COMPLEMENTOS MATEMÁTICOS PARA LA INGENIERÍA INDUSTRIAL
Septiembre. Modelo A

INSTRUCCIONES: Lea atentamente los enunciados. Conteste a las preguntas cortas exclusivamente en el espacio disponible a continuación del enunciado. Desarrolle la solución a los ejercicios en el espacio que necesite. Justifique las respuestas.

PREGUNTAS CORTAS

1. (1 punto) Sea f la función dada por

$$f(x,y) = \left(x^2 \cos y, e^{y^3}\right).$$

Determine su matriz jacobiana. ¿Es diferenciable la función f?

Solución:

2. (1 punto) Sea C la curva dada por la representación paramétrica $(I, \mathbf{x})$, $I = (0, 10)$,

$$\mathbf{x}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, -t).$$

Encuentre una representación paramétrica natural de esta curva.

Solución:

3. (1 punto) Escriba las ecuaciones de Frenet para curvas planas.

Solución:

4. (1 punto) Estudie cuándo es regular la parametrización de la superficie S dada por

$$\mathbf{x}(u,v) = \left(u^2, u - v^2, u^2 - v^2\right)$$

con $(u,v) \in \mathbb{R}^2$.

Solución:

EJERCICIOS

5. Sea la curva de ecuaciones $\mathbf{x}(t) = (x,y,z)$ donde:

$$x = t^2, y = t^3 - 1, z = t, t \in \mathbb{R}.$$

   a) (1 punto) Determine la curvatura y la torsión en el punto $\mathbf{x}(0)$.

   b) (1 punto) Determine el triedro de Frenet en el punto $\mathbf{x}(0)$.

   c) (1 punto) Determine las ecuaciones de los planos normal, osculador y rectificante en el punto $\mathbf{x}(0)$.

6. Tenemos la esfera de centro $(0,0,0)$ y radio 1, dada por la parametrización

$$\mathbf{x}(\theta,\phi) = (\cos\theta \operatorname{sen}\phi, \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi, \cos\phi),$$

para la latitud $\theta \in [0, 2\pi]$ y la longitud $\phi \in [0, \pi]$.

   a) (0.75 puntos) Determine los coeficientes de la primera forma fundamental en un punto genérico de la esfera $\mathbf{x}(\theta,\phi)$.

   b) (0.75 puntos) Determine los coeficientes de la segunda forma fundamental en un punto genérico de la esfera $\mathbf{x}(\theta,\phi)$.

   c) (1.5 puntos) Sea

$$\mathbf{c}_1(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, 0),$$

   una curva contenida en la esfera y que pasa por el punto $\mathbf{x}\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = (0,1,0)$. Estudie si es una geodésica.

Curvas
Curvas en el plano no parametrizada por la longitud de arco:

$$k(t) = \det\left(\frac{d\mathbf{x}}{dt}, \left(\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2}\right)\right)\frac{1}{\|d\mathbf{x}/dt\|^3}.$$

Curva en el plano definida por ecuaciones implícitas:

$$k(x,y) = \frac{(-f_y, f_x)\, H(f)\, (-f_y, f_x)^t}{\|\nabla f\|^3}.$$

Curvas en el espacio:

$$k(t) = \frac{\|\mathbf{x}'(t) \times \mathbf{x}''(t)\|}{\|\mathbf{x}'(t)\|^3}, \quad \tau(t) = -\frac{\det(\mathbf{x}'(t), \mathbf{x}''(t), \mathbf{x}'''(t))}{\|\mathbf{x}'(t) \times \mathbf{x}''(t)\|^2}.$$

Superficies
Formas fundamentales:

$$\begin{aligned} E &= \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u, \quad F = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v, \quad G = \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v. \\ e &= \mathbf{N} \cdot \mathbf{x}_{uu}, \quad f = \mathbf{N} \cdot \mathbf{x}_{uv}, \quad g = \mathbf{N} \cdot \mathbf{x}_{vv}. \end{aligned}$$

Curvaturas:

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}, \quad H = \frac{Eg - 2Ff + Ge}{2(EG - F^2)}.$$

Ecuación de las curvaturas principales:

$$k^2\left(EG - F^2\right) - (Eg - 2Ff + Ge)\, k - f^2 + eg = 0.$$

Ecuación diferencial de las líneas de curvatura:

$$(eF - fE)(du)^2 + (eG - gE)\, dudv + (fG - gF)(dv)^2 = 0.$$

Ecuación diferencial de las líneas asintóticas:

$$e(du)^2 + 2f\, dudv + g(dv)^2 = 0.$$

Condición de las curvas geodésicas:

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u'' \\ v'' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (u')^2\, \mathbf{x}_{uu} \cdot \mathbf{x}_u + 2u'v'\mathbf{x}_{uv} \cdot \mathbf{x}_u + (v')^2\, \mathbf{x}_{vv} \cdot \mathbf{x}_u \\ (u')^2\, \mathbf{x}_{uu} \cdot \mathbf{x}_v + 2u'v'\mathbf{x}_{uv} \cdot \mathbf{x}_v + (v')^2\, \mathbf{x}_{vv} \cdot \mathbf{x}_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$