FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS DE LAS TTII. Cód. 71021023
Grado en Ingeniería de las Tecnologías de la Información
Primera semana de Febrero de 2015. Tiempo: 2 horas

INSTRUCCIONES. Cada una de las preguntas tiene un valor máximo de 2 puntos. Sólo está permitido una calculadora no programable.

1. Se consideran los vectores $\bar{a} = (1, -1, 0, 1)$, $\bar{b} = (2, 1, 1, 0)$ y $\bar{c} = (0, 1, 1, 1)$ del espacio vectorial $\mathbb{R}^4$.

(a) Estudie si son linealmente independientes. *(1 punto)*

(b) Determine el valor de $k \in \mathbb{R}$ para que el vector $\bar{v} = (0, k, 0, 1)$ sea combinación lineal de ellos. *(1 punto)*

2. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la aplicación lineal tal que

$$\begin{array}{c} (1,0,0) \to (2,1) \\ (0,1,0) \to (3,1) \\ (0,2,1) \to (10,4) \end{array}$$

(a) Halle las imágenes de los vectores $\bar{u} = (2, -1, 0)$ y $\bar{v} = (3, 1, -2)$. *(1.25 puntos)*

(b) Obtenga la antiimagen (o preimagen) del vector $\bar{w} = (1, 1)$. *(0.75 puntos)*

3. (a) Determine los intervalos de crecimiento de la función

$$f(x) = \frac{x}{2} + \ln(x^2 + 3),$$

y deduzca a partir de ello los máximos y mínimos relativos de f. *(1 punto)*

(b) Obtenga el polinomio de Mac Laurin de orden 4 de la función

$$f(x) = e^{-2x}.$$

(1 punto)

4. (a) Calcule, si existe, el límite

$$\lim_{(x,y)\to(-1,1)} \frac{x^2 - y^2}{(x+y)e^{x-y}}.$$

(1 punto)

(b) Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función definida como

$$f(x,y) = x \cos\left(\frac{x}{y}\right).$$

Obtenga y simplifique $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y)$. *(1 punto)*

5. Determine el volumen del sólido que se obtiene al girar alrededor del eje X la región plana limitada por la gráfica de $y = x + \cos x$ y las rectas $y = 0$, $x = 0$ y $x = \pi$. *(2 puntos)*

SOLUCIONES. FMTI. Primera semana de Febrero de 2015.

1. (a) Hallemos el rango de la matriz cuyas filas son los vectores dados:

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix} \overset{(1)}{\rightarrow} \begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 3 & 1 & -2\\ 0 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix} \overset{(2)}{\rightarrow} \begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 3 & 1 & -2\end{pmatrix} \overset{(3)}{\rightarrow} \begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & -2 & -5\end{pmatrix}$$

(1) $F_2 \to F_2 - 2F_1$. (2) $F_2 \leftrightarrow F_3$. (3) $F_3 \to F_3 - 3F_2$.

Como en la forma escalonada son 3 filas no nulas, el rango de A es 3 y los vectores son linealmente independientes.

(b) Imponiendo que el determinante de los 4 vectores sea 0 se sigue que los vectores son linealmente dependientes, y como los 3 primeros son linealmente independientes, se concluye que el cuarto es combinación lineal de los anteriores (véase la cuestion teórica 2.12 del libro de ejercicios). A continuación se calcula el determinante de los 4 vectores:

$$\begin{vmatrix}1 & -1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & k & 0 & 1\end{vmatrix} \overset{(1)}{=} \begin{vmatrix}1 & -1 & 0 & 1\\ 2 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & k & 0 & 1\end{vmatrix} \overset{(2)}{=} \begin{vmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 0 & -1\\ 0 & k & 1\end{vmatrix} \overset{(3)}{=} 2k + 2 + k = 3k + 2.$$

(1) $F_2 \to F_2 - F_3$. (2) Se desarrolla por C_3. (3) Por la Regla de Sarrus.

Igualando a cero, $3k + 2 = 0$, se sigue que $k = -2/3$ es el valor buscado.

2. (a) Considérese la base canónica de $\mathbb{R}^3$:

$$\{\bar{e}_1 = (1,0,0),\ \bar{e}_2 = (0,1,0),\ \bar{e}_3 = (0,0,1)\}.$$

De acuerdo con el enunciado

$$\begin{aligned} &f(\bar{e}_1) = (2,1),\\ &f(\bar{e}_2) = (3,1),\\ &f(2\bar{e}_2 + \bar{e}_3) = (10,4).\end{aligned}$$

De la última igualdad, por ser f lineal, se tiene que $2f(\bar{e}_2) + f(\bar{e}_3) = (10,4)$. Luego, despejando,

$$f(\bar{e}_3) = (10,4) - 2f(\bar{e}_2) = (10,4) - 2\cdot(3,1) = (4,2).$$

Es claro que $\bar{u} = 2\bar{e}_1 - \bar{e}_2$ y $\bar{v} = 3\bar{e}_1 + \bar{e}_2 - 2\bar{e}_3$ y por ser f lineal se tiene

$$\begin{aligned} &f(\bar{u}) = 2f(\bar{e}_1) - f(\bar{e}_2) = 2\cdot(2,1) - (3,1) = (1,1),\\ &f(\bar{v}) = 3f(\bar{e}_1) + f(\bar{e}_2) - 2f(\bar{e}_3) = 3\cdot(2,1) + (3,1) - 2\cdot(4,2) = (1,0).\end{aligned}$$

(b) Hay que hallar los vectores (x,y,z) tales que $f(x,y,z) = (1,1)$. Se expresa el miembro de la izquierda en forma matricial y se resuelve el sistema resultante:

$$\begin{pmatrix}2 & 3 & 4\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix} \Rightarrow \left\{\begin{array}{r}2x + 3y + 4z = 1\\ x + y + 2z = 1\end{array}\right. \overset{(1)}{\rightarrow} \left\{\begin{array}{r}y \quad\quad = -1\\ x + y + 2z = 1\end{array}\right. \left\{\begin{array}{l}y = -1\\ x = 2 - 2z\end{array}\right.$$

(1) $E_1 \to E_1 - 2E_2$.

Así pues el conjunto solución en forma paramétrica es

$$(x,y,z) = (2 - 2\lambda, -1, \lambda),\ \text{con } \lambda \in \mathbb{R}.$$

3. (a) Empecemos observando que f es continua en $\mathbb{R}$ ya que $x^2+3>0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, por tanto, $f_2(x)=\ln(x^2+3)$ es continua en $\mathbb{R}$ y f es suma de $f_1(x)=\frac{x}{2}$ y $f_2(x)$ que son continuas en $\mathbb{R}$. La derivada de f es

$$f'(x)=\frac{1}{2}+\frac{2x}{x^2+3}=\frac{x^2+4x+3}{2(x^2+3)}.$$

Las raíces de f' son las soluciones de la ecuación $x^2+4x+3=0$, que son $x_1=-3$, $x_2=-1$. f' no tiene discontinuidades pues $2(x^2+3)>0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Por tanto, se tiene que $f'(x)>0$ si y sólo si $x^2+4x+3>0$, lo cual equivale a $x<-3$ o $x>-1$, y $f'(x)<0$ si y sólo si $-3<x<-1$. En consecuencia, f es creciente en los intervalos $(-\infty,-3)$ y $(-1,+\infty)$ y es decreciente en $(-3,-1)$. Como f es continua en $\mathbb{R}$, se deduce que f tiene un máximo relativo en $x=-3$ y un mínimo relativo en $x=-1$.

(b) El polinomio de Mac Laurin de orden 4 es el polinomio de Taylor de orden 4 en $x=0$ y viene dado por

$$P_4(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\frac{f^{iv}(0)}{4!}x^4.$$

Haciendo los cálculos, se tiene

$$\begin{array}{ll} f(x)=e^{-2x}, & f(0)=1 \\ f'(x)=-2e^{-2x}, & f'(0)=-2 \\ f''(x)=4e^{-2x}, & f''(0)=4 \\ f'''(x)=-8e^{-2x}, & f'''(0)=-8 \\ f^{iv}(x)=16e^{-2x}, & f^{iv}(0)=16. \end{array}$$

Por tanto, como $2!=2$, $3!=6$ y $4!=24$, el polinomio de Mac Laurin de orden 4 es

$$P_4(x)=1-2x+2x^2-\frac{4x^3}{3}+\frac{2x^4}{3}.$$

4. (a) Se calcula el límite sin ninguna dificultad, pues el numerador es factorizable:

$$\lim_{(x,y)\to(-1,1)}\frac{x^2-y^2}{(x+y)e^{x-y}}=\lim_{(x,y)\to(-1,1)}\frac{(x+y)(x-y)}{(x+y)e^{x-y}}=\lim_{(x,y)\to(-1,1)}\frac{x-y}{e^{x-y}}=\frac{-2}{e^{-2}}=-2e^2.$$

Nótese que la función $g(x,y)=\frac{x-y}{e^{x-y}}$ es continua en $\mathbb{R}^2$ por ser cociente de funciones continuas y porque el denominador no toma nunca el valor cero.

(b) Se tiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \cos\left(\frac{x}{y}\right)-\frac{x}{y}\operatorname{sen}\left(\frac{x}{y}\right), \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y) &= -\operatorname{sen}\left(\frac{x}{y}\right)\cdot\frac{-x}{y^2}-\left[\frac{-x}{y^2}\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{x}{y}\right)+\frac{x}{y}\cdot\cos\left(\frac{x}{y}\right)\frac{-x}{y^2}\right] \\ &= \frac{2x}{y^2}\operatorname{sen}\left(\frac{x}{y}\right)+\frac{x^2}{y^3}\cos\left(\frac{x}{y}\right). \end{aligned}$$

5. El volumen del sólido de revolución viene dado por la expresión

$$V=\pi\int_0^{\pi}(x+\cos x)^2dx=\pi\int_0^{\pi}(x^2+2x\cos x+\cos^2 x)dx.$$

Vamos a hallar una primitiva descomponiendo en tres sumandos $I_1 + 2I_2 + I_3$, siendo $I_1 = \int x^2 dx$, $I_2 = \int x \cos x dx$ y $I_3 = \int \cos^2 x dx$.

1) La primera integral es inmediata: $I_1 = \int x^2 dx = \frac{x^3}{3}$.

2) La segunda integral se halla por el método de integración por partes. Sea $u = x$, $dv = \cos x dx$, entonces $du = dx$, $v = \operatorname{sen} x$, con lo cual

$$I_2 = \int x \cos x dx = x \operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x dx = x \operatorname{sen} x + \cos x.$$

3) Para hallar la tercera integral, $I_3 = \int \cos^2 x dx$, vamos a transformar $\cos^2 x$ en una suma. Usando la fórmula del ángulo doble y la relación fundamental de la trigonometría:

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) = 2\cos^2 x - 1.$$

Despejando, resulta $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x))$. Sustituyendo en la integral

$$I_3 = \int \cos^2 x dx = \int \frac{1}{2}(1 + \cos(2x))dx = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2x)\right).$$

Así pues, siguiendo con el volumen

$$\begin{aligned} V &= \pi \left[\frac{x^3}{3} + 2x \operatorname{sen} x + 2\cos x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\operatorname{sen}(2x)\right]_0^\pi = \pi\left(\frac{\pi^3}{3} - 2 + \frac{\pi}{2} - 2\right) \\ &= \frac{\pi^4}{3} + \frac{\pi^2}{2} - 4\pi. \end{aligned}$$