FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS DE LAS TTII. Cód. 71021023
Grado en Ingeniería de las Tecnologías de la Información
Septiembre de 2016. Tiempo: 2 horas

INSTRUCCIONES. Cada una de las preguntas tiene un valor máximo de 2 puntos. Sólo está permitido una calculadora no programable. No entregue esta hoja con los enunciados.

1. Sea $M_{2\times 2}$ el espacio vectorial de las matrices de coeficientes reales de tamaño 2×2, el cual sabemos que es de dimensión 4.

(a) Demuestre que los elementos del conjunto

$$B := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \right\}$$

son linealmente independientes (y, en consecuencia, B es una base). *(1 punto)*

(b) Halle las coordenadas de la matriz $A = \begin{pmatrix} 24 & 24 \\ 24 & 24 \end{pmatrix}$ con respecto a la base B.*(1 punto)*

2. Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Estudie si A es diagonalizable y, en caso afirmativo, halle una diagonalización y una matriz de paso. *(2 puntos)*

3. Considere la función dada por $f(x) = \frac{1}{2} - x \operatorname{sen} x$.

(a) Pruebe que f tiene al menos una raíz en el intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ y otra en el intervalo $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$. *(1 punto)*

(b) Calcule el polinomio de MacLaurin de orden 3 de $f(x)$. *(1 punto)*

4. Considere la función $f\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$.

(a) Dado $m \in \mathbb{R}$ arbitrario, calcule $\lim\limits_{x\to 0} f(x, mx)$ y $\lim\limits_{x\to 0} f(x, m\sqrt{x})$. Con los resultados obtenidos, justifique si existe o no el límite $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$. *(1 punto)*

(b) Determine el gradiente de f en el punto $(1,1)$. *(1 punto)*

5. Considere la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = (2x-1)e^{x^2+y}$.

(a) Dibuje el recinto D definido como el área acotada por la recta $y = 1 - x$ y la parábola $y = 1 - x^2$. *(0.5 puntos)*

(b) Calcule $\displaystyle\iint_D f(x,y)\,dydx$ (se recomienda usar este orden de integración). *(1.5 puntos)*

SOLUCIONES. FMTI. Septiembre de 2016.

1. (a) Se probará que toda combinación lineal arbitraria de los elementos de B igualada al elemento nulo de $M_{2\times 2}$ es necesariamente nula. Sean $\alpha, \beta, \mu, \eta \in \mathbb{R}$ tales que

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} + \eta \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Los posibles valores de α, β, μ y η deben verificar el sistema lineal de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} \alpha + \beta &= 0 \\ 2\alpha + 2\mu &= 0 \\ 3\alpha + 3\beta + 3\mu + 3\eta &= 0 \\ 4\alpha + 4\eta &= 0. \end{aligned}\right\}$$

Se resolverá este sistema por el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 4 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \longrightarrow \\ F_2 - 2F_1 \\ F_3 - 3F_1 \\ F_4 - 4F_1 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 4 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} \longrightarrow \\ F_4 - 2F_2 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 4 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \longrightarrow \\ F_4 + \frac{4}{3}F_3 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 0 \end{array}\right)$$

Se observa que $\alpha = \beta = \mu = \eta = 0$. Esto prueba que los elementos de B son linealmente independientes. Como $M_{2\times 2}$ es de dimensión 4, se sigue que B es una base.

(b) Para hallar las coordenadas de A en la base B, se debe expresar esta matriz como combinación lineal de los elementos de B,

$$\begin{pmatrix} 24 & 24 \\ 24 & 24 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} + \eta \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Los posibles valores de α, β, μ y η deben verificar el sistema lineal de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} \alpha + \beta &= 24 \\ 2\alpha + 2\mu &= 24 \\ 3\alpha + 3\beta + 3\mu + 3\eta &= 24 \\ 4\alpha + 4\eta &= 24. \end{aligned}\right\}$$

Puede resolverse este sistema por el método de Gauss (se puede triangularizar la matriz siguiendo los mismos pasos anteriores, solamente cambiará la parte ampliada),

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 24 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 24 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 24 \\ 4 & 0 & 0 & 4 & 24 \end{array}\right) \begin{array}{c} \longrightarrow \\ F_2 - 2F_1 \\ F_3 - 3F_1 \\ F_4 - 4F_1 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 24 \\ 0 & -2 & 2 & 0 & -24 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & -48 \\ 0 & -4 & 0 & 4 & -72 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} \longrightarrow \\ F_4 - 2F_2 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 24 \\ 0 & -2 & 2 & 0 & -24 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & -48 \\ 0 & 0 & -4 & 4 & -24 \end{array}\right) \begin{array}{c} \longrightarrow \\ F_4 + \frac{4}{3}F_3 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 24 \\ 0 & -2 & 2 & 0 & -24 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & -48 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & -88 \end{array}\right)$$

Se despeja y se obtiene que $\eta = -11$, $\mu = -16-\eta = -5$, $\beta = 12+\mu = 7$ y $\alpha = 24-\beta = 17$. Por tanto, las coordenadas de la matriz A respecto de la base B son

$$(17, 7, -5, -11).$$

2. El polinomio característico es

$$p(t) = |A - tI| = \begin{vmatrix} -t & 0 & -1 \\ 0 & 1-t & 0 \\ -1 & 0 & -t \end{vmatrix} = (1-t)t^2 - (1-t) = (1-t)(t^2-1).$$

Por tanto, $p(t) = 0$ para $t = -1$ (raíz simple) y $t = 1$ (raíz doble).

Como $t = 1$ es una raíz doble, su espacio propio correspondiente, $E(1)$, debe tener dimensión 2 para que A sea diagonalizable. Para comprobar su dimensión, se resuelve el sistema $(A - I)X = \bar{0}$,

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

de donde se obtiene que $z = -x$ con y libre. Luego el subespacio propio de $E(1)$ viene dado por

$$(x, y, z) = (\alpha, \beta, -\alpha) = \alpha(1, 0, -1) + \beta(0, 1, 0).$$

Una base de $E(1)$ es $B = \{(1, 0, -1), (0, 1, 0)\}$, luego $E(1)$ tiene dimensión 2 y A es diagonalizable. Una diagonalización posible para A es

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Para calcular una matriz de paso, se hallará una base del subespacio propio $E(-1)$, que viene dado por el sistema $(A + I)X = \bar{0}$, es decir,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

de donde se obtiene que $x = z$ e $y = 0$. Luego el subespacio propio $E(-1)$ viene dado por

$$(x, y, z) = (\alpha, 0, \alpha) = \alpha(1, 0, 1).$$

Una base de $E(-1)$ es $B' = \{(1, 0, 1)\}$. Por tanto, una matriz de paso es

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Para hacer una comprobación, se pude calcular que $A = PDP^{-1}$.

3. (a) Se usará el Teorema de Bolzano.

Teorema de Bolzano: Si $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ es una función continua en el intervalo cerrado $[a,b] \subset \mathbb{R}$ y $f(a)\cdot f(b) < 0$ (o equivalemente, si $f(a)$ y $f(b)$ tienen distinto signo), entonces existe $c \in (a,b)$ tal que $f(c) = 0$.

Obviamente la función f es continua en $\mathbb{R}$, y consecuentemente, en cualquier intervalo $[a,b]$. Como $f(0) = \frac{1}{2} > 0$ y $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{2} < 0$ se tiene que existe $c_1 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ tal que $f(c_1) = 0$. Por otro lado, como $f(\pi) = \frac{1}{2} > 0$, se tiene que existe $c_2 \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ tal que $f(c_2) = 0$.

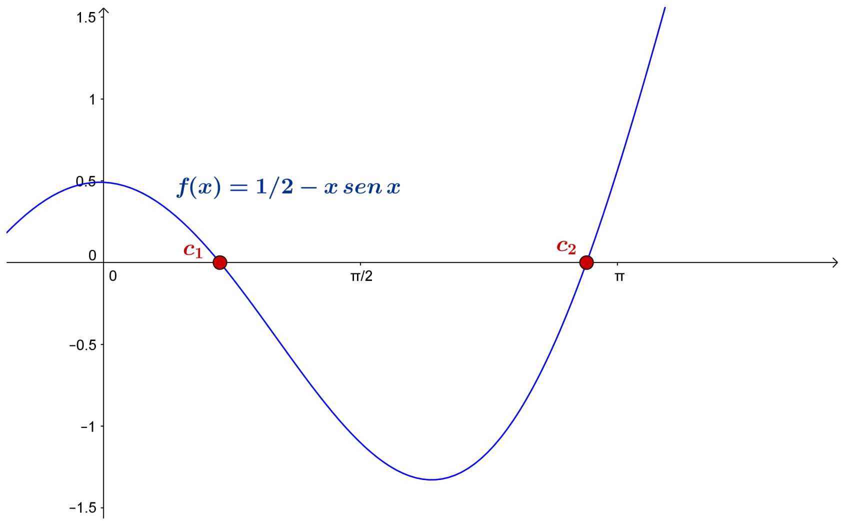

Fig. 1. Gráfica de $f(x)$.

(b) El polinomio de MacLaurin de orden 3 es

$$p(x) = \frac{f(0)}{0!} + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3.$$

A continuación se realizan los cálculos necesarios.
$f(x) = \frac{1}{2} - x\operatorname{sen} x \Rightarrow f(0) = \frac{1}{2}$.
$f'(x) = -\operatorname{sen} x - x\cos x \Rightarrow f'(0) = 0$.
$f''(x) = -2\cos x + x\operatorname{sen} x \Rightarrow f''(0) = -2$.
$f'''(x) = 3\operatorname{sen} x + x\cos x \Rightarrow f'''(0) = 0$.

Por tanto,

$$p(x) = \frac{1}{2} - x^2.$$

4. (a) Se calculan los límites pedidos

$$\lim_{x\to 0} f(x, mx) = \lim_{x\to 0} \frac{x(mx)^2}{x^2 + (mx)^4} = \lim_{x\to 0} \frac{m^2x^3}{x^2(1 + m^4x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{m^2x}{1 + m^4x^2} = 0,$$

$$\lim_{x\to 0} f(x, m\sqrt{x}) = \lim_{x\to 0} \frac{x(m\sqrt{x})^2}{x^2 + (m\sqrt{x})^4} = \lim_{x\to 0} \frac{m^2x^2}{x^2(1 + m^4)} = \frac{m^2}{1 + m^4}.$$

Del primer límite no se obtiene información acerca de la existencia del límite global ya que siempre vale 0. Por otro lado, el segundo límite depende del valor de m, por lo que el límite global no existe. De hecho, puede comprobarse que para $m = 1$ y $m = 2$ el segundo límite tiene valores distintos (todo límite en el espacio euclídeo debe ser único).

(b) Para obtener el gradiente de f, se calculan las derivadas parciales en el punto $(1, 1)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y^2(x^2+y^4) - 2x(xy^2)}{(x^2+y^4)^2} = \frac{y^6 - x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} \Longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{2xy(x^2+y^4) - 4y^3(xy^2)}{(x^2+y^4)^2} = \frac{2x^3y - 2xy^5}{(x^2+y^2)^2} \Longrightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = 0.$$

Por tanto, $\nabla f(1,1) = (0,0)$.

5. (a) El recinto viene dado por el área encerrada entre la recta $y = 1 - x$ y la parábola $y = 1 - x^2$, esto es, los puntos $(0, 1)$ y $(1, 0)$. La parábola $y = 1 - x^2$ tiene su vértice en $(0, 1)$. Con todo esto se calculan sus puntos de corte,

$$1 - x = 1 - x^2 \Leftrightarrow x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x(x-1) = 0,$$

que son $x = 0$ y $x = 1$. Se dibuja el recinto D,

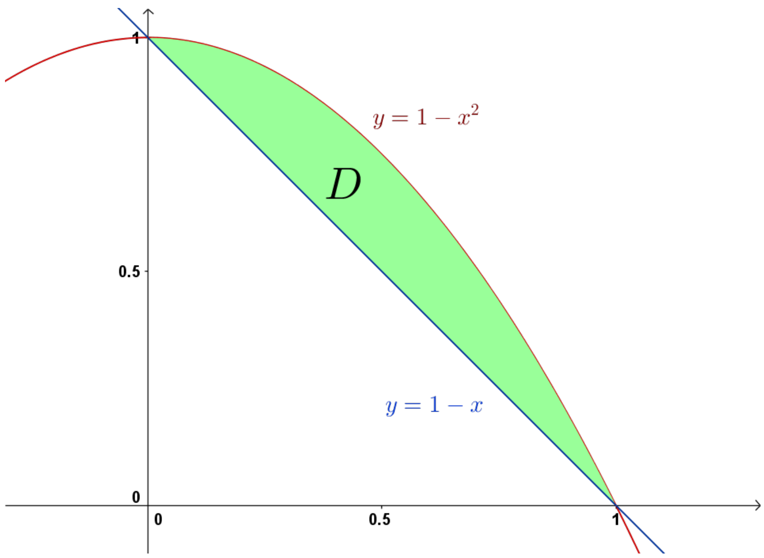

Fig. 2. Recinto de integración D.

(b)

$$\iint_D f(x,y)dydx = \int_0^1 \int_{1-x}^{1-x^2} (2x-1)e^{x^2+y}dydx = \int_0^1 \Big[(2x-1)e^{x^2+y}\Big]_{y=1-x}^{y=1-x^2} dx$$
$$= \int_0^1 \Big((2x-1)e^{x^2+1-x^2} - (2x-1)e^{x^2+1-x}\Big)dx$$
$$= e\int_0^1 (2x-1)dx - \int_0^1 (2x-1)e^{x^2-x+1}dx$$
$$= e\left[x^2 - x\right]_{x=0}^{x=1} - \Big[e^{x^2-x+1}\Big]_{x=0}^{x=1} = 0.$$