FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS DE LAS TTII
Aplicaciones lineales y matrices. Prueba de autoevaluación número 3 (**PAE-3**)

1. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal definida por

$$f(x_1, x_2) = (2x_1 - x_2, x_1 + 3x_2, x_2 - x_1).$$

Señale las afirmaciones correctas.
(a) $f(2,1) = (3, 5, -1)$.
(b) La matriz de f en las bases canónicas es $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.
(c) Las imágenes de todos los vectores de $\mathbb{R}^2$ están en el plano de ecuación $x - y - 2z = 0$.
(d) Ninguna de las anteriores.

2. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la aplicación lineal definida por

$$f(x, y, z) = (3x + 2y - 4z, x - 5y + 3z).$$

La matriz asociada a f respecto de las bases $B = \{\bar{e}_1 = (1,1,1),\ \bar{e}_2 = (1,1,0),\ \bar{e}_3 = (1,0,0)\}$ y $B' = \{\bar{u}_1 = (1,3),\ \bar{u}_2 = (2,5)\}$ es
(a) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 1 & -5 & 3 \end{pmatrix}$.
(b) $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ -1 & -4 & 1 \end{pmatrix}$.
(c) $\begin{pmatrix} -7 & -33 & -13 \\ 4 & 19 & 8 \end{pmatrix}$.
(d) Ninguna de las anteriores.

3. Sean f y g endomorfismos de $\mathbb{R}^2$ que en la base canónica tienen por matrices asociadas A y B, respectivamente. Señale las afirmaciones correctas.
(a) La matriz asociada a $f + g$ en la base canónica es $B + A$.
(b) La matriz asociada a $g \circ f$ en la base canónica es BA.
(c) La composición $f \circ g$ no está definida.
(d) Ninguna de las anteriores.

4. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$. Señale las afirmaciones correctas.
(a) Su polinomio característico es $\lambda^2 - 3\lambda - 4$.
(b) A verifica la ecuación $A^2 - 3A - 4I = 0$ (aquí 0 designa la matriz nula 2×2).
(c) Una diagonalización de A es $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
(d) Ninguna de las anteriores.

5. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{pmatrix}$ y los vectores de $\mathbb{R}^3$ $\bar{u} = (1,1,0)$ y $\bar{v} = (1,1,1)$.
Señale las afirmaciones correctas.
(a) $\bar{u}$ es un vector propio de A y $\bar{v}$, no.
(b) $\bar{u}$ no es un vector propio de A y $\bar{v}$, sí.

(c) Un valor propio de A es -3.

(d) Una diagonalización de A es $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

6. Sea $V = \mathcal{M}_{2\times 2}$ el espacio vectorial de las matrices 2×2 sobre $\mathbb{R}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ y sea $f : V \to V$ definida por $f(X) = BX$. Compruebe que f es lineal y halle la matriz asociada respecto de las bases canónicas.

7. Sea la matriz $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}$. Estudie si es diagonalizable. En caso afirmativo, encuentre la matriz de paso P que la convierte en diagonal y compruebe, realizando los productos, que $P^{-1}BP$ es una diagonalización de B.

Compare el polinomio característico de esta matriz con el de la matriz A del ejercicio 5, ¿qué observa? Sin hacer nuevos cálculos, ¿son semejantes B y A?

SOLUCIONES. Prueba de autoevaluación número 3 (PAE-3).

1. Es claro que (a) es cierta y (b) falsa, ya que la matriz asociada es $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Para contestar a (c), sea (a, b) un vector genérico de $\mathbb{R}^2$. Entonces $f(a, b) = (2a - b, a + 3b, b - a)$ estará en el plano $x - y - 2z = 0$ si verifica la ecuación, es decir, si

$$(2a - b) - (a + 3b) - 2(b - a) = 0$$

cualesquiera que sean los valores de a y b. Operando en el primer miembro resulta: $3a - 6b$, y es obvio que no es 0 para todos los valores de a y b. Por tanto, (c) es falsa.

2. Basta hallar las imágenes de los vectores $\bar{e}_i$, $i = 1, 2, 3$ y expresarlas como combinación lineal de la base B'. Se tiene:

$$f(\bar{e}_1) = f(1, 1, 1) = (1, -1);\;\; f(\bar{e}_2) = f(1, 1, 0) = (5, -4);\;\; f(\bar{e}_3) = f(1, 0, 0) = (3, 1).$$

Ahora tenemos que expresar estos vectores como combinación lineal de $\bar{u}_1 = (1, 3)$ y $\bar{u}_2 = (2, 5)$. Por ejemplo, para el primero, tenemos que hallar α y β tales que

$$f(\bar{e}_1) = (1, -1) = \alpha\bar{u}_1 + \beta\bar{u}_2 = \alpha(1, 3) + \beta(2, 5).$$

Con lo que se obtiene el sistema

$$\left\{ \begin{aligned} 1 &= \alpha + 2\beta \\ -1 &= 3\alpha + 5\beta, \end{aligned} \right.$$

cuya solución es $\alpha = -7$, $\beta = 4$. Esto significa que $f(\bar{e}_1) = -7\bar{u}_1 + 4\bar{u}_2$. Procediendo de modo similar con los otros dos resulta: $f(\bar{e}_2) = -33\bar{u}_1 + 19\bar{u}_2$ y $f(\bar{e}_3) = -13\bar{u}_1 + 8\bar{u}_2$. Con lo cual, la única opción cierta es (c).

También podíamos haber resuelto el problema con la fórmula del cambio de bases de la pág. 86:

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 1 & -5 & 3 \end{pmatrix},$$

donde A es la matriz de f en las bases canónicas. Con lo que

$$A' = P^{-1}AQ = \begin{pmatrix} -7 & -33 & -13 \\ 4 & 19 & 8 \end{pmatrix}.$$

3. La opción (a) es cierta ya que $B + A = A + B$. La opción (b) es cierta (pág. 76 del libro de texto). La opción (c) es falsa pues $f \circ g$ sí está definida ya que $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ y $g(x) \in \mathbb{R}^2$ que es el espacio inicial de f.

4. El polinomio característico es

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda) - 6 = \lambda^2 - 3\lambda - 4.$$

Así pues, (a) es cierta. Para contestar a (b) basta realizar las operaciones indicadas:

$$\begin{aligned} A^2 - 3A - 4I &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 9 & 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 9 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Por tanto, (c) es cierta.

Este resultado no es más que un caso particular del llamado teorema de Cayley-Hamilton que dice: *Toda matriz es un cero de su polinomio característico.*

5. Para contestar a (a) y a (b) basta hallar AU y AV, donde U y V son, respectivamente, las matrices columna cuyas coordenadas son las de los vectores $\bar{u}$ y $\bar{v}$. Se tiene:

$$AU = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -2U,$$

$$AV = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} \neq kV.$$

Por tanto $\bar{u}$ es vector propio de valor propio -2 y $\bar{v}$ no es vector propio. Es cierta (a) y (b) es falsa. Para contestar a (c) y (d) hallemos los subespacios propios. El polinomio característico es

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -3-\lambda & 1 & -1 \\ -7 & 5-\lambda & -1 \\ -6 & 6 & -2-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 12\lambda + 16 = -(\lambda+2)^2(\lambda-4).$$

Por tanto es claro que los autovalores son -2 y 4, luego (c) es falsa. Hallemos el subespacio propio correspondiente a $\lambda_1 = -2$. Resolviendo el sistema $(A + 2I)X = 0 \Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -7 & 7 & -1 \\ -6 & 6 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} -x + y - z = 0 \\ -7z + 7y - z = 0 \\ -6x + 6y \quad = 0 \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x - y + z = 0 \\ x - y \quad = 0, \end{array} \right.$$

tiene la solución $x = y$, $z = 0$, o de otro modo: $(x, y, z) = \alpha(1, 1, 0)$. Por tanto, $(1, 1, 0)$ es una base del subespacio propio, y consecuentemente, es de dimensión 1. Como la multiplicidad algebraica es 2, se deduce que A no diagonaliza. (d) es falsa.

6. Comprobemos en primer lugar si f es lineal usando la definición 2.1 (pág. 60):

$$f(M + \lambda N) = f(M) + \lambda f(N)$$

para todo par de matrices M, N y para todo número real λ.

Primer miembro: $f(M + \lambda N) = B(M + \lambda N) = BM + B(\lambda N) = BM + \lambda(BN)$.

Segundo miembro: $f(M) + \lambda f(N) = BM + \lambda(BN)$. Como son iguales, f es lineal.

En segundo lugar hallemos la matriz asociada. La base canónica de $V = \mathcal{M}_{2\times 2}$ está formada por las 4 matrices siguientes:

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \; E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Las imágenes de estas matrices por f son las matrices

$$BE_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

BE_2, BE_3 y BE_4. Realizando estos 4 productos se obtiene, respectivamente:

$$BE_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \; BE_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \; BE_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}, \; BE_4 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

En consecuencia, la matriz de f en la base canónica es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

7. El polinomio característico es

$$|B - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 & 3 \\ 3 & -5-\lambda & 3 \\ 6 & -6 & 4-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 12\lambda + 16 = -(\lambda+2)^2(\lambda-4).$$

Por tanto, es claro que los autovalores son $\lambda_1 = -2$ y $\lambda_2 = 4$, con multiplicidad algebraica 2 y 1, respectivamente. Hallemos el subespacio propio correspondiente a $\lambda_1 = -2$. Resolviendo el sistema:

$$\begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 3 & -3 & 3 \\ 6 & -6 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} 3x - 3y + 3z = 0 \\ 3x - 3y + 3z = 0 \\ 6x - 6y + 6z = 0 \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \left\{ \; x - y + z = 0, \right.$$

$x = y - z$, esto es: $(x, y, z) = (y - z, y, z) = y(1, 1, 0) + z(-1, 0, 1) = \alpha(1, 1, 0) + \beta(-1, 0, 1)$. Esto implica que $\{\bar{e}_1 = (1, 1, 0), \; \bar{e}_2 = (-1, 0, 1)\}$ es una base del subespacio propio. Por tanto, este subespacio propio es de dimensión 2, y en consecuencia, podemos ya decir que

A diagonaliza ya que el otro espacio tiene forzosamente dimensión 1. Hallemos una base del espacio propio de $\lambda_2 = 4$. Resolviendo el sistema $(B - 4I)X = 0$, esto es:

$$\begin{pmatrix} -3 & -3 & 3 \\ 3 & -9 & 3 \\ 6 & -6 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} -3x - 3y + 3z = 0 \\ 3x - 9y + 3z = 0 \\ 6x - 6y \quad = 0 \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} -x - y + z = 0 \\ x - y \quad = 0 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = y \\ z = 2y, \end{array} \right.$$

es decir $(x, y, z) = (y, y, 2y) = y(1, 1, 2) = \alpha(1, 1, 2)$, y por tanto, una base del espacio propio es $\bar{e}_3 = (1, 1, 2)$. La matriz de paso P tiene por columnas los vectores $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$ y $\bar{e}_3$, esto es:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

y la matriz diagonal es

$$D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

verificándose que $D = P^{-1}BP$.

Ha quedado claro que el polinomio característico de la matriz A del ejercicio 5 y el de la matriz B de este ejercicio son idénticos, sin embargo, A no es diagonalizable y B, sí. En consecuencia, B y A no son semejantes, ya que si lo fueran, como es una relación de equivalencia y B es semejante a D, A sería también semejante a D, lo cual es una contradicción.