Complejidad Amortizada — Método de agregación

Incremento de contador binario

Estado inicial	$0 = 000000$			
Incremento	$1 = 00000\underline{1}$	1	0	
"	$2 = 0000\underline{10}$	2	1	
"	$3 = 00001\underline{1}$	1	0	
"	$4 = 000\underline{100}$	3	2	
. . .	. . .			
"	$7 = 00011\underline{1}$	1		
"	$8 = 00\underline{1000}$	4		
. . .	. . .			
"	$13 = 00110\underline{1}$	1		
"	$14 = 0011\underline{10}$	2		

Coste $= c(i) =$ Número de "ceros" en los que acaba el valor binario de $i+1$

Coste agregado: $G(m) = \sum_{i=1}^{m} c(i)$

Cada "unidad" de $c(i)$ se corresponde con una cifra subrayada en la tabla

Utilizamos $\sum_{i=1}^{m} c(i) = \sum_{k=1}^{f(m)} k \cdot N(m,k)$ siendo $f(m) = \lfloor \log_2 m \rfloor + 1$

y $N(m,k) = \left| \{ i \leq m \mid c(i) = k \} \right|$

Hemos utilizado la idea de que sumar los valores de una colección de números repetidos equivale a ver cuántas veces aparece cada valor, y multiplicar éstos por dichos factores (usamos conmutatividad + asociatividad)

Contar las cifras subrayadas "por columnas" equivale a considerar

$\overline{N}(m,k') = \sum_{k \geq k'} N(m,k)$, con lo que $\sum_{i=1}^{m} c(i) = \sum_{k'=1}^{f(m)} \overline{N}(m,k')$

La "periodicidad logarítmica" de la tabla de subrayados nos muestra que $\overline{N}(m,k') = \left\lfloor m/2^{k'-1} \right\rfloor$, de modo que tomando $2^{l-1} \geq m > 2^{l-2}$ obtenemos

$$\sum_{k'=1}^{l} \overline{N}(m,k') = \sum_{k'=1}^{l} \left\lfloor m/2^{k'-1} \right\rfloor \leq m \sum 1/2^{k'-1} = 2m$$

La complejidad amortizada $A(m) = \frac{G(m)}{m}$ es por tanto $A(m) \leq 2$

Demostración alternativa con técnicas de "punto fijo"

$$A(m) = \frac{G(m)}{m} = \frac{\sum_{i=1}^{m} c(i)}{m} = \frac{\sum_{Impar(i)}^{m} c(i) + \sum_{Par(i)}^{m} c(i)}{m} = \frac{\sum_{Impar(i)}^{m} 1(i) + \sum_{i=1}^{\lfloor m/2 \rfloor} (1 + c(i))}{m} =$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{m} 1(i) + \sum_{i=1}^{\lfloor m/2 \rfloor} c(i)}{m} = \frac{m + \sum_{i=1}^{\lfloor m/2 \rfloor} c(i)}{m} = 1 + \frac{\sum_{i=1}^{\lfloor m/2 \rfloor} c(i)}{m} \leq$$

$$\leq 1 + \frac{\sum_{i=1}^{\lfloor m/2 \rfloor} c(i)}{2 \lfloor m/2 \rfloor} = 1 + \tfrac{1}{2} \cdot A(\lfloor m/2 \rfloor)$$

Por inducción inmediata obtenemos $A(m) \leq 2$ pues

$A(1) = 1 \leq 2$ y $1 + \tfrac{1}{2} A(\lfloor m/2 \rfloor) \leq 1 + \tfrac{1}{2} 2 = 2$.

Método de la cuenta de ahorro

Pila con desapilar variable

- Secuencia de operaciones $op_1, \dots, op_m$ formada por apilar y desapilar(k).
- Coste real $c(i)$; coste con ahorro $h(i) = 2$ si op_i = apilar.
- Invariante de ahorro : $2m \leq \sum_{i=1}^{m} h(i) = \sum_{i=1}^{m} c(i) + |p|$
  - Inicialmente $m = 0$ y $|p| = 0$
  - Sea op_m = apilar $c(m) = 1$ y $|p|$ se incrementa en 1

    op_m = desapilar(k) $h(m) = 0$

    Si $|p| \geq k$ $c(m) = k$ y $|p|$ decrece en k

    $|p| < k$ $c(m) = |p|$ y $|p|$ deviene en 0.

Contador binario

- op_i = INC ; Coste real $c(i)$; coste con ahorro $h(i) = 2 \ \forall i$
- Invariante ~~de ahorro : $2m =$~~ $\sum_{i=1}^{m} h(i) = \sum_{i=1}^{m} c(i) + unos(counter)$
  - Inicialmente $m = 0$ y $unos(counter) = 0$
  - $c(i) = k \Leftrightarrow$ al incrementar counter se pone un bit a 1 y $k-1$ pasan de 1 a 0 $\Leftrightarrow$

Una de las unidades de $h(m)$ cubre el primer coste y la otra soporta el crecimiento en una unidad de unos(counter)

El resto del coste se compensa con el decrecimiento de unos(counter)