.

Pero hay **otra posición distinta** que es **también un equilibrio** que, además, es **el más eficiente de todos (el de mayores ganancias de todos)**. Ese equilibrio "mejor" **es un <u>óptimo de Pareto</u>**, en el sentido de que **no podemos salir de él para mejorar la posición de un jugador sin perjudicar al otro**.

La solución en el dilema del prisionero no es un óptimo de Pareto. **Las estrategias dominantes llevan a una solución subóptima**. Este es el sorprendente resultado del dilema del prisionero. Solo **la cooperación permite alcanzar el óptimo de Pareto**.

Cuando las tres empresas "se coordinan", es decir, cuando las tres eligen el mismo sistema, obtienen un beneficio (1, 1, 1), y cuando no se coordinan, pierden las tres esa oportunidad de beneficio (0, 0, 0).

Los valores esperados, son, como siempre, una suma de beneficios ponderada por las probabilidades de alcanzarlos.

Cuando una de las empresas, e1, va a elegir un sistema y decide que -por ejemplo- sea Beta, la probabilidad de que las otras dos hayan elegido el mismo es p(Beta)*p(Beta), donde p(Beta) es la probabilidad de que cualquiera de ellas elija el sistema Beta.

Ello es así porque la probabilidad de que ocurran dos eventos independientes, A y B, es p(A)*p(B).

Por ejemplo, la probabilidad de tirar dos veces un dado y sacar uno y otra vez uno es (1/6)*(1/6).

La probabilidad de que cuando una empresa, la que sea, va a escoger un sistema (digamos, Beta) las otras dos hayan "fallado" ya, es decir, hayan escogido sistemas incompatibles, es 2p(Beta)p(VHS) → Se multiplica por dos porque el orden de los factores no afecta al resultado: da igual cuál de las dos empresas escoja qué cosa.

La esencia del caso es que seleccionan opciones distintas, de manera que ya da igual qué haga o deje de hacer la empresa para la que estamos calculando el valor esperado VE.

Por último, si la empresa 1 escoge un sistema (Beta) y las otras dos han escogido otro (VHS), el resultado global será de descoordinación igualmente (esta vez, culpa de la empresa 1), y las tres obtendrán cero.

Con esto tenemos ya el esquema del VE de la empresa 1 para Beta. Lo mismo podemos deducir para VHS.

4.4.- Obstruccionismo Watergate:

En el año 72, unos **ladrones** entraron en la **sede central del Comité Nacional del Partido Demócrata** en **el hotel Watergate de Washinton, D.C.** Se inició con ello una odisea estratégica que **acabó con la dimisión de R. Nixon**.

La cuestión de estudio es la forma en que, los hombres más cercanos al presidente, trataron el asunto con las autoridades que investigaron el caso. **El portavoz de la Casa Blanca denunció** públicamente el suceso **como un robo en tercer grado**, **y continuó** en el Comité para la reelección del Presidente (CREEP) **como si nada hubiera pasado**.

La administración Nixon, decidió controlar el daño (que hacer sobre el robo), **mediante una combinación de desmentidos y encubrimientos**.

Tres miembros de su equipo (consejero, ayudante de asuntos internos y jefe de personal de la Casa Blanca) se hicieron **cargo del plan de control de daños del Watergate.**

- **El objetivo** principal, era la **reelección del presidente** (si se demostraba que la Casa Blanca estaba implicada en el robo, la ventaja en las urnas se ponía en peligro).
- El **segundo objetivo** del plan, era **que la trama encubridora se cubriera a si misma (**delitos de obstrucción a la justicia y conspiración que le podían acusar los fiscales federales en el caso de fallar la trama). La Casa Blanca acuñó este aspecto del plan con una palabra nueva: **obstruccionismo** (que obstaculizaba las investigaciones de los federales).

Nixon ganó las elecciones del 72. La CREEP hizo su trabajo, **pero el obstruccionismo solo había empezado**, el plan **tenía un nombre** en clave: **Operación Candor**.

Los tres jugadores del juego **eran los tres funcionarios de la Casa Blanca** que llevaban el caso. **Cada uno** de ellos disponía de **dos estrategias (obstruir o hablar).**

- **Obstruir** significaba **resistencia a cooperar** con los fiscales, los periodistas, manteniendo **presión sobre el personal de bajo rango involucrado**. Pero la rápida evolución de las investigaciones, las perspectivas de pérdida del plan iban aumentando.
- **Hablar** significaba **colaborar** con los fiscales, periodistas o con su abogado.

Hay **cuatro resultados posibles** del juego.

Cuando **los fiscales y periodistas estaban muy cerca de descubrir la complicidad de la Casa Blanca** en el robo, **las ganancias del obstruccionismo eran pequeñas**.

- Incluso **manteniéndose fuertes en su postura los tres jugadores**, existía una **alta probabilidad de que fueran condenados** y que tuvieran que pasar mucho tiempo en **prisión (-3).**
- **El** resultado **menos malo era hablar (-2).**
- **Si solo hablaba uno al resto les tocaba más castigo (-5)**.
- **Si hablaban todos, el caso les resultaba más fácil** a los fiscales y **no tendrían tanta pena (-4).**

Hay **un único equilibrio de estrategias puras, hablar los tres**.

La moraleja es que, **mientras haya una opción más atractiva que formar parte de una conspiración, alguien la adoptará**.

Existe una buena **razón estratégica de por qué las tramas encubridoras acaban descubriéndose a sí mismas.**

A la figura 4.7 le faltan las flechas de cada matriz:

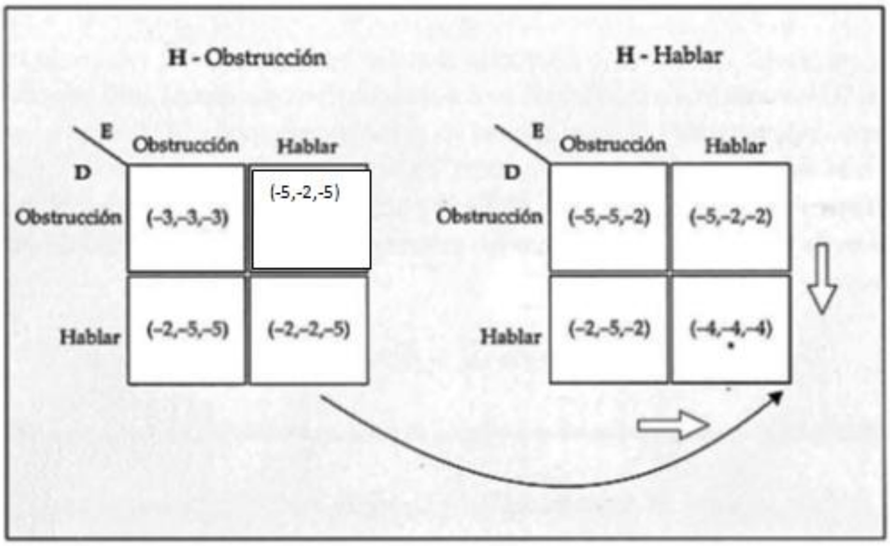


Figura 4.7. Obstruccionismo en Watergate. *D* = **Dean;** *E* = **Ehrlichman;** *H* = **Haldeman.**

En la matriz de la izquierda, si nos situamos en la primera fila (Dean obstruye) tenemos dos posibilidades, que Ehrlichman hable o que obstruya. El suyo es el segundo número de cada vector. Está claro que preferirá siempre hablar, de manera que si estuviéramos en la casilla superior izquierda nos moveríamos a la superior derecha (Ehrlichman pasaría de obstruir a hablar). Debe haber una flecha que marque ese movimiento, señalando a la derecha en la parte superior de la matriz.

Si Ehrlichman decide obstruir nos situamos en la primera columna, y Dean puede elegir una de las dos filas (hablar, obstruir). Su número es el primero del vector en cada casilla. Obviamente preferirá hablar, pues -2 es un resultado mejor que -3. Debería haber por tanto una flecha que señale hacia abajo en el lado izquierdo de la matriz. De igual forma, debería haber otra flecha en el lado derecho, apuntando también hacia abajo, y el razonamiento es similar.

Todas las flechas apuntan a la casilla inferior derecha. Pero dado que toda esa matriz depende de que el tercer jugador, Haldeman, decida obstruir, habrá que tener en cuenta la posibilidad de que cambie su decisión.

En efecto, la otra matriz está trazada bajo el supuesto de que Haldeman habla. En ella ocurre igual. Las flechas apuntan hacia la casilla inferior derecha. Faltan la flecha en el lado superior y el lado izquierdo. En el lado superior, si nos fijamos en el segundo número del vector, -2 es un mejor resultado que -5, y cuando Dean decida obstruir Ehrlichman siempre escogerá hablar. La flecha apunta a la derecha. En el lado izquierdo, cuando Ehrlichman elige obstruir, Dean preferirá siempre hablar, pues -2 es mejor que -5 (primer número de cada vector). La flecha apunta hacia abajo.

En cada matriz, acabamos en la casilla inferior derecha. Pero Haldeman determina en qué matriz acabaremos. Obviamente la matriz de la derecha (hablar) proporciona a Haldeman un mejor resultado. El tercer número del vector es superior en la casilla inferior derecha de la matriz derecha (-4 en vez de -5). Por eso hay una flecha negra que nos "lleva" de una matriz a otra.

4.5. Simetría y juegos con muchos jugadores:

Cuando **un juego tiene tres o más jugadores o** cuando **cada jugador tiene más de ocho estrategias, es imposible su notación en forma extensiva o normal**→usaremos **funciones de utilidad con varias variables**.

Supongamos que **hay n jugadores** (índices i=1,2,3 ... n).

Cada jugador i tiene un **conjunto de estrategias a su alcance x(i)** y **una función de utilidad ui (x)**, donde **X=(x1, x2, ... ,xn) es un vector de estrategias** escogidos individualmente por todos los jugadores.

"**Coordinación de sistemas de video**" con tres empresas:

Primero **codificaremos las estrategias→Para cada empresa, X(i)=(0,1),**

xi =1 sistema Beta,

xi =0 sistema VHS.

La función de utilidad de la empresa:

$$u_i(x)=1 \text{ si } \sum x_i = 3$$

$$u_i(x)=0 \text{ en caso contrario, si } \sum x_i \neq 3.$$

Escribiendo la función de utilidad de cada jugador como función de n variables, una variable para la estrategia de cada jugador → nos **permite escribir juegos con muchos jugadores, cada uno con muchas estrategias.**

Esto nos lleva a definir un <u>concepto nuevo</u>, el de **simetría.**

Un **juego es simétrico si todos los jugadores lo ven de la misma forma**. Esto quiere decir que:

1- **Cada jugador i** tiene el **mismo conjunto de estrategias X(i)**, un jugador no tiene más estrategias diferentes que otro.
2- **Cada par de jugadores i y j, tienen la misma función de utilidad**, en el sentido que **dadas las estrategias del resto de jugadores, intercambiar las estrategias de los jugadores intercambian sus ganancias:**

$$u_i(x_i, x_j, \text{resto de las estrategias}) = u_j(x_j, x_i, \text{resto de las estrategias})$$

Cuando dos jugadores **escogen la misma estrategia:**

$$u_i(x_i, x_i, \text{resto de las estrategias}) = u_j(x_i, x_i, \text{resto de las estrategias})$$

En un **juego simétrico, cuando los jugadores escogen la misma estrategia, obtienen las mismas ganancias**.

"**Hagamos un trato**", es **un juego simétrico.**

- 1ª condición: **las estrategias "Sí" y "No" están disponibles para todos los jugadores.**
- 2ª condición: **cuando todos los jugadores dicen "sí", obtienen la misma ganancia, y cuando todos dicen "no" también obtienen la misma ganancia.**

Para comprobar la condición de **intercambio de las ganancias, tomemos:**

1=i y **2=j**

sean

Sí=1 y **No=0**

luego:

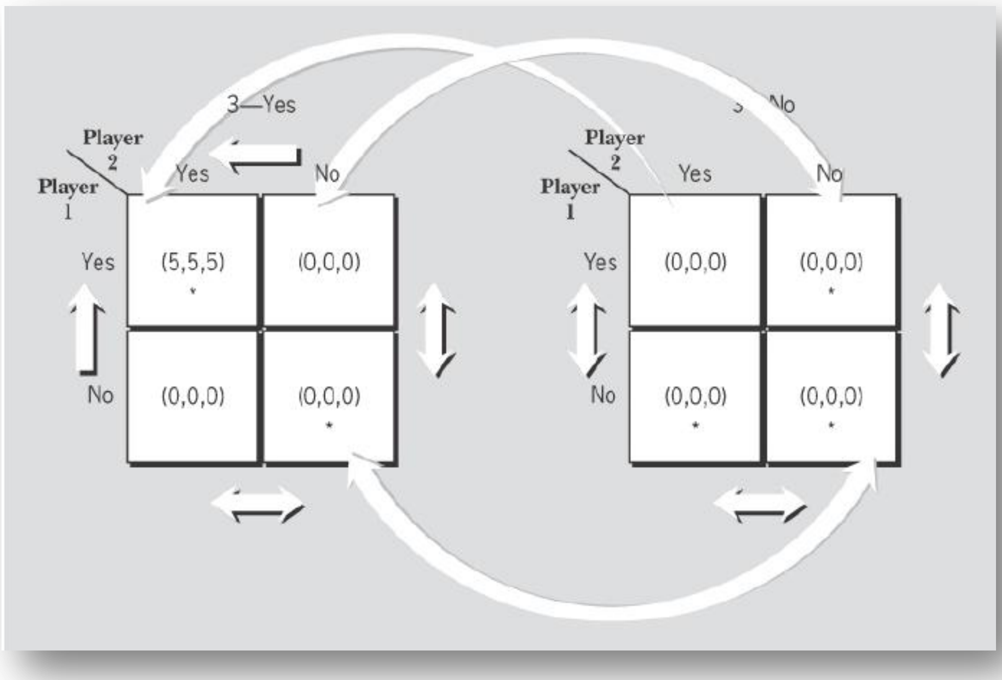
U1(1,0,0)=U2(0,1,0)=0

U1(0,1,0)=U2(1,0,0)=0

U1(1,0,1)=U2(0,1,1)=0

U1(0,1,1)=U2(1,0,1)=0

Esta condición significa, simplemente, que **cuando el papel de los jugadores se intercambia en un juego simétrico, sus ganancias se intercambian también**.



Veamos que se cumple la mencionada condición:

$u_1(1, 0, 0) = u_2(0, 1, 0) = 0$

$u_1(0, 1, 0) = u_2(1, 0, 0) = 0$

y también, en este otro caso:

$u_1(1, 0, 1) = u_2(0, 1, 1) = 0$

$u_1(0, 1, 1) = u_2(1, 0, 1) = 0$

donde:

$u_1()$ es la función que nos da el beneficio del jugador 1, y

$u_2()$ la función que nos da el beneficio del jugador 2.

Estas funciones tienen tres argumentos, es decir, $u_i(a, b, c)$, donde *a*, *b* y *c* pueden valer 1 o 0, siendo 1 = Sí, y 0 = No, siendo *a* la elección del jugador 1, *b* la elección del jugador 2 y *c* la elección del jugador 3.

Vamos a ver un caso.

$u_1(1, 0, 0)$

nos da el resultado para el jugador 1 del siguiente conjunto de elecciones: el j1 dice Sí, el jugador 2 dice No y el jugador 3 dice No.

Con esas elecciones el j1 obtiene 0.

Como puede verse, si los jugadores 1 y 2 invierten los papeles, sus resultados también se invierten. En este caso la inversión de resultados no se ve claramente porque estos son 0 en uno y otro caso.

De forma intuitiva: Un juego simétrico tiene que ver con la simetría de una matriz.

Piense en un juego en forma normal: fuera de la diagonal principal (casillas 11, y 22) los resultados para los jugadores no tienen que ser iguales, pero sí intercambiables. Eso quiere decir que la matriz, la forma normal, por encima de la diagonal principal es una imagen-espejo de la matriz por debajo de la diagonal principal. En la propia diagonal los resultados para ambos jugadores sí tienen que ser idénticos.

Le pongo una matriz simétrica (para que vea más fácilmente lo que le digo de la imagen espejo arriba y abajo de la diagonal principal):

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 2 \\ 1 & 0 & 7 & 9 \\ 5 & 7 & 1 & 0 \\ 2 & 9 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

En un juego simétrico de suma variable tenemos algo parecido, pero con pares de números. Arriba y abajo de la diagonal principal deberíamos tener los mismos pares de números, pero intercambiados. En la diagonal dos números iguales:

(2, 2)	(2, 0)	(3, 7)
(0, 2)	(1, 1)	(1, 0)
(7, 3)	(0, 1)	(0, 0)

La diagonal principal puede ser la formada por 11 & 22, pero también la formada por 12 & 21, pues podríamos reconfigurar la matriz intercambiando filas y columnas. La posición de estas es puramente convencional:

(2, 2)	(2, 0)	(3, 7)		(3, 7)	(0, 2)	(2, 2)
(0, 2)	(1, 1)	(1, 0)		(1, 0)	(1, 1)	(0, 2)
(7, 3)	(0, 1)	(0, 0)		(0, 0)	(1, 0)	(7, 3)

Los **juegos simétricos** son **importantes por dos razones**:

1- **Proporcionan buenas aproximaciones a juegos complicados** cuando los jugadores no son muy diferentes, y son **más fáciles de resolver**.

2- Sirven de **inspiración de una condición suficiente de la solución**. Al ser visto igual por todos sus jugadores, **no hay razón para pensar que un jugador tiene ventaja sobre otro. Todos tienen las mismas oportunidades.**

Su solución debe reflejar esta **igualdad de oportunidades**. **Simetría** en ganancias→ solución: misma ganancia a todos sus jugadores.

La condición suficiente de simetría en ganancias no tendría sentido si no hubiera equilibrios que pudieran satisfacerla.

Un equilibrio es simétrico **si todos** los jugadores **utilizan la misma estrategia y reciben la misma ganancia.**

En "**Hagamos un trato" con tres jugadores**, que tiene **cinco equilibrios**, **dos son simétricos, vector "Síes" y vector "Noes"**, **los otros tres son asimétricos**, **los jugadores hacen cosas diferentes** (pero cumplen la simetría en ganancias).

Por lo tanto, **un juego simétrico puede tener equilibrios asimétricos**.

La condición de simetría en ganancias no es inocua, **elimina como soluciones los malos equilibrios en Hagamos un trato**.

"**Oportunidad de mercado" (con dos o tres jugadores) es** un ejemplo **de juego simétrico cuyos equilibrios asimétricos no satisfacen la simetría en ganancias**. **Cumple las** condiciones **de diagonalidad e intercambio**: los equilibrios simétricos son (entrar, quedarse fuera) y (quedarse fuera, entrar), **y la empresa que entra obtiene una ganancia mucho más alta.**

El único equilibrio simétrico en Oportunidad de mercado, es en estrategias mixtas.

La condición de intercambio dice que si el papel de los jugadores se intercambiara sus resultados no cambiarían, y deben cumplirla los juegos simétricos. En los juegos simétricos las mismas acciones conducen a los mismos resultados, da igual qué jugador las lleve a cabo.

Si en un juego las opciones son Sí y No, y juegan dos jugadores, los posibles resultados son (Sí, Sí), (Sí, No), (No, Sí) y (No, No). Pues bien, (Sí, Sí) y (No, No) arrojarán el mismo resultado en números aunque el jugador 1 y 2 cambien sus papeles. Por otro lado, los resultados de (Sí, No) son los mismos pero invertidos a los de (No, Sí).

Una forma de ver esto es que la matriz de pagos o resultados es simétrica.

4.6. Resolución de juegos simétricos con muchas estrategias:

Cuando **un juego simétrico** tienen **muchos jugadores (n alto),** cada uno de ellos con **muchas estrategias**, utilizamos **el cálculo para hallar los equilibrios** del juego.

La función de utilidad de un jugador puede escribirse **como ui (xi ,∑xi)** y **la forma de la función u es la misma para todos los jugadores**, cumpliéndose la condición de **simetría en ganancias**. Porque **las ganancias de cada jugador dependen sólo de la acción agregada de todos los jugadores**. Como en este agregado**, cada jugador es igual que cualquier otro**, es donde reside la simetría.

La solución del juego pasa por **tres pasos:**

1- **Suma de las estrategias**: (x1+x2+...+xn)

2- **Maximizamos la utilidad del jugador 1 igualando su utilidad marginal a cero: 0=du1/dx1**

3- **Igualamos las estrategias: x1=x2=...=xn , sustituimos y resolvemos** la ecuación resultante y **obtenemos el equilibrio del juego**.

¿Cómo se obtienen los resultados a partir de esa función de utilidad? ¿Qué significa ésta?

Se propone una función de utilidad cualquiera. Bueno, cualquiera no. Se trata de reproducir un juego simétrico en ganancias.

Por tanto, la función de utilidad hace que la utilidad del jugador 1 dependa de la estrategia adoptada por él, x_1, que se mueve entre 0 y 10, pero también de la estrategia adoptada por los demás (x_2, x_3, x_4... para el jugador 2, 3, 4,.. y así sucesivamente). Es la misma función de utilidad para todos los jugadores. Para dos tendríamos:

$u_1 = x_1(20 - x_1 - x_2)$

$u_2 = x_2(20 - x_1 - x_2)$

Si fueran 3 en vez de dos:

$u_1 = x_1(20 - x_1 - x_2 - x_3)$

$u_2 = x_2(20 - x_1 - x_2 - x_3)$

$u_3 = x_3(20 - x_1 - x_2 - x_3)$

Etcétera.

Esas funciones de utilidad deben maximizarse, es decir, tenemos que encontrar los valores para x_1 y x_2 que las hacen máximas. Para ello se sigue el procedimiento de siempre: derivar e igualar a cero. Por tanto:

$du_1/dx_1 = 20 - 2x_1 - x_2 = 0$

$du_2/dx_2 = 20 - x_1 - 2x_2 = 0$

Ya tenemos un sistema con dos ecuaciones y dos incógnitas. Dado que el juego es simétrico sabemos además que $x_1 = x_2$. Por tanto:

$20 - 3x_1 = 0$

Obtenemos $x_1 = 20/3$, y dado que $x_1 = x_2$ ya sabemos que $x_2 = 20/3$.

El libro al final muestra que esto mismo se puede hacer cuando hay un número muy elevado de jugadores, como 100. Se llega a una función como:

$u_1 = x_1(20 - x_1 - x_2 - x_3 - x_4 - x_5 - .... - x_{100}) = 20x_1 - x_1\hat{}2 - x_1x_2 - x_1x_3 - x_1x_4 - x_1x_5 - .... - x_1x_{100}$

Al derivar por x_1 e igualar a cero:

$du_1/dx_1 = 20 - 2x_1 - x_2 - x_3 - x_4 - x_5 - .... - x_{100} = 0$

Dado que hay simetría, $x_1 = x_2 = x_2 = ... = x_{100}$, tendremos

$20 - 101x_1 = 0$

De donde $x_1 = 20/101$. Sólo hay que recordar que $x_1 = x_2 = x_2 = ... = x_{100}$.

¿Por qué la función de utilidad es $u_1(x) = x_1(20 - \sum \mathbf{x1})$?

Se propone una función de utilidad cualquiera. Bueno, cualquiera no. Se trata de reproducir un juego simétrico en ganancias.

La función de utilidad hace que la utilidad del jugador 1 dependa de la estrategia adoptada por él, x_1, que se mueve entre 0 y 10, pero también de la estrategia adoptada por los demás (x_2, x_3, x_4... para el jugador 2, 3, 4,.. y así sucesivamente). Es la misma función de utilidad para todos los jugadores.

Para dos tendríamos:

$$\mathbf{u_1 = x_1(20 - x_1 - x_2)}$$

$$\mathbf{u_2 = x_2(20 - x_1 - x_2)}$$

Si fueran 3 en vez de dos:

$$\mathbf{u_1 = x_1(20 - x_1 - x_2 - x_3)}$$

$$\mathbf{u_2 = x_2(20 - x_1 - x_2 - x_3)}$$

$$\mathbf{u_3 = x_3(20 - x_1 - x_2 - x_3)}$$

Etcétera.

Esas funciones de utilidad **deben maximizarse**, es decir, tenemos que **encontrar los valores para x_1 y x_2 que las hacen máximas**. **Para ello** se sigue el procedimiento de siempre: **derivar e igualar a cero**.

Por tanto:

$$du_1/dx_1 = 20 - 2x_1 - x_2 = 0$$

$$du_2/dx_2 = 20 - x_1 - 2x_2 = 0$$

Ya tenemos un sistema con dos ecuaciones y dos incógnitas. **Dado que el juego es simétrico** sabemos además que $x_1 = x_2$. Por tanto:

$$20 - 3x_1 = 0$$

Obtenemos $x_1 = 20/3$, y dado que $x_1 = x_2$ ya sabemos que $x_2 = 20/3$.

El libro al final muestra que **esto mismo se puede hacer cuando hay un número muy elevado de jugadores, como 100**. Se llega a una función como:

$$u_1 = x_1(20 - x_1 - x_2 - x_3 - x_4 - x_5 - .... - x_{100}) = 20x_1 - x_1^2 - x_1x_2 - x_1x_3 - x_1x_4 - x_1x_5 - .... - x_1x_{100}$$

Al derivar por x_1 e igualar a cero:

$$du_1/dx_1 = 20 - 2x_1 - x_2 - x_3 - x_4 - x_5 - .... - x_{100} = 0$$

Dado que hay simetría, $x_1 = x_2 = x_2 = ... = x_{100}$, tendremos

$$20 - 101x_1 = 0$$

De donde $x_1 = 20/101$. Sólo hay que recordar que $x_1 = x_2 = x_2 = ... = x_{100}$.

4.7. La tragedia de los ejidos:

Un grupo de productores individuales (empresas) tienen **acceso a un recurso que no es propiedad de ninguno.** El recurso en un **ejido libremente disponible para todos (**acuíferos subterráneos, geiseres, ballena minke, atmósfera, etc.).

Una **tragedia de los ejidos ocurre cuando demasiados jugadores explotan el mismo recurso**. Esta práctica conduce a **un doble desastre**:

1- **El recurso es degradado o destruido**

2- **Las tasas de beneficio de todos** los productores involucrados **son menores de lo que podrían ser**.

En el peor de los casos, se traduce en una **destrucción del recurso y una tasa nula de beneficios para las empresas** involucradas.

Sea i un índice de usuarios potenciales (compañías) de ejido.

Xi es la estrategia de la compañía i:

- **xi =1 la empresa utiliza el ejido** (la tasa de **beneficio depende de cuantas empresas también lo utilizan**) y
- **xi =0 no lo utiliza** (obtiene una **tasa normal de beneficio: 10%).**

La **función de producción del ejido, F(∑xi**), **mide la producción total**, **dependiendo de cuantas compañías lo utilizan (∑xi).**

Para que la **situación sea simétrica**, suponemos que **todas las compañías participan en la misma proporción.** Si hay **"m" compañías, cada una obtiene una ganancia**

F(m)/m

La **función de utilidad de la compañía i**, **ui (x),** viene dada por:

- **Si i no entra**, la tasa de **beneficio es del 10% (0,1):**

ui (x)=0,1 →si xi =0

- **Si i entra**, la tasa de **beneficio se reparte el nº de empresas:**

ui (x)=F(m)/m →si xi =1

Función de utilidad en forma compacta:

ui (x)=0,1(1-xi)+xi F(m)/m

Con dos compañías, m=2, la función de producción:

F(m)=1,1m-0,1m2

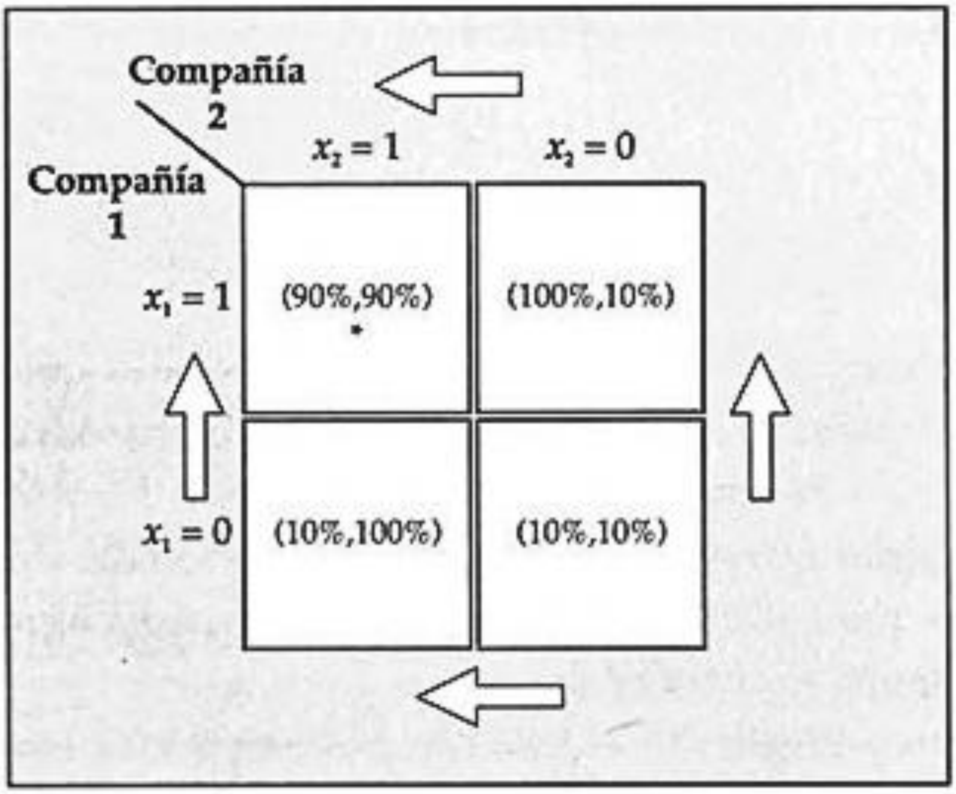


Figura 4.8. La tragedia de los ejidos, dos empresas.

Si solo hay una compañía, m=1, en el ejido, la tasa de beneficio es del 100%

[F(1)=1]

Cuando entra la 11, m=11, **los beneficios caen a cero**

[F(11)=0]

La tragedia aparece cuando hay muchas más empresas utilizando el ejido.

El **número mágico de compañías que desencadena la tragedia es 10**. El **motivo,** está en el mecanismo de entrada→ **cualquiera puede entrar y explotarlo.**

Como el **juego es simétrico**, en **equilibrio todas las empresas hacen lo mism**o, **entrar** en el ejido. Al tomar todas la decisión de forma simultánea, **no saben cuando superan las 10, perdiéndose las tasas de beneficio**, desaprovechando el ejido.

Para medir el desaprovechamiento, comparamos la solución eficiente del problema **con la solución** del juego.

Para sacar el máximo beneficio del ejido, **debemos buscar el número "m" que maximiza**→Tenemos que maximizar el beneficio bruto menos el coste:

$$\max F(m) - 0{,}1m$$

$$0 = 1{,}1 - 0{,}2m - 0{,}1$$

Despejando **m=5, que es el número optimo** de empresas para explotar el ejido; algo imposible porque cualquiera puede utilizarlo.

Con los Géiseres del Norte de California, mayor campo de energía geotérmica de EEUU (6% de energía térmica de California y 75% de la geotérmica de la nación) ocurre algo similar. Ahora se están secando→ hay demasiadas pajas en el vaso→futuro poco prometedor→ **batalla de los Géiseres**.

La función de producción es una expresión adaptada al caso→ Se ha elegido de forma que tenga rendimientos decrecientes a escala.

El tema de la tragedia de los ejidos se ha comprobado en laboratorio (experimentos controlados) y se ha observado que el problema se da.

Una función de producción típica en Economía, expresada de forma genérica es **Y = F(K, L)**, donde K es el capital y L es el trabajo.

Si asumimos que **el capital no cambia a corto plazo** podemos dividir todo por L, llamar:

k = K/L al **capital por trabajador** y

y = Y/L al producto por trabajador,

y tendríamos **y = f(k)** →**función de producción genérica** que se utiliza como **base de argumento sobre la distribución de la renta y la riqueza en el mundo**.

En el caso de un Ejido el "input" son las empresas que sacan agua del pozo, y el "producto" es el agua total que sale del pozo. Pero en **términos generales son lo mismo**.

La forma **concreta de esa función matemática f() depende de las propiedades que queramos que tenga la función. Un caso típico es la Cobb-Doublas:**

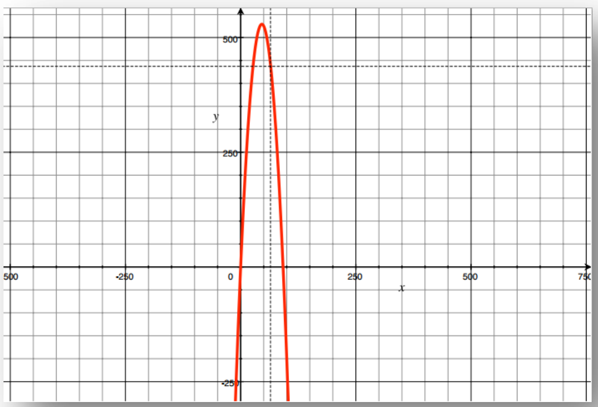
$$Y = C\,L^{A}K^{B}$$

Donde **C es una constante** y **A y B son parámetros que, cuando suman 1 (A + B = 1) son iguales a la participación del trabajo en la renta (A = wL/Y) y del capital en la renta (B = rK/Y).**

Una función como **$F(m) = f(m)$ donde $F(m) = 23m - 0{,}25m^2$** es una función donde **el producto, que es F(m), crece primero conforme m empieza a crecer desde 0, pero pasado un punto empieza a decrecer.**

Ocurre que **los rendimientos del "factor de producción" m son decrecientes e incluso negativos.** Gracias a esa característica el experimento del ejido "funciona". **Si la relación entre F(m) y m fuera de otro tipo más empresas explotando el ejido (m más grande) no implicaría una caída de F(m)**. Ahora bien, por qué tiene esa forma concreta y no otra con las mismas características y otros números, no lo sé. Habría que ir a la referencia que cita Gardner para ver los detalles concretos de ese experimento, es decir, por qué se escogieron esos valores y no otros.

Le adjunto un gráfico en el que se dibuja la función $y = 23x - 0{,}25x^2$ para que "vea" cómo es (y va al eje vertical y x al horizontal).



¿En $u(x)=0{,}1(1-x)$ El 1 que he marcado en rojo, a que corresponde?

Si hace usted xi = 0, verá cómo la expresión se reduce a $U(x) = 0{,}1$.

Cuando xi = 1, la expresión queda transformada en $u(x) = F(m)/m$.

No entiendo tampoco max F(m) - 0,1m; el max F(m) será derivada de la función de producción F(m) pero de dónde sale 0,1m?

Imaginemos que el ejido es propiedad del Estado, y que éste **quiere maximizar el beneficio de la explotación**, quizás porque impone un impuesto sobre el mismo. En ese caso **podemos** utilizar el criterio de **igualar el ingreso marginal y el coste marginal de la explotación → maximizaríamos la diferencia F(m) – i m**. Donde i = tipo de interés.

La diferencia **F(m) – i m**, que es lo que maximizamos, **equivale a F(m)/m – i.** Para maximizar **derivamos con respecto a m e igualamos a cero**, siempre que F(m) pueda interpretarse como una función de ingresos, y el tipo de interés i como un coste marginal constante. Tendríamos **F'(m) = i.**

Una segunda posibilidad es **obtener el número de empresas que maximiza el rendimiento medio de las empresas que explotan en recurso**, en cuyo caso **maximizaríamos F(m)/m, derivando con respecto a m e igualando a cero**, con lo que tendríamos **$F'(m)/m - F(m)/m^2 = 0$,** de donde **obtendríamos otro m óptimo.**

También **podemos calcular el número óptimo de empresas que hacen máximo la producción del ejido**, con lo que **maximizaríamos directamente F(m), haciendo F'(m) = 0** y obteniendo de ahí m.

El libro iguala **directamente F(m)/m = i,** y despeja m.

Los tres procedimientos dan valores de m diferentes, con significados diferentes.

- Para una función como **$F(m) = 1,1m - 0,1m^2$** el primer procedimiento da

$$1,1 - 0,2m - 0,1 = 0,$$

$$m = 5;$$

- el segundo no funciona con una función lineal porque el rendimiento medio es constante;

- para el tercero tenemos

$$\mathbf{1{,}1 - 0{,}2m = 0}\text{, y}$$

$$\mathbf{m = 5{,}5.}$$

- para el cuarto

$$\mathbf{1{,}1 - 0{,}1m = 0{,}1}\text{, de donde}$$

$$\mathbf{m = 10}.$$

este caso de los ejidos es solo un ejemplo ilustrativo para pensar un poco. No es un problema-tipo para examen.

¿Cómo se determina el número óptimo de empresas en la tragedia de los ejidos?

La verdad es que depende de lo que queramos maximizar.

Imaginemos que el ejido es propiedad del Estado, y que éste quiere maximizar el beneficio de la explotación, quizás porque impone un impuesto sobre el mismo. En ese caso podemos utilizar el criterio de igualar el ingreso marginal y el coste marginal de la explotación. En este caso maximizaríamos la diferencia $F(m) - i\,m$, que equivale a $F(m)/m - i$, derivando con respecto a m e igualando a cero, siempre que $F(m)$ pueda interpretarse como una función de ingresos, y el tipo de interés i como un coste marginal constante. Tendríamos $F'(m) = i$. Es lo que se hace en la página 126.

Una segunda posibilidad es obtener el número de empresas que maximiza el rendimiento medio de las empresas que explotan en recurso, en cuyo caso maximizaríamos $F(m)/m$, derivando con respecto a m e igualando a cero, con lo que tendríamos $F'(m)/m - F(m)/m^2 = 0$, de donde obtendríamos otro m óptimo.

También podemos calcular el número óptimo de empresas que hacen máximo la producción del ejido, con lo que maximizaríamos directamente $F(m)$, haciendo $F'(m) = 0$ y obteniendo de ahí m.

Por último, en las páginas 124 y 125 el libro iguala directamente $F(m)/m = i$, y despeja m.

Los tres procedimientos dan valores de m diferentes, con significados diferentes. Para una función como $F(m) = 1{,}1m - 0{,}1m^2$ el primer procedimiento da $1{,}1 - 0{,}2m - 0{,}1 = 0$, $m = 5$; el segundo no funciona con una función lineal porque el rendimiento medio es constante; para el tercero tenemos $1{,}1 - 0{,}2m = 0$, y $m = 5{,}5$; y para el cuarto $1{,}1 - 0{,}1m = 0{,}1$, de donde $m = 10$.

Ocho sujetos jugaron el siguiente Juego de los ejidos.[14] Cada jugador i escoge un número entre 0 y w. El parámetro w es el número de fichas que tiene el jugador (10 o 25, dependiendo del caso). Un jugador puede depositar tantas fichas como desee en el banco a cambio de 5 centavos por cada ficha depositada. Las fichas no depositadas en el banco van al ejido, donde la tasa de beneficio depende del número total de fichas invertidas en el ejido. La ganancia del jugador i, en centavos, viene dada por

$$u_i(\mathbf{x}) = 5(w - x_i) + x_i F(m)/n$$

donde m es el número total de fichas invertidas en el ejido. Nótese la similitud con la función de utilidad de La tragedia de los ejidos de la sección 4.7. Las únicas diferencias son una opción externa valorada en un 5% por unidad invertida en lugar del 10%, $w = 10$ o 25 en vez de 1, y m igual al número de fichas en el ejido en lugar del número de compañías en el ejido. La función de producción en estos experimentos viene dada por

$$F(m) = 23m - 0{,}25m^2$$

Sustituyendo, obtenemos la función de utilidad

$$u_i(\mathbf{x}) = 5(w - x_i) + x_i(23 - 0{,}25m)$$

Nótese que esta función de utilidad depende de la decisión del jugador i y de la decisión agregada, por lo que el juego es simétrico.

Este juego experimental simétrico tiene un único equilibrio simétrico, el cual, de acuerdo con la condición suficiente de simetría en ganancias, es la solución. Podemos hallar este equilibrio simétrico utilizando la técnica empleada anteriormente. En primer lugar, maximizamos la utilidad del jugador 1:

$$0 = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = -5 + (23 - 0{,}25m) + x_1(-0{,}25)$$

utilizando la regla de la derivada del producto. A continuación utilizamos la simetría. Como hay ocho jugadores, todos ellos tomando la misma decisión que el jugador 1, $m = 8x_1$. Sustituyendo en la condición de primer orden obtenemos

$$0 = -5 + 23 - 2x_1 - 0,25x_1$$

Resolviendo obtenemos

$$x_1 = 8$$

[14]Se reclutaron 10 sujetos para cada experimento. Si se presentaban más de ocho, a los sujetos sobrantes se les pagaba $5 por presentarse y se les reservaba una plaza para el próximo experimento.

En el equilibrio simétrico, cada jugador invierte 8 fichas. Esto está muy cerca de la tragedia de los ejidos. La manera habitual de medir la severidad de la tragedia de los ejidos es comparar las ganancias de los jugadores con las que podrían conseguirse con una asignación eficiente de los recursos. Una asignación eficiente de los recursos maximiza

$$F(m) - 5m$$

puesto que el valor del recurso en centavos es $F(m)$ y el coste de cada unidad es 5 centavos. Sustituyendo obtenemos

$$\max 23m - 0{,}25m^2 - 5m$$

El máximo corresponde a

$$0 = 23 - 0{,}5m - 5$$

Resolviendo, obtenemos $m = 32$. Se deberían invertir exactamente 32 fichas en el ejido, no las 64 fichas invertidas por los ocho jugadores en el equilibrio simétrico. El beneficio total máximo del recurso es $F(32) - 5(32) = 18(32) - 8(32) = 320$ centavos. El beneficio total del recurso en equilibrio es $F(64) - 5(64) = 18(64) - 16(64) = 128$ centavos. La *eficiencia relativa* del equilibrio es su ganancia dividida por la ganancia máxima, en este caso 128 centavos/320 centavos = 40%.

La figura 4.9 muestra la eficiencia relativa observada en el experimento cuando el Juego de los ejidos se juega con dinero real 20 veces consecutivas. Cuando cada uno de los jugadores tiene 20 fichas, el resultado oscila alrededor del equilibrio simétrico. La eficiencia relativa media en los 20 periodos es del 43%, muy próxima a la predicción del equilibrio del juego. Las oscilaciones[15] aún han de ser explicadas, pero el hecho de que el comportamiento medio esté próximo al equilibrio del juego queda confirmado. Éstas son las buenas noticias. Las malas noticias son lo que pasa cuando los sujetos tienen 25 fichas para invertir en lugar de 10. El efecto de esta alteración es hacer a los sujetos un 150% más ricos por lo que hace a dinero en el banco. La condición de primer orden para hallar el equilibrio no depende en absoluto del número de fichas, por lo que nada debería cambiar en lo referente al equilibrio. De acuerdo con el equilibrio, los individuos deberían sencillamente depositar las 15 fichas adicionales en el banco y jugar igual que antes. No obstante, no hacen esto. Invierten muchas más fichas en el ejido, haciendo que los beneficios sean negativos. Después de unas doce repeticiones, se sitúan finalmente en la zona de beneficios positivos, pero aún entonces sus ganancias están por debajo de las del equilibrio simétrico. En las 20 repeticiones, las ganancias promedio de estos sujetos son ligeramente negativas (−4%). Sus resultados son aún *peores* que la tragedia de los ejidos, que predice que los beneficios tienden a cero, pero no caen por debajo de cero. No existe aún explicación de este resultado experimental.

La tragedia de los ejidos es real, tanto en el campo como en el laboratorio. Nosotros, como individuos y como empresas, corremos un riesgo si la ignoramos.

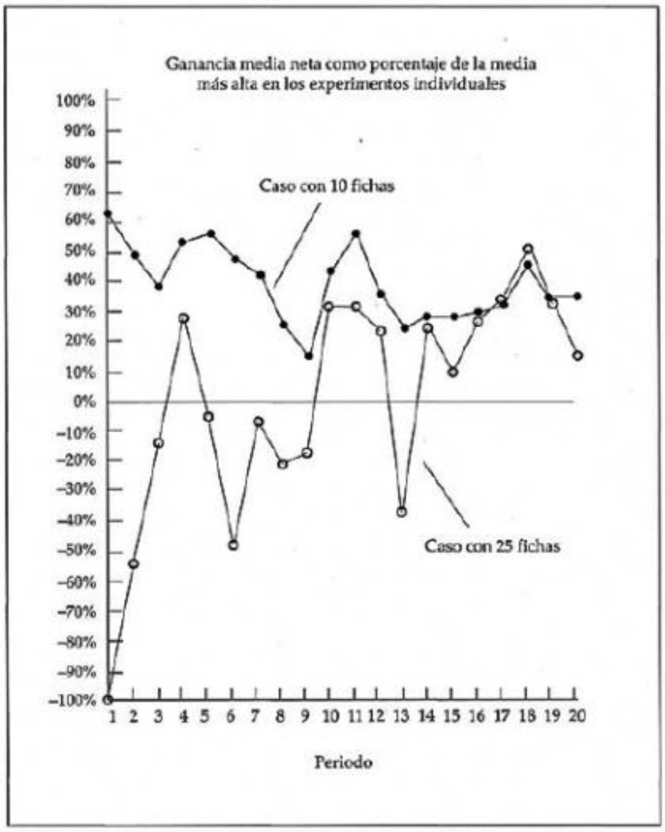


Figura 4.9. La tragedia de los ejidos en el laboratorio.

¿Cómo se obtiene la derivada de la función de utilidad $u_i(x) = 5(w - x_i) + x_i(23 - 0{,}25m)$?

Estos cálculos ni siquiera aparecen explícitos en la segunda edición en inglés del libro. Sólo se ofrece el resultado de $x_i = 8$.

La variable x_i son las fichas depositadas por el jugador i en el ejido, mientras que m es el número total de fichas depositadas por todos los jugadores en el ejido, y por tanto, $\sum_i x_i = m$. Ello quiere decir que m es función de x_i, y que $dm/dx_i = 1$.

Ahora volvemos a la función de utilidad:

$$u_i(x) = 5(w - x_i) + x_i(23 - 0{,}25m) = 5w - 5x_i + 23x_i - 0{,}25mx_i$$

Cuando derivamos con respecto a xi esa función, en la última parte del polinomio tenemos un producto de elementos derivables con respecto a x_i, que son la propia x_i y m. Ahí se aplica la regla de la derivada de un producto:

$f(x_i) = 0{,}25mx_i$

$df/dx_i = 0{,}25m(dx_i/dx_i) + 0{,}25xi(dm/dx_i) = 0{,}25m + 0{,}25x_i$

Y por tanto:

$\partial u_i(x)/\partial x_i = -5 + 23 - (0{,}25m + 0{,}25x_i)$

Esa expresión se iguala a cero, y se sustituye en ella $m = 8x_i$ por haber 8 jugadores y ser el juego simétrico (todos tienen los mismos recursos y la misma función de utilidad), de donde se obtiene fácilmente que $x_i = 8$.

Resumen

1. Cuando en vez de dos hay tres jugadores en un juego, aparecen diferencias fundamentales. El teorema de determinación para juegos tipo Ajedrez y el teorema de solución para juegos de suma cero ya no se cumplen porque un tercer jugador puede jugar el papel de aguafiestas.
2. Los aguafiestas aparecen con mucha menos frecuencia en el mundo de los negocios que en política o en deportes. La mayoría de las veces, cuando hay una tercera o cuarta empresa en el mercado, el impacto sobre los beneficios no es muy dramático.
3. Cuando cada jugador tiene una estrategia estrictamente dominante, el juego tiene un único equilibrio. El único equilibrio en Publicidad de cigarrillos en televisión, considerando cuatro empresas, es que todas las compañías se anuncien en televisión.
4. El fenómeno según el cual cada jugador tiene una estrategia estrictamente dominada que conduce a un mal resultado para todos los jugadores se llama el dilema de los presos. Este fenómeno impregna nuestras vidas, y necesitamos estar alerta ante este peligro. El juego Obstruccionismo en Watergate ejemplifica el dilema de los presos en la vida real.
5. Cuando un juego tiene más de tres jugadores, o cada jugador tiene más de ocho estrategias, escribir el juego se convierte en algo imposible en la práctica. Para estudiar estos juegos se utiliza una notación matemática más compacta.
6. Un juego es simétrico cuando todos los jugadores lo ven de la misma manera. Todos tienen las mismas estrategias y las funciones de utilidad satisfacen la propiedad de intercambio.
7. La condición suficiente de simetría en ganancias requiere que la solución de un juego simétrico asigne la misma ganancia a todos los jugadores. Esta condición suficiente tiene sentido, ya que todo juego simétrico tiene un equilibrio simétrico.
8. Cuando la ganancia de cada jugador depende sólo de su propia acción y de la acción agregada de todos los jugadores, y cuando todas las funciones de utilidad tienen la misma forma, un juego es simétrico. Podemos utilizar el cálculo diferencial para hallar el equilibrio simétrico de este juego.
9. Un "ejido" es un recurso del que todos pueden disponer libremente. Una tragedia de los ejidos ocurre cuando demasiados jugadores explotan el recurso.
10. Una manera de medir la tragedia de los ejidos es mediante el ratio entre las ganancias de equilibrio y las ganancias óptimas. Cuanto más cercano a cero esté este ratio, peor es la tragedia.
11. La tragedia de los ejidos se observa en la sequía de los géiseres de California y también en experimentos de laboratorio (ver el apéndice del capítulo).

Conceptos clave

contraejemplo
aguafiestas
obstruccionismo
condición de intercambio
equilibrio simétrico
tragedia de los ejidos

títere estratégico
dilema de los presos
juego simétrico
simetría en ganancias
juego asimétrico

Problemas

1. Suponga que ahora hay tres cadenas de televisión en La batalla de las cadenas de televisión. Las cuotas de audiencia de las dos cadenas existentes han caído un 10% para cada una, para hacer sitio a la nueva cadena. Reescriba la forma normal y halle la solución. Interprete el nuevo resultado en términos de la estrategia de programación de las cadenas.

Problema 1, página 128.

Nos remiten a la Figura 2.1, p. 43.

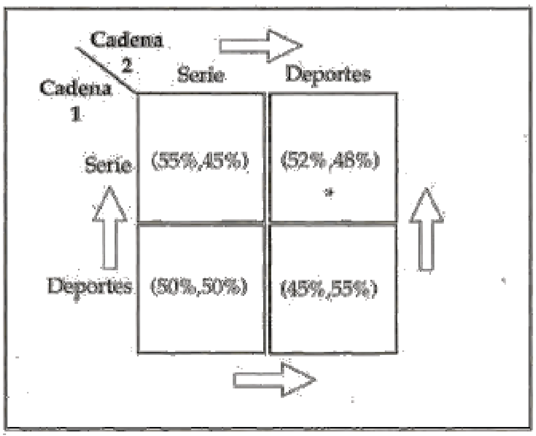


Figura 2.1. La batalla de las cadenas de televisión, forma normal.

Pero tenemos que utilizar otra tabla con modificaciones, ya que entra un tercer jugador.

			Cadena 2
		Serie	Deportes
	Serie	(45%, 35%, 20%)	(42%, 38%, 20%)
Cadena 1	Deportes	(40%, 40%, 20%)	(35%, 45%, 20%)

Los resultados o pagos de la matriz son exactamente iguales tanto si la cadena 3 programa series como si programa deportes, por lo que habría que trabajar con una misma matriz duplicada. Las flechas para las cadenas 1 y 2 no han cambiado. Hay dos estrategias dominantes para ellas que son emitir serie para la cadena 1 y emitir deportes para la cadena 2, por lo que hay un equilibrio de Nash en estrategias puras en serie/deportes. Dado que la cadena 3 no modifica esos resultados relativos a las cadenas 1 y 2, tendremos tras su incorporación dos equilibrios de Nash en estrategias puras: serie/deportes/serie y serie/deportes/deportes. Véase que las cadenas 1 y 2 no ven alteradas sus decisiones porque la cadena 3 decida hacer una cosa u otra. Dado que las matrices para una y otra decisión de la cadena 3 son las mismas, su decisión no afecta los resultados de las cadenas 1 y 2, y tampoco el suyo propio (un 20% de share en cualquier caso, *robado* de las otras dos).

2. Demuestre que hablar es una estrategia estrictamente dominante en Obstruccionismo en Watergate. ¿Por qué es único el equilibrio de un juego en el que cada jugador tiene una estrategia estrictamente dominante?

Figura 4.7 de la pág 119:

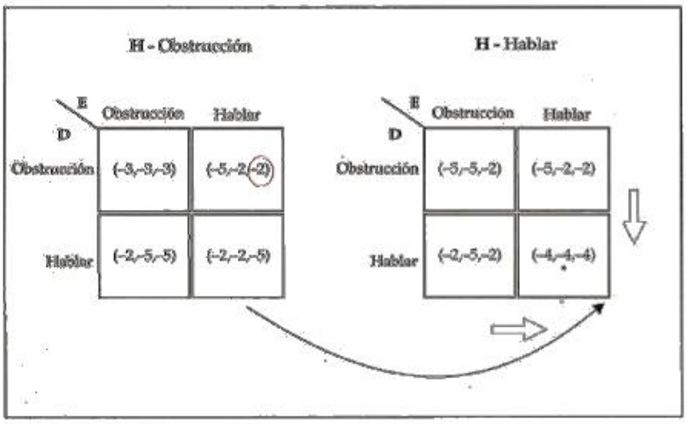


Figura 4.7. Obstruccionismo en Watergate. *D* = **Dean;** *E* = **Ehrlichman;** *H* = **Haldeman.**

(Hay que recordar que hay una errata en esta tabla: debe figurar un -5 donde aparece un -2 encerrado en una circunferencia roja).

Tenemos que buscar los números más pequeños en términos absolutos. Cuando Ehrlichman obstruye (primera columna) a Dean le interesa hablar (-2 > -3), y cuando Ehrlichman habla (segunda columna) a Dean le interesa hablar (-2 > -5). Igualmente, cuando Dean obstruye (primera fila) a Ehrlichman le interesa hablar (-2 > -3), y cuando Dean habla (segunda fila) a Ehrlichman le interesa hablar (-2 > -5). Esto es así tanto si Haldeman decide obstruir como si decide hablar. Por tanto, hablar/hablar son estrategias dominantes para Ehrlichman y Dean. Las estrategias dominantes garantizan a los jugadores que las adoptan el mejor resultado posible, haga lo que hagan los oponentes, y por eso los jugadores, cuando tienen una, *deben* adoptarla. Eso harán Ehrlichman y Dean. Además, a Haldeman le interesa también hablar siempre. Véase que los valores para él (tercer valor dentro de cada casilla) son iguales o menores (en términos absolutos) en la matriz de la derecha (Haldeman habla) que en la de la izquierda (Haldeman obstruye), lo que implica que para él hablar es una estrategia débilmente dominante. Pero dado que en este juego hay información completa, Haldeman sabe que Ehrlichman y Dean hablarán, por tener esas estrategias dominantes, y por tanto se situarán en la casilla inferior derecha de la matriz siempre. Haldeman por tanto sólo tiene que comparar esa casilla en una y otra matriz, y decidir. Decidirá hablar, por supuesto. Ese es el único equilibrio de Nash en estrategias puras que se da en este juego.

3. Suponga que en Obstruccionismo en Watergate, sólo Dean y Ehrlichman pueden elegir. Haldeman está totalmente bajo el control del presidente y debe continuar con el obstruccionismo hasta el amargo final. Reescriba la forma normal y halle la solución. (Indicación: Haldeman es un títere estratégico en esta versión del juego).

El juego del Watergate nos quedaría como un juego en forma normal con uno de los jugadores, Haldeman, sin capacidad de decisión, obligado a obstruir hasta el final, lo que implica quedarse con la matriz izquierda de la Figura 4.7 de la página 119:

			Ehrlichman
		Obstrucción	Hablar
	Obstrucción	(-3, -3, -3)	(-5, -2, -5)
Dean	Hablar	(-2, -5, -5)	(-2, -2, -5)

Tanto Dean como Ehrlichman tienen estrategias dominantes que les llevan necesariamente a un equilibrio de Nash en estrategias puras que es hablar/hablar. Haldeman no tiene nada que decir, pero obtiene un resultado en ese equilibrio, que es el peor que podría obtener (- 5).

4. **Halle el equilibrio en estrategias mixtas de Coordinación de sistemas de vídeo con tres empresas.**

Estamos en la Figura 4.5 de la página 114:

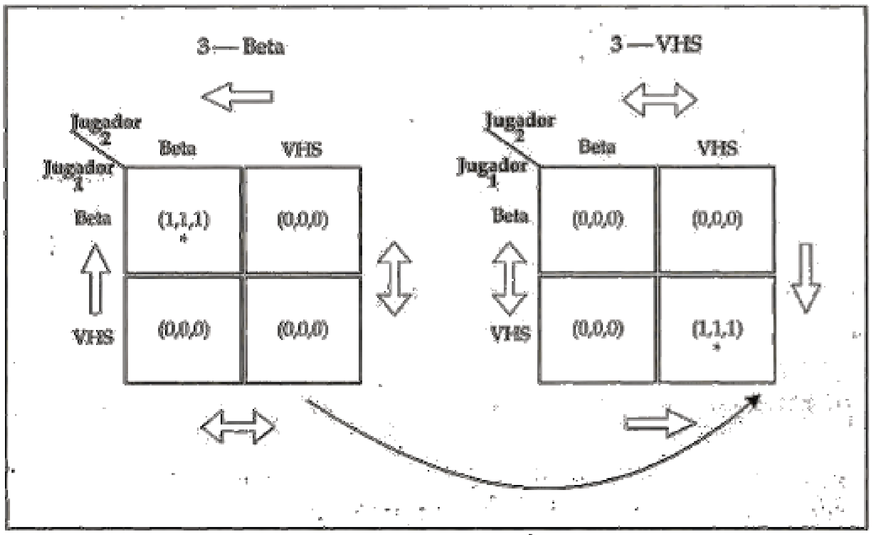


Figura 4.5. Coordinación de sistemas de vídeo, tres empresas.

Tenemos que p(Beta) es la probabilidad de que una empresa elija el sistema Beta; y p(VHS), la probabilidad de que una empresa elija el sistema VHS. Consideremos la situación que afronta la empresa 1. Con probabilidad $p(\text{Beta})^2$ las otras dos empresas habrán escogido el sistema Beta cuando la empresa 1 tiene que decidir. Con probabilidad $2p(\text{Beta})p(\text{VHS})$ una de las empresas con las que compite la empresa 1 habrá escogido Beta, y la otra VHS. Con probabilidad $p(\text{VHS})^2$ las dos oponentes habrán escogido VHS. Si la empresa 1 escoge finalmente Beta, el resultado esperado será:

$$\begin{aligned} EV_1(\text{Beta}) &= p(\text{Beta})^2(1) + 2p(\text{Beta})p(\text{VHS})(0) + p(\text{VHS})^2(0) \\ &= p(\text{Beta})^2 \end{aligned}$$

Si la empresa 1 elije VHS el valor esperado de sus resultados será:

$$\begin{aligned} EV_1(\text{VHS}) &= p(\text{Beta})^2(0) + 2p(\text{Beta})p(\text{VHS})(0) + p(\text{VHS})^2(1) \\ &= p(\text{VHS})^2 \end{aligned}$$

Igualándolas obtenemos: $p(\text{Beta}) = p(\text{VHS}) = 0{,}5$

En la obtención del resultado se aprovecha el hecho de que el equilibrio de Nash en estrategias mixtas es simétrico.

5. Escriba la versión con tres jugadores de Oportunidad de mercado, Ventaja competitiva y Hagamos un trato utilizando la notación $u_i(x)$. Demuestre que cada uno de estos juegos es simétrico.

Empezamos con Hagamos un trato (Figura 4.6 de la página 115):

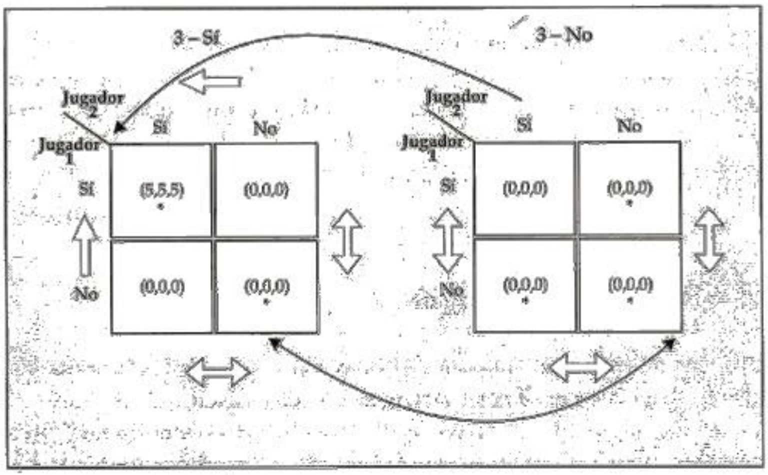


Figura 4.6. Hagamos un trato, tres jugadores. Las ganancias están en millones de dólares.

Si $x_i = 1$ el jugador i dice "sí"; $x_i = 0$, el jugador i dice "no". La función de utilidad para el jugador i será:

$u_i(x) = 5$ si $\sum x_i = 3$
$u_i(x) = 0$ en cualquier otro caso

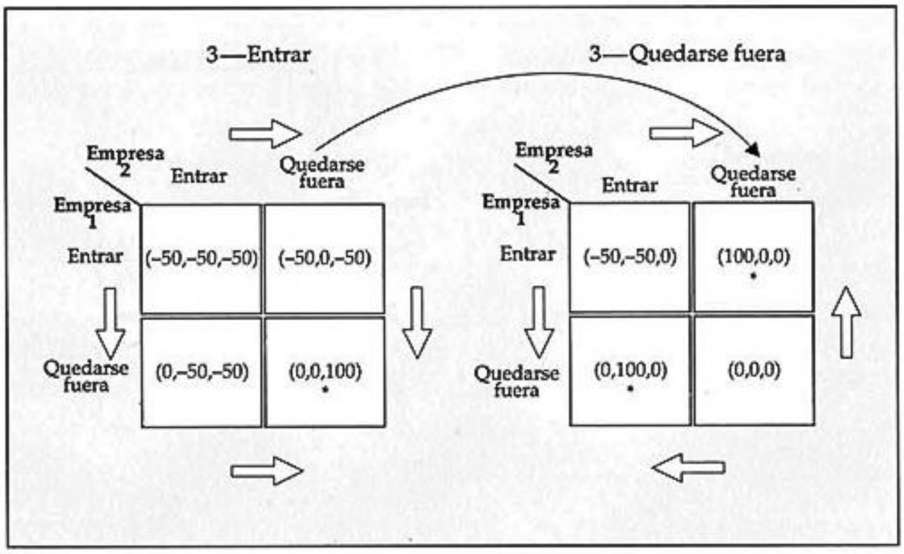


Figura 4.4. Oportunidad de mercado, tres empresas.

Si $x_i = 1$ indica que la empresa i "entra"; $x_i = 0$, indica que la empresa i "se queda fuera". La función de utilidad para la empresa i será:

$u_i(x) = 0$ si $\sum x_i = 0$

$u_i(x) = 100$ si $x_i = 1 = \sum x_i$ (es decir, si i es la única que entra)

$u_i(x) = -50$ si $x_i = 1 < \sum x_i$ (es decir, si i entra pero además entra alguien más)

Ventaja competitiva se presenta en la Figura 4.3 de la página 111:

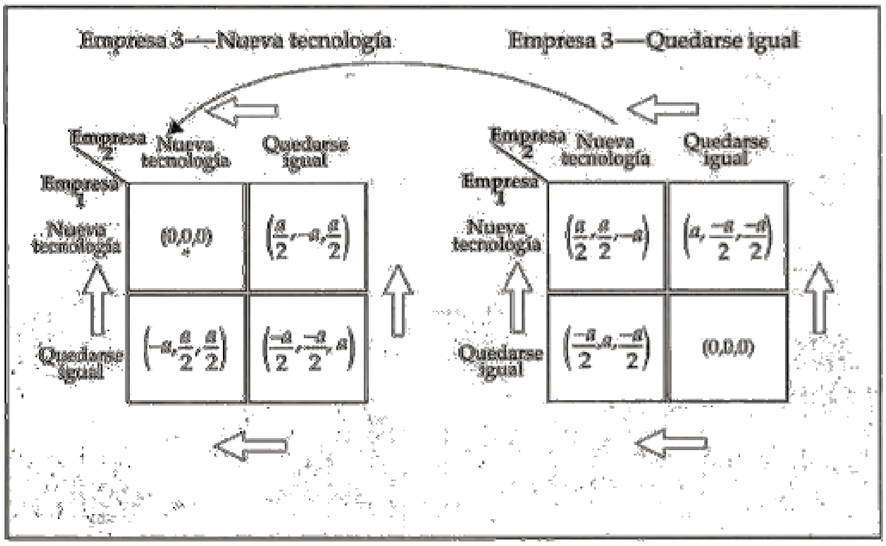


Figura 4.3. Ventaja competitiva, tres empresas.

Ahora $x_i = 1$ significa que la empresa i "ha adoptado la nueva tecnología"; $x_i = 0$, significa que la empresa i no la ha adoptado y "se queda igual". La función de utilidad para la empresa i será:

$u_i(x) = 0$ si $\sum x_i = 0$ o bien $\sum x_i = 3$ (es decir, si nadie la adopta o la adoptan todos)

$u_i(x) = a$ si $x_i = 1 = \sum x_i$ (es decir, si sólo la adopta la empresa i)

$u_i(x) = a/2$ si $x_i = 1$ y $\sum x_i = 2$ (es decir, si i la adopta y también otra empresa)

$u_i(x) = -a$ si $x_i = 0$ y $\sum x_i = 2$ (es decir, si i no la adopta, pero sí lo hacen las otras dos)

$u_i(x) = -a/2$ si $x_i = 0$ and $\sum x_i = 1$ (es decir, si i no la adopta, pero lo hace una de las otras dos)

Obsérvese que todas esas funciones de utilidad pueden escribirse en función de sólo dos variables (x_i, $\sum x_i$), y ello las hace simétricas (la misma función válida para los 3 jugadores).

6. En Hagamos un trato con tres jugadores, hay 40 millones de dólares en juego. El jugador 1 obtiene una ganancia dos veces mayor que la de los jugadores 2 o 3 si se llega a un acuerdo. Halle todos los equilibrios que pueda y luego la solución.

Volvemos al juego Hagamos un trato, p. 115:

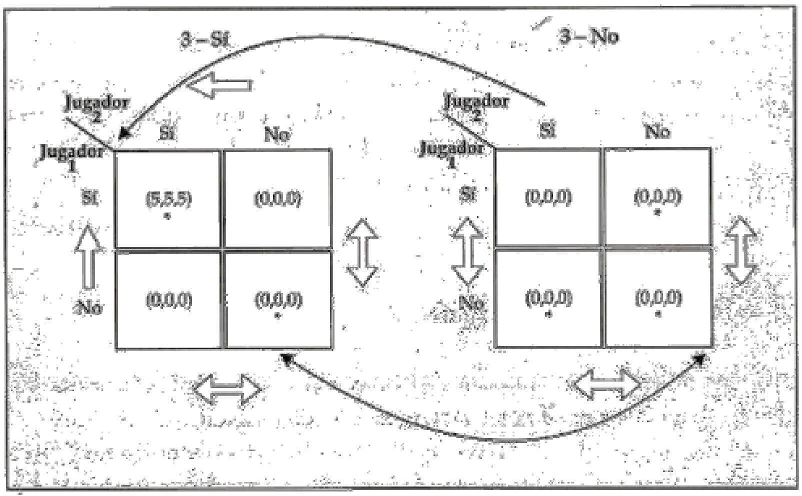


Figura 4.6. Hagamos un trato, tres jugadores. Las ganancias están en millones de dólares.

Pero ahora las ganancias cambian, afectando los cambios a las dos matrices, que pasan a ser:

Jugador 3 sí			
		Jugador 2	
		Sí	No
Jugador 1	Sí	(20,10,10)	(0,0,0)
	No	(0,0,0)	(0,0,0)

Jugador 3 no			
		Jugador 2	
		Sí	No
Jugador 1	Sí	(0,0,0)	(0,0,0)
	No	(0,0,0)	(0,0,0)

Donde los números significan millones de dólares.

Hay 5 equilibrios de Nash en estrategias puras: (sí, sí, sí), (no, no, no), (no, no, sí), (sí, no, no) y (no, sí, no). El juego no es simétrico, por lo que no se puede aplicar la condición suficiente de simetría. Sin embargo, la estrategia "sí" domina débilmente a la estrategia "no". Todos los equilibrios de Nash excepto (sí, sí, sí) tienen un 0% de eficiencia, mientras que (sí, sí, sí) tiene un 100% de eficiencia.

7. **Demuestre que Hagamos un trato con dos o más jugadores no tiene equilibrio en estrategias mixtas. (Indicación: Suponga que lo tiene y demuestre que las ecuaciones resultantes no tienen solución).**

Problema 7, página 129.

Volvemos al juego Hagamos un trato, Figura 4.6, p. 115. Tenemos que p_1(sí) es la probabilidad de que el jugador 1 diga "sí", y p_1(no) la probabilidad de que diga "no", y lo mismo para el jugador 2 y p_2(sí) y p_2(no). Si el jugador 1 dice "sí", esperará obtener lo siguiente:

$EV_1(\text{sí}) = (5)p_2(\text{sí}) + (0)p_2(\text{no}) > 0$

Si el jugador 1 dice "no" obtendrá $u_1 = 0$ con total seguridad, siempre. Dado que el "sí" permite un resultado –en promedio- superior al "no" para el jugador 1, no tiene sentido usar una estrategia mixta. Lo mismo vale para el jugador 2. Por tanto, no hay equilibrio de Nash en estrategias mixtas.

Se puede obtener un resultado más general de este caso particular. Si una estrategia pura domina débilmente a otra, la dominada no puede formar parte de un equilibrio de Nash en estrategias mixtas que incluya la estrategia que la domina débilmente. Esto se ve aún más claramente cuando hay una estrategia estrictamente dominante: las dominadas no pueden formar parte de una estrategia mixta junto a ella, es decir, no hay estrategias mixtas.

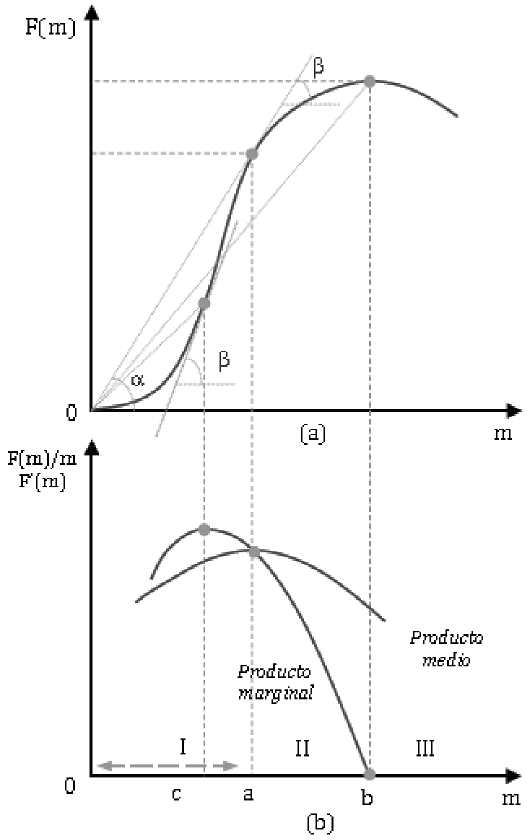
8. **En La tragedia de los ejidos, la función de producción del ejido es $F(m) = 1{,}6m - 0{,}2m^2$. La tasa de beneficio fuera del ejido continúa siendo del 10%. Resuelva el juego cuando hay cinco jugadores. ¿Es trágica su solución?**

Vamos a emplear el criterio $F(m)/m > w$, para $F(m) = 1{,}6m - 0{,}2m^2$. Sustituyendo tendremos:

$F(5)/5 = 1{,}6 - (0{,}2)5 = 0{,}6 > 0{,}1$

Por tanto los 5 jugadores usarán el ejido. Este resultado está en la zona trágica, donde el producto marginal es negativo, ya que el máximo se consigue para esa función de producción en m = 4.

9. **Suponga que en La tragedia de los ejidos sólo sabe que $F(m)/m$ está decreciendo, y que este ratio se acercará eventualmente a cero. No sabe nada más de la función de producción F. Demuestre que la solución es trágica cuando el número de compañías aumenta.**



Un F(m)/m decreciente quiere decir un producto medio decreciente. Cuando el producto medio ha empezado a decrecer el marginal lo viene haciendo antes. Si derivamos F(m)/m con respecto a m tendremos:

$d[F(m)/m]/dm = [F'(m)m - F(m)]/m^2 = [F'(m) - F(m)/m]\,(1/m) < 0$

Donde F'(m) es el producto marginal y F(m)/m es el producto medio. Obviamente, para que eso sea negativo tiene que ocurrir que $F'(m) < F(m)/m$. Cuando el producto medio empieza a decrecer, el marginal queda por debajo, por lo que tiene que estar decreciendo desde antes y cortar al medio en su máximo. Veamos un gráfico clásico de esta relación. Obviamente, estamos a la derecha del punto "a". Si el número de compañías aumenta más aún el producto marginal seguirá decreciendo, y también el producto medio, y cada empresa adicional que entra reduce aún

10. **Usted dirige una gran compañía eléctrica que está considerando utilizar la energía termal. A su compañía se le ofrece un contrato por 30 años en un campo siberiano de géiseres, el segundo mayor del mundo después de Yellowstone. Sus consultores rusos le aseguran que Rusia será políticamente estable durante el periodo de vida del contrato. ¿De qué tipo de cuestiones necesita conocer la respuesta antes de embarcarse en este proyecto? Usted tiene acceso a toda la información públicamente disponible sobre los géiseres de California.**

Es una cuestión abierta, para debatir en clase. Pero como hemos visto, hay dos cuestiones esenciales que la empresa debe conocer. El tipo de interés esperado para esos 30 años, que determina el rendimiento mínimo exigible a la inversión en la planta siberiana, que podemos calcular extrapolando de la experiencia pasada; y las normas rusas que regulan el acceso al recurso de otras empresas (¿es un contrato que ofrece exclusividad?), pues una sobreexplotación reducirá su rendimiento.