



GRADO

GUÍA DE ESTUDIO DE LA ASIGNATURA CAMPOS Y ONDAS

ORIENTACIONES PARA SU DESARROLLO



MODULO V

ONDAS ELECTROMAGNETICAS PLANAS

Tema 11. Ondas electromagnéticas planas

semana 9

Tema 12. Incidencia de ondas planas sobre planos de discontinuidad

semana 10

FÉLIX ORTIZ SÁNCHEZ

GRADO EN INGENIERÍA MECÁNICA

GRADO EN INGENIERÍA ELÉCTRICA

GRADO EN INGENIERÍA ELECTRÓNICA INDUSTRIAL Y AUTOMÁTICA

GRADO EN TECNOLOGÍAS INDUSTRIALES

CAPÍTULO VI

ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS

En el capítulo se introduce el concepto de *onda electromagnética plana* como solución de las ecuaciones de Maxwell. Se estudian desde el punto de vista fasorial.. Se estudia el *efecto Doppler*; el concepto de *Polarización* de ondas; La *transmisión y reflexión de ondas entre medios materiales distintos*; La transmisión de energía mediante ondas electromagnéticas.

ESQUEMA-RESUMEN

- **Ecuación de ondas electromagnéticas (E-M) libre de fuentes: Ecuación homogénea de Helmholtz.**
- **Onda plana.**
- **Efecto Doppler.**
- **Ondas transversales E-M.**
- **Polarización de ondas E-M planas.**
- **Influencia del medio en la propagación de una onda E-M plana.**
- **Paquete de ondas y velocidad de grupo.**
- **Transmisión de potencia por ondas E-M. Vector de Poynting**
- **Reflexión y Refracción de ondas E-M planas sobre distintos medios y con distintas polarizaciones.**

Requisitos previos

La perfecta asimilación de los temas anteriores y el conocimiento de cursos anteriores de los principios básicos de óptica.

6 Ondas electromagnéticas planas

6.1 Ondas planas en medios sin pérdidas

Se ha visto en capítulos anteriores, que la ecuación que explica el comportamiento del campo \mathbf{E} en un medio no conductor libre de fuentes es la ecuación homogénea de Helmholtz. La ecuación de ondas o de Helmholtz se puede obtener de las ecuaciones de Maxwell:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \quad (6.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (6.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (6.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \quad (6.4)$$

Si en la ecuación (6.1) se toma el rotacional y se aplica la identidad vectorial:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla \nabla \cdot \mathbf{A} - \nabla^2 \mathbf{A} \quad (6.5)$$

se tiene tras utilizar las ecuaciones (6.2) y (6.3) que:

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \quad (6.6)$$

de forma similar se obtiene la ecuación de ondas para el campo magnético \mathbf{H} :

$$\nabla^2 \mathbf{H} = \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} \quad (6.7)$$

las ecuaciones (6.6) y (6.7) son realmente tres ecuaciones escalares, una por cada componente. Si el medio fuese con pérdidas ($\mathbf{J} \neq 0$) la ecuación (6.2) tendría la forma:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \sigma \mathbf{E} + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (6.8)$$

y la ecuación de ondas será:

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \mu \sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \quad (6.9)$$

Una solución posible de las ecuaciones de ondas (6.6) y (6.7) es cualquier función de la forma $F = F(t \pm \sqrt{\mu \varepsilon} x)$, en particular puede ser armónica con el argumento

$t \pm \sqrt{\mu\varepsilon}x$. En ese caso se puede pasar a notación fasorial y teniendo en cuenta que la derivada temporal es $j\omega$, se tiene que:

$$\nabla^2 \hat{\mathbf{E}} = \mu\varepsilon j\omega^2 \hat{\mathbf{E}} \quad (6.10)$$

que si se hace $k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}$, se obtiene la conocida expresión de la ecuación de ondas o de Helmholtz para el campo \mathbf{E} (en forma fasorial):

$$\nabla^2 \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} = 0 \quad (6.11)$$

donde se ha quitado el sombrerito al campo \mathbf{E} dando por entendido que en lo sucesivo se trabaja con fasores, de forma que cuando sea necesario trabajar en el dominio temporal se indicará expresamente. La ecuación equivalente para \mathbf{H} es:

$$\nabla^2 \mathbf{H} + k^2 \mathbf{H} = 0 \quad (6.12)$$

a la constante k (rad/m), ya se ha indicado anteriormente, se le llama número de onda:

$$k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon} = \frac{\omega}{u_f} = \frac{2\pi f}{u_f} = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (6.13)$$

donde ω es la frecuencia angular de la onda, f la frecuencia, λ la longitud de onda y u_f la velocidad de fase, cuyo valor en función de las constantes del medio es

$$u_f = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \text{ m/s} \quad (6.14)$$

Se considera una onda plana (los vectores de campo están en un plano en cada punto y los planos correspondientes a dos puntos distintos son paralelos) uniforme (la magnitud y fase de los fasores campo son independientes de la posición dentro del plano). Sin perder generalidad, se puede suponer que los vectores \mathbf{E} y \mathbf{H} están situados en el plano xy , además se pueden orientar los ejes de forma que la dirección x positiva, coincida con la dirección del campo \mathbf{E} , con esta distribución

$$\mathbf{E} = E_x(z)\mathbf{a}_x \quad (6.15)$$

pues al ser el campo \mathbf{E} uniforme en el plano xy no puede ser función de las coordenadas x e y , esto implica que las derivadas parciales respecto a x e y deben ser cero con lo cual la ecuación (6.11) queda reducida a:

$$\frac{d^2 E_x}{dz^2} + k^2 E_x = 0 \quad (6.16)$$

si utilizamos la Ley de Faraday, $\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu\mathbf{H}$ se obtiene que:

$$\mathbf{H} = -\frac{1}{j\omega\mu} \frac{\partial E_x}{\partial z} \mathbf{a}_y = H_y(z) \mathbf{a}_y \quad (6.17)$$

dado que \mathbf{H} también es uniforme y no puede depender de x ni de y . Como se sigue de las ecuaciones (6.16) y (6.17), en las ondas planas uniformes, los campos \mathbf{E} y \mathbf{H} son perpendiculares entre sí, además el vector de Poynting $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$ (que, no se olvide, representa el flujo de energía) apunta en la dirección z .

La solución de la ecuación (6.16) es del tipo:

$$E_x(z) = E_0^+ e^{-jkz} + E_0^- e^{jkz} \quad (6.18)$$

cuya expresión temporal se obtiene tras multiplicar por $e^{j\omega t}$ y tomar la parte real:

$$E(z, t) = E_0^+ \cos(\omega t - kz) + E_0^- \cos(\omega t + kz) \quad (6.19)$$

Si se dibuja el primer sumando del segundo miembro para dos tiempos distintos se tiene la misma función moviéndose hacia la derecha. Si se toma un punto de la onda de fase constante, $\omega t - kz = cte$, se puede deducir la velocidad de fase de la onda derivando en dicha expresión:

$$u_f = \frac{dz}{dt} = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \quad (6.20)$$

El segundo sumando de la expresión (6.19) representa una onda que se mueve hacia la izquierda con la misma velocidad de fase u_f , si no existen superficies de discontinuidad basta con estudiar cualquiera de las dos ondas viajeras (normalmente la positiva), sin embargo cuando aparecen discontinuidades existirán reflexiones y habrá que considerar ambas ondas. Utilizando (6.17) y (6.18) se tiene, tras pasar al dominio temporal, que:

$$H_y = \frac{E_0^+}{\eta} \cos(\omega t - kz) - \frac{E_0^-}{\eta} \cos(\omega t + kz) \quad (6.21)$$

por supuesto todo lo indicado para la onda de campo eléctrico es aplicable a la onda de campo magnético asociada. A la cantidad η se la denomina *impedancia intrínseca* del medio:

$$\eta = \frac{\omega\mu}{k} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \quad (6.22)$$

en el vacío su valor es aproximadamente $120\pi \sim 377 \Omega$.

6.2 Efecto Doppler

El efecto Doppler consiste en el desplazamiento en la frecuencia que un observador mide cuando el emisor o ambos están en movimiento relativo. Si el emisor se acerca al receptor con una velocidad u y está emitiendo una onda electromagnética de frecuencia f , la frecuencia que detecta el receptor es:

$$f' = f \left(1 + \frac{u}{c} \cos \theta \right) \quad (6.23)$$

donde la igualdad es válida solamente en primer orden de aproximación, c es la velocidad de la luz en el vacío y θ es el ángulo entre la dirección del movimiento del emisor y la dirección entre la posición inicial del emisor y la posición del receptor.

6.3 Ondas transversales

Las ondas planas estudiadas en la sección 6.1 se caracterizan porque los campos \mathbf{E} y \mathbf{H} son perpendiculares entre sí y perpendiculares, a su vez, a la dirección de avance de la onda, por ello se llaman transversales. En la citada sección, la dirección del movimiento se ha tomado como la del eje z , pero esto no tiene porque ser de esta forma, en el caso más general la dirección de la onda puede ser cualquiera. Si se toma un vector número de onda (en un sistema de ejes cartesianos):

$$\mathbf{k} = \mathbf{a}_x k_x + \mathbf{a}_y k_y + \mathbf{a}_z k_z \quad (6.24)$$

el campo eléctrico fasorial se puede escribir como

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{a}_n E_0 e^{i\mathbf{r}\cdot\mathbf{k}} \quad (6.25)$$

Donde \mathbf{a}_n es un vector unitario en la dirección del campo \mathbf{E} , \mathbf{r} es el vector posición del plano de onda y \mathbf{k} es vector normal a dicho plano que indica la dirección de avance de la onda. La expresión instantánea de \mathbf{E} será:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{a}_n E_0 \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \quad (6.26)$$

El campo \mathbf{H} se obtiene de \mathbf{E} por medio de las ecuaciones de Maxwell, teniendo en cuenta las componentes cartesianas de \mathbf{a}_n . Por supuesto esto se puede hacer en cualquier sistema de coordenadas ortonormal con sus correspondientes coordenadas.

6.4 Polarización de ondas planas

En el caso más general, una onda plana viajera en la dirección z tiene dos componentes para el campo eléctrico \mathbf{E} :

$$\mathbf{E}(z) = E_x \mathbf{a}_x + E_y \mathbf{a}_y \quad (6.27)$$

La expresión temporal de las componentes E_x y E_y (recordamos que no se usa distinta notación para distinguir los campos en forma fasorial de los campos en el dominio temporal, sino que se indica cada vez en que dominio se trabaja cuando, como en este caso, se necesite utilizar una formulación u otra), tomando por comodidad las componentes en referencia seno.

$$E_x = E_1 \text{sen } \omega t - kz \quad (6.28)$$

$$E_y = E_2 \text{sen } \omega t - kz + \theta \quad (6.29)$$

amplitud dada por:

$$E_{x0} = E_1 \text{ y } E_{y0} = E_2 e^{j\theta} \quad (6.30)$$

Donde E_1 es la amplitud de la componente de \mathbf{E} en la dirección x , E_2 es la amplitud de la componente de \mathbf{E} en la dirección y y θ es el ángulo de fase temporal que lleva E_y sobre E_x (diferencia de fase entre E_x y E_y). En el punto $z = 0$ se cumplen las expresiones:

$$\text{sen } \omega t = \frac{E_x}{E_1} \quad (6.31)$$

$$\text{sen } \omega t \cos \theta + \cos \omega t \text{sen } \theta = \frac{E_y}{E_2} \quad (6.32)$$

teniendo en cuenta la relación entre el seno y el coseno y usando (6.31), la ecuación (6.32) se convierte en:

$$aE_x^2 + bE_x E_y + cE_y^2 = 1 \quad (6.33)$$

con $a = \frac{1}{E_1^2 \sin^2 \theta}$; $b = \frac{2 \cos \theta}{E_1 E_2}$; $c = \frac{1}{E_2^2 \sin^2 \theta}$. La ecuación (6.33) representa la ecuación de una elipse de semiejes a_η y a_ζ , figura 6.1.

En la figura 6.1, se observan los siguientes elementos, $\text{tg } \xi = \pm \frac{a_\eta}{a_\zeta} = \pm \frac{1}{R}$, $\text{tg } \psi = \frac{E_2}{E_1}$ y α que es el ángulo de giro. Al ángulo ξ se le conoce como ángulo de elipticidad y caracteriza la forma de la elipse así como el sentido de giro de la misma, su valor va entre $-\pi/4$ y $\pi/4$, a la cantidad R se la conoce como *razón axial* de la elipse y varía entre uno (polarización circular) e infinito (polarización lineal). Los ángulos α y ξ se relacionan con los parámetros E_x , E_y y θ mediante las relaciones:

$$\left. \begin{aligned} \text{tg } 2\alpha &= \text{tg } 2\psi \cos \theta & -\pi/2 \leq \alpha \leq \pi/2 \\ \text{sen } 2\xi &= \text{sen } 2\psi \text{sen } \theta & -\pi/4 \leq \xi \leq \pi/4 \end{aligned} \right\} \text{donde } 0 \leq \psi \leq \pi/2$$

La elipse degenera en una línea recta para $\xi = 0$ y es una circunferencia para $\xi = \pm\pi/4$. En el caso de polarización lineal, Si la $\text{tg } \psi$ es cero, se tiene polarización lineal según el eje x , si la $\text{tg } \psi$ vale infinito ($\psi = \pi/2$) la polarización es lineal según el eje y , si $E_1 = E_2$ y además $\theta = 0$ también se tiene polarización lineal pero con el eje χ de la elipse girado 45° respecto a x . Valores positivos de ξ corresponden a valores positivos del $\text{sen}(\theta)$ y se relacionan con el giro del vector campo eléctrico en la dirección contraria a las manecillas del reloj según crece t , mientras que si el $\text{sen}(\theta)$ es positivo el valor de ξ será negativo y el vector \mathbf{E} girará en el sentido de las manecillas del reloj. Si $E_1 = E_2$ y $\theta = 90^\circ$ la polarización será circular a mano izquierda, mientras que si $\theta = -90^\circ$ la polarización será circular a mano derecha (D.K. Cheng; J. D. Kraus and D. A. Fleisch; F. T. Ulaby)

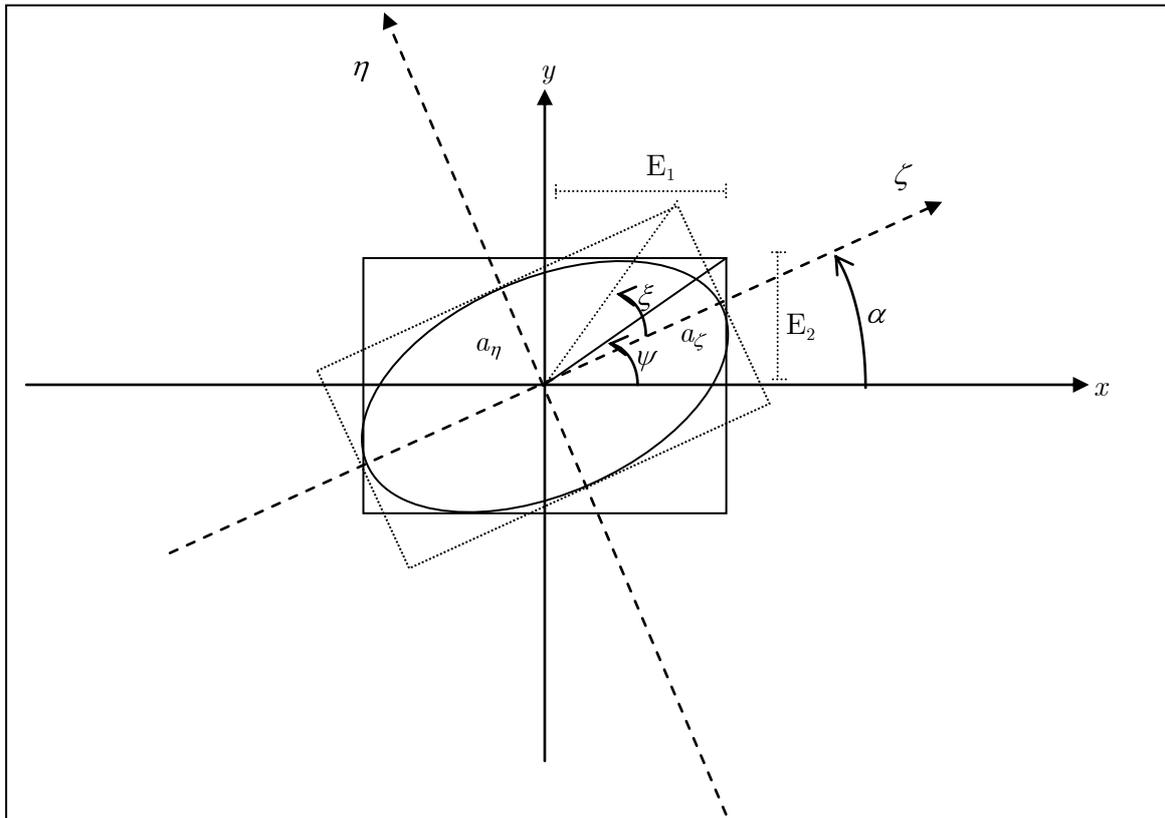


Figura 6.1

Elipse de polarización en el plano xy para una onda viajera en la dirección z

6.5 Ondas planas en medios con pérdidas

En los medios conductores, la conductividad σ es distinta de cero y por lo tanto en dichos materiales bajo la influencia de un campo eléctrico, existirá un flujo de corriente con densidad dada por la Ley de Ohm $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$, en este caso hay que emplear la ecuación del rotacional de \mathbf{H} con fuentes (6.8) ecuación que tras tomar la derivada queda como:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \sigma + j\omega\epsilon \mathbf{E} \quad (6.34)$$

y la correspondiente ecuación de ondas de (6.9):

$$\nabla^2 \mathbf{E} = j\omega\mu \sigma + j\omega\epsilon \mathbf{E} \quad (6.35)$$

de forma similar se obtiene la ecuación para el campo \mathbf{H} :

$$\nabla^2 \mathbf{H} = j\omega\mu \sigma + j\omega\epsilon \mathbf{H} \quad (6.36)$$

Como se ha indicado al final del capítulo 5º, si se llama $\gamma^2 = j\omega\mu\sigma + j\omega\varepsilon$ al coeficiente complejo de la ecuación (6.36), γ se puede escribir como: $\gamma = \alpha + j\beta$. Las ecuaciones (6.35) y (6.36) se transforman en:

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \gamma^2 \mathbf{E} \quad (6.37)$$

$$\nabla^2 \mathbf{H} = \gamma^2 \mathbf{H} \quad (6.38)$$

cuyas soluciones son del tipo (6.18),

$$E_x(z) = E_{0c}^+ e^{-j\gamma z} + E_{0c}^- e^{j\gamma z} \quad (6.39)$$

$$H_y(z) = H_{0c}^+ e^{-j\gamma z} + H_{0c}^- e^{j\gamma z} \quad (6.40)$$

como se indicó anteriormente cada campo consta de la suma de dos términos, uno marcado por el signo + que representa una onda que avanza en la dirección z positiva, mientras que el término marcado por el signo - representa una onda en el sentido z negativo. Las amplitudes pueden ser cantidades complejas. A la constante γ se la conoce como *constante de propagación*. Si explicitamos las partes real e imaginaria de la constante de propagación γ , las igualdades (6.39) y (6.40) se pueden describir como:

$$E_x(z) = E_{0c}^+ e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} + E_{0c}^- e^{\alpha z} e^{j\beta z} \quad (6.41)$$

$$H_y(z) = H_{0c}^+ e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} + H_{0c}^- e^{\alpha z} e^{j\beta z} \quad (6.42)$$

los coeficientes con exponente $-\alpha z$ para z crecientes y αz para z decrecientes, representan un factor de decrecimiento de las correspondientes amplitudes E_{0c}^+ , H_{0c}^+ , E_{0c}^- y H_{0c}^- respectivamente. Por esa razón a la constante α se la conoce como *constante de atenuación* (su unidad es el neper por metro Np/m). Los factores con exponentes del tipo $\pm j\beta z$ representan un término de fase y a la constante β se la conoce como *constante de fase* (se mide en radianes por metro rad/m). Si nos quedamos solo con la parte de las ondas en la dirección z positiva, tras sustituir en las leyes de Faraday, se deduce que,

$$-\gamma E_{0c}^+ e^{-\gamma z} = -j\omega\mu H_{0c}^+ e^{-\gamma z} \quad (6.43)$$

expresión de la que se obtiene la importante relación:

$$\frac{E_{0c}^+}{H_{0c}^+} = \frac{j\omega\mu}{\gamma} = \eta_c \quad (6.44)$$

si nos hubiésemos quedado con las soluciones que van en la dirección de z decreciente:

$$\frac{E_{0c}^-}{H_{0c}^-} = -\eta_c \quad (6.45)$$

las expresiones (6.44) y (6.45) nos dicen que las fases no son independientes sino que están relacionadas a través de una constante η_c a la que se conoce como impedancia intrínseca. La constante intrínseca, η_c , se mide en ohmios Ω (dado que es el cociente entre un campo eléctrico y un campo magnético: $\text{Vm}^{-1}/\text{Am}^{-1} = \Omega$). Por supuesto η_c es, en general, una magnitud compleja y por lo tanto tendrá una amplitud y una fase η y θ_η :

$$\eta_c = \eta e^{j\theta_\eta} \quad (6.46)$$

Teniendo en cuenta (6.44), (6.45) y (6.46), la igualdad (6.42) se puede poner como:

$$H_y(z) = \frac{E_{0c}^+}{\eta} e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} e^{-j\theta_\eta} - \frac{E_{0c}^-}{\eta} e^{\alpha z} e^{j\beta z} e^{-j\theta_\eta} \quad (6.47)$$

si las amplitudes son complejas:

$$E_{0c}^+ = E_0^+ e^{j\theta_+}; E_{0c}^- = E_0^- e^{j\theta_-} \quad (6.48)$$

las expresiones (6.41) y (6.47) se convierten en:

$$E_x(z) = E_0^+ e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} e^{j\theta_+} + E_0^- e^{\alpha z} e^{j\beta z} e^{j\theta_-} \quad (6.49)$$

$$H_y(z) = \frac{E_0^+}{\eta} e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} e^{-j\theta_\eta} e^{j\theta_+} - \frac{E_0^-}{\eta} e^{\alpha z} e^{j\beta z} e^{-j\theta_\eta} e^{j\theta_-} \quad (6.50)$$

multiplicando por la fase temporal $e^{j\omega t}$ y tomando la parte real (para la onda en sentido z positivo, para la parte con z decrecientes la expresión es similar) se tiene la expresión instantánea de los campos:

$$E_x(z, t) = E_0^+ e^{-\alpha z} \cos \omega t - \beta z + \theta_+ \quad (6.51)$$

$$H_y(z, t) = \frac{E_0^+}{\eta} e^{-\alpha z} \cos \omega t - \beta z + \theta_+ - \theta_\eta \quad (6.52)$$

como el medio es con pérdidas la constante β es la parte imaginaria de γ y no tiene porque valer $k = \omega\sqrt{\mu\epsilon}$, como en el caso de medios sin pérdidas, pero si se define un número de onda complejo k_c , relacionado con γ por $\gamma = jk_c$ se puede definir una expresión formalmente similar si se introduce una constante dieléctrica compleja ϵ_c de forma que $k_c = \omega\sqrt{\mu\epsilon_c}$. Se define entonces:

$$\varepsilon_c = \varepsilon' - j\varepsilon'' = \varepsilon \left(1 - j \frac{\sigma}{\omega\varepsilon} \right) = \varepsilon - j \frac{\sigma}{\omega} \quad (6.53)$$

donde ε es la constante dieléctrica del material (no compleja). Se ve en (6.53) que la constante dieléctrica compleja depende de la frecuencia. En función de la constante dieléctrica compleja se puede escribir la constante de propagación como:

$$\gamma = \alpha + j\beta = j\omega\sqrt{\mu\varepsilon} \left(1 + \frac{\sigma}{j\omega\varepsilon} \right)^{1/2} = j\omega\sqrt{\mu\varepsilon'} \left(1 - j \frac{\varepsilon''}{\varepsilon'} \right)^{1/2} \quad (6.54)$$

de donde se deduce que la parte real de ε_c , $\varepsilon' = \varepsilon$, mientras que la parte imaginaria $\varepsilon'' = \frac{\sigma}{\omega}$. Al cociente de la parte imaginaria a la parte real de la constante dieléctrica se le conoce como *tangente de pérdidas*

$$\operatorname{tg} \delta_c = \frac{\sigma}{\omega\varepsilon} \quad (6.55)$$

donde al ángulo δ_c se le conoce como *ángulo de pérdidas*. El ángulo de pérdidas da indicación de si un medio es mal o buen conductor, si δ_c es muy pequeño el medio es un buen aislante mientras que si δ_c es muy grande es un buen conductor. Nótese que el carácter de buen o mal conductor, para un material, no depende solo de la conductividad y de la constante dieléctrica, sino que también es función de la frecuencia, así un material puede ser aislante a determinadas frecuencias y conductor a otras. El nombre de tangente de pérdidas se entiende mejor (C. R. Paul et al), si nos fijamos en la ecuación de Ampère (en forma fasorial):

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_{total} = \mathbf{J}_{cond} + \mathbf{J}_{desp} = \sigma \mathbf{E} + j\omega\varepsilon \mathbf{E} \quad (6.56)$$

se ve que el segundo miembro es una cantidad compleja cuyos dos términos tienen un desplazamiento de fase temporal de 90° . Si se representan en un plano complejo (figura 6.2), se comprueba que:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{|\mathbf{J}_{cond}|}{|\mathbf{J}_{desp}|} = \frac{\sigma}{\omega\varepsilon} \quad (6.57)$$

y de ahí viene el nombre de tangente de pérdidas pues relaciona la pérdida de energía por conducción con la energía que se almacena en la corriente de desplazamiento y su cociente da una medida de la pérdida natural de energía en el material.

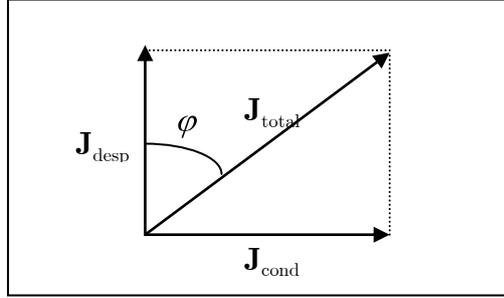


Figura 6.2

Tras elevar al cuadrado la ecuación (6.54) y separar la parte real de la imaginaria se obtiene que

$$\alpha^2 - \beta^2 = -\omega\mu\varepsilon' \quad (6.58)$$

$$2\alpha\beta = \omega^2\mu\varepsilon'' \quad (6.59)$$

Las ecuaciones (6.58) y (6.59) forman un sistema de ecuaciones de segundo grado que resuelto suministran el valor de las constantes de atenuación y fase en un medio con pérdidas en función de la constante dieléctrica compleja (sus partes real e imaginaria)(F. T. Ulaby)

$$\alpha = \omega \left[\frac{\mu\varepsilon'}{2} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{\varepsilon''}{\varepsilon'} \right)^2} - 1 \right) \right]^{1/2} \quad (6.60)$$

$$\beta = \omega \left[\frac{\mu\varepsilon'}{2} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{\varepsilon''}{\varepsilon'} \right)^2} + 1 \right) \right]^{1/2} \quad (6.61)$$

Se ha visto más arriba que la impedancia intrínseca en los medios sin pérdidas es compleja, su valor es:

$$\eta_c = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon_c}} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon'}} \left(1 - j \frac{\varepsilon''}{\varepsilon'} \right)^{-1/2} \quad (6.62)$$

Recordando que:

$$\frac{\varepsilon''}{\varepsilon'} = \frac{\sigma}{\omega\varepsilon} \quad (6.63)$$

es la tangente de pérdidas. Al ser la impedancia intrínseca compleja, en los medios con pérdidas, los campos \mathbf{E} y \mathbf{H} no están en fase temporal como en los medios sin pérdidas.

Se sabe (véanse las ecuaciones (6.49) y (6.50)) que la amplitud de una onda plana uniforme que se desplaza en dirección z en un medio con pérdidas, decrece exponencialmente según la expresión $|E_0^+|e^{-\alpha z}$, decrecimiento que se corresponde con una atenuación de la energía transportada por la onda, energía que se pierde convertida en calor. Se define la *profundidad de piel* δ como la distancia en la que la onda se amortigua una cantidad igual a e^{-1} , esto sucede para $\delta = \frac{1}{\alpha}$ y da el orden de magnitud de la distancia que penetra una onda en un medio dado. En un dieléctrico perfecto ideal, la conductividad es cero y por lo tanto la constante de atenuación también lo es y la profundidad de piel es infinita (las ondas en el espacio vacío no sufren pérdida) el extremo opuesto lo ofrecen los conductores ideales en ellos la conductividad y la constante de atenuación son infinitas y por lo tanto δ es cero (la onda no penetra nada en un conductor perfecto). Se dice que se tiene un dieléctrico con pequeñas pérdidas si $\epsilon''/\epsilon' < 10^{-2}$, un buen conductor si $\epsilon''/\epsilon' > 10^2$ y un cuasi-conductor entre esos dos valores.

6.5.1 Dieléctrico con pequeñas pérdidas

De la expresión (6.54), teniendo en cuenta que $\epsilon''/\epsilon' \ll 1$, y que en el desarrollo binomial de $(1-a)^{1/2} \simeq 1 - \frac{a}{2} + \frac{a^2}{8} + \dots$, si $|a| \ll 1$ se deduce que:

$$\gamma \simeq j\omega\sqrt{\mu\epsilon'} \left[1 - j\frac{\epsilon''}{2\epsilon'} + \frac{1}{8}\left(\frac{\epsilon''}{\epsilon'}\right)^2 \right] \quad (6.64)$$

si se separan las partes reales e imaginarias de (6.64) se obtienen las constantes de atenuación y de fase:

$$\alpha \simeq \frac{\omega\epsilon''}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon'}} = \frac{\sigma}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \quad (6.65)$$

$$\beta \simeq \omega\sqrt{\mu\epsilon'} \left[1 + \frac{1}{8}\left(\frac{\epsilon''}{\epsilon'}\right)^2 \right] = \omega\sqrt{\mu\epsilon} \left[1 + \frac{1}{8}\left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2 \right] \quad (6.66)$$

nótese que en primera aproximación el valor de β coincide con el valor de k en los medios sin pérdidas. Usando de nuevo el desarrollo de $(1-a)^{-1/2}$ en la expresión (6.62), se obtiene que:

$$\eta_c \simeq \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon'}} \left(1 + j \frac{\varepsilon''}{2\varepsilon'} \right) = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \left(1 + j \frac{\sigma}{2\omega\varepsilon} \right) \quad (6.67)$$

de donde se deduce que los campos E_x y H_y no están en fase temporal como en los dieléctricos perfectos, como se indicó anteriormente. Como la velocidad de fase es el cociente entre ω y β de (6.66) se deduce que:

$$u_f \simeq \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon'}} \left[1 - \frac{1}{8} \left(\frac{\varepsilon''}{\varepsilon'} \right) \right] \quad (6.68)$$

si como es habitual para pérdidas pequeñas, $\varepsilon''/\varepsilon' < 0,01$ se puede prescindir de los últimos sumandos en (6.66), (6.67) y (6.68) y se obtienen los mismos valores que en los dieléctricos perfectos salvo que en este caso siempre existe un término de atenuación de la amplitud dado por (6.65)

6.5.2 Buenos conductores

En el caso de buenos conductores, $\frac{\varepsilon''}{\varepsilon'} > 100$, aproximando las expresiones (6.60) y (6.61) (esto es considerando que uno es mucho menor que $\frac{\varepsilon''}{\varepsilon'}$ y que $\frac{\varepsilon''}{\varepsilon'} - 1 \approx \frac{\varepsilon''}{\varepsilon'}$) quedan las siguientes expresiones para las constantes de atenuación y de fase:

$$\alpha \simeq \sqrt{\pi f \mu \sigma}; \beta \simeq \sqrt{\pi f \mu \sigma} \quad (6.69)$$

Igualmente, aproximando la expresión (6.62), se obtiene:

$$\eta_c = (1 + j) \sqrt{\frac{\pi f \mu}{\sigma}} = (1 + j) \frac{\alpha}{\sigma} \quad (6.70)$$

en las tres últimas expresiones, se ha empleado que $\omega = 2\pi f$ y que $\sqrt{j} = \frac{1+j}{\sqrt{2}} = e^{j\pi/4}$,

además se ha tenido en cuenta que $\varepsilon'' = \frac{\sigma}{\omega}$ y que $\varepsilon = \varepsilon'$. En un buen conductor la profundidad de penetración o profundidad de piel, es:

$$\delta = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu \sigma}} = \frac{\lambda}{2\pi} = \frac{u_f}{\omega} \quad (6.71)$$

Recordar finalmente, que todas las expresiones de los dos últimos epígrafes son meras aproximaciones y que en cada caso concreto habrá que calibrar si son útiles o no, esto es, si hay que usar más términos en las aproximaciones o si hay que utilizar las expresiones sin aproximar.

6.6 Velocidad de grupo

Se ha visto en el epígrafe 6.1 que para una onda plana uniforme de frecuencia ω , los frentes de dicha onda se mueven con una velocidad que se denomina de fase u_f de valor:

$$u_f = \frac{\omega}{\beta} \quad (6.72)$$

Si el medio es el espacio libre (o en general sin pérdidas), se sabe que la constante de fase es proporcional a la frecuencia,

$$\beta \equiv k = \omega \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0} \quad (6.73)$$

En estas condiciones, la velocidad de fase resulta ser constante e igual a:

$$u_f = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} \quad (6.74)$$

En general en los medios con pérdidas la constante de fase no es lineal con la frecuencia sino que se relaciona con ella de un modo complicado:

$$\beta(\omega) = \text{Im}(\gamma) = \text{Im} \left[\sqrt{j\omega\mu(\sigma + j\omega\varepsilon)} \right] \quad (6.75)$$

Si se envía un grupo de ondas de distintas frecuencias formando un paquete (una señal modulada para transmitir una señal radiofónica o de televisión, por ejemplo) y la transmisión es a través de un medio sin pérdidas se cumple que el paquete llega tal y como ha sido enviado pues todas las ondas componentes se mueven por el medio con la misma velocidad. Si por el contrario el medio de transmisión es un dieléctrico con pérdidas las ondas componentes se mueven por él con diferentes velocidades y el paquete llega al receptor distorsionado. A los medios sin pérdidas se les llama no dispersivos y a los medios con pérdidas dispersivos (veremos más adelante, que las guías de onda aunque estén rellenas de un medio sin pérdidas pueden ser elementos dispersivos para la transmisión de ondas). Es usual, para cada medio concreto, construir en un diagrama la

relación entre la frecuencia y la constante de fase, *diagramas* $\omega-\beta$. En la figura 6.3 se muestra los diagramas para un medio no dispersivo (a) y para un medio dispersivo (b).

En el medio no dispersivo el diagrama es una recta de pendiente $\sqrt{\mu\varepsilon}$ mientras que, en el medio dispersivo, hay que determinar la velocidad de fase para cada punto de la curva, uniendo el punto con el origen mediante una recta y calculando la pendiente de dicha recta

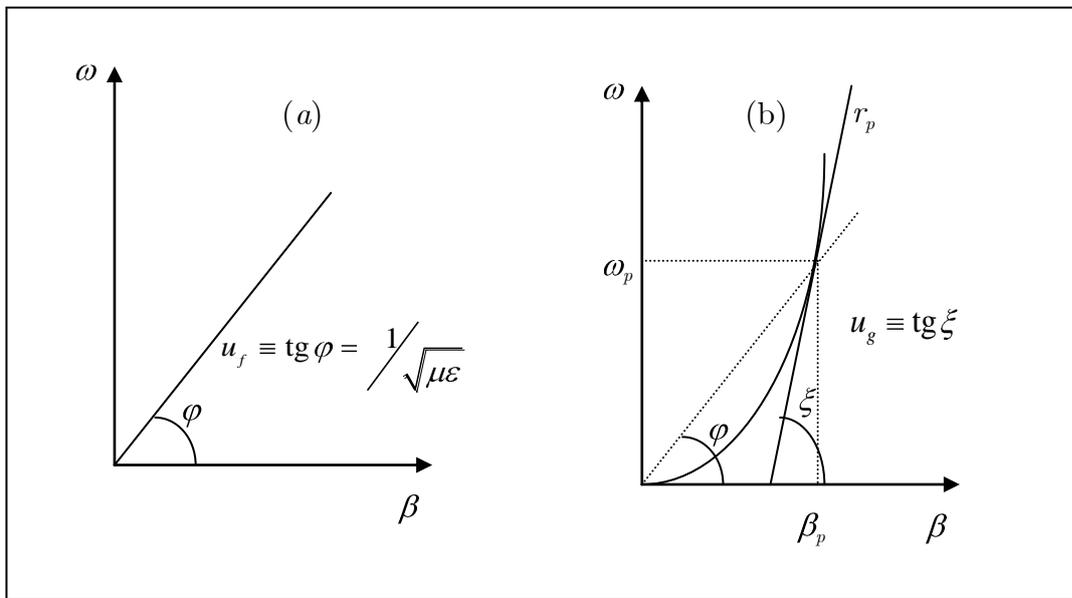


Figura 6.3

Velocidades de fase en medios no dispersivos y de fase y grupo en medios dispersivos

El grupo de ondas está formado normalmente por una onda portadora de frecuencia ω_p (alta) alrededor de la cual hay otras ondas que difieren poco de la frecuencia de la portadora, estas ondas están “envueltas” en una onda que define el grupo y que se mueve con determinada velocidad u_g a la que se denomina velocidad de grupo. La velocidad de grupo en un punto de la gráfica 1.3 (b) se determina calculando la pendiente de la recta tangente en el punto p que analíticamente coincide con:

$$u_g = \frac{d\omega}{d\beta} = \frac{1}{d\beta/d\omega} \quad (6.76)$$

La velocidad de grupo en medios dispersores puede ser mayor o menor que la velocidad de fase. Si es mayor se dice que se tiene dispersión anómala y si es menor se dice que la

dispersión es normal. En medios no dispersivos las velocidades de grupo y de fase coinciden. En medios dispersivos la velocidad de fase de algunas de las ondas del paquete puede ser superior a la velocidad de la luz v_{luz} en dicho medio, mientras que la velocidad de grupo nunca puede ser mayor que v_{luz} .

6.7 Flujo de potencia electromagnética y vector de Poynting \mathcal{P}

El campo \mathbf{E} tiene unidades de V/m y el campo \mathbf{H} de A/m, el producto de ambos tiene entonces unidades de AV/m² y como Amperio \times Voltio \equiv Vatio, el producto de los dos campos representa, desde el punto de vista físico, una densidad de potencia por unidad de área, con unidades W/m². Sea entonces, un vector \mathcal{P} al que se llama *Vector de Poynting* que representa la densidad de potencia transportada por el campo electromagnético de la siguiente forma:

$$\mathcal{P} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} \quad \text{W/m}^2 \quad (6.77)$$

De la fórmula de la divergencia de un producto vectorial, se sabe que:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} \times \mathbf{H} = \mathbf{H} \cdot \nabla \times \mathbf{E} - \mathbf{E} \cdot \nabla \times \mathbf{H} \quad (6.78)$$

Si en (6.78) se utilizan las ecuaciones de Maxwell, se obtiene la siguiente relación:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} \times \mathbf{H} = -\mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} - \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} \quad (6.79)$$

o lo que es lo mismo:

$$-\nabla \cdot \mathcal{P} = \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} \quad \text{Wm}^{-3} \quad (6.80)$$

Que es la forma puntual del Teorema de Poynting. La forma integral de este teorema se formula como:

$$-\oint_s \mathcal{P} \cdot ds = \int_v \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} dv + \int_v \left(\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) dv \quad \text{W} \quad (6.81)$$

La integral del lado izquierdo de la igualdad representa el flujo, hacia dentro del volumen v , del vector de Poynting. La primera integral de la derecha es un término de disipación de potencia en el volumen v . Si el medio es Ohmico, lineal, isótropo y con los

parámetros constitutivos no dependientes de t , se verifica que: $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$; y la integral se transforma en:

$$P_{dis} = \int_v \sigma E^2 dv \quad (6.82)$$

término relacionado con la pérdida de potencia ohmica (efecto Joule) y el movimiento de cargas libres en v . Si se tiene en cuenta que para medios lineales e isótropos con las constantes ε , μ y σ independientes del tiempo se verifica que,

$$\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \varepsilon \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{1}{2} \varepsilon \frac{\partial |\mathbf{E}|^2}{\partial t} = \frac{1}{2} \varepsilon \frac{\partial E^2}{\partial t} \quad (6.83)$$

$$\mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mu \mathbf{H}}{\partial t} = \frac{1}{2} \mu \frac{\partial |\mathbf{H}|^2}{\partial t} = \frac{1}{2} \mu \frac{\partial H^2}{\partial t} \quad (6.84)$$

la tercera integral de (6.81) se transforma en:

$$\int_v \left(\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) dv = \frac{\partial}{\partial t} \int_v \left(\frac{1}{2} \varepsilon E^2 + \frac{1}{2} \mu H^2 \right) dv \quad (6.85)$$

Se sabe que $W_{ele} = \frac{1}{2} \varepsilon E^2$ representa la densidad de energía eléctrica almacenada en el campo \mathbf{E} y que $W_{mag} = \frac{1}{2} \mu H^2$ es la densidad de energía magnética almacenada en el campo \mathbf{H} . De esta forma la integral del lado derecho de (6.85) representa la variación temporal de la energía electromagnética almacenada en el volumen v . En estas condiciones, se puede enunciar el Teorema de Poynting de la siguiente manera: *el flujo neto hacia dentro del vector de Poynting a través de una superficie S , que encierra un volumen v , es la suma de dos términos, el primer término representa la potencia disipada por el movimiento de las cargas en el volumen (potencia ohmica), mientras que el segundo término se relaciona con la variación temporal (crecimiento) de la energía electromagnética almacenada en el volumen.*

El vector de Poynting $\mathcal{P} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ se debe interpretar como la velocidad de transferencia de la energía electromagnética a través de una superficie cerrada. Su dirección siempre es perpendicular a los vectores de campo \mathbf{E} y \mathbf{H} . Por otro lado, en el caso general, los campos \mathbf{E} y \mathbf{H} son complejos y las expresiones de las densidades de energía eléctrica y magnética se pueden expresar respectivamente como:

$$w_e = \frac{1}{2} \varepsilon \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^* \quad (6.86)$$

$$w_m = \frac{1}{2} \mu \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}^* \quad (6.87)$$

de la misma forma la densidad de potencia ohmica, se puede poner como:

$$p_{ohm} = \sigma \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^* = \frac{\mathbf{J} \cdot \mathbf{J}^*}{\sigma} \quad (6.88)$$

Una manera de ver que el vector de Poynting, viene dado por (6.77) es partir de la energía electromagnética que hay en el interior de un volumen dado v y determinar la perdida de energía en ese volumen por efecto Joule (S. V. Marshall *et al*), entonces el flujo de energía hacia fuera del volumen v es, de la ecuación (6.81):

$$\oint_s \mathcal{P} \cdot ds = -\frac{\partial}{\partial t} \int_v \left(\frac{1}{2} \varepsilon E^2 + \frac{1}{2} \mu H^2 \right) dv - \int_v \sigma E^2 dv \quad (6.89)$$

Tras aplicar el teorema de la divergencia

$$\nabla \cdot \mathcal{P} = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \varepsilon E^2 + \frac{1}{2} \mu H^2 \right) - \sigma E^2 \quad (6.90)$$

que usando las expresiones (6.83) y (6.84) se puede escribir de la forma equivalente

$$\nabla \cdot \mathcal{P} = -\left(\varepsilon \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \right) - \sigma \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} \quad (6.91)$$

utilizando las leyes de Maxwell se obtiene que:

$$\nabla \cdot \mathcal{P} = -\varepsilon \mathbf{E} \cdot \frac{\nabla \times \mathbf{H} - \mathbf{J}}{\varepsilon} + \mu \mathbf{H} \cdot \frac{\nabla \times \mathbf{E}}{\mu} - \sigma E^2 \quad (6.92)$$

Teniendo en cuenta la Ley de Ohm y que $\nabla \cdot \mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{A} \cdot \nabla \times \mathbf{B} + \mathbf{B} \cdot \nabla \times \mathbf{A}$, se tiene finalmente que:

$$\nabla \nabla \cdot \mathcal{P} = \nabla \cdot \mathbf{E} \times \mathbf{H} \quad (6.93)$$

Con lo que el vector de Poynting \mathcal{P} que representa el flujo de energía hacia fuera en el volumen v , queda

$$\mathcal{P} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} \quad \text{W/m}^2 \quad (6.94)$$

como cabía esperar.

6.7.1 Densidades de potencia media e instantánea

Se sabe que, en general, las soluciones instantáneas de las ecuaciones de onda para los campos eléctrico y magnético son complejas \mathbf{E}_c y \mathbf{H}_c y por lo tanto tienen una parte real y otra imaginaria. Los campos físicamente reales (en referencia coseno) se obtienen tomando la correspondiente parte real de los campos complejos,

$$\mathbf{E} = \text{Re}(\mathbf{E}_0 e^{-j\omega t}), \quad \mathbf{H} = \text{Re}(\mathbf{H}_0 e^{-j\omega t}) \quad (6.95)$$

recordando que las amplitudes pueden ser cantidades complejas, por ejemplo $\mathbf{E}_0 = \mathbf{E}_{0r} + j\mathbf{E}_{0i}$ y teniendo en cuenta la forma binomial de $e^{-j\omega t}$, tras sustituir en la expresión (6.95) se tiene que:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{0r} \cos \omega t + \mathbf{E}_{0i} \sin \omega t, \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}_{0r} \cos \omega t + \mathbf{H}_{0i} \sin \omega t \quad (6.96)$$

Y, por lo tanto, el vector de Poynting instantáneo toma la forma

$$\mathcal{P} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} = \mathbf{E}_{0r} \times \mathbf{H}_{0r} \cos^2 \omega t + \mathbf{E}_{0i} \times \mathbf{H}_{0i} \sin^2 \omega t + [\mathbf{E}_{0r} \times \mathbf{H}_{0i} + \mathbf{E}_{0i} \times \mathbf{H}_{0r}] \sin \omega t \cos \omega t \quad (6.97)$$

La cantidad físicamente interesante no es propiamente \mathcal{P} pues los valores instantáneos fluctúan mucho con el seno y el coseno. Lo interesante es el valor promedio en un periodo (en ω), teniendo en cuenta que $\langle \sin^2 \omega t \rangle = \langle \cos^2 \omega t \rangle = \frac{1}{2}$ y que también se cumple que $\langle \sin \omega t \cos \omega t \rangle = 0$, se tiene para el valor promedio del vector de Poynting:

$$\langle \mathcal{P} \rangle = \frac{1}{2} [\mathbf{E}_{0r} \times \mathbf{H}_{0r} + \mathbf{E}_{0i} \times \mathbf{H}_{0i}] \quad (6.98)$$

Se deja al lector la tarea de comprobar que:

$$\langle \mathcal{P} \rangle = \frac{1}{2} \text{Re} \mathbf{E}_c \times \mathbf{H}_c^* \quad (6.99)$$

6.8 Incidencia normal de ondas planas sobre planos de discontinuidad

Se sabe que cuando una onda que viaja por un medio con determinados parámetros constitutivos y se encuentra con una superficie de discontinuidad que da paso a otro medio con parámetros constitutivos distintos, la onda, si el segundo medio es un conductor perfecto, se refleja totalmente, mientras que si el medio no es conductor perfecto (conductor imperfecto o dieléctrico) parte de la onda se refleja y parte se transmite al medio. En el presente epígrafe se va a estudiar la incidencia perpendicular de una onda plana sobre una superficie de discontinuidad plana entre dos medios con parámetros constitutivos distintos, siendo ambos no conductores, en el siguiente epígrafe se estudiará la incidencia sobre un buen conductor, y en el tercero se estudiará el caso más general de incidencia oblicua. El tema finaliza con el estudio de la incidencia sobre superficies planas de ondas planas polarizadas.

Sea una onda plano-polarizada (según el eje x) que incide normalmente, por un medio (1) de parámetros intrínsecos (ϵ_1, μ_1) , sobre una superficie de separación de discontinuidad con otro medio (2) de parámetros intrínsecos (ϵ_2, μ_2) . Supongamos que la onda avanza en la dirección z desde la zona negativa, y que el plano de discontinuidad es $z = 0$ (figura 6.4).

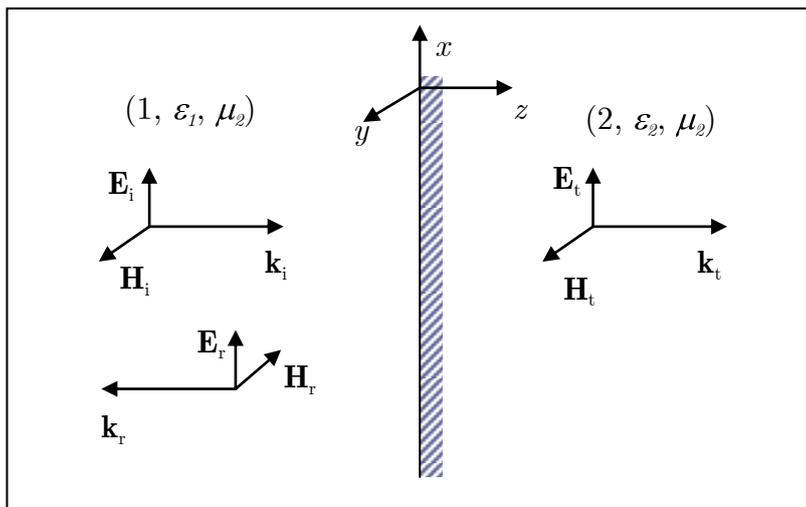


Figura 6.4

Por razones de coherencia en la frontera, es necesario que en el lado izquierdo de la zona de discontinuidad aparezca, a la vez que la onda incidente, una onda reflejada y en el lado derecho una onda transmitida.

Suponiendo como se ha indicado que la polarización (\mathbf{E}) de la onda incidente apunta en la dirección x^+ , y como la onda avanza según la dirección z^+ , el campo \mathbf{H} incidente apunta en la dirección y^+ . Los campos reflejado y transmitido se toman de forma que la polarización sea la misma que la incidente (es una elección arbitraria que puede cambiar en el resultado final), entonces dado que para la onda reflejada su dirección de avance es z^- se cumple que la dirección de \mathbf{H}_r es la contraria a la incidente esto es y^- , mientras que el campo magnético \mathbf{H}_t de la onda transmitida, tiene la misma orientación que en la onda incidente. Resumiendo, para los campos instantáneos en un punto (z, t) :

$$z < 0 \begin{cases} \mathbf{E}_i(z, t) = \text{Re} \left[E_{i0} e^{j(\omega t - \beta_1 z)} \mathbf{a}_x \right]; & \mathbf{H}_i(z, t) = \text{Re} \left[\frac{E_{i0}}{\eta_1} e^{j(\omega t - \beta_1 z)} \mathbf{a}_y \right] \\ \mathbf{E}_r(z, t) = \text{Re} \left[E_{r0} e^{j(\omega t + \beta_1 z)} \mathbf{a}_x \right]; & \mathbf{H}_r(z, t) = \text{Re} \left[-\frac{E_{r0}}{\eta_1} e^{j(\omega t + \beta_1 z)} \mathbf{a}_y \right] \end{cases}; \quad (6.100)$$

$$z > 0 \begin{cases} \mathbf{E}_t(z, t) = \text{Re} \left[E_{t0} e^{j(\omega t - \beta_2 z)} \mathbf{a}_x \right]; & \mathbf{H}_t(z, t) = \text{Re} \left[\frac{E_{t0}}{\eta_2} e^{j(\omega t - \beta_2 z)} \mathbf{a}_y \right] \end{cases}$$

donde como siempre, $\beta_1 = \omega \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1}$; $\eta_1 = \sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}}$; $\beta_2 = \omega \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2}$; $\eta_2 = \sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}}$. En la segunda región suponemos que no hay superficies que reflejen la onda transmitida y por eso no existe onda viajera hacia la izquierda en esa zona. Las fases desconocidas se encuentran aplicando las condiciones en la frontera para los campos \mathbf{E} y \mathbf{H} de los que sabemos que conservan la componente tangencial (para el campo magnético se supone la superficie libre de corrientes), por lo tanto se cumple que (en $z = 0$ y forma fasorial):

$$E_{i0} + E_{r0} = E_{t0}; \quad \frac{E_{i0}}{\eta_1} - \frac{E_{r0}}{\eta_1} = \frac{E_{t0}}{\eta_2} \quad (6.101)$$

sistema de ecuaciones del cual se pueden hallar los valores de las cantidades desconocidas E_{r0} y E_{t0} en función de las cantidades conocidas, las impedancias intrínsecas de ambos medios y la amplitud de la onda incidente. En estas condiciones se tiene que:

$$E_{r0} = \Gamma E_{i0}; \quad E_{t0} = \tau E_{i0} \quad (6.102)$$

Donde a se Γ le denomina *coeficiente de reflexión* y a τ *coeficiente de transmisión*, con valores, en función de las impedancias intrínsecas, dados por:

$$\Gamma = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1}; \quad \tau = \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1} \quad (6.103)$$

Estos coeficientes cumplen la relación $\Gamma = 1 - \tau$. En el caso más general los medios pueden tener pérdidas y las amplitudes, impedancias intrínsecas y coeficientes de transmisión y reflexión pueden ser cantidades complejas.

6.8.1 Transmisión de potencia a través de fronteras entre medios distintos

Vamos a determinar el valor del flujo de potencia electromagnética a través de una superficie de discontinuidad tal como la de la figura 6.4. Sabemos del epígrafe 6.10, que el valor promedio del flujo de potencia viene dado por la expresión (6.99). Según esa expresión se tiene que, suponemos que el medio 1 no tiene pérdidas mientras que el medio 2 puede tenerlas:

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{P}_{z<0} \rangle &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \mathbf{a}_x \left[E_{i0} e^{-j\beta_1 z} + \Gamma e^{j\beta_1 z} \right] \times \mathbf{a}_y \left[\frac{E_{i0}}{\eta_1} e^{-j\beta_1 z} - \Gamma e^{j\beta_1 z} \right]^* \right\} \\ &= \mathbf{a}_z \frac{|E_{i0}|^2}{2\eta_1} \operatorname{Re} \left[1 - |\Gamma|^2 + \Gamma e^{2j\beta_1 z} - \Gamma^* e^{-2j\beta_1 z} \right] = \mathbf{a}_z \frac{|E_{i0}|^2}{2\eta_1} \left[1 - |\Gamma|^2 \right] \end{aligned} \quad (6.104)$$

que nos da la diferencia entre la potencia incidente y la reflejada siendo E_{i0} la amplitud del campo incidente. Esta diferencia debe de ser igual a la potencia transmitida:

$$\langle \mathcal{P}_{z>0} \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \mathbf{a}_x \tau E_{i0} e^{-j\beta_2 z} \times \mathbf{a}_y \left(\frac{\tau E_{i0}}{\eta_2} e^{-j\beta_2 z} \right)^* \right\} = \mathbf{a}_z \frac{|E_{i0}|^2 |\tau|^2}{2} \operatorname{Re} \left(\frac{1}{\eta_2^*} \right) \quad (6.105)$$

pues como se ha indicado el primer medio no tiene pérdidas (η_1 real) y el segundo puede tenerlas (η_2 puede ser complejo). De las expresiones (6.104) y (6.105) e imponiendo conservación de la energía se obtiene que:

$$1 - |\Gamma|^2 = |\tau|^2 \operatorname{Re} \left(\frac{\eta_1}{\eta_2^*} \right) \quad (6.106)$$

El lector puede comprobar que si en ambos medios hay pérdidas se cumple que:

$$\left(1 - |\Gamma|^2\right) \frac{\cos(\theta_{\eta_1})}{|\eta_1|} + 2 \frac{|\Gamma|}{|\eta_1|} \text{sen}(2\beta_1 z - \theta_{\Gamma}) \text{sen}(\theta_{\eta_1}) = |\tau|^2 \frac{\cos(\theta_{\eta_2})}{|\eta_2|} \quad (6.107)$$

donde θ_{Γ} , θ_{η_1} y θ_{η_2} son las respectivas fases del coeficiente de reflexión y de las impedancias intrínsecas de los medios (1) y (2). Se define, finalmente, la *razón de onda estacionaria*, S , como la relación entre el valor máximo del módulo de $\mathbf{E}(z)$ y el valor mínimo de dicho módulo. Teniendo en cuenta que la expresión fasorial del campo \mathbf{E} en la región (1) es:

$$\mathbf{E}_1(z) = \mathbf{a}_x E_{i0} e^{-j\beta_1 z} (1 + \Gamma e^{j2\beta_1 z}) \quad (6.108)$$

Se tiene que S vale

$$S = \frac{E_{\max}}{E_{\min}} = \frac{H_{\max}}{H_{\min}} = \frac{1 + |\Gamma|}{1 - |\Gamma|} \quad (6.109)$$

de donde se deduce que:

$$|\Gamma| = \frac{S - 1}{S + 1} \quad (6.110)$$

6.8.2 Incidencia normal sobre un conductor perfecto

Si la región (2) es un conductor ideal $\sigma \rightarrow \infty$, la onda incidente se refleja totalmente dado que puede existir campo eléctrico en el interior del conductor, entonces $\tau = 0$ y $\Gamma = -1$, solo existe campo en lado izquierdo (figura 1.4) y vale (R. P. Clayton *et al*, D. K. Cheng, M. Zahn, S. V. Marshall *et al*):

$$z < 0 \begin{cases} \mathbf{E}_i(z, t) = \text{Re} \left[E_{i0} e^{j(\omega t - \beta_1 z)} \mathbf{a}_x \right]; & \mathbf{H}_i(z, t) = \text{Re} \left[\frac{E_{i0}}{\eta_1} e^{j(\omega t - \beta_1 z)} \mathbf{a}_y \right] \\ \mathbf{E}_r(z, t) = \text{Re} \left[E_{r0} e^{j(\omega t + \beta_1 z)} \mathbf{a}_x \right]; & \mathbf{H}_r(z, t) = \text{Re} \left[-\frac{E_{r0}}{\eta_1} e^{j(\omega t + \beta_1 z)} \mathbf{a}_y \right] \end{cases} \quad (6.111)$$

donde en un medio sin pérdidas (espacio libre) $\eta_1 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0}$; $\beta_1 = \omega\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$, debe notarse que en la fase espacial de la onda reflejada el signo es negativo (la onda se mueve en la dirección $-z$), además para que la onda reflejada avance en la dirección z^- el campo magnético reflejado debe ir en sentido contrario al del campo magnético incidente

(podían tomarse las direcciones de los campos magnéticos incidentes y reflejados en el mismo sentido con lo que los campos eléctricos deberán llevar sentidos opuestos). Por la condición de continuidad para el campo eléctrico en la frontera, $z = 0$, y cualquier instante (en particular $t = 0$) se tiene que:

$$E_{r0} = -E_{i0} \quad (6.112)$$

con lo que el campo eléctrico total en la zona de existencia es:

$$\mathbf{E}(z, t) = \mathbf{E}_{i0}(z, t) + \mathbf{E}_{r0}(z, t) = \text{Re} \left[E_{i0} e^{-j\beta_1 z} - e^{j\beta_1 z} e^{-j\omega t} \right] = 2E_{i0} \text{sen } \beta_1 z \text{ sen } \omega t \mathbf{a}_x \quad (6.113)$$

mientras que para el campo magnético total, se obtiene la expresión:

$$\mathbf{H}(z, t) = 2 \frac{E_{i0}}{\eta_1} \cos \beta_1 z \cos \omega t \mathbf{a}_y \quad (6.114)$$

de las expresiones (6.113) y se deduce que el campo eléctrico y el campo magnético tienen una diferencia de fase de $\pi/2$ rad, tanto en fase temporal como espacial.

Las amplitudes (fasoriales) son:

$$|\mathbf{E}(z)| = 2E_{i0} |\text{sen } \beta_1 z| \quad ; \quad |\mathbf{H}(z)| = 2 \frac{E_{i0}}{\eta_1} |\cos \beta_1 z| \quad (6.115)$$

teniendo en cuenta que $\beta_1 = 2\pi/\lambda$, las amplitudes se anulan en los valores de z dados por:

$$z = \frac{n\lambda}{2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \text{ para } |\mathbf{E}(z)|; \quad z = \frac{m\lambda}{4}, \quad m = 1, 3, 5, \dots \text{ para } |\mathbf{H}(z)| \quad (6.116)$$

El campo \mathbf{E} (para cualquier instante) tiene un máximo o un mínimo cuando z es un múltiplo de $\lambda/4$ y se anula en los múltiplos de $\lambda/2$. Para el campo \mathbf{H} sucede lo contrario. Ambos hechos indican que se tiene una onda estacionaria en la zona de existencia del campo ($z < 0$). De las expresiones (6.113) y (6.114), se deduce que el valor promedio (temporal) del vector de Poynting en la onda estacionaria es cero, pues el promedio en un periodo de $\text{sen}(\omega t)\cos(\omega t)$ es cero, esto indica que la energía oscila entre los dos campos, siendo sus valores promedios (D. H. Staelin *et al*):

$$\langle W_{ele} \rangle = \varepsilon_1 E_{i0}^2 \text{sen}^2 \beta_1 z; \quad \langle W_{mag} \rangle = \mu_1 \frac{E_{i0}^2}{\eta_1^2} \cos^2 \beta_1 z \quad (6.117)$$

con lo cual queda que la energía es constante en la zona ($z < 0$) e igual a:

$$\varepsilon_1 E_{i0}^2 \quad (6.118)$$

por otro lado de la condición en la frontera para la componente tangencial del campo magnético se deduce que:

$$\mathbf{J}_s = \frac{2E_{i0}}{\eta_1} \cos \omega t \mathbf{a}_x \text{ A/m} \quad (6.119)$$

Se puede demostrar que se ejerce una fuerza sobre el conductor, llamada presión de radiación, que vale (M. Zahn):

$$\mathbf{F} = \frac{\mu_1}{2} \mathbf{J}_s \times \mathbf{H} \quad (6.120)$$

6.8.3 Incidencia normal sobre un medio con gran conductividad

Si el medio (2) tiene una conductividad no nula tal que $1 \ll \sigma_2/\omega\varepsilon_2$ sabemos que la constante dieléctrica (ε_c) es compleja y que lo son el número de onda (γ_c) y la impedancia característica (η_c). En estas condiciones se puede aproximar γ_c por:

$$\gamma_{2c} \simeq \sqrt{\frac{\omega\mu_2\sigma_2}{2}} 1 - j \quad (6.121)$$

esto significa que en la zona (2, $z > 0$) hay campo transmitido pero es una onda que rápidamente decrece exponencialmente con $\beta_2 = \sqrt{\frac{\omega\mu_2\sigma_2}{2}}$ que coincide, como ya se ha visto, con la inversa de la profundidad de piel $\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu_2\sigma_2}}$. Se puede demostrar que en este caso (medio muy conductor) los coeficientes de reflexión y transmisión se aproximan a (D. H. Staelin *et al*):

$$\Gamma \simeq \sqrt{\frac{2\omega\mu_2\varepsilon_1}{\mu_1\sigma_2}} 1 - j - 1; \tau \simeq \sqrt{\frac{2\omega\mu_2\varepsilon_1}{\mu_1\sigma_2}} 1 - j \quad (6.122)$$

6.9 Incidencia oblicua de una onda plana sobre un plano de discontinuidad

6.9.1 Propagación de ondas planas en cualquier dirección

En este apartado se va a generalizar el concepto de incidencia de ondas planas sobre planos de separación en dos medios electromagnéticos diferentes. La generalización va a ir en dos direcciones: *a)* ondas planas uniformes en incidencia oblicua y *b)* ondas planas no uniformes en incidencia oblicua.

Veamos en primer lugar como varían las expresiones de los campos cuando la dirección de propagación no es la dirección z como se ha estudiado hasta ahora. Sea una onda plana que se propaga en un sistema de ejes cartesianos en una dirección $\hat{\mathbf{k}}$. Sin pérdida de generalidad se puede suponer que esta dirección está contenida en el plano XZ (D. H. Stealin *et al*, M. Zahn, L. C. Seng). Si se supone el campo polarizado en la dirección Y (el fasor) es:

$$\mathbf{E} = \mathbf{a}_y E_0 e^{-jkz'} \quad (6.123)$$

donde z' es la coordenada en la dirección de avance de la onda y k es el número de onda $k = \omega\sqrt{\varepsilon\mu}$ (medio sin pérdidas), figura 6.5

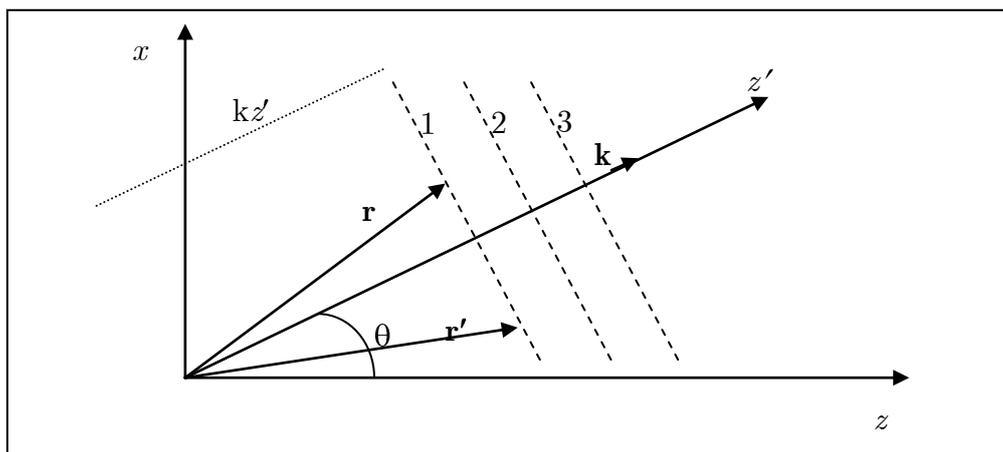


Figura 6.5

Onda plana uniforme moviéndose en una dirección cualquiera

La coordenada z' se puede escribir en función de las coordenadas x e z , como (M. Zahn) $z' = x \sin \theta + z \cos \theta$, con lo que $kz' = kx \sin \theta + kz \cos \theta$. Si se define el vector $\mathbf{k} \equiv (k_x, k_y, k_z) = (k \sin \theta, 0, k \cos \theta)$, la expresión (6.123), se puede poner como:

$$\mathbf{E} = \mathbf{a}_y E_0 e^{-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \quad (6.124)$$

en donde \mathbf{r} es un vector que va desde el origen al plano de la onda con fase constante $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = cte$ (en la figura el plano 1). La discusión anterior se puede formalizar para una dirección \mathbf{k} cualquiera, pero la expresión (6.124) sería la misma. Se sabe, además, que

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = |\mathbf{k}|^2 = k_x^2 + k_z^2 = k^2 \quad (6.125)$$

En estas condiciones al vector \mathbf{k} se le denomina vector número de onda de una onda plana uniforme (en este caso E_0 es constante en el frente de onda) y nos suministra la dirección de avance de la onda (o del vector de Poynting). Si los frentes de onda mostrados en la figura 6.5, representan frentes separados una longitud de onda $\lambda = 2\pi/k$, se pueden definir *longitudes de ondas proyectadas sobre los ejes* (segmentos definidos por la intersección de dos frentes de ondas consecutivos sobre los ejes x, z) como $\lambda_x = 2\pi/k_x$ y $\lambda_z = 2\pi/k_z$, que sustituidas en (6.125) se tiene la expresión (D. H. Stealin *et al*):

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda_x} + \frac{1}{\lambda_z} \quad (6.126)$$

Además de la Ley de Faraday se sabe que

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{k} \times \mathbf{E}}{\omega \mu_0} = \mathbf{a}_x k_x - \mathbf{a}_z k_z \times \mathbf{a}_y \frac{E_0}{\omega \mu} e^{-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} = \left(\mathbf{a}_z \frac{k_x}{k} - \mathbf{a}_x \frac{k_z}{k} \right) \frac{E_0}{\eta} e^{-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \quad (6.127)$$

y se comprueba que \mathbf{E} , \mathbf{H} y \mathbf{k} son perpendiculares entre sí. En el caso más general de una onda desplazándose en una dirección cualquiera \mathbf{k} pudiendo tener las amplitudes de los campos componentes según los tres ejes y siendo la constante de la onda compleja y representada por el vector,

$$\gamma = \alpha + j\beta = \gamma_x \mathbf{a}_x + \gamma_y \mathbf{a}_y + \gamma_z \mathbf{a}_z \quad (6.128)$$

los campos (fasores) toman la forma

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-\gamma \cdot \mathbf{r}} ; \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}_0 e^{-\gamma \cdot \mathbf{r}} = \frac{\mathbf{a}_n \times \mathbf{E}}{\eta_c} \quad (6.129)$$

donde las amplitudes pueden ser complejas, η_c es la impedancia intrínseca y \mathbf{a}_n es un vector en la dirección de propagación de la densidad de potencia (Poynting).

6.9.2 Incidencia oblicua entre dos medios sin pérdidas

Sea una onda que se propaga por un medio $(1, \epsilon_1, \mu_1)$ e incide sobre la superficie (plana) de separación de otro medio dieléctrico $(2, \epsilon_2, \mu_2)$ suponemos que la superficie de separación es el plano XY que la región (1) es el semiespacio $z < 0$ y que la onda llega con una inclinación θ respecto a la normal a la frontera \mathbf{a}_z . Se denomina *plano de incidencia* al plano que contiene a la dirección de propagación y a la normal a la superficie frontera. Al incidir una onda sobre la superficie de separación aparecen dos nuevas ondas, una reflejada y otra transmitida, para asegurar que se cumplen las condiciones en la frontera de los campos implicados. Se puede demostrar que los tres vectores de onda de las ondas incidente reflejada y transmitida están en el plano de incidencia (ver la elegante demostración en R. K. Wangsness). En estas condiciones la incidencia oblicua se puede esquematizar de acuerdo con la figura 6.6.

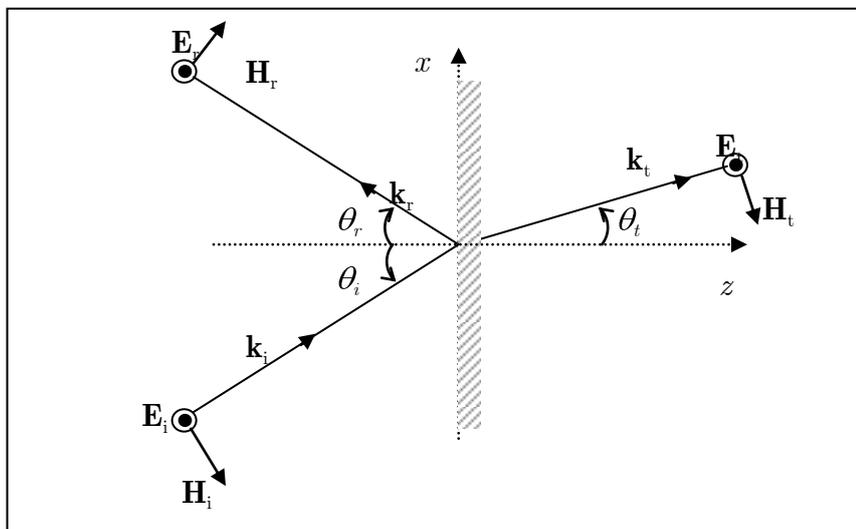


Figura 6.6

Incidencia oblicua de una onda plana polarizada en la dirección y^+

Se supone que la onda plana está polarizada en la dirección y -positiva (polarizada perpendicularmente), manteniendo dicha orientación (ficticia) las ondas reflejada y transmitida (sobre cada caso práctico la orientación real de las ondas reflejada y transmitida $-y$ -positiva o y -negativa- vendrá determinada por el signo de la amplitud de dichos campos y habrá que cambiar o no dichas orientaciones), la dirección de los campos magnéticos viene determinada por llevar la dirección de $\mathbf{E} \times \mathbf{k}$. En las

condiciones descritas (medios sin pérdidas y la geometría de la figura 1.6) los campos involucrados son(D. H. Stealin *et al*, M. Zahn, L. C. Shen *et al*, C. R. Paul *et al*):

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}_i &= \mathbf{a}_y E_0 e^{-j k_{ix}x + k_{iz}z}; & \mathbf{H}_i &= \left(-\mathbf{a}_x \frac{k_{iz}}{k_i} + \mathbf{a}_z \frac{k_{ix}}{k_i} \right) \frac{E_0}{\eta_1} e^{-j k_{ix}x + k_{iz}z} \\
 \mathbf{E}_r &= \mathbf{a}_y E_0 \Gamma e^{-j k_{rx}x - k_{rz}z}; & \mathbf{H}_r &= \left(-\mathbf{a}_x \frac{k_{rz}}{k_r} - \mathbf{a}_z \frac{k_{rx}}{k_r} \right) \frac{E_0}{\eta_1} \Gamma e^{-j k_{rx}x - k_{rz}z} \\
 \mathbf{E}_t &= \mathbf{a}_y E_0 \tau e^{-j k_{tx}x + k_{tz}z}; & \mathbf{H}_t &= \left(-\mathbf{a}_x \frac{k_{tz}}{k_t} + \mathbf{a}_z \frac{k_{tx}}{k_t} \right) \frac{E_0}{\eta_2} \tau e^{-j (k_{tx}x + k_{tz}z)}
 \end{aligned} \tag{6.130}$$

Aplicando la condición de continuidad de la componente tangencial del campo \mathbf{E} sobre la frontera $z = 0$, (igual se puede hacer con el campo \mathbf{H}) se tiene la siguiente relación:

$$E_0 e^{-j k_{ix}x} + E_0 \Gamma e^{-k_{rx}x} = E_0 \tau e^{-k_{tx}x} \tag{6.131}$$

Esta relación después de eliminar E_0 se debe cumplir para todos los valores de x (de hecho es la única variable) y esto implica que los exponentes son idénticos; de ahí se sigue inmediatamente que:

$$k_{ix} = k_{rx} = k_{tx} = k_x \tag{6.132}$$

lo que significa que la componente tangencial (proyección sobre el eje x) de los tres vectores de onda es la misma. Como se sabe que la magnitud de los vectores de onda en el medio 1 son la misma e iguales a:

$$k = \omega \sqrt{\mu_1 \varepsilon_1} = k_i = k_r \tag{6.133}$$

y además se sabe que las proyecciones sobre el eje x son el producto de la magnitud de los vectores de onda por el seno del correspondiente ángulo (incidente, reflejado o refractado), se tienen las siguientes relaciones:

$$k \sin \theta_i = k \sin \theta_r \Rightarrow \boxed{\theta_i = \theta_r}; \quad k_i \sin \theta_i = k_t \sin \theta_t \Rightarrow \boxed{\frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_t} = \frac{k_t}{k_i} = \frac{\sqrt{\mu_2 \varepsilon_2}}{\sqrt{\mu_1 \varepsilon_1}}} \tag{6.134}$$

que son la conocidas Leyes de Snell para la reflexión y para la transmisión.

Si se define el índice de refracción en un medio m cualquiera como el cociente de las velocidades (de fase) de la onda en el vacío y en el medio considerado,

$$n_m = \frac{c}{v_m} = \frac{c}{\frac{\omega}{k_m}} = \frac{\sqrt{\mu_m \epsilon_m}}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \quad (6.135)$$

donde c es la velocidad de la luz en el vacío, la expresión (6.135) se convierte en la más habitual en óptica:

$$\text{sen } \theta_t = \frac{n_1}{n_2} \text{sen } \theta_i \quad (6.136)$$

Esta expresión (D. K. Cheng) se puede dar también en función de las velocidades de la onda, de las impedancias intrínsecas Z_1 y Z_2 , si las permeabilidades relativas son iguales, de las permitividades (absolutas o relativas) en los dos medios.

6.9.3 Ángulo crítico de reflexión total

De la Ley de Snell (6.136), se sabe que cuando el segundo medio es más *refringente* que el primero (más denso), el rayo transmitido tiende a acercarse a la normal (el ángulo $\theta_t < \theta_i$), en cambio, si el segundo medio es menos refringente que el primero, el ángulo de transmisión es mayor que el de incidencia. En el caso límite el ángulo de transmisión puede llegar a valer 90° y no existe onda transmitida en el segundo medio. El ángulo de incidencia para el cual se tiene una transmisión de 90° , se conoce como ángulo crítico de la reflexión. Para dicho ángulo la componente z del vector de onda de la onda transmitida tiene que ser cero (recuérdese que las componentes tangenciales de los tres vectores de onda involucrados son las mismas según se puede deducir de las leyes de Snell, (6.134)), figura 6.7.

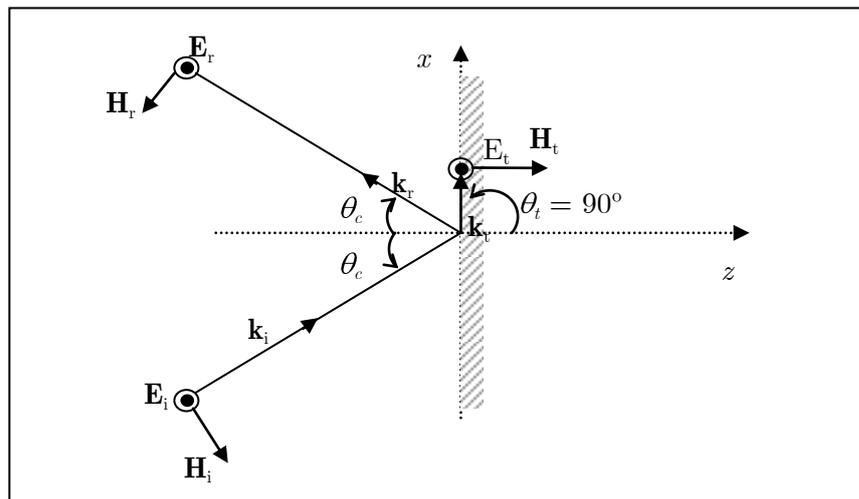


Figura 6.7

Incidencia oblicua de una onda plana en el ángulo crítico de refracción

Para el ángulo crítico se cumple que:

$$\text{sen } \theta_c = \frac{n_2}{n_1} = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}} = \sqrt{\frac{\epsilon_{r_2}}{\epsilon_{r_1}}} \quad (6.137)$$

donde la última igualdad es cierta si como es usual (salvo en medios ferro o ferromagnéticos) $\mu_1 = \mu_2$. Para ángulos de incidencia menores que el ángulo crítico existe componente k_{tz} real, mientras que si el ángulo de incidencia es mayor que el crítico no existe componente real del vector de onda transmitido en la dirección Z . Para los ángulos con valor superior al crítico de la Ley de Snell se cumple que:

$$\text{sen } \theta_t > 1 \quad (6.138)$$

y este valor es real, lo que indica que el ángulo transmitido no puede ser real sino imaginario y por lo tanto se cumple que el coseno del ángulo transmitido debe de ser un número complejo, esto implica que:

$$k_{tz} = k_t \cos \theta_t = -j\alpha \quad (6.139)$$

donde se ha tomado el signo menos en la raíz cuadrada para impedir una onda exponencialmente creciente y por lo tanto de energía que tendería a infinito (absurdo). En esas condiciones, los campos transmitidos serán:

$$\mathbf{E}_t = \mathbf{a}_y E_0 \tau e^{-j k_x x + k_{tz} z} = \mathbf{a}_y E_0 \tau e^{-\alpha z} e^{-j k_x x}; \quad \mathbf{H}_t = -\mathbf{a}_x \cos \theta_t + \mathbf{a}_z \text{sen } \theta_t \frac{E_0}{\eta_2} \tau e^{-\alpha z} e^{-j k_x x} \quad (6.140)$$

La aparición de un ángulo imaginario, surge de la suposición de que las ondas transmitidas son de la forma (6.130). Para ángulos superiores al crítico se deduce de un estudio detallado de las ecuaciones de Maxwell, que las ondas solución en la zona transmitida deben ser ondas planas no uniformes con una fase que va decayendo con la coordenada y , esto requiere que k_{tz} sea imaginario. Existe entonces una onda que se mueve en la dirección x y va disminuyendo en su dirección normal, z , denominada *onda evanescente*, esta onda está ligada a la discontinuidad y se la puede considerar una onda superficial (D. K. Cheng; C. R Paul *et al*; D. H. Stealin *et al*; M. Zahn; F. T. Ulaby; R. K Wangsness). En el texto del último autor citado se puede ver también que la onda reflejada es tal que lleva la misma amplitud que la onda incidente pero con un desfase θ_r :

$$E_r = E_i e^{-j2\theta_r} \quad (6.141)$$

y demuestra, también, que esta onda reflejada está polarizada elípticamente, dado que los desfases, θ_r , para las componentes perpendicular y paralela de la onda reflejada son distintos cuando la onda incidente está polarizada linealmente en incidencia sobre la superficie frontera con un ángulo de incidencia superior al crítico.

6.9.4 Incidencia oblicua de ondas planas uniformes polarizadas perpendicular y paralelamente

6.9.5 Polarización perpendicular (ondas transversales eléctricas TE)

En el epígrafe 6.15.2., las ondas incidente, transmitida y reflejada tienen polarización lineal perpendicular al plano de incidencia. Las expresiones dadas por (6.130) se pueden poner en función de los ángulos de incidencia y transmisión como:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_i &= \mathbf{a}_y E_0 e^{-jk_i \text{sen} \theta_i x + \text{cos} \theta_i z}; & \mathbf{H}_i &= -\mathbf{a}_x \text{cos} \theta_i - \mathbf{a}_z \text{sen} \theta_i \frac{E_0}{\eta_1} e^{-jk_i \text{sen} \theta_i x + \text{cos} \theta_i z} \\ \mathbf{E}_r &= \mathbf{a}_y E_0 \Gamma e^{-jk_i \text{sen} \theta_i x - \text{cos} \theta_i z}; & \mathbf{H}_r &= -\mathbf{a}_x \text{cos} \theta_i + \mathbf{a}_z \text{sen} \theta_i \frac{E_0}{\eta_1} \Gamma e^{-jk_i \text{sen} \theta_i x - \text{cos} \theta_i z} \\ \mathbf{E}_t &= \mathbf{a}_y E_0 \tau e^{-jk_i \text{sen} \theta_i x + \text{cos} \theta_t z}; & \mathbf{H}_t &= -\mathbf{a}_x \text{cos} \theta_t - \mathbf{a}_z \text{sen} \theta_t \frac{E_0}{\eta_2} \tau e^{-jk_i \text{sen} \theta_i x + \text{cos} \theta_t z} \end{aligned} \quad (6.142)$$

Donde se ha substituido θ_r por θ_i siguiendo las Leyes de Snell. Si aplicamos a los campos totales en ambas regiones las condiciones en la frontera ($z = 0$), en ausencia de corrientes tras *ajustar las fases* (debido a la independencia respecto a la variable x en ambos miembros de la igualdad $\mathbf{E}_{1tg} = \mathbf{E}_{2tg}$, se reproduce la Ley de Snell ($k_i \text{sen} \theta_i = k_t \text{sen} \theta_t$), se tiene el sistema de ecuaciones:

$$E_0 + \Gamma_{\perp} E_0 = \tau_{\perp} E_0; \quad -\frac{E_0}{\eta_1} \text{cos} \theta_i + \frac{\Gamma_{\perp} E_0}{\eta_1} \text{cos} \theta_i = \frac{\tau_{\perp} E_0}{\eta_1} \text{cos} \theta_t \quad (6.143)$$

donde se ha llamado Γ_{\perp} al coeficiente de reflexión y τ_{\perp} el coeficiente de transmisión para las ondas planas con polarización vertical (ondas transversales eléctricas TE). Simplificando las ecuaciones (6.143) y resolviendo para los coeficientes de reflexión y transmisión se tienen las expresiones:

$$\Gamma_{\perp} = \frac{\eta_2 \text{cos} \theta_i - \eta_1 \sqrt{1 - \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \text{sen}^2 \theta_i}}{\eta_2 \text{cos} \theta_i + \eta_1 \sqrt{1 - \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \text{sen}^2 \theta_i}}; \quad \tau_{\perp} = \frac{2\eta_2 \text{cos} \theta_i}{\eta_2 \text{cos} \theta_i + \eta_1 \sqrt{1 - \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \text{sen}^2 \theta_i}} \quad (6.144)$$

expresiones en las que se han utilizado las leyes de Snell. A veces se emplea la impedancia intrínseca normalizada $\eta = \frac{\eta_1}{\eta_2}$ y se introduce en las expresiones anteriores (D. H. Stealin *et al*).

6.9.6 Polarización paralela (ondas transversales magnéticas TM)

En la polarización paralela de ondas electromagnéticas planas, el campo eléctrico es paralelo al plano de incidencia, mientras que el campo magnético es perpendicular a él (ondas transversales magnéticas *TM*). Se puede aplicar a este problema el *Principio de Dualidad* (D. H. Stealin *et al*), que dice que se es posible deducir nuevas soluciones, de soluciones conocidas de ecuaciones o sistemas de ecuaciones diferenciales, aprovechando las simetrías de dichas ecuaciones y comprobando que dichas simetrías se conservan en las condiciones en la frontera. Estudiando las ecuaciones de Maxwell en forma fasorial para campos armónicos en ausencia de fuentes,

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} &= -j\omega\mu\mathbf{H}; & \nabla \cdot \mathbf{E} &= 0; \\ \nabla \times \mathbf{H} &= j\omega\varepsilon\mathbf{E}; & \nabla \cdot \mathbf{H} &= 0 \end{aligned} \tag{6.145}$$

se ve que se transforman en sí mismas si se cambia \mathbf{E} por \mathbf{H} , \mathbf{H} por $-\mathbf{E}$ y las constantes constitutivas entre sí. Si se hacen estos cambios pasamos de una polarización perpendicular a una paralela, figura 6.8

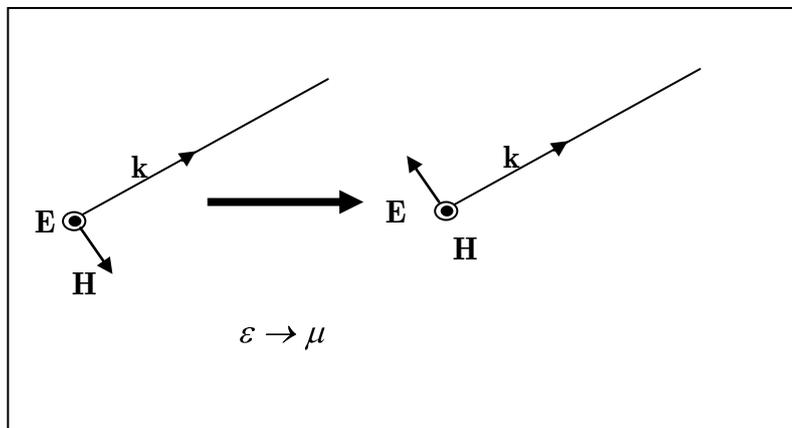


Figura 6.8

Dualidad aplicada a los campos

Como se puede comprobar fácilmente, si no hay fuentes, las condiciones en la frontera son consistentes con estos cambios en los campos y parámetros (si hay fuentes o el segundo medio es conductor esto es falso – el campo \mathbf{E} en el segundo caso, por ejemplo, es nulo en el interior del conductor y por lo tanto es discontinuo–). Aplicando dualidad entonces a nuestro problema, las soluciones para el caso de campo con polarización vertical son, figura 6.9:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}_i &= \mathbf{a}_x \cos \theta_i - \mathbf{a}_z \sin \theta_i E_0 e^{-jk_i \sin \theta_i x + \cos \theta_i z}; & \mathbf{H}_i &= \mathbf{a}_y \frac{E_0}{\eta_1} e^{-jk_i \sin \theta_i x + \cos \theta_i z} \\
 \mathbf{E}_r &= -\mathbf{a}_x \cos \theta_r + \mathbf{a}_z \sin \theta_r E_0 \Gamma e^{-jk_r \sin \theta_r x - \cos \theta_r z}; & \mathbf{H}_r &= \mathbf{a}_y \frac{E_0}{\eta_1} \Gamma e^{-jk_r \sin \theta_r x - \cos \theta_r z} \\
 \mathbf{E}_t &= E_0 \tau \mathbf{a}_x \cos \theta_t - \mathbf{a}_z \sin \theta_t e^{-jk_t \sin \theta_t x + \cos \theta_t z}; & \mathbf{H}_t &= \mathbf{a}_y \frac{E_0}{\eta_2} \tau e^{-jk_t \sin \theta_t x + \cos \theta_t z}
 \end{aligned} \tag{6.146}$$

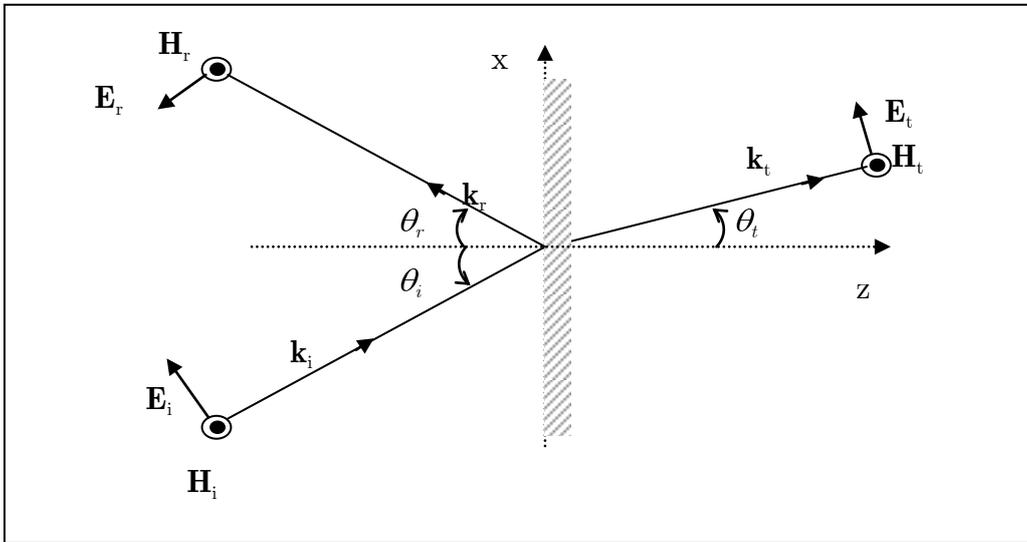


Figura 6.9

Incidencia oblicua de una onda plana polarizada en una dirección paralela al plano de incidencia xy

Aplicando ajuste de fase,

$$E_0 \cos \theta_i + \Gamma_{\parallel} E_0 \cos \theta_r = \tau_{\parallel} E_0 \cos \theta_t; \quad \frac{E_0}{\eta_1} - \frac{\Gamma_{\parallel} E_0}{\eta_1} = \frac{\tau_{\parallel} E_0}{\eta_2} \tag{6.147}$$

como en el caso TE , los coeficientes de reflexión y transmisión los denotamos por Γ_{\parallel} y τ_{\parallel} respectivamente, tras simplificar y despejar los coeficientes se obtiene:

$$\Gamma_{\parallel} = -\frac{\eta_1 \cos \theta_i - \eta_2 \sqrt{1 - \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \sin^2 \theta_i}}{\eta_1 \cos \theta_i + \eta_2 \sqrt{1 - \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \sin^2 \theta_i}}; \quad \tau_{\parallel} = \frac{2\eta_2 \cos \theta_i}{\eta_1 \cos \theta_i + \eta_2 \sqrt{1 - \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \sin^2 \theta_i}} \quad (6.148)$$

donde se han vuelto a utilizar las Leyes de Snell. De estas últimas expresiones se deduce inmediatamente que:

$$1 + \Gamma_{\parallel} = \tau_{\parallel} \left(\frac{\cos \theta_t}{\cos \theta_i} \right) \quad (6.149)$$

Como en el caso de polarización perpendicular en las expresiones (6.148) se puede emplear la inversa de la impedancia normalizada, a la que se denomina $y = 1/\eta$ admitancia normalizada.

6.9.7 Ángulo de Transmisión total o de Brewster

Dado que, en las expresiones de los coeficientes de reflexión para los casos de polarización perpendicular y paralela, el numerador es la diferencia de dos cantidades,

$$\Gamma_{\perp} = \frac{\eta_2 \cos \theta_i - \eta_1 \cos \theta_t}{\eta_2 \cos \theta_i + \eta_1 \cos \theta_t}; \quad \Gamma_{\parallel} = \frac{\eta_1 \cos \theta_i - \eta_2 \cos \theta_t}{\eta_1 \cos \theta_i + \eta_2 \cos \theta_t} \quad (6.150)$$

nos podemos preguntar si existe alguna combinación particular de los parámetros electromagnéticos intrínsecos y del ángulo de incidencia tales que los numeradores se anulen y por lo tanto no exista onda reflejada. Esto significaría que toda la energía (la onda) pasa al segundo medio. Para el caso de polarización vertical, si

$$\eta_2 \cos \theta_i - \eta_1 \cos \theta_t = 0 \quad (6.151)$$

la condición se cumple, pero si se elevan los dos miembros al cuadrado, tras aplicar la propiedad fundamental de las relaciones trigonométricas, la Ley de Snell para la onda refractada y sustituir η por su valor $\sqrt{\mu/\varepsilon}$ y k (β en general) por $\omega\sqrt{\mu\varepsilon}$, se llega a:

$$\operatorname{sen} \theta_i = \sqrt{\frac{1 - \mu_1 \varepsilon_1 / \mu_2 \varepsilon_2}{1 - \mu_1 / \mu_2}} \quad (6.152)$$

en el caso más usual de materiales no ferromagnéticos, se cumple que $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$ y por lo tanto no existe el ángulo θ_i para esta polarización.

En el caso de polarización paralela, no hay reflexión para

$$\eta_1 \cos \theta_i - \eta_2 \cos \theta_t = 0 \quad (6.153)$$

que con las transformaciones adecuadas se convierte en la expresión:

$$\operatorname{sen} \theta_i = \sqrt{\frac{1 - \mu_2 \varepsilon_1 / \mu_1 \varepsilon_2}{1 - \varepsilon_1 / \varepsilon_2}} \quad (6.154)$$

de la que se puede deducir un ángulo de incidencia tal para el que no existe campo reflejado. Al ángulo así calculado, para el caso de polarización paralela u horizontal, se le denomina ángulo de Brewster de no reflexión $\theta_{B\parallel}$. Una expresión equivalente, en el caso de que los medios no sean ferromagnéticos, es:

$$\tan \theta_i = \sqrt{\varepsilon_2 / \varepsilon_1} = \sqrt{\eta_1 / \eta_2} \quad (6.155)$$

Se puede demostrar, partiendo del desarrollo del coseno de la suma de dos ángulos y utilizando las leyes de Snell y las expresiones (6.153) y (6.154) que, $\theta_{B\parallel} + \theta_t = \pi/2$.

6.9.8 Reflexión oblicua sobre un conductor perfecto

En el caso de que el segundo medio sea un conductor perfecto, $\sigma = 0$, se cumple que:

$$\Gamma = -1; \tau = 0 \quad (6.156)$$

6.9.9 Incidencia del campo E perpendicular al plano de incidencia

En esas condiciones el campo en la zona dieléctrica (zona uno) toma la forma

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_1 &= E_0 e^{-jk \operatorname{sen} \theta_i x} e^{-jk \cos \theta_i z} - e^{jk \cos \theta_i z} \mathbf{a}_y = -j2E_0 e^{-jk \operatorname{sen} \theta_i x} \operatorname{sen} k \cos \theta_i z \mathbf{a}_y \\ \mathbf{H}_1 &= -\frac{E_0}{\eta_1} e^{-jk \operatorname{sen} \theta_i x} \left[\cos \theta_i e^{-jk \cos \theta_i z} + e^{jk \cos \theta_i z} \mathbf{a}_x - \operatorname{sen} \theta_i e^{-jk \cos \theta_i z} - e^{jk \cos \theta_i z} \mathbf{a}_z \right] \\ &= -\frac{2E_0}{\eta_1} \left[\cos \theta_i e^{-jk \operatorname{sen} \theta_i x} \cos k \cos \theta_i z \mathbf{a}_x + j \operatorname{sen} \theta_i e^{-jk \operatorname{sen} \theta_i x} \operatorname{sen} (k \cos \theta_i z) \mathbf{a}_z \right] \end{aligned} \quad (6.157)$$

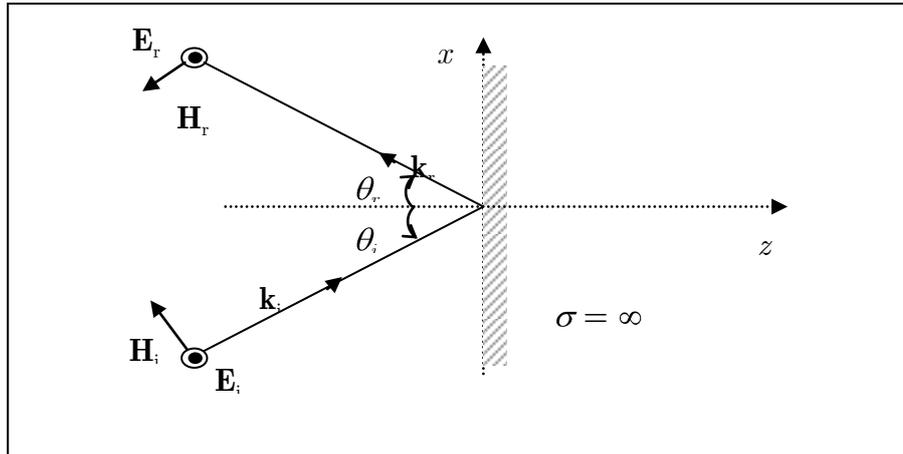


Figura 6.10

Incidencia oblicua de una onda plana sobre un conductor con polarización perpendicular

donde es conveniente recordar que

$$k_x = k \operatorname{sen} \theta_i; \quad k_z = k \cos \theta_i \quad (6.158)$$

siendo k_x y k_y las componentes según X e Y de los vectores de onda reflejado e incidente.

La expresión temporal de estos campos es

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= 2E_0 \operatorname{sen} k_z z \operatorname{sen} \omega t - k_x x \mathbf{a}_y \\ \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) &= -2 \frac{E_0}{\eta_1} \left[\cos \theta_i \cos k_z z \cos \omega t - k_x x \mathbf{a}_x - \operatorname{sen} \theta_i \operatorname{sen} k_z z \operatorname{sen} \omega t - k_x x \mathbf{a}_z \right] \end{aligned} \quad (6.159)$$

El flujo de potencia se obtiene calculando el promedio temporal del vector de Poynting:

$$\mathbf{S}_{prom} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_1^* = 2 \frac{E_0^2}{\eta_1} \operatorname{sen} \theta_i \operatorname{sen}^2(k_z z) \mathbf{a}_x \quad (6.160)$$

Lo que implica que la potencia fluye a lo largo de la superficie de separación, en la dirección $-z$ no fluye potencia pues las componentes \mathbf{a}_y del campo \mathbf{E}_1 y la componente \mathbf{a}_x del campo \mathbf{H}_1 , son ondas estacionarias en la dirección Z desfasadas 90° , y su promedio temporal en un periodo es por lo tanto nulo.

Aplicando el teorema de Ampère a un camino rectangular en ambos lados de la superficie frontera (D. K. Cheng, capítulo 6, pag 248) se ve que la superficie soporta una densidad de corriente superficial \mathbf{J}_s que tiene la expresión (para $z = 0$ y $\mathbf{n} = -\mathbf{a}_z$):

$$\mathbf{J}_s = \frac{2E_0}{\eta_1} \cos\theta_i \cos(\omega t - k_x x) \mathbf{a}_y \quad (6.161)$$

luego existe una densidad de corriente en la dirección y de polarización del campo.

6.9.10 Incidencia del campo E paralela al plano de incidencia

Véase la figura siguiente:

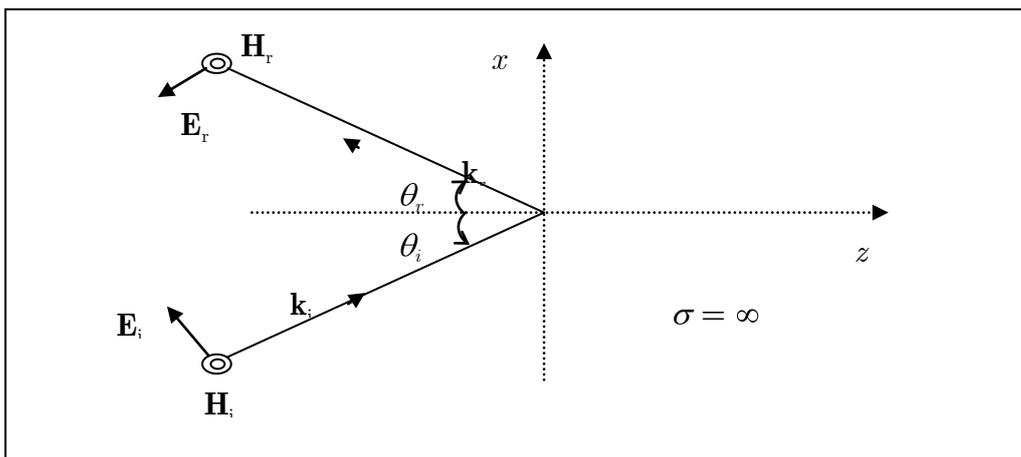


Figura 6.11
Incidencia oblicua de una onda plana sobre un conductor con polarización paralela

Seguendo el esquema del caso perpendicular se ve que los campos son en forma fasorial,

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_1 &= E_0 e^{-jk \sin \theta_i x} \left[\cos \theta_i e^{-jk \cos \theta_i z} - e^{jk \cos \theta_i z} \mathbf{a}_x - \sin \theta_i e^{-jk \cos \theta_i z} + e^{jk \cos \theta_i z} \mathbf{a}_z \right] \\ &= -2E_0 \left[\sin \theta_i e^{-jk \sin \theta_i x} \cos k \cos \theta_i z \mathbf{a}_x + j \cos \theta_i e^{-jk \sin \theta_i x} \sin k \cos \theta_i z \mathbf{a}_z \right] \\ \mathbf{H}_1 &= \frac{E_0}{\eta_1} e^{-jk \sin \theta_i x} e^{-jk \cos \theta_i z} + e^{jk \cos \theta_i z} \mathbf{a}_y = \frac{2E_0}{\eta_1} e^{-jk \sin \theta_i x} \cos(k \cos \theta_i z) \mathbf{a}_y\end{aligned}\quad (6.162)$$

y los correspondientes campos instantáneos,

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= 2E_0 \left[\cos \theta_i \sin k_z z \sin \omega t - k_x x \mathbf{a}_x - \sin \theta_i \cos k_z z \cos \omega t - k_x x \mathbf{a}_z \right] \\ \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) &= \frac{2E_0}{\eta_1} \cos k_z z \cos \omega t - k_x x \mathbf{a}_y\end{aligned}\quad (6.163)$$

La potencia promedio radiada,

$$\mathbf{S}_{prom} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_1^* = 2 \frac{E_0^2}{\eta_1} \sin \theta_i \cos^2(k_z z) \mathbf{a}_x \quad (6.164)$$

(también en la dirección X). Finalmente, la corriente superficial sobre el conductor es,

$$\mathbf{J}_s = \frac{2E_0}{\eta_1} \cos(\omega t - k_x x) \mathbf{a}_x \quad (6.165)$$

Esta corriente, no depende del ángulo de incidencia θ_i como sucede en el caso de la onda incidente con polarización perpendicular (C. R. Paul *et al*; M. Zahn).

En el tema, no se ha introducido (por su especial dificultad, aunque el lector interesado lo puede encontrar en la bibliografía recomendada) el caso de que el segundo medio tenga pérdidas. En general se ha estudiado la incidencia de ondas linealmente polarizadas en dos direcciones normales entre sí, este acercamiento permite el estudio de la incidencia sobre la superficie de separación de ondas con cualquier polarización, dado que se sabe que una onda polarizada elípticamente se puede estudiar descomponiéndola en dos ondas polarizadas linealmente con polarizaciones mutuamente perpendiculares debido al carácter lineal de las ecuaciones de Maxwell y por lo tanto de la composición de sus soluciones.

6.10 Comentarios finales

En el presente capítulo se han estudiado algunos temas relacionados con la propagación de *ondas electromagnéticas planas*. El capítulo ha comenzado con el estudio de la *ecuación de ondas* para los campos \mathbf{E} y \mathbf{H} deducida a partir de las ecuaciones de Maxwell, el planteamiento y resolución de la ecuación de ondas se hace en *forma fasorial* trasladando los resultados al *dominio temporal* mediante un simple producto por una exponencial. En la resolución de la ecuación para el campo \mathbf{E} , se ha supuesto un *medio sin pérdidas* (no existen corrientes) y se ha determinado una *solución general* (ondas en dos direcciones contrarias). Una vez determinada la solución general para el campo eléctrico, se ha introducido el concepto de *impedancia intrínseca* del medio η para resolver la ecuación de ondas para el campo magnético. Se ha estudiado el concepto de *corrimiento Doppler* para una onda emitida o recibida en sistemas en movimiento. Se ha introducido el concepto de *onda plana transversal* como aquella con los campos normales a la dirección de avance de la onda (vector de onda k o β). Se han abordado los distintos tipos de *polarización* (lineal, circular o en general elíptica). Se han estudiado las ondas planas que se propagan en *medios con pérdidas*, apareciendo de forma natural como *constante de separación* en la ecuación de ondas, la denominada *constante de propagación γ compleja*, al ser compleja la constante dieléctrica. Se ha visto que en los medios con pérdidas, las ondas sufren *atenuación* al propagarse en su seno. Se han estudiado los conceptos de *constante de atenuación α* , de *constante de fase β* (ya introducida en las ondas en medios sin pérdidas), de *tangente de pérdidas* y de *profundidad de piel*. Se han estudiado (mediante las adecuadas aproximaciones en el desarrollo de γ) los casos de propagación en medios con *pequeñas pérdidas* y en *buenos conductores*. Se ha introducido el concepto de paquete de ondas y, se ha definido la velocidad de grupo de un paquete de onda. Se ha destacado la diferencia entre *velocidad de grupo* (la de la onda portadora) y *velocidad de fase* (la de una de las ondas del grupo).

A continuación se ha estudiado el transporte de energía por las ondas planas mediante el *Vector de Poynting*. Con el estudio del flujo del vector de Poynting a través de una superficie, se han caracterizado la *potencia instantánea* emitida por una fuente de ondas electromagnética y la *potencia promedio* emitida en un periodo (que es la cantidad de interés en los cálculos). El capítulo ha dedicado su última parte a la *incidencia de ondas planas sobre superficies de discontinuidad* o movimiento de ondas planas entre dos



medios de distintas características electromagnéticas, separados por una superficie de discontinuidad. El estudio se ha realizado, en primer lugar, para una onda que *incide normalmente* sobre la superficie de separación de dos *medios dieléctricos sin pérdidas*. De las condiciones en la frontera de las Ecuaciones de Maxwell se deriva la necesidad de la *existencia de tres ondas (la incidente, la reflejada y la transmitida)* y de unos coeficientes, *coeficiente de reflexión* Γ y *coeficiente de transmisión* τ , que proporcionan las amplitudes de las ondas reflejada y transmitida en función de la amplitud de la onda incidente. Se ha estudiado, después, la *incidencia sobre una superficie conductora*, comprobando que no existe onda transmitida, sino que toda la onda se refleja dando lugar a una *onda estacionaria*. Se comprueba en este caso, que la energía es constante en el medio dieléctrico, y que aparece en la superficie del conductor, una corriente inducida por el campo magnético según el teorema de Ampère. Se han introducido las expresiones de los coeficientes de reflexión y transmisión cuando el segundo medio es un dieléctrico con pérdidas. El tema acaba con el estudio de la *incidencia oblicua de ondas planas polarizadas linealmente*, primero se ha estudiado la forma general de una onda plana que se propaga en una dirección cualquiera, a continuación se establecen las *Leyes de Snell* sobre la reflexión y transmisión de ondas entre dos medios distintos y se han discutido los casos de incidencia sobre medios sin pérdidas y sobre un conductor perfecto. Se han definido los conceptos de *ángulo crítico de reflexión* y de *ángulo de Brewster de transmisión total*.

6.11 Cuestiones y ejercicios

• Cuestiones

1. Se sabe que en un medio dieléctrico ($\epsilon = 9\epsilon_0$, $\mu = \mu_0$, y $\sigma = 0$) el valor de la intensidad de campo magnético es : $\mathbf{H}(z,t) = -\mathbf{a}_x 0'0398 \cos(10^9 t - \beta z)$. Se pide determinar el valor del campo eléctrico y de la constante de onda .
2. De un material se sabe que es buen conductor con $\sigma = 6 \times 10^7$ S/m y $\mu_r = 1$. ¿Cuánto vale la longitud de onda de un campo eléctrico de frecuencia $\nu = 10^8$ Hz que se mueve en dicho material?. ¿Y la profundidad de penetración?
3. Una onda plana $\mathbf{E} = \mathbf{a}_x E_x$ se propaga, en la dirección Z, en un medio dieléctrico simple sin pérdidas ($\epsilon_r = 9$, $\mu_r = 1$, $\sigma = 0$). Se sabe que E_x es senoidal (referencia coseno) de frecuencia ν igual a 200 MHz y que su valor máximo es de 10^8 V/m en $t = 0$, $z = 1/4$. ¿En qué instantes alcanza E_x un máximo en la posición $z = 3/4$?
4. ¿Qué onda se atenúa más rápido en un material con $\sigma / (\omega\epsilon) \gg \gg 1$, aquella con longitud de onda corta o aquella con longitud de onda larga? Justifique la respuesta.
5. Determine la velocidad de fase de una onda plana de amplitud 10^{-5} mV/m y frecuencia 1 GHz sabiendo que se mueve en un medio con $\mu_r = 1$, $\epsilon = 10 - j 0'001$ F/m y $\sigma = 0.01$ S/m.
6. Verifique el Teorema de Poynting en la superficie de un conductor recto de radio a y conductividad σ por el que circula una corriente I .
7. Una onda plana incide con un ángulo de 30° sobre una superficie de separación de dos medios 1 y 2 con parámetros constitutivos ($\epsilon_{r1} = 4$, $\mu_{r1} = \mu_0$; $\epsilon_{r2} = 1$, $\mu_{r2} = \mu_0$). ¿Qué se puede afirmar del ángulo de incidencia?, ¿Y si el ángulo fuese de 45° , como sería la onda refractada?
8. Un campo $\mathbf{E} = \hat{\mathbf{x}} 50 e^{-\gamma z}$ V/m viaja por cierto material de constantes $\epsilon_r = 9$, $\mu_r = 1$ y $\sigma = 0'4$ S/m. Si la frecuencia es 2'54 Ghz determine la atenuación en decibels por metro.
9. Demuestre que dada una onda del tipo $E_x = E_{x_0} e^{-az} \cos(\omega t - \beta z)$, es lo mismo hallar $\frac{\partial E_x}{\partial z}$ que multiplicar por la constante de propagación γ cambiada de signo.

10. Demuestre que una onda plana uniforme no tiene componentes del campo en su dirección de propagación.

11. Demuestre que en la condición de no reflexión en una superficie de separación, la suma del ángulo de Brewster y el ángulo de refracción vale 90° , para polarización paralela ($\epsilon_1 \neq \epsilon_2$, $\mu_1 = \mu_2$).

• **Ejercicios**

1º. Una onda plana circularmente polarizada de mano derecha con un campo eléctrico cuyo módulo vale 3 mV/m viaja en la dirección $+Y$ en un medio dieléctrico ($\epsilon = 9\epsilon_0$, $\mu = \mu_0$, y $\sigma = 0$). Si la frecuencia de la onda es de 100 MHz determine:

- Los valores del número de onda, de la longitud de onda, de la velocidad de fase y de la impedancia intrínseca del medio.
- Las expresiones instantáneas de los campos $E(y,t)$ y $H(y,t)$.
- Obtenga la onda plana circularmente polarizada a mano izquierda que hay que sumar a la onda dada, para tener una onda plana linealmente polarizada en la dirección Y con k igual al de la onda circularmente polarizada a derecha y amplitud máxima de 6 mV/m. Escribir el fasor de la onda plana linealmente polarizada.

2º. Una onda plana uniforme viaja hacia abajo en la dirección $+Z$ en agua de mar: Si suponemos que el plano XY es la superficie marina y que el punto $z = 0$ está justo debajo de la superficie. Sabiendo que en $z = 0$, $\mathbf{H}(0,t) = \mathbf{a}_y 100 \cos(2\pi \times 10^3 t + 15^\circ)$; Obtenga:

- Las expresiones de $E(z,t)$ y $H(z,t)$.
- La profundidad en la que la amplitud de E es el 1 % de su valor en $z = 0$.

(Los parámetros constitutivos del agua de mar son $\epsilon_r = 80$, $\mu_r = 1$, $\sigma = 4 \text{ S/m}$). (Nota: E_{x0} puede ser compleja).

3º Un haz de luz amarilla con longitud de onda 0.6 m amplitud 10 mV/m y frecuencia 1 MHz incide normalmente sobre una lámina de un medio sin pérdidas que se supone situada en el plano $z = 0$ con permitividad relativa 2.25. Determine:

- Las expresiones fasoriales del campo electromagnético en los medios 1 y 2.
- La razón de onda estacionaria en el aire.

c. El vector de Poynting (en media temporal) en el aire y en el medio sin pérdidas.

4°. Determine el vector de Poynting y la potencia promedio total radiada (calculados en el dominio temporal) por una antena centrada en el origen de un sistema de coordenadas esféricas, sabiendo que el campo electromagnético emitido vale:

$$\mathbf{E} = \frac{E_0}{r} \sin \theta \sin \omega \left(t - \frac{r}{u_0} \right) \mathbf{a}_\theta; \quad \mathbf{H} = \frac{E_0}{r \eta_0} \sin \theta \sin \omega \left(t - \frac{r}{u_0} \right) \mathbf{a}_\phi, \text{ donde } E_0 \text{ es la amplitud del}$$

campo eléctrico, η_0 es la impedancia intrínseca y u_0 la velocidad de fase de la onda en el medio considerado. Repita el cálculo usando notación fasorial.

Ayuda:
$$\int \sin^3 ax dx = -\frac{\cos ax}{a} + \frac{\cos^3 ax}{3a} .$$

5°. Una onda plana se mueve en el aire en la dirección z^+ . El campo eléctrico de la onda tiene una frecuencia de 1 MHz y esta polarizado en la dirección z^+ . Si el máximo de E vale $1'2\pi$ mV/m para $t = 0$ y $z = 50$ m, obtenga las expresiones de $\mathbf{E}(z,t)$ y de $\mathbf{H}(z,t)$.

6°. Determine las expresiones en el dominio temporal de los vectores de campo, así como el promedio temporal del vector densidad de potencia, de una onda plana uniforme de frecuencia 300 MHz que viaja en un medio infinito con parámetros constitutivos : $\epsilon_r = 9$, $\mu_r = 1$ y $\sigma = 10$ S/m.

6.12 Bibliografía

David K. Cheng; *Fundamentos de electromagnetismo para ingeniería*; Addison, Wesley, Longman (Adisson-Wesley Iberoamericana S. A.), Ciudad de México, México, (1997).

Clayton R. Paul *et al*; *Introduction to electromagnetic fields*; WBC/McGraw-Hill, Cambridge, Mass., USA, (1997).

John D. Kraus and Fleisch D. A.; *Electromagnetics with applications (fifth edition)*; WBC/McGraw-Hill, Cambridge, Mass., USA, (1999).

Stanley V. Marshall *et al*; *Electromagnetismo: Conceptos y Aplicaciones*; Prentice Hall Hispanoamericana S. A., Ciudad de México, México (1996).

Liang C. Shen and Kong J. A.; *Applied electromagnetism (Third edition)*; PWS Publishing Company, Boston, Mass., USA, (1995).

David H. Stealin *et al*; *Electromagnetic waves*; Prentice-Hall International Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, USA, (1994).

Fawwaz T. Ulaby; *Fundamentals of applied electromagnetics*; Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, USA, (1999).

Roald K. Wangsness; *Campos electromagnéticos*; Noriega Editores; Ciudad de México, México, (1992).

Markus Zahn; *Electromagnetic field Theory: a problem solvig approach* ; John Wiley & sons, New York, USA, (1979).