Fundamentos Físicos I **Parcial nº 1**

Alumno: ……………………………………………………………**DNI**………………………………**Grupo**……

1.- En cierta región del espacio, el campo de temperaturas viene dado por $T(\vec{r})=3xyz+15$, donde T se mide en grados centígrados (ºC) y las coordenadas vienen en metros.

a) Determine la expresión del campo vectorial $\vec{h}(\vec{r})=-K\,\vec{\nabla}T$, donde K es una constante de valor 0.025 J/(s·m·ºC). ¿Qué unidades tiene $\vec{h}$ y qué magnitud física representa?

b) Si un termómetro está inicialmente situado en la posición (2,2,1), determine en qué dirección y sentido debe moverse de forma que mida la mayor disminución de T por unidad de longitud (debe darse el vector unitario correspondiente).

c) Calcule la circulación de $\vec{h}$ entre los puntos (1,1,1) y (2,1,3) a lo largo de la línea que los une.

d) Calcule el flujo de $\vec{h}$ a través de una superficie rectangular cuyos vértices están en las posiciones (1,1,1), (3,1,1), (1,1,5), (3,1,5). ¿Qué unidades tiene ese flujo y qué representa físicamente?

SOLUCIÓN

a) Dado el campo escalar $T(\vec{r})$ el campo vectorial $\vec{h}=-K\,\vec{\nabla}T$ se calcula como $\vec{h}=-K(3\ y\ z\ \vec{i}+3\ x\ z\ \vec{j}+3\ x\ y\ \vec{k})=\ -0{,}075(\ y\ z\ \vec{i}+\ x\ z\ \vec{j}+\ x\ y\ \vec{k})\ \ \mathrm{W/m^2}$, y representa la energía térmica que atraviesa una superficie unidad dispuesta perpendicularmente a $\vec{h}$ por unidad de tiempo.

$$\vec{h}=-K(3\ y\ z\ \vec{i}+3\ x\ z\ \vec{j}+3\ x\ y\ \vec{k})=\ -0{,}075(\ y\ z\ \vec{i}+\ x\ z\ \vec{j}+\ x\ y\ \vec{k})\ \ \mathrm{W/m^2}$$

b) El gradiente apunta hacia los máximos incrementos de temperatura por lo tanto el menos gradiente apunta hacia los máximos decrementos de temperatura, así que hay que hallar un vector unitario $\vec{u}$ según $\vec{h}=-K\,\vec{\nabla}T$ en el punto (2,2,1).

$$\vec{u}=\left.\frac{\vec{h}}{|h|}\right|_{(2,2,1)}=-\frac{2\ \vec{i}+2\ \vec{j}+4\ \vec{k}}{2\sqrt{6}}=-\frac{\vec{i}+\vec{j}+2\ \vec{k}}{\sqrt{6}}$$

c) La circulación del campo $\vec{h}=-K\,\vec{\nabla}T$ a lo largo de la recta que une los puntos (1,1,1) y (2,1,3) se determina $C=\int_{(1,\,1,\,1)}^{(2,\,1,\,3)}\vec{h}\cdot\vec{dl}=-K\int_{(1,\,1,\,1)}^{(2,\,1,\,3)}\vec{\nabla}T\cdot\vec{dl}=-K\int_{(1,\,1,\,1)}^{(2,\,1,\,3)}dT=-K\,T\Big|_{(1,\,1,\,1)}^{(2,\,1,\,3)}$

$$C=-K\,T\Big|_{(1,\,1,\,1)}^{(2,\,1,\,3)}=-K\ [(3\cdot2\cdot3\cdot1+15)-(3\cdot1\cdot1\cdot1+15)]=-15\,K=-\ 0{,}375\ \ \mathrm{W/m}$$

d) El flujo será $\Phi=\int_S\vec{h}\cdot\vec{dS}$ y como la superficie rectangular de integración está situada en el plano y = 1, el elemento de superficie se escribe $\vec{dS}=dx\,dz\,\vec{j}$

$$\Phi=\int_S\vec{h}\cdot\vec{dS}=-3\ K\int_1^5 z\left(\int_1^3 x\ dx\right)\ dz=-3\ K\int_1^5 z\left.\frac{x^2}{2}\right|_1^3\ dz=-12\ K\int_1^5 z\ dz=-12\,K\left.\frac{z^2}{2}\right|_1^5=-144\,K$$

$\Phi=-144\,K=-\ 3{,}6\ \ \mathrm{W}$ lo que quiere decir que fluyen a través de la superficie rectangular 3,6 J/s en el sentido contrario al sentido elegido para la superficie considerada como un vector (es decir, en sentido $-\vec{j}$).

Fundamentos Físicos I **Parcial nº 1**

Alumno: ……………………………………………………………DNI………………………………Grupo……

2.- Dos bolas B_1 y B_2, de masas m_1 y $m_2=2m_1$, están suspendidas de dos hilos inextensibles de longitud 0.8 m. Las bolas están en contacto y a la misma altura cuando los hilos están verticales. Se separa B_1 de su posición de equilibrio un ángulo de 60°, manteniendo el hilo extendido y en el mismo plano vertical que el otro hilo. Se suelta B_1 y choca con B_2 , que estaba inicialmente inmóvil. Calcule:

a) La velocidad de B_1 justo antes de chocar con B_2.
b) Las velocidades de ambas bolas inmediatamente después del choque, supuesto elástico.
c) La altura a la que ascenderá la bola B_2 después del choque.

Nota: Ignorese todo rozamiento con el aire.

SOLUCIÓN

a) Una vez separada la bola B_1 de su posición de equilibrio (hilo de sujeción vertical) hasta formar un ángulo de 60^0 y liberada, sobre ella actúan la fuerza gravitatoria y la tensión del hilo de sujeción que no realiza trabajo. Como la única fuerza que realiza trabajo es conservativa la energía mecánica se conserva. Comparando las energías mecánicas en la posición 1 (en el momento de la liberación) y en la posición 2 (justo cuando llega al punto más bajo, punto donde el hilo vuelve a estar vertical) tendremos $E_c+U|_1=E_c+U|_2$. Si elegimos el origen de energías potenciales en el punto más bajo, y tenemos en cuenta que la energía cinética en la posición 1 es cero, podemos escribir $U_1=E_{c,2} \Rightarrow \; m_1 g_0 l(1-\cos\theta)=\frac{1}{2}m_1(v_1)^2$ y sustituyendo valores $v_1=\sqrt{0{,}8\cdot g_0}=\;2{,}8\;\;\text{m/s}$

b)En el momento previo antes del choque y justamente después del choque entre las dos bolas (considerado como el sistema en estudio) no existen fuerzas externas en la dirección perpendicular a los hilos de donde cuelgan, por lo que se conserva el momento lineal en dicha dirección. Si la dirección de llegada de la bola 1 se identifica con la dirección positiva del eje x (el vector unitario $\vec{i}$) y tenemos en cuenta que el choque es frontal, $\vec{p}_1+\vec{p}_2=\vec{p}'_1+\vec{p}'_2$, indicando las variables con prima los valores de las magnitudes justo después del choque; y que la bola 2 está parada antes del choque, la expresión anterior se reescribe $m_1 v_1=m_1 v'_1+m_2 v'_2$. Por otro lado al ser el choque elástico la energía cinética del sistema se conserva y podemos escribir la relación

$$1/2\, m_1 v_1^2=1/2\, m_1 v'^2_1+1/2\, m_2 v'^2_2 \;.$$

Resolviendo el sistema formado por las dos ecuaciones anteriores resulta

$$v'_1=\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\cdot v_1 \quad \text{y} \quad v'_2=\frac{2\,m_1}{m_1+m_2}\cdot v_1$$

y en función de los valores de las masas y la velocidad calculada en el apartado anterior las velocidades resultantes después del choque son

$$v'_1=\frac{-1}{3}\cdot v_1=\;-0{,}93\;\;\text{m/s} \quad \text{y} \quad v'_2=\frac{2}{3}\cdot v_1=\;1{,}87\;\;\text{m/s}$$

lo que nos quiere decir que la bola B_1 retrocede en la dirección desde donde cayó y la bola B_2 inicia un movimiento en la misma dirección de llegada de la bola B_1.

c) Si nos centramos ahora en la bola B_2 sobre ella actúan la fuerza de gravedad y la tensión del hilo, y teniendo en cuenta lo dicho en el apartado a), podemos aplicar el mismo razonamiento teniendo en cuenta que B_2 en su posición inicial, carece de energía potencial, y en su posición final, punto más alto, su energía cinética debe ser nula pues de lo contrario seguiría ascendiendo.

$E_c+U|_I=E_c+U|_F \;\; E_{c,I}=U_F \;\Rightarrow\; \frac{1}{2}m_2(v'_2)^2=m_2\,g_0\,h' \quad h'=v'^2_2/(2\cdot g_0)=0{,}18\;\;\text{m}$

Fundamentos Físicos I **Parcial nº 1**

Alumno: ……………………………………………………………**DNI**………………………………**Grupo**……

3.- Una lanzadera de masa $m_l=500$ kg lleva una sonda de masa $m_s=100$ kg, y el conjunto describe inicialmente una órbita circular alrededor de la Tierra de radio $r_{ini}=12000$ km. Calcule:

a) La velocidad y el momento angular del conjunto lanzadera+sonda en dicha órbita inicial.
b) En un cierto instante, la lanzadera lanza la sonda en la dirección y sentido del movimiento del conjunto, de manera que la sonda adquiere la velocidad mínima necesaria para escapar del campo gravitatorio terrestre. Determine las energías mecánicas de la sonda y de la lanzadera inmediatamente después del lanzamiento, y razone qué órbitas describirán.
c) Calcule las velocidades de la sonda y de la lanzadera inmediatamente después del lanzamiento.

Datos adicionales: aceleración de la gravedad en la superficie terrestre, g_0=9.8 m/s^2, radio terrestre, R_T=6370 km.

SOLUCIÓN

a) El conjunto describe un movimiento circular uniforme por lo que podemos escribir $G\,M\,m_{l+s}/r_{ini}^2=g_0 R_T^2\, m_{l+s}/r_{ini}^2=m_{l+s} v_{l+s}^2/r_{ini}$ $\boxed{g_0 R_T^2/r=v_{l+s}^2 \;\rightarrow\; v_{l+s}=R_T\sqrt{g_0/r} = 5{,}76\ \text{km/s}}$.

El momento angular es perpendicular al plano de la órbita. Como $\vec{r}$ y $\vec{p}$ son perpendiculares entre sí,

$$\boxed{L=r\cdot m_{l+s}\cdot v_{l+s} = 12\cdot 10^6\cdot 600\cdot 5{,}76\cdot 10^3 = 4{,}14\cdot 10^{13}\ \text{kg m}^2\,\text{s}^{-1}}$$

b) Para escapar la sonda debe alcanzar una energía total igual a cero, $\boxed{E_s'=0}$, dicha energía representa el límite entre estar atrapado por el campo gravitatorio terrestre o estar libre de él y se corresponde, por tanto con ***una órbita parabólica***. Llamando v_{sd} a la velocidad que debe adquirir,

$$0=-g_0 m_s R_T^2/r+m_s v_{sd}^2/2 \;\rightarrow\; v_{sd}=R_T\sqrt{2\,g_0/r} = 8{,}14\ \text{km/s}$$

.

Según la dirección tangente a la órbita inicial no hay fuerzas externas así que se conserva el momento lineal en dicha dirección; llamando v_{ld} a la velocidad de la lanzadera inmediatamente después del lanzamiento de la sonda y teniendo en cuenta que antes ambas tienen idéntica velocidad

$$m_{l+s} v_{l+s} = m_s v_{sd}+m_l v_{ld} \rightarrow v_{ld}=\frac{1}{m_l}\,[m_{l+s} v_{l+s}-m_s v_{sd}]=\frac{1}{500}\,[600\cdot 5{,}76-100\cdot 8{,}14]= 5{,}28\ \text{km/s}$$

La energía de la lanzadera es $\boxed{E_l'=-m_l\, g_0 R_T^2/r+m_l v_{ld}^2/2 \;\rightarrow\; E_l'=-\,9{,}6\cdot 10^9\ \text{J}}$ por lo que queda atrapada $E_l'<0$ y, al haber disminuido su velocidad en relación con la necesaria para mantener la órbita circular de ese radio pasará a ser ***elíptica***.

c) Las velocidades justo después del lanzamiento ya han sido calculadas en el apartado anterior y son $\boxed{v_{sd}=R_T\sqrt{2\,g_0/r} = 8{,}14\ \text{km/s}}$ y $\boxed{v_{ld}=[(m_s v_s+m_l v_l)-m_s v_{ls}]/m_l = 5{,}28\ \text{km/s}}$.