

TEMA 5: INTEGRACIÓN

1. LA INTEGRAL INDEFINIDA

En muchos aspectos, la operación llamada integración que vamos a estudiar aquí es la operación inversa a la derivación.

Definición 1.1. La función F es una antiderivada (o primitiva) de la función f en el intervalo I si $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in I$.

Por lo que ambas $F_1(x) = x^3 + 6$ y $F_2(x) = x^3 - 2$ son antiderivadas de $f(x) = 3x^2$ en cualquier intervalo.

Teorema 1.2. Si F_1 y F_2 son dos antiderivadas arbitrarias de f en I , entonces $F_1(x) - F_2(x) = \text{const.}$ en I .

Demostración. Por definición de antiderivada $F_1' = F_2' = f$ en I , por lo que $(F_1 - F_2)'(x) = 0$ para todo $x \in I$. Puesto que una función con derivada nula en un intervalo es una función constante, tenemos que $F_1(x) - F_2(x) = \text{const.}$ \square

Corolario 1.3. Si F es una de las antiderivadas de f en I , y G es otra antiderivada de la función f en I entonces G tiene la forma $G(x) = F(x) + C$, donde C es una constante.

Definición 1.4. El conjunto de todas las antiderivadas de la función f en el intervalo I es llamado la integral indefinida de f en I , y es denotado por

$$\int f(x) dx.$$

Observemos que por el Corolario 1.3, $\int f(x) dx = F(x) + C$, donde F es una de las antiderivadas de f en I , y C es una constante arbitraria. A menudo el símbolo $\int f(x) dx$ denota no el conjunto de todas las antiderivadas sino cualquiera de ellas.

1.1. Propiedades de la Integral Indefinida.

1. $\int F'(x) dx = F(x) + C$;
2. Sean f, g funciones cualesquiera y a, b constantes, $\int (af(x) + bg(x)) dx = a \int f(x) dx + b \int g(x) dx$.

1.2. Reglas básicas de Integración.

1. $\int 0 dx = C$;
2. $\int 1 dx = x + C$;
3. $\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C \quad (a \neq -1)$;
4. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C \quad (x \neq 0)$;
5. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (0 < a \neq 1), \int e^x dx = e^x + C$;

6. $\int \sin x \, dx = -\cos x + C$;
7. $\int \cos x \, dx = \sin x + C$;
8. $\int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = \tan x + C \quad (x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \text{ entero})$;
9. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C \quad (-1 < x < 1)$;
10. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C$.

1.3. Integración con Cambio de Variable. A veces la tarea de encontrar la integral $\int f(x) \, dx$ se simplifica a través de un cambio de variable $x = \varphi(t)$. La *fórmula de cambio de variable* en una integral indefinida es

$$\int f(x) \, dx \Big|_{x=\varphi(t)} = \int f(\varphi(t))\varphi'(t) \, dt.$$

Ejemplo 1.5. Hallar $\int \tan x \, dx$.

SOLUCIÓN: Sea $t = \cos x$. Entonces $dt = -\sin x \, dx$. Así, por la fórmula de cambio de variable

$$\int \tan x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} \, dx = -\int \frac{dt}{t} = -\ln |t| + C = -\ln |\cos x| + C.$$

Ejemplo 1.6. Hallar $\int \sqrt{2x-1} \, dx$.

SOLUCIÓN: Sea $t = 2x - 1$. Entonces $dt = 2dx$. Por lo que,

$$\int \sqrt{2x-1} \, dx = \frac{1}{2} \int \sqrt{t} \, dt = \frac{1}{2} \int t^{1/2} \, dt = \frac{1}{2} \frac{t^{3/2}}{3/2} + C = \frac{1}{3} t^{3/2} + C = \frac{1}{3} (2x-1)^{3/2} + C.$$

Ejemplo 1.7. Hallar $\int x\sqrt{2x-1} \, dx$.

SOLUCIÓN: Sea $t = 2x - 1$. Entonces $dt = 2dx$. Además, $x = (1+t)/2$. Aplicando la fórmula de cambio de variable, tenemos

$$\begin{aligned} \int x\sqrt{2x-1} \, dx &= \frac{1}{4} \int (1+t)t^{1/2} \, dt = \frac{1}{4} \int t^{1/2} + t^{3/2} \, dt = \frac{1}{4} \left(\frac{t^{3/2}}{3/2} + \frac{t^{5/2}}{5/2} \right) + C \\ &= \frac{3}{2} (2x-1)^{3/2} + \frac{5}{2} (2x-1)^{5/2} + C. \end{aligned}$$

Ejemplo 1.8. Hallar $\int \frac{\ln x}{x} \, dx$.

SOLUCIÓN: Sea $t = \ln x$. Entonces $dt = dx/x$ y

$$\int \frac{\ln x}{x} \, dx = \int t \, dt = \frac{1}{2} t^2 + C = \frac{1}{2} (\ln x)^2 + C.$$

Ejemplo 1.9. Hallar $\int x e^{-x^2} dx$.

SOLUCIÓN: Sea $t = x^2$. Entonces $dt = 2x dx$ y

$$\int x e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \int e^{-t} dt = -\frac{1}{2} e^{-t} + C = -\frac{1}{2} e^{-x^2} + C.$$

1.4. Integración por partes. Para funciones derivables u y v tenemos que $(uv)' = uv' + vu'$. Tomando integrales y dado que $\int (uv)'(x) dx = u(x)v(x)$, tenemos

$$\int u(x)v'(x) dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x) dx.$$

Esta relación es conocida como la *fórmula de integración por partes*. Usando las identificaciones $u'(x) dx = du$ y $v'(x) dx = dv$ podemos escribir esta fórmula como

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

Ejemplo 1.10. Hallar $\int x e^x dx$.

SOLUCIÓN: Sea $u = x$ y $dv = e^x dx$. Entonces $du = dx$ y $v = e^x$. Por lo que

$$\int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx = e^x(x - 1) + C.$$

Ejemplo 1.11. Hallar $\int x^2 \ln x dx$.

SOLUCIÓN: Sea $u = \ln x$ y $dv = x^2 dx$. Observemos que $du = dx/x$ y $v = x^3/3$. Entonces, usando la fórmula de integración por partes, tenemos

$$\int x^2 \ln x dx = \ln x \left(\frac{x^3}{3} \right) - \int \frac{x^3}{3x} dx = \ln x \left(\frac{x^3}{3} \right) - \frac{1}{3} \int x^2 dx = \ln x \left(\frac{x^3}{3} \right) - \frac{1}{9} x^3 + C.$$

Ejemplo 1.12. Hallar $\int \arctan x dx$.

SOLUCIÓN: Sea $u = \arctan x$ y $dv = dx$. Entonces $du = dx/(1+x^2)$ y $v = x$. Por lo que

$$\int \arctan x dx = x \arctan x - \int \frac{x}{1+x^2} dx.$$

Ahora, observemos que usando el cambio de variable $t = x^2$ tenemos $dt = 2x dx$, de este modo

$$\int \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{1+t} dt = \frac{1}{2} \ln|1+t| + C = \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C.$$

Conectando este valor a la expresión anterior, obtenemos finalmente que

$$\int \arctan x dx = x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C.$$

Ejemplo 1.13. Hallar $\int x^2 \sin x \, dx$.

SOLUCIÓN: Sea $u = x^2$ y $dv = \sin x \, dx$. Entonces $du = 2x \, dx$ y $v = -\cos x$. Así

$$\int x^2 \sin x \, dx = -x^2 \cos x + 2 \int x \cos x \, dx.$$

Aplicando de nuevo la integración por partes a la segunda integral, $u = x$ y $dv = \cos x \, dx$ tenemos que $du = dx$ y $v = \sin x$, por lo que

$$\int x \cos x \, dx = x \sin x - \int \sin x \, dx = x \sin x + \cos x + C.$$

Conectando este valor a la expresión anterior, obtenemos finalmente que

$$\int x^2 \sin x \, dx = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + C.$$

1.5. Integración de Funciones Racionales. Una función racional es de la forma $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, donde P_n y Q_m son polinomios de grado n y m , respectivamente. Si $n \geq m$ la fracción es *impropia* y puede ser representada por

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = P_{n-m}(x) + \frac{R_k(x)}{Q_m(x)},$$

donde el grado del polinomio R_k es $k < m$. Por lo que la integración de una fracción impropia puede ser reducida a la integración de una fracción propia

$$\int \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} \, dx = \int P_{n-m}(x) \, dx + \int \frac{R_k(x)}{Q_m(x)} \, dx.$$

Ejemplo 1.14.

$$\int \frac{x^3 + x^2 + x}{x^2 + 1} \, dx = \int (x + 1) \, dx - \int \frac{1}{x^2 + 1} \, dx,$$

Puesto que la división de los polinomios es

$$\frac{x^3 + x^2 + x}{x^2 + 1} = x + 1 - \frac{1}{x^2 + 1}.$$

Así

$$\int \frac{x^3 + x^2 + x}{x^2 + 1} \, dx = \frac{1}{2}(x + 1)^2 - \arctan x + C.$$

Teorema 1.15. Supongamos que $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ es una fracción propia ($n < m$) y que

$$Q_m(x) = (x - a)(x - b) \cdots (x - d).$$

Entonces existen constantes A, B, \dots, D tal que

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{A}{x - a} + \frac{B}{x - b} + \cdots + \frac{D}{x - d}.$$

Una consecuencia importante es que para una fracción propia que satisface la condición del teorema, tenemos

$$\begin{aligned}\int \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} dx &= \int \frac{A}{x-a} dx + \int \frac{B}{x-b} dx + \cdots + \int \frac{D}{x-d} dx \\ &= A \ln|x-a| + B \ln|x-b| + \cdots + D \ln|x-d| + C.\end{aligned}$$

Ejemplo 1.16. Hallar $\int \frac{1}{x^2 - 5x + 6} dx$.

SOLUCIÓN: Notemos que $x^2 - 5x + 6 = (x-3)(x-2)$. Entonces

$$\frac{1}{(x-3)(x-2)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x-2} = \frac{A(x-2) + B(x-3)}{(x-3)(x-2)}.$$

donde $1 = A(x-2) + B(x-3)$ es llamada ecuación básica. Para hallar los valores de A y B hacemos $x = 2$ en la ecuación básica y obtenemos que $1 = -B$, por tanto, $B = -1$ y haciendo $x = 3$ obtenemos $A = 1$. De aquí que

$$\int \frac{1}{x^2 - 5x + 6} dx = \ln|x-3| - \ln|x-2| + C.$$

2. LA INTEGRAL DEFINIDA

Definición 2.1. La integral definida de una función continua no-negativa f en el intervalo $I = [a, b]$ es el área, A , de la región limitada por la gráfica de f , el eje x , y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$. La integral definida viene dada por

$$\int_a^b f(x) dx = A.$$

Ejemplo 2.2. Si $f(x) = 1 - x$, entonces $\int_0^1 f(x) dx = 1/2$, puesto que la región bajo la gráfica de f , limitada por $x = 0$, $x = 1$ es el triángulo rectángulo con área $1/2$.

Definición 2.3. La integral definida de una función continua no-positiva f en el intervalo $I = [a, b]$ es el área de la región limitada por la gráfica de $-f$, el eje x , y las rectas verticales $x = a$, $x = b$. Por lo que,

$$\int_a^b f(x) dx = -A.$$

Es sencillo definir la integral definida de una función que cambia de signo en el intervalo $[a, b]$. A modo de ejemplo, supongamos que f es continua en $[a, b]$ y satisface $f \geq 0$ en $[a, c]$, $f \leq 0$ en $[c, b]$. Entonces la integral definida de f en $[a, b]$ es la diferencia de las áreas

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x) dx &= A_{[a,c]} - A_{[c,b]} = \int_a^c f(x) dx - \int_c^b (-f)(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \\ &\quad \text{(ver Propiedad (4) abajo).}\end{aligned}$$

Situaciones más complejas pueden ser tratadas de manera similar.

Ejemplo 2.4 (Ejemplo 2.2, continuación). Si $f(x) = 1 - x$, entonces $\int_0^2 f(x) dx = 0$, ya que sabemos que $\int_0^1 f(x) dx = 1/2$ y $\int_1^2 (-f)(x) dx = -1/2$. Este último es debido a que

la región limitada por $-f$ entre $x = 1$ y $x = 2$ es de nuevo un triángulo rectángulo de área $1/2$.

2.1. Propiedades de la integral definida. En lo que sigue f y g son funciones continuas en $[a, b]$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

1. $\int_a^a f(x) dx = 0$;
2. $\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$;
3. $\int_a^b \alpha f(x) + \beta g(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx$.
4. Para cualquier $c \in [a, b]$, $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$.
5. Si $f(x) \geq g(x)$ en $[a, b]$, entonces $\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$.

3. REGLA DE BARROW

En esta sección mostramos la conexión entre áreas y antiderivadas.

Definición 3.1. Sea la función f continua en el intervalo $[a, b]$. La función

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt \quad (a \leq x \leq b)$$

se dice que es una integral con límite superior variable.

Teorema 3.2 (Teorema Fundamental del Cálculo Integral). *Si la función f es continua en el intervalo $[a, b]$, entonces la función $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ es una antiderivada de f en $[a, b]$.*

Dicho de otra manera, el teorema establece que

$$\left(\int_a^x f(t) dt \right)' = f(x).$$

Teorema 3.3 (Regla de Barrow). *Si la función f es continua en el intervalo $[a, b]$, entonces*

$$\int_a^b f(x) dx = G(b) - G(a),$$

donde G es una antiderivada de f en $[a, b]$.

Demostración. Sea G una antiderivada arbitraria de f en $[a, b]$. Entonces, por el Teorema 1.2, $G - F$ es constante en $[a, b]$, dado que $F(x) = \int_a^x f(x) dx$, es también una antiderivada de f . En consecuencia, $G(a) - F(a) = G(b) - F(b)$, o

$$G(b) - G(a) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx - \int_a^a f(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

□

La mayoría de las veces vamos a escribir $G(b) - G(a)$ como $G(x)|_a^b$.

3.1. El área de una región plana. Dada una función continua f , el área de la región limitada por la curva $y = f(x)$, el eje OX y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$ es

$$A = \int_a^b |f(x)| dx.$$

Ejemplo 3.4 (Ejemplo 2.4, continuación). El área de la región limitada por $y = 1 - x$ en el intervalo $[0, 2]$ es

$$A = \int_0^2 |1 - x| dx = \int_0^1 (1 - x) dx + \int_1^2 -(1 - x) dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

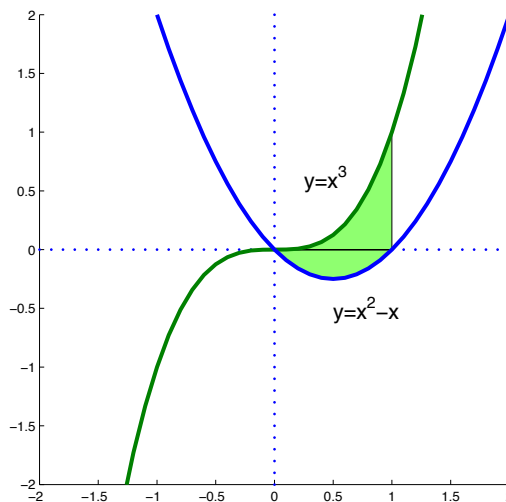
Supongamos que una región plana está limitada por las curvas continuas $y = f(x)$, $y = g(x)$, $a \leq x \leq b$, donde $g(x) \leq f(x)$, y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$ (las rectas pueden degenerar en un punto). Entonces el área de la región es

$$A = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx.$$

Ejemplo 3.5. Hallar el área de la región limitada por las curvas $y = x^3$, $y = x^2 - x$ en el intervalo $[0, 1]$.

SOLUCIÓN: Las curvas se cortan en un punto. Resolviendo la ecuación $x^3 = x^2 - x$, encontramos la abscisa del punto, $x = 0$. Por lo tanto una de las curvas se mantiene por encima de la otra en todo el intervalo. Para saber cuál de las curvas está por encima, simplemente sustituimos en $x^3 - x^2 + x$ un valor arbitrario del intervalo; para $x = 1/2$ tenemos que $x^3 - x^2 + x|_{x=1/2} = 0,375 > 0$, así x^3 está por encima de $x^2 - x$ en $[0, 1]$. El área es

$$A = \int_0^1 x^3 - (x^2 - x) dx = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \right) - 0 = \frac{5}{12}.$$



Ejemplo 3.6. Hallar el área de la región limitada por las gráficas de las funciones $f(x) = 2 - x^2$, $g(x) = x$.

SOLUCIÓN: Las gráficas de las funciones se cortan en dos puntos. Resolviendo la ecuación $2 - x^2 = x$ encontramos que los puntos de corte son $x = -2$, $x = 1$. Por tanto, una de las curvas se mantiene por encima de la otra en el intervalo $[-2, 1]$. De nuevo, para saber cuál de las gráficas está por encima, simplemente sustituimos en $2 - x^2 = x$ un valor arbitrario del intervalo $[-2, 1]$; para $x = 0$ tenemos que $2 - x^2 - x|_{x=0} = 2 > 0$, de modo que $2 - x^2$ está por encima de x en $[-2, 1]$. El área es

$$A = \int_{-2}^1 2 - x^2 - x \, dx = 2x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \Big|_{-2}^1 = \left(2 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) - \left(-4 + \frac{8}{3} - 2\right) = \frac{9}{2}.$$

