FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS DE LAS TTII
Funciones de varias variables. Prueba de autoevaluación número 5 (**PAE-5**)

1. Se define el conjunto $A \subset \mathbb{R}^2$ como

$$A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0, (x-1)^2 + y^2 \leq 1,\ (x-1)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 > \frac{1}{4} \right\}.$$

Indíquese cuál o cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas:
(a) El conjunto A es cerrado y acotado.
(b) El punto de coordenadas polares $(\rho, \theta) = \left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right)$ pertenece a la frontera de A.
(c) El punto $\left(1, \frac{1}{2}\right)$ pertenece al interior de A.
(d) El punto $\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$ pertenece al interior de A.
(e) Sean $P = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$ y $Q = \left(2, \frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)$. El ángulo que forma el vector $\overline{PQ}$ con $\overline{v} = (1, 0)$ es $\frac{\pi}{4}$.

2. Calcúlense, si existen, los siguientes límites:

(a) $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{(x+y-3)^2}{(x-1)(y-2)}$,

(b) $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{x^2+y^4}}{x-y}$.

3. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función definida como

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{(x^4+2x^2y^2)\ln(x^2+y^2+1)}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

(a) Estúdiese la continuidad de f en $\mathbb{R}^2$.

(b) Calcúlense, si existen, las derivadas parciales de f en $(0, 0)$.

(c) Estúdiese la diferenciabilidad de f en $\mathbb{R}^2$.

4. Sean las funciones $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definidas, respectivamente, como

$$f(x, y) = \cos(x^2 - xy) + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{y}\right), \quad g(u, v) = (u - v^2, uv + 1).$$

(a) Utilizando la regla de la cadena, calcúlese $\nabla(f \circ g)(0, 0)$.

(b) Determínese el plano tangente a la gráfica de la función $f \circ g$ en el punto $(0, 0)$.

5. Determínense los extremos relativos de la función

$$f(x, y) = x^4 + y^3 + x^2y - y.$$

SOLUCIONES. Prueba de autoevaluación núm. 5 (PAE-5).

1. En la Figura 1 se muestra el conjunto A.

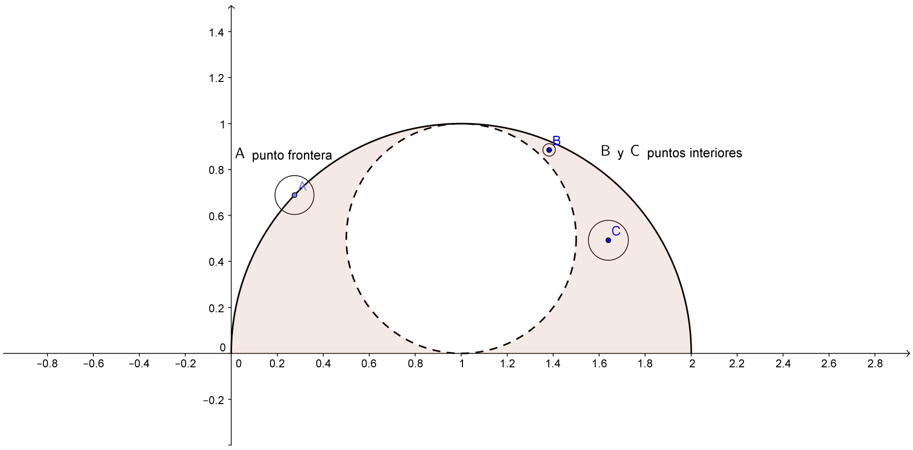

Figura 1: Conjunto A

El conjunto A es la región del plano delimitada por la semicircunferencia superior de centro $(1, 0)$ y radio 1, el segmento que une los puntos $(0, 0)$ y $(2, 0)$ y la circunferencia de centro $\left(1, \frac{1}{2}\right)$ y radio $\frac{1}{2}$, sin estar incluida esta última. Dado cualquier punto perteneciente a estos tres conjuntos, es fácil ver que cualquier bola de centro ese punto contiene puntos que están en A y puntos que no están en A. Por tanto, se tiene que (véase el punto teórico 5.11 (b) del libro de ejercicios)

$$\begin{aligned}\mathrm{fr}A = &\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0, (x-1)^2 + y^2 = 1\right\}\\ &\cup \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\right\}\\ &\cup \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2,\ y = 0\right\}.\end{aligned}$$

Por otra parte, cualquier punto de A que no pertenezca ni a la semicircunferencia ni al segmento es un punto interior de A, ya que se puede encontrar una bola de centro ese punto completamente contenida en A (véase el punto teórico 5.11 (a) del libro de ejercicios), es decir,

$$\mathrm{int}A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0, (x-1)^2 + y^2 < 1,\ (x-1)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 > \frac{1}{4}\right\}.$$

Así pues, se tiene que (véase el punto teórico 5.11 (c) del libro de ejercicios)

$$\begin{aligned}&\mathrm{adh}A = \mathrm{fr}A \cup \mathrm{int}A =\\ &\quad\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0, (x-1)^2 + y^2 \leq 1,\ (x-1)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 \geq \frac{1}{4}\right\}.\end{aligned}$$

Como $\mathrm{adh}A \neq A$, se deduce que A no es un conjunto cerrado, por lo que la opción (a) es falsa. Sin embargo, es claro que A es un conjunto acotado, ya que está contenido, por ejemplo, en la bola de centro $(0, 0)$ y radio 3 (véase el punto teórico 5.12).

Con respecto a la opción (b), teniendo en cuenta el punto teórico 5.9 (b) del libro de ejercicios, el punto P de coordenadas polares $\left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right)$ tiene coordenadas cartesianas

$$x = \sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4} = 1, \qquad y = \sqrt{2}\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = 1.$$

Luego $P = (1,1)$, que pertenece a la frontera de A, y la opción (b) es cierta.

El punto $\left(1, \frac{1}{2}\right)$ no pertenece a A, por lo que no puede ser un punto interior de A, siendo la opción (c) falsa.

Por otra parte, el punto $\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$ pertenece a la frontera de A, y la opción (d) es falsa.

Por último, el ángulo α que forman el vector $\overline{PQ} = Q - P = \left(2 - \frac{3}{2}, \frac{1-\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{-\sqrt{3}}{2}\right)$ y $\overline{v}$ viene dado por (véase la fórmula dada en el punto teórico 5.8 del libro de ejercicios)

$$\cos\alpha = \frac{\overline{PQ}\cdot\overline{v}}{\|\overline{PQ}\|\cdot\|\overline{v}\|} = \frac{\left(\frac{1}{2}, \frac{-\sqrt{3}}{2}\right)\cdot(1,0)}{1\cdot 1} = \frac{1}{2}.$$

Obsérvese que $\|\overline{PQ}\| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1$. Por tanto, $\alpha = \arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$, siendo la opción (e) falsa.

2. (a) Considérese el cambio a coordenadas polares $x = 1 + \rho\cos\theta$, $y = 2 + \rho\operatorname{sen}\theta$ y sea

$$F(\rho,\theta) = f(1+\rho\cos\theta, 2+\rho\operatorname{sen}\theta) = \frac{(\rho\cos\theta + \rho\operatorname{sen}\theta)^2}{\rho^2\cos\theta\operatorname{sen}\theta} = \frac{(\cos\theta + \operatorname{sen}\theta)^2}{\cos\theta\operatorname{sen}\theta}.$$

Como $\lim_{\rho\to 0} F(\rho,\theta) = \frac{(\cos\theta+\operatorname{sen}\theta)^2}{\cos\theta\operatorname{sen}\theta}$ depende de θ, se deduce por el punto teórico 5.23 (a) que no existe el límite en cuestión.

También se llega a la misma conclusión calculando el límite a través de las rectas $y = m(x-1)+2$, $m \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

(b) Los límites reiterados de f en $(0,0)$ son

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{\sqrt{x^2+y^4}}{x-y}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x} \text{ (no existe)}$$

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+y^4}}{x-y}\right) = \lim_{y\to 0}\frac{y^2}{-y} = \lim_{y\to 0} -y = 0.$$

Como el primer límite reiterado no existe, se deduce que no existe $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sqrt{x^2+y^4}}{x-y}$.

3. (a) La función f es continua en $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ por ser cociente de funciones continuas y no anularse el denominador. Falta estudiar la continuidad de f en $(0,0)$. Para ello, hay que ver si existe $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ y si coincide con $f(0,0) = 0$. Obsérvese que para $(x,y) \neq (0,0)$ se tiene que

$$0 \leq \frac{(x^4+2x^2y^2)\ln(x^2+y^2+1)}{x^4+y^4+2x^2y^2} \leq \ln(x^2+y^2+1).$$

En la última desigualdad se ha tenido en cuenta que $x^4+2x^2y^2 \leq x^4+y^4+2x^2y^2$. Como $\ln(x^2+y^2+1)$ tiende hacia cero cuando (x,y) tiende a cero, por la propiedad del emparedado (véase punto teórico 5.21 del libro de ejercicios) se deduce que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$, que es igual a $f(0,0)$, concluyendo que f es continua también en $(0,0)$.

(b) Se tiene que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{h^4\ln(h^2+1)}{h^4}-0}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\ln(h^2+1)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{2h}{h^2+1} = 0. \\
\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{0\cdot\ln(h^2+1)}{h^4}-0}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0}{h} = 0.
\end{aligned}$$

En el primer límite se ha aplicado la regla de L'Hôpital.

(c) La función f es diferenciable en $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ por ser cociente de funciones diferenciables y no anularse el denominador. Para comprobar si f es diferenciable en $(0,0)$ hay que ver si se satisface la siguiente igualdad

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{f(0+h,0+k)-f(0,0)-\nabla f(0,0)\cdot(h,k)}{\|(h,k)\|}=0.$$

El límite anterior es

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\frac{(h^4+2h^2k^2)\ln(h^2+k^2+1)}{(h^2+k^2)^2}}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{(h^4+2h^2k^2)\ln(h^2+k^2+1)}{(h^2+k^2)^2\sqrt{h^2+k^2}}.$$

Obsérvese que

$$0 \leq \frac{(h^4+2h^2k^2)\ln(h^2+k^2+1)}{(h^2+k^2)^2\sqrt{h^2+k^2}} \leq \frac{\ln(h^2+k^2+1)}{\sqrt{h^2+k^2}}.$$

Sea $g(h,k)=\frac{\ln(h^2+k^2+1)}{\sqrt{h^2+k^2}}$. Vamos a calcular $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} g(h,k)$. Para ello, se hace el cambio a coordenadas polares $h=\rho\cos\theta$, $k=\rho\operatorname{sen}\theta$, $G(\rho,\theta)=g(\rho\cos\theta,\rho\operatorname{sen}\theta)=\frac{\ln(\rho^2+1)}{\rho}$. Así pues, $G(\rho,\theta)$ sólo depende de ρ y aplicando la regla de L'Hôpital se tiene que

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{\ln(\rho^2+1)}{\rho}=0.$$

Por tanto, por el punto 5.23 (b) del libro de ejercicios se deduce que $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} g(h,k)=0$, y por la propiedad del emparedado se concluye que $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)}\dfrac{(h^4+2h^2k^2)\ln(h^2+k^2+1)}{(h^2+k^2)^2\sqrt{h^2+k^2}} = 0$, por lo que f es también diferenciable en $(0,0)$ y su diferencial en ese punto es

$$Df(0,0)(x,y)=\nabla f(0,0)\cdot(x,y)=0.$$

4. (a) Sean $g_1, g_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ las funciones componentes de g, es decir, $g_1(u,v) = u - v^2$ y $g_2(u,v) = uv + 1$. Según la regla de la cadena, como g_1 y g_2 son funciones diferenciables en $\mathbb{R}^2$ (y en particular en $(0,0)$) y f es diferenciable en $\mathbb{R}^2$ (y en particular en $(g_1(0,0), g_2(0,0)) = (0,1)$), resulta que $f \circ g$ es diferenciable en $(0,0)$ y

$$\nabla(f \circ g)(0,0) = \nabla f(g_1(0,0), g_2(0,0)) \begin{pmatrix} \nabla g_1(0,0) \\ \nabla g_2(0,0) \end{pmatrix}.$$

Se tiene que

$$\begin{aligned} \nabla f(g_1(0,0), g_2(0,0)) = \nabla f(0,1) &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,1), \frac{\partial f}{\partial y}(0,1) \right), \\ \nabla g_1(0,0) &= \left(\frac{\partial g_1}{\partial u}(0,0), \frac{\partial g_1}{\partial v}(0,0) \right), \\ \nabla g_2(0,0) &= \left(\frac{\partial g_2}{\partial u}(0,0), \frac{\partial g_2}{\partial v}(0,0) \right). \end{aligned}$$

Se calculan las derivadas parciales:

$$\begin{array}{lcl} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -(2x-y)\operatorname{sen}(x^2 - xy) + \frac{\pi}{y}\cos\left(\frac{\pi x}{y}\right) & \Longrightarrow & \frac{\partial f}{\partial x}(0,1) = \pi, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x\operatorname{sen}(x^2 - xy) - \frac{\pi x}{y^2}\cos\left(\frac{\pi x}{y}\right) & \Longrightarrow & \frac{\partial f}{\partial y}(0,1) = 0, \\ \frac{\partial g_1}{\partial u}(u,v) = 1 & \Longrightarrow & \frac{\partial g_1}{\partial u}(0,0) = 1, \\ \frac{\partial g_1}{\partial v}(u,v) = -2v & \Longrightarrow & \frac{\partial g_1}{\partial v}(0,0) = 0, \\ \frac{\partial g_2}{\partial u}(u,v) = v & \Longrightarrow & \frac{\partial g_2}{\partial u}(0,0) = 0, \\ \frac{\partial g_2}{\partial v}(u,v) = u & \Longrightarrow & \frac{\partial g_2}{\partial v}(0,0) = 0. \end{array}$$

Por consiguiente, se obtiene que

$$\nabla(f \circ g)(0,0) = (\pi, 0) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (\pi, 0).$$

(b) Teniendo en cuenta el apartado anterior y que $(f \circ g)(0,0) = f(0,1) = 1$, la ecuación del plano tangente a la gráfica de $f \circ g$ en el punto $(0,0)$ es

$$\begin{aligned} &z = (f \circ g)(0,0) + \nabla(f \circ g)(0,0) \cdot (u,v) \Longleftrightarrow \\ &z = 1 + (\pi, 0) \cdot (u,v) \Longleftrightarrow \\ &z = 1 + \pi u. \end{aligned}$$

5. Puesto que f es diferenciable en $\mathbb{R}^2$ por ser polinómica, los extremos relativos de f, si existen, son en particular puntos críticos. Por tanto, hay que determinar los puntos críticos de f. Dichos puntos son solución del sistema $\nabla f(0,0) = (0,0)$, que es equivalente a

$$\begin{cases} 4x^3 + 2xy = 0 \\ 3y^2 + x^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

La primera ecuación es equivalente a $2x(2x^2 + y) = 0$, de donde se deduce que o bien $x = 0$ o bien $y = -2x^2$. Si $x = 0$, de la segunda ecuación se obtiene $y = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$, resultando los puntos críticos $P_1 = \left(0, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ y $P_2 = \left(0, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

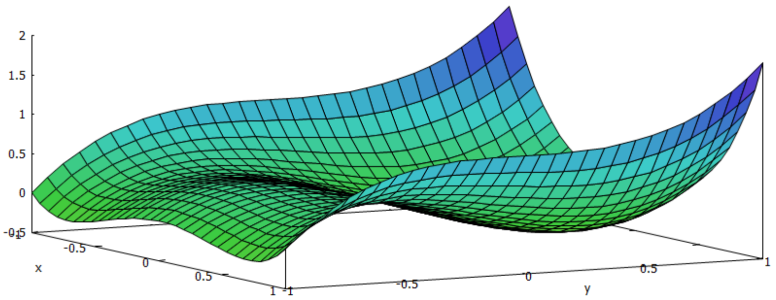

Figura 2: Gráfica de f

Por otra parte, si $y = -2x^2$, sustituyendo esta expresión en la segunda ecuación se obtiene $12x^4 + x^2 - 1 = 0$. Esta ecuación es bicuadrada y tiene como soluciones $x = \pm\frac{1}{2}$. Así pues, $P_3 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ y $P_4 = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ son también puntos críticos de f.

A continuación, se analiza la matriz hessiana para clasificar cada uno de los cuatro puntos críticos (véase el punto teórico 5.50 del libro de ejercicios). Se tiene que

$$\mathrm{H}f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12x^2 + 2y & 2x \\ 2x & 6y \end{pmatrix}.$$

Por consiguiente, la matriz hessiana en P_1 es

$$\mathrm{H}f\left(0, \frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \begin{pmatrix} 2\frac{\sqrt{3}}{3} & 0 \\ 0 & 2\sqrt{3} \end{pmatrix},$$

que es definida positiva pues $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(0, \frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 2\frac{\sqrt{3}}{3} > 0$ y $|\mathrm{H}f\left(0, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)| = 4 > 0$. Luego P_1 es un mínimo relativo de f.

Con respecto al punto P_2, se tiene que

$$\mathrm{H}f\left(0, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \begin{pmatrix} -2\frac{\sqrt{3}}{3} & 0 \\ 0 & -2\sqrt{3} \end{pmatrix},$$

que es definida negativa, ya que $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(0, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -2\frac{\sqrt{3}}{3} < 0$ y $|\mathrm{H}f\left(0, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)| = 4 > 0$. Por tanto, P_2 es un máximo relativo de f.

La matriz hessiana en el punto P_3 es

$$\mathrm{H}f\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix},$$

que es indefinida, dado que $|\mathrm{H}f\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)| = -7 < 0$, por lo que P_3 es un punto de silla.

Finalmente,

$$\mathrm{H}f\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix},$$

que también es indefinida, ya que $|\mathrm{H}f\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)| = -7 < 0$. Así pues, P_4 es otro punto de silla.

En la Figura 2 se muestra la gráfica de la función f. Esta gráfica se ha dibujado con Maxima, utilizando la sentencia plot3d($[x\hat{}4 + y\hat{}3 + x\hat{}2 * y - y, [x, -1, 1], [y, -1, 1]]$, [legend, false]);