FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS DE LAS TTII. Cód. 71021023
Grado en Ingeniería de las Tecnologías de la Información
Segunda semana de Febrero de 2018. Tiempo: 2 horas

INSTRUCCIONES. Cada una de las preguntas tiene un valor máximo de 2 puntos. Sólo está permitido una calculadora no programable. No entregue esta hoja con los enunciados.

1. En el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ se consideran las bases $B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ y $B' = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3\}$, relacionadas por las expresiones:

$$\begin{cases} \bar{u}_1 = \bar{e}_1 - \bar{e}_2 + \bar{e}_3 \\ \bar{u}_2 = \bar{e}_1 + \bar{e}_2 + \bar{e}_3 \\ \bar{u}_3 = \bar{e}_1 \qquad - \bar{e}_3. \end{cases}$$

Calcule las coordenadas del vector $\bar{v}$ en la base B', si sus coordenadas en la base B son $(3, -3, -1)$. *(2 puntos)*

2. Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 3 & -9 \\ 0 & 1 & 0 \\ 6 & 3 & -8 \end{pmatrix}.$$

Estudie si es diagonalizable y, en su caso, encuentre una diagonalización y una matriz de paso. *(2 puntos)*

3. Sea la función $f(x) = \ln(1 + 2x)$, donde ln significa logaritmo neperiano.

(a) Obtenga el desarrollo de Taylor de orden 2 en el punto $x = 0$ y utilícelo para hallar un valor aproximado de $\ln 2$ (obsérvese que $\ln 2 = f(1/2)$). *(1.5 puntos)*

(b) Encuentre la expresión del resto para $x = 1/2$. *(0.5 puntos)*

4. Estudie y clasifique los extremos relativos de la función

$$f(x, y) = x^2 + xy + y^3 - 3x - 2y.$$

(2 puntos)

5. Se considera la siguiente integral doble:

$$I = \iint_D \frac{1}{y+2} dxdy,$$

donde D viene dado por

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \leq x \leq 1, \ x^2 - 1 \leq y \leq 0\}.$$

(a) Dibuje el dominio de integración D. *(0.5 puntos)*

(b) Calcule el valor de I. *(1.5 puntos)*

SOLUCIONES. FMTI. Segunda semana de Febrero de 2018.

1. Se trata de hallar los números $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tales que $\bar{v} = \lambda_1\bar{u}_1 + \lambda_2\bar{u}_2 + \lambda_3\bar{u}_3$. Sustituyendo y operando

$$\begin{aligned} 3\bar{e}_1 - 3\bar{e}_2 - \bar{e}_3 &= \lambda_1(\bar{e}_1 - \bar{e}_2 + \bar{e}_3) + \lambda_2(\bar{e}_1 + \bar{e}_2 + \bar{e}_3) + \lambda_3(\bar{e}_1 - \bar{e}_3) \\ &= (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)\bar{e}_1 + (-\lambda_1 + \lambda_2)\bar{e}_2 + (\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3)\bar{e}_3. \end{aligned}$$

Se igualan coeficientes y se resuelve el sistema resultante

$$\left\{\begin{array}{rl} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 &= 3 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 \qquad &= -3 \\ \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 &= -1 \end{array}\right. \to \left\{\begin{array}{rl} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 &= 3 \\ 2\lambda_2 + \lambda_3 &= 0 \\ -2\lambda_3 &= -4 \end{array}\right. \to \left\{\begin{array}{l} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = -1 \\ \lambda_3 = 2 \end{array}\right.$$

Por tanto, las coordenadas de $\bar{v}$ en la base B' son $(2, -1, 2)$.

2. El polinomio característico de A es

$$\begin{aligned} p_A(t) = |A - tI| = \begin{vmatrix} 7-t & 3 & -9 \\ 0 & 1-t & 0 \\ 6 & 3 & -8-t \end{vmatrix} &= (1-t)\begin{vmatrix} 7-t & -9 \\ 6 & -8-t \end{vmatrix} \\ = (1-t)(-56 - 7t + 8t + t^2 + 54) &= (1-t)(t^2 + t - 2) = (1-t)(t-1)(t+2) \\ = -(t-1)^2(t+2). \end{aligned}$$

La penúltima igualdad es cierta porque las raíces de $t^2 + t - 2$ son 1 y -2. Por tanto, los valores propios de A son 1 de multiplicidad 2 y -2, que es simple.

Para que sea diagonalizable A, puesto que es de orden 3 y la única raíz doble del polinomio característico es 1 es suficiente que el espacio propio asociado al valor propio 1, $E(1)$, sea de dimensión 2. Hallemos $E(1)$ resolviendo el sistema $(A - I)X = \bar{0}$:

$$\begin{pmatrix} 6 & 3 & -9 \\ 0 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & -9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \left\{\begin{array}{r} 6x + 3y - 9z = 0 \\ 0 = 0 \\ 6x + 3y - 9z = 0 \end{array}\right. \to \left\{\begin{array}{r} y = -2x + 3z \\ x, z \text{ libres} \end{array}\right.$$

Por tanto, los vectores de $E(1)$ son todos los de la forma

$$(x, y, z) = (x, -2x + 3z, z) = x(1, -2, 0) + z(0, 3, 1),$$

y se sigue que $\{\bar{e}_1 = (1, -2, 0),\ \bar{e}_2 = (0, 3, 1)\}$ es una base. Luego $E(1)$ es de dimensión 2 y, en consecuencia, A es diagonalizable. Una diagonalización de A es la matriz

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Para obtener una matriz de paso, se calcula una base del espacio propio $E(-2)$ resolviendo el sistema $(A + 2I)X = \bar{0}$:

$$\begin{pmatrix} 9 & 3 & -9 \\ 0 & 3 & 0 \\ 6 & 3 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \left\{\begin{array}{rl} 9x + 3y - 9z &= 0 \\ 3y \qquad &= 0 \\ 6x + 3y - 6z &= 0 \end{array}\right. \to \left\{\begin{array}{l} x = z \\ y = 0 \\ z \text{ libre} \end{array}\right.$$

Por tanto, los vectores de $E(-2)$ son todos los de la forma

$$(x, y, z) = (z, 0, z) = z(1, 0, 1),$$

y se sigue que $\{\bar{e}_3 = (1, 0, 1)\}$ es una base.

En consecuencia, una base en la que A diagonaliza es $\{\bar{e}_1,\ \bar{e}_2,\ \bar{e}_3\}$ y la matriz de paso es la que tiene por columnas a estos vectores:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. El polinomio de Taylor de orden 2 en $x = 0$ viene dado por

$$P_2(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2.$$

Haciendo los cálculos, se tiene

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln(1 + 2x), & f(0) &= 0 \\ f'(x) &= \tfrac{2}{1+2x} = 2(1 + 2x)^{-1}, & f'(0) &= 2 \\ f''(x) &= 2(-1)(1 + 2x)^{-2} \cdot 2 = -4(1 + 2x)^{-2}, & f''(0) &= -4. \end{aligned}$$

Por tanto, $P_2(x) = 0 + 2x - \dfrac{4}{2!}x^2 = 2x - 2x^2$.

Para valores x próximos a 0, se verifica $f(x) \simeq P_2(x)$, luego

$$\ln 2 = f\left(\tfrac{1}{2}\right) \simeq P_2\left(\tfrac{1}{2}\right) = 2\tfrac{1}{2} - 2\left(\tfrac{1}{2}\right)^2 = \tfrac{1}{2} = 0{,}5.$$

(b) El resto viene dado por $R_2(x) = \frac{f'''(c)}{3!}x^3$, donde $c \in (0, x)$. Hallemos la derivada tercera:

$$f'''(x) = -4(-2)(1 + 2x)^{-3} \cdot 2 = 16(1 + 2x)^{-3} = \frac{16}{(1 + 2x)^3}.$$

Luego,

$$R_2(x) = \frac{1}{3!}\frac{16}{(1 + 2c)^3}x^3 = \frac{8}{3(1 + 2c)^3}x^3.$$

En particular, si $x = 1/2$, resulta

$$R_2(1/2) = \frac{8}{3(1 + 2c)^3}\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{3(1 + 2c)^3}, \text{ con } c \in (0, 1/2).$$

4. (a) Como f es diferenciable en $\mathbb{R}^2$, los extremos relativos son en particular puntos críticos, es decir, han de verificar las ecuaciones $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$. Las derivadas parciales son

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x + y - 3, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x + 3y^2 - 2.$$

Hay que resolver el sistema

$$\left\{ \begin{array}{r} 2x + y - 3 = 0 \\ x + 3y^2 - 2 = 0 \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{3-y}{2} \\ \frac{3-y}{2} + 3y^2 - 2 = 0 \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{3-y}{2}, \\ 6y^2 - y - 1 = 0 \end{array} \right.$$

De esta última ecuación resulta $y = 1/2$ o $y = -1/3$, y los respectivos valores de x, dados por $x = (3 - y)/2$, son $x = 5/4$, $x = 5/3$.

Por consiguiente, hay dos puntos críticos: $P_1 = (5/4, 1/2)$ y $P_2 = (5/3, -1/3)$. Para clasificarlos, se necesita el Hessiano: $Hf(x,y) = \begin{pmatrix} D_{11}f(x,y) & D_{12}f(x,y) \\ D_{21}f(x,y) & D_{22}f(x,y) \end{pmatrix}$ y hay que utilizar la cuestión teórica 5.50 del libro de ejercicios. Las derivadas parciales segundas son

$$D_{11}f(x,y) = 2, \quad D_{12}f(x,y) = 1, \quad D_{22}f(x,y) = 6y.$$

Luego,

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 6y \end{pmatrix}.$$

Recordemos que $\Delta_1 = D_{11}f(x,y)$ y $\Delta_2 = \det(Hf(x,y))$. En la siguiente tabla se resume la discusión:

Punto P	$Hf(P)$	Δ_1	Δ_2	Conclusión
$(5/4, 1/2)$	$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$	$2\ (+)$	$5\ (+)$	mínimo local
$(5/3, -1/3)$	$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$	$2\ (-)$	$-5\ (-)$	punto de silla

5. (a) El dominio está representado en la figura 1.

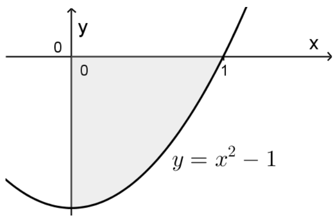

Fig. 1. Dominio de integración D.

(b) El valor de I viene dado por

$$I = \int_0^1 \int_{x^2-1}^0 \frac{1}{y+2} dydx = \int_0^1 [\ln(y+2)]_{x^2-1}^0 \, dx = \int_0^1 \big(\ln 2 - \ln(x^2 - 1 + 2)\big) \, dx$$
$$= \int_0^1 (\ln 2) \, dx - \int_0^1 \ln(x^2+1) dx = \ln 2 - I_1.$$

donde $I_1 = \int_0^1 \ln(x^2+1)dx$. Hallemos una primitiva $G(x)$ de $\ln(x^2+1)$. Utilizando el método de partes con $u = \ln(x^2+1)$, $dv = dx$, se tiene $du = \dfrac{2x}{x^2+1}dx$, $v = x$, con lo que

$$G(x) = \int \ln(x^2+1)dx = x\ln(x^2+1) - \int \frac{2x}{x^2+1} \cdot xdx = x\ln(x^2+1) - \int \frac{2x^2}{x^2+1}dx$$
$$= x\ln(x^2+1) - \int \left(2 - \frac{2}{x^2+1}\right) dx = x\ln(x^2+1) - 2x + 2\operatorname{arc\,tg} x.$$

Aplicando la Regla de Barrow: $I_1 = G(1) - G(0) = \ln 2 - 2 + 2 \cdot \dfrac{\pi}{4} = \ln 2 - 2 + \dfrac{\pi}{2}$. Por último,

$$I = \ln 2 - \left(\ln 2 - 2 + \frac{\pi}{2}\right) = 2 - \frac{\pi}{2} \simeq 0{,}4292.$$