Concepto de ángulo en giros de $\mathbb{R}^2$

Recordemos que si $\sigma : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es un endomorfismo ortogonal que representa un giro, entonces tendremos que la matriz de σ respecto de cualquier base *ortonormal* es de la forma

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

para ciertos $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a^2 + b^2 = 1$ (y esto solo pasa para los giros, para la simetrías por ejemplo no pasa, véase el Ejemplo de clasificación de endomorfismos ortogonales de $\mathbb{R}^2$ del Campus Virtual). De hecho, sabemos que podemos encontrar un ángulo $\alpha \in [0, 2\pi)$ de forma que

$$\begin{cases} a = \cos\alpha, \\ b = \sin\alpha, \end{cases}$$

y tendremos por tanto que σ es el giro de ángulo α. Además, haciendo un calculo sencillo, observamos que los autovalores complejos de σ son $a \pm bi$ y que la traza es $2a$. Obsérvese que ni la traza ni los autovalores dependen de la base.

Por ejemplo, sea el giro $\sigma : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ cuya matriz respecto de la canónica $\{e_1, e_2\}$ es la matriz

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Tenemos entonces, dado que

$$\begin{cases} \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}, \\ \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\frac{\pi}{3}, \end{cases}$$

que σ es el giro de ángulo $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

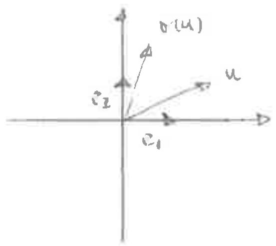
Pero consideremos ahora la base ortonormal $B = \{-e_1, e_2\}$. Entonces la matriz de σ respecto de la base B es

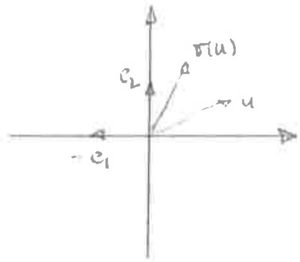
$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Y puesto que

$$\begin{cases} \frac{1}{2} = \cos(-\frac{\pi}{3}), \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin(-\frac{\pi}{3}), \end{cases}$$

ahora diríamos que σ es el giro de ángulo $-\frac{\pi}{3}$... ¿pero cómo puede ser que tengamos dos ángulos asociados al mismo giro? La explicación es simple, en B tenemos una orientación distinta a la canónica.





Intuitivamente, mientras que para e_1 el vector $\sigma(u)$ se ha "alejado" en sentido antihorario, para $-e_1$ el vector $\sigma(u)$ se ha "acercado" en sentido antihorario.

¿Pero no hay forma de dar una definición concreta de ángulo? Sí, podemos definir el ángulo del giro simplemente como el ángulo que tenemos respecto de la base canónica, es decir, el ángulo α tal que la matriz de σ respecto de la base canónica es

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

¿Y si $B = \{v_1, v_2\}$ es otra base ortonormal de $\mathbb{R}^2$, cómo se relaciona su ángulo con α? Fácil, su ángulo será α si tiene orientación positiva y $-\alpha$ si tiene orientación negativa. La matriz de σ respecto de B será de la forma

$$C = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

para algún ángulo $\theta \in [0, 2\pi)$. En particular, las trazas de A y C serán iguales y por tanto

$$2\cos\alpha = 2\cos\theta \quad \Rightarrow \quad \theta = \pm\alpha.$$

Queremos decidir el signo en función de la orientación de la base B. Así que sean

$$v_1 = xe_1 + ye_2 \qquad v_2 = ze_1 + te_2$$

las coordenadas de v_1 y v_2 respecto de la canónica. Como v_1 y v_2 son ortogonales,

$$0 = \langle v_1, v_2\rangle = xz + yt$$

y la orientación de B será positiva si $xt - zy > 0$ y negativa si $xt - zy < 0$. Una vez visto esto, como

$$\sigma(v_1) = \cos\theta v_1 + \sin\theta v_2$$

y v_2 es un vector unitario, es decir, $\langle v_2, v_2\rangle = 1$, deducimos que

$$\sin\theta = \langle\sigma(v_1), v_2\rangle = \langle\sigma(xe_1 + ye_2), ze_1 + te_2\rangle = \qquad (*)$$

$$= xz\langle\sigma(e_1), e_1\rangle + xt\langle\sigma(e_1), e_2\rangle + yz\langle\sigma(e_2), e_1\rangle + yt\langle\sigma(e_2), e_2\rangle =$$

$$= xz\cos\alpha + xt\sin\alpha - yz\sin\alpha + yt\cos\alpha =$$

$$= (xz + yt)\cos\alpha + (xt - yz)\sin\alpha = (xt - yz)\sin\alpha$$

y por tanto tenemos que

(1) si B tiene orientación positiva entonces $xt - yz > 0$ y por tanto $\sin\theta = \sin\alpha$, es decir, que $\theta = \alpha$

(2) si B tiene orientación negativa entonces $xt - yz < 0$ y por tanto $\sin\theta = -\sin\alpha$, es decir, que $\theta = -\alpha$.

Ejercicio. La matriz de una rotación vectorial f respecto de una base positiva $\{u, v\}$ de $\mathbb{R}^2$ es

$$\begin{pmatrix} 1 & -3/2 \\ 2/3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Determinar el ángulo de rotación, el ángulo que forman u y v y la razón $\|v\|/\|u\|$.

Comentario. Observad que $\{u, v\}$ seguro que *no* es una base ortonormal porque si lo fuese la matriz del giro ya sabemos que debería ser de otra forma.

Solución. De la matriz obtenemos las siguientes igualdades

$$\begin{cases} \sigma(u) = u + \frac{2}{3}v, \\ \sigma(v) = -\frac{3}{2}u \end{cases}$$

Por tanto, como σ conserva la normal, obtenemos que

$$\begin{aligned} \langle v, v\rangle &= \langle\sigma(v), \sigma(v)\rangle = \tfrac{9}{4}\langle u, u\rangle, \\ \langle u, v\rangle &= \langle\sigma(u), \sigma(v)\rangle = \langle u + \tfrac{2}{3}v, -\tfrac{3}{2}u\rangle = -\tfrac{3}{2}\langle u, u\rangle - \langle v, u\rangle \end{aligned}$$

Deducimos que

$$\frac{\|v\|^2}{\|u\|^2} = \frac{\langle v, v\rangle}{\langle u, u\rangle} = \frac{\frac{9}{4}\langle u, u\rangle}{\langle u, u\rangle}$$

y por tanto

$$\frac{\|v\|}{\|u\|} = \frac{3}{2}.$$

Calculemos el ángulo $\gamma \in [0, \pi]$ que forman u y v. De las cuentas anteriores sabemos que $\langle u, v\rangle = -\frac{3}{4}\langle u, u\rangle$, y por tanto

$$\cos\gamma = \frac{\langle u, v\rangle}{\|u\|\|v\|} = \frac{-\frac{3}{4}\langle u, u\rangle}{\frac{3}{2}\|u\|^2} = -\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \gamma = \frac{2\pi}{3}.$$

¿Cual es el ángulo del giro? Los autovalores de σ son

$$(1-\lambda)(-\lambda) + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

Es decir, que el ángulo del giro será $\frac{\pi}{3}$ o $-\frac{\pi}{3}$. Decidamos cual de los dos es. Lo hacemos de dos formas.

Método 1. Este método sigue la línea de lo explicado en las primeras hojas, aunque es más complicado. Por hipótesis, la base $\{u, v\}$ es definida positiva. Si aplicamos Gram-Schmidt (ejercicio) llegamos a que la siguiente, es una base ortonormal

$$\{\frac{u}{\|u\|}, \frac{w}{\|w\|}\}$$

donde $w = \frac{3}{4}u + v$. La orientación de esta base también es positiva, ya que

$$\det\left(\frac{u}{\|u\|} \;\; \frac{w}{\|w\|}\right) = \frac{1}{\|u\|} \cdot \frac{1}{\|w\|} \det(u \;\; w) = \frac{1}{\|u\|} \cdot \frac{1}{\|w\|} \det(u \;\; v) > 0$$

Coordenas en columna respecto base canónica

$\boxed{w = \frac{3}{4}u + v \quad C_2 - \frac{3}{4}C_1}$

Porque $\det(u \;\; v) > 0$ ya que $\{u, v\}$ tiene orientación positiva

Por último, y como vimos en la ecuación $(*)$ de más arriba, nos basta con calcular el signo de $\langle\sigma(\frac{u}{\|u\|}), \frac{w}{\|w\|}\rangle$. Se tiene que

$$\langle\sigma(\frac{u}{\|u\|}), \frac{w}{\|w\|}\rangle = \frac{1}{\|u\|\|w\|}\langle\sigma(u), w\rangle =$$

$$= \frac{1}{\|u\|\|w\|}(\langle u + \frac{2}{3}v, \frac{3}{4}u + v\rangle) = \frac{1}{\|u\|\|w\|}(\frac{3}{4}\langle u, u\rangle + \frac{3}{2}\langle u, v\rangle + \frac{2}{3}\langle v, v\rangle) =$$

$$= \frac{1}{\|u\|\|w\|}(\frac{3}{4}\langle u, u\rangle - \frac{9}{8}\langle u, u\rangle + \frac{3}{2}\langle u, u\rangle) = \frac{1}{\|u\|\|w\|}\frac{9}{8}\langle u, u\rangle > 0$$

Dado que $\sigma(\frac{u}{\|u\|}), \frac{w}{\|w\|} > 0$ deducimos que $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

Método 2. La idea de este método es simplemente estudiar en qué sentido ha girado $\sigma(u)$. Recordemos que $\{u, v\}$ nos dice el enunciado que tiene orientación positiva, es decir, que si giramos u en sentido antihorario un ángulo $\frac{2\pi}{3}$ (que es el ángulo que forman como ya hemos visto anteriormente) entonces lo pondremos sobre v. Para ello, debemos calcular los ángulos γ_1 y γ_2 que forman $\sigma(u)$ con u y v respectivamente. Se tiene que

$$\cos\gamma_1 = \frac{\langle \sigma(u), u\rangle}{\|\sigma(u)\|\|u\|}.$$

Como σ respeta la norma, en el denominador queda $\|\sigma(u)\|\|u\| = \|u\|\|u\| = \langle u, u\rangle$. En el numerador queda

$$\langle \sigma(u), u\rangle = \langle u + \frac{2}{3}v, u\rangle = \langle u, u\rangle + \frac{2}{3}\langle v, u\rangle = \langle u, u\rangle - \frac{2}{3}\frac{3}{4}\langle v, u\rangle = \frac{1}{2}\langle u, u\rangle$$

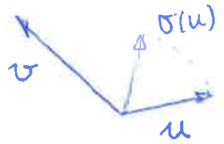
y por tanto

$$\cos\gamma_1 = \frac{\langle \sigma(u), u\rangle}{\|\sigma(u)\|\|u\|} = \frac{\frac{1}{2}\langle u, u\rangle}{\langle u, u\rangle} = \frac{1}{2} \Rightarrow \gamma_1 = \frac{\pi}{3}$$

De forma parecida (ejercicio) llegamos a que

$$\cos\gamma_2 = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \gamma_2 = \frac{\pi}{3}.$$

Deducimos que $\sigma(u)$ lo hemos obtenido girando u en sentido antihorario un ángulo $\frac{\pi}{3}$ (ya que si lo hubiésemos girado en sentido horario el ángulo con v debería ser π).



Concepto de ángulo en rotaciones axiales de $\mathbb{R}^3$

En $\mathbb{R}^3$ la situación es incluso más delicada. Por ejemplo, supongamos que tenemos una rotación axial $\sigma : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, es decir, que respecto de una base ortornormal $\{u, v, w\}$, la matriz de σ es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

Así que en este caso diríamos que el eje de la rotación es $V_1 = L[u]$ y el ángulo es α. Obsérvese que $[V_1]^\perp = L[v, w]$.

Consideremos ahora la base $B = \{-u, -v, w\}$ Entonces, como

$$\begin{cases} \sigma(-u) = -u = (1, 0, 0)_B, \\ \sigma(-v) = \cos\alpha(-v) - \sin\alpha w = (0, \cos\alpha, -\sin\alpha)_B, \\ \sigma(w) = \sin\alpha(-v) + \cos\alpha w = (0, \sin\alpha, \cos\alpha)_B, \end{cases}$$

la matriz de σ respecto es B es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(-\alpha) & -\sin(-\alpha) \\ 0 & \sin(-\alpha) & \cos(-\alpha) \end{pmatrix}$$

así que en este caso diríamos que la rotación tiene ángulo $-\alpha$. De nuevo tenemos una pequeña ambigüedad en el signo. Podemos estar tentados de arreglarlo como en el caso de dimensión 2, es decir, usando la orientación de las bases. Pero incluso en este ejemplo vemos que no va a funcionar porque las orientaciones de las bases $\{u, v, w\}$ y $\{-u, -v, w\}$ es la misma. Lo que sí es cierto, y el motivo por el que los signos difieren, es que las orientaciones de las bases $\{v, w\}$ y de $\{-v, w\}$ del subespacio $L[u, v] = [V_1]^\perp$ es distinta. Sin embargo, para un plano de $\mathbb{R}^3$ cualquiera no tenemos a priori una orientación canónica que podamos fijar. Así que en este caso, es mejor especificar la base $[V_1]^\perp$ respecto de la cual se está considerando el ángulo.