FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS DE LAS TTII
Grado en Ingeniería de las Tecnologías de la Información
Prueba de autoevaluación número 1 (**PAE-1**)

1. Sean A, B y C matrices cualesquiera de orden n. Elija las igualdades que son ciertas:
(a) $A^2 = A$.
(b) $(B + C)A = BA + CA$.
(c) $(A + B)^2 = A^2 + B^2 + 2AB$.
(d) $(3A)(BC) = (AB)(3C)$.

2. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & a \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ 5 & b & 20 & c \end{pmatrix}$, indique cuáles de las siguientes afirmaciones sobre el rango de la matriz A en función de los valores a, b y c son ciertas:
(a) Si $b = 5$ el rango es 2; en cualquier otro caso, es 3.
(b) Si $b = 5$ y $c = 5a$ el rango es 2; en cualquier otro caso, es 3.
(c) Si $5a + b + 2c - 3ab = 0$ el rango es 2; en cualquier otro caso, es 3.
(d) Ninguna de las anteriores.

3. Sea A una matriz de tamaño 3×3 que verifica $A^2 = 64I$, siendo I la matriz unidad. Elija la respuesta correcta para el valor del determinante de A.
(a) 4.
(b) ± 8.
(c) 64^3.
(d) Ninguna de las anteriores.

4. Elija las afirmaciones correctas para el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} ax + 2y + 6z = 0 \\ 2x + ay + 4z = 2 \\ 2x + ay + 6z = a - 2. \end{cases}$$

(a) Es compatible indeterminado si $a = 2$ o $a = -2$.
(b) Es incompatible si $a = 2$ o $a = -2$.
(c) Es compatible determinado si $a \neq 2, -2$; compatible indeterminado si $a = 2$; incompatible si $a = -2$.
(d) Ninguna de las anteriores.

5. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

resuelva con la ayuda de Maxima la ecuación $AX + A^t = BX$ e indique cuál de las siguientes opciones es la solución correcta:
(a) $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$.

(b) $X = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -3/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$.
(c) $X = \begin{pmatrix} -1/2 & -1/2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1/2 & -3/2 & -2 \end{pmatrix}$.
(d) Ninguna de las anteriores.

6. Sea $a > 3$. Con la ayuda de Maxima, las soluciones de la ecuación

$$\begin{vmatrix} 0 & x & a & 3 \\ x & 0 & 3 & a \\ a & 3 & 0 & x \\ 3 & a & x & 0 \end{vmatrix} = 0$$

son:
(a) $\pm(a+1)$, $\pm(a-1)$.
(b) $\sqrt{a+3}$, $\pm\sqrt{a-3}$.
(c) $\pm(a+3)$, $\pm(a-3)$.
(d) Ninguna de las anteriores.

7. Con la ayuda de Maxima, resuelva el sistema

$$\left\{ \begin{array}{c} 2x - y + 3z + 2t = 4 \\ 3x + 2y + 4z - t = 5 \\ 5x - 6y + 8z + 9t = 11 \\ 4x + 5y + 5z - 4t = 6 \end{array} \right.$$

e interprete la salida ofrecida por el programa.

SOLUCIONES. Prueba de autoevaluación núm. 1 (PAE-1).

1. Son ciertas la (b) (propiedad distributiva) y la (d) (asociativa de matrices y asociativa de escalares y matrices). Es claro que (a) es falsa. También es falsa (c) porque el producto de matrices no es conmutativo. Si se desea una fórmula para el cuadrado de una suma se procedería así:

$$\begin{aligned} (A+B)^2 &= (A+B)(A+B) = (A+B)A + (A+B)B = A^2 + BA + AB + B^2 \\ &= A^2 + B^2 + BA + AB. \end{aligned}$$

2. Verdadera la (b).

Quitando la fila 3 y las columnas 3 y 4, se obtiene claramente un menor de orden 2 no nulo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$$

Consecuentemente, el rango de $A \geq 2$ cualesquiera que sean los valores de a, b, c. Los únicos orlados de orden 3 se obtienen con la fila 3 y las columnas 3 y 4, respectivamente, resultando los menores:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \\ 5 & b & 20 \end{vmatrix} = 10b - 50 \quad \text{y} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 3 & 1 & 1 \\ 5 & b & c \end{vmatrix} = -5a - b - 2c + 3ab + 5.$$

El primero de ellos es 0 si y sólo si $b = 5$, y sustituyendo este valor en el segundo queda $10a - 2c$, que es 0 si y sólo si $c = 5a$. Por consiguiente sólo es cierta la opción (b).

3. Correcta la (d).

Como $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ y $\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A)$, siendo A de tamaño $n \times n$, de la igualdad $A^2 = 64I$ se deduce que $(\det(A))^2 = 64^3$, de donde $\det(A) = \pm\sqrt{64^3} = \pm 512$, y en consecuencia sólo es cierta (d).

4. Correcta la (c).

Aplicaremos el teorema de Rouché-Fröbenius. La matriz de los coeficientes y la matriz ampliada son respectivamente:

$$A = \begin{pmatrix} a & 2 & 6 \\ 2 & a & 4 \\ 2 & a & 6 \end{pmatrix}, \quad A^* = \begin{pmatrix} a & 2 & 6 & 0 \\ 2 & a & 4 & 2 \\ 2 & a & 6 & a-2 \end{pmatrix}.$$

El único menor de orden 3 de A es $\det(A) = 2a^2 - 8$ y vale 0 si y sólo si $2a^2 - 8 = 0 \Leftrightarrow a = 2$ o $a = -2$. Para estos dos valores el rango de A es claramente 2 porque el menor que se obtiene suprimiendo la fila 1 y la columna 2 es $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 4$ no nulo, y si $a \neq 2, -2$, el rango es 3. Estudiemos el rango de A^* para los valores de a -2 y 2:

(i) $a = -2$. Se sustituye este valor en la matriz A^* y se obtiene la matriz

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 & 6 & 0 \\ 2 & -2 & 4 & 2 \\ 2 & -2 & 6 & -4 \end{pmatrix},$$

cuyo rango es 3, por tanto el sistema es incompatible.

(i) $a = 2$. Se sustituye este valor en la matriz A^* y se obtiene la matriz

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 6 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 6 & 0 \end{pmatrix},$$

cuyo rango es 2 (la tercera fila es igual a la primera), por tanto el sistema es compatible indeterminado.

En consecuencia, para a distinto de -2 y 2 el rango de A=rango de la ampliada= 3, luego el sistema es compatible determinado. Y por consiguiente, es cierta la opción (c).

5. Correcta la (b).

La ecuación $AX + A^t = BX$ es equivalente a $(A - B)X = -A^t$, y despejando X, suponiendo que existe $(A - B)^{-1}$, resulta $X = -(A - B)^{-1}A^t$.

Las instrucciones para resolver este ejercicio con Maxima son:

```
(%i1)  A:matrix([1,2,0],[0,-1,1],[1,0,1]);
```

(%o1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

```
(%i2) B:matrix([-1,1,-2],[2,0,1],[0,0,1]);
```

$$(\%o2)\quad \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La expresión $X = -(A-B)^{-1}A^t$ la obtenemos así:

```
(%i3) -(A-B)^^(-1).transpose(A);
```

$$(\%o3)\quad \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

En consecuencia, la opción correcta es (b).

6. Verdadera la (c).

Basta calcular el determinante y resolver la ecuación. Las instrucciones con Maxima son:

```
(%i4) A:matrix([0,x,a,3],[x,0,3,a],[a,3,0,x],[3,a,x,0]);
```

$$(\%o4)\quad \begin{pmatrix} 0 & x & a & 3 \\ x & 0 & 3 & a \\ a & 3 & 0 & x \\ 3 & a & x & 0 \end{pmatrix}$$

```
(%i5) determinant(%);
```

$$(\%o5)\quad -x\left(-x^3+a^2\,x+9\,x\right)+a\left(a\left(a^2-9\right)-a\,x^2\right)-3\left(3\,x^2+3\left(a^2-9\right)\right)$$

```
(%i6) expand(%);
```

$$(\%o6)\quad x^4-2\,a^2\,x^2-18\,x^2+a^4-18\,a^2+81$$

```
(%i7) solve([%], [x]);
```

$$(\%o7)\quad [x=-a-3, x=a+3, x=3-a, x=a-3]$$

Nótese que la ecuación $x^4-2a^2x^2-18x^2+a^4-18a^2+81=0$ es bicuadrada:

$$x^4-(2a^2+18)x^2+(a^4-18a^2+81)=0.$$

Al resolverla, se obtiene:

$$\begin{aligned} x^2 &= \frac{2a^2+18\pm\sqrt{(2a^2+18)^2-4(a^4-18a^2+81)}}{2} = \frac{2a^2+18\pm\sqrt{144a^2}}{2} \\ &= \frac{2a^2+18\pm 12a}{2} = a^2\pm 6a+9 = (a\pm 3)^2, \end{aligned}$$

de donde $x=\pm(a+3)$, $\pm(a-3)$, y es válido para todo $a\in\mathbb{R}$, es decir que no se ha usado la hipótesis $a>3$.

7. La instrucción para resolver el sistema y la respuesta de Maxima son las siguientes:

```
(%i1) linsolve([2*x-y+3*z+2*t=4,3*x+2*y+4*z-t=5,5*x-6*y+8*z+9*t=11,
      4*x+5*y+5*z-4*t=6],[x,y,z,t]);
```

```
solve: dependent equations eliminated: (3 4)
```

(%o1) $\left[x=-\frac{10\,\%r2+3\,\%r1-13}{7}, y=\frac{\%r2+8\,\%r1-2}{7}, z=\%r2, t=\%r1\right]$

Esto nos indica que las ecuaciones tercera y cuarta han sido eliminadas porque son dependientes (o combinación lineal) de la primera y de la segunda. Además, nos indica que las soluciones dependen de dos parámetros llamados $\%r1$ y $\%r2$, que coinciden con las incógnitas t y z, respectivamente. Usando los parámetros habituales λ, μ, nosotros expresaríamos la solución así:

$$x=-\frac{10\,\lambda+3\,\mu-13}{7},\ y=\frac{\lambda+8\,\mu-2}{7},\ z=\lambda, t=\mu\ .$$