FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS DE LAS TTII. Cód. 71021023
Grado en Ingeniería de las Tecnologías de la Información
Septiembre de 2017. Tiempo: 2 horas

INSTRUCCIONES. Cada una de las preguntas tiene un valor máximo de 2 puntos. Sólo está permitido una calculadora no programable. No entregue esta hoja con los enunciados.

1. Sea $U \subset \mathbb{R}^4$ el conjunto definido como

$$U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 = x_2 + x_3,\ x_2 = x_3 + x_4\}.$$

(a) Encuentre una base de U e indique su dimensión. *(1 punto)*

(b) Defina qué es un subespacio suplementario de un subespacio vectorial y demuestre que

$$V = \langle (1,0,0,0), (0,1,0,0) \rangle$$

es un subespacio suplementario de U. *(1 punto)*

2. Sean $B = \{(2,0), (3,2)\}$ una base de $\mathbb{R}^2$ y $B' = \{(3,2,1), (3,1,0), (1,0,0)\}$ una base de $\mathbb{R}^3$. Considere la aplicación lineal $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$f(x_1, x_2) = (x_1 + 2x_2, x_1, x_2)$$

y sea $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la aplicación lineal cuya matriz con respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^3$ y la base B es

$$A_g = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Obtenga la matriz de f con respecto a las bases B y B'. *(1.5 puntos)*

(b) Determine la matriz de $f \circ g$ respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^3$ y la base B'. *(0.5 puntos)*

3. (a) Enuncie el Teorema de Bolzano. Aplíquelo para probar que la ecuación

$$\operatorname{sen} x = 2x - 1$$

tiene al menos una solución en el intervalo $[0, \pi]$. *(1 punto)*

(b) Calcule $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x \operatorname{sen} x}$. *(1 punto)*

4. Considere el límite doble

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\alpha x^2 + y^2}{\alpha^2 x^2 + 2y^2},$$

donde α es un parámetro real.
(a) Calcule el límite en los casos particulares $\alpha = 0$ y $\alpha = 2$. *(0.5 puntos)*
(b) Calcule el límite direccional a lo largo de rectas $y = mx$. *(0.5 puntos)*
(c) Pruebe que el límite doble no existe cuando $\alpha \neq 0$ y $\alpha \neq 2$. *(1 punto)*

5. Considere la función f dada por $f(x, y) = xe^y$.

(a) Dibuje el recinto $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x^2\}$. *(0.5 puntos)*

(b) Calcule $\displaystyle\iint_D f(x, y)\,dydx$ (se recomienda usar este orden de integración). *(1.5 puntos)*

SOLUCIONES. FMTI. Septiembre de 2017.

1. (a) Sustituyendo la segunda ecuación en la primera,

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 = x_2 + x_3 \\ x_2 = x_3 + x_4 \end{array}\right. \to \left\{\begin{array}{l} x_1 = 2x_3 + x_4 \\ x_2 = \quad x_3 + x_4 \end{array}\right. \to \left\{\begin{array}{l} x_1 = 2\alpha + \beta \\ x_2 = \quad \alpha + \beta \\ x_3 = \quad \alpha \\ x_4 = \quad \beta \end{array}\right.$$

Luego los vectores de U son de la forma

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2\alpha + \beta, \alpha + \beta, \alpha, \beta) = \alpha(2, 1, 1, 0) + \beta(1, 1, 0, 1).$$

Una base de U es $\{(2, 1, 1, 0), (1, 1, 0, 1)\}$, cuya dimensión es 2.

(b) Dado un espacio vectorial X, se dice que V es un subespacio suplementario a un subespacio vectorial U de X si $U \oplus V = X$.

Para probar que V es un subespacio suplementario de U, es suficiente probar que los vectores de V son linealmente independientes de los vectores de U. De esta forma, se obtiene una base de dimensión 4, formada por 2 vectores de U y 2 vectores de V, que generan todo $\mathbb{R}^4$.

Para ello, calcularemos el determinante de la matriz formada por los vectores de las bases de U y V. Marcamos de color rojo la fila por la que se desarrolla el determinante.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Como es distinto de 0, los vectores son linealmente independientes, luego V es un subespacio suplementario de U en $\mathbb{R}^4$.

Otra forma de probarlo es comprobando que es imposible escribir los vectores de V como combinación lineal de los vectores de U. Si

$$(1, 0, 0, 0) = \alpha(2, 1, 1, 0) + \beta(1, 1, 0, 1),$$

de la tercera coordenada, se obtiene que $\alpha = 0$, y de la cuarta $\beta = 0$, con lo cual se obtiene una contradicción, (que $(1, 0, 0, 0) = (0, 0, 0, 0)$). Si

$$(0, 1, 0, 0) = \alpha(2, 1, 1, 0) + \beta(1, 1, 0, 1),$$

de la tercera coordenada se obtiene que $\alpha = 0$, y de la cuarta, $\beta = 0$, que es otra contradicción. Por tanto, los vectores de V no pueden escribirse como combinación lineal de los vectores de U.

2. (a) Tenemos que

$$f(2,0) = (2,2,0), \quad f(3,2) = (7,3,2).$$

Calculemos las coordenadas de $(2,2,0)$ en la base B', es decir, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tales que

$$(2,2,0) = \alpha(3,2,1) + \beta(3,1,0) + \gamma(1,0,0).$$

Entonces se trata de resolver el sistema

$$\begin{cases} 3\alpha + 3\beta + \gamma = 2 \\ 2\alpha + \ \ \beta \qquad = 2 \\ \ \ \alpha \qquad\qquad\ = 0 \end{cases}$$

de donde se obtiene que $\alpha = 0$, $\beta = 2$ y $\gamma = -4$. Por tanto, $f(2,0)$ se corresponde con el vector de coordenadas $(0,2,-4)$ en la base B'. Procedemos análogamente para calcular las coordenadas de $(7,3,2)$ en la base B'

$$(7,3,2) = \alpha(3,2,1) + \beta(3,1,0) + \gamma(1,0,0).$$

Entonces

$$\begin{cases} 3\alpha + 3\beta + \gamma = 7 \\ 2\alpha + \ \ \beta \qquad = 3 \\ \ \ \alpha \qquad\qquad\ = 2 \end{cases}$$

de donde se obtiene que $\alpha = 2$, $\beta = -1$ y $\gamma = 4$. Por tanto, $f(3,2)$ se corresponde con el vector de coordenadas $(2,-1,4)$ en la base B'. Luego la matriz de f con respecto a las bases B y B' es

$$A_f = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}.$$

(b) La matriz de $f \circ g$ respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^3$ y la base B' es

$$A_f \cdot A_g = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ -4 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

3. (a) Recordemos el resultado pedido:

> ***Teorema de Bolzano:*** Si $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ es una función continua en el intervalo cerrado $[a,b] \subset \mathbb{R}$ y $f(a) \cdot f(b) < 0$ (equivalemente, si $f(a)$ y $f(b)$ tienen distinto signo), entonces existe $c \in (a,b)$ tal que $f(c) = 0$.

Para aplicarlo, definimos la función $f\colon [0,\pi] \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = \operatorname{sen} x - 2x + 1,$$

que es continua. Se tiene que $f(0) = 1 > 0$ y que $f(\pi) = -2\pi + 1 < 0$, luego por el Teorema de Bolzano existe $c \in (0,\pi)$ tal que $f(c) = \operatorname{sen} c - 2c + 1 = 0$. Entonces

$$\operatorname{sen} c = 2c - 1$$

y c es una solución en el intervalo $[0,\pi]$ de la ecuación dada.

(b) Se tiene que

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2 x}{x \operatorname{sen} x} = \frac{0}{0}.$$

Como es una indeterminación de tipo $\frac{0}{0}$, podemos aplicar la Regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{2 \operatorname{sen} x \cos x}{\operatorname{sen} x + x\cos x} = \frac{0}{0}.$$

Nuevamente, obtenemos una indeterminación de tipo $\frac{0}{0}$. Aplicando la Regla de L'Hôpital por segunda vez,

$$\lim_{x\to 0} \frac{2(\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x)}{2\cos x - x \operatorname{sen} x} = \frac{2(1^2-0^2)}{2\cdot 1 - 0\cdot 0} = 1.$$

Por tanto, $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2 x}{x \operatorname{sen} x} = 1$.

4. (a) Si $\alpha = 0$, entonces

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\alpha x^2 + y^2}{\alpha^2 x^2 + 2y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^2}{2y^2} = \frac{1}{2}.$$

Si $\alpha = 2$, entonces

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\alpha x^2 + y^2}{\alpha^2 x^2 + 2y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2 + y^2}{4x^2 + 2y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2 + y^2}{2(2x^2 + y^2)} = \frac{1}{2}.$$

(b) El límite direccional a lo largo de $y = mx$ es

$$\lim_{x\to 0} \frac{\alpha x^2 + (mx)^2}{\alpha^2 x^2 + 2(mx)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2(\alpha + m^2)}{x^2(\alpha^2 + 2m^2)} = \frac{\alpha + m^2}{\alpha^2 + 2m^2}.$$

(c) Para probar que el límite doble no existe cuando $\alpha \neq 0$ y $\alpha \neq 2$, es suficiente con probar que el límite direccional a lo largo de $y = mx$ depende de m. Sea f una función definida como tal límite,

$$f(m) = \frac{\alpha + m^2}{\alpha^2 + 2m^2}.$$

Cuando su derivada es nula, no depende de m. Derivamos,

$$f'(m) = \frac{2m(\alpha^2 + 2m^2) - 4m(\alpha + m^2)}{(\alpha^2 + 2m^2)^2} = \frac{2m(\alpha^2 - 2\alpha)}{(\alpha + 2m^2)^2} = \frac{2m\alpha(\alpha - 2)}{(\alpha + 2m^2)^2}.$$

Por tanto,

$$f'(m) = 0 \quad \forall m \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \alpha(\alpha - 2) = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0, \alpha = 2.$$

Otra forma de comprobarlo es mediante división polinómica con respecto de m,

$$\begin{array}{r|l} m^2 + \alpha & 2m^2 + \alpha^2 \\ \cline{2-2} -m^2 - \alpha^2/2 & 1/2 \\ \hline \alpha - \alpha^2/2 & \end{array}$$

Por tanto,

$$\frac{m^2+\alpha}{2m^2+\alpha^2} = \frac{1}{2} + \frac{\alpha-\alpha^2/2}{2m^2+\alpha^2} = \frac{1}{2} + \frac{\alpha(1-\alpha/2)}{2m^2+\alpha^2}.$$

Entonces, el límite depende de m si $\alpha(1-\alpha/2) \neq 0$, o equivalentemente, si $\alpha \neq 0$ y $\alpha \neq 2$.

Se puede comprobar de una tercera forma con los límites reiterados. Supongamos que $\alpha \neq 0$ y $\alpha \neq 2$, entonces

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} \frac{\alpha x^2+y^2}{\alpha^2x^2+2y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\alpha x^2}{\alpha^2 x^2} = \frac{1}{\alpha}$$

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} \frac{\alpha x^2+y^2}{\alpha^2x^2+2y^2} = \lim_{y\to 0} \frac{y^2}{2y^2} = \frac{1}{2}.$$

Se tiene que los límites reiterados existen pero no coinciden, lo que implica que el límite doble no existe cuando $\alpha \neq 0$ y $\alpha \neq 2$.

5. (a) La gráfica del recinto D es:

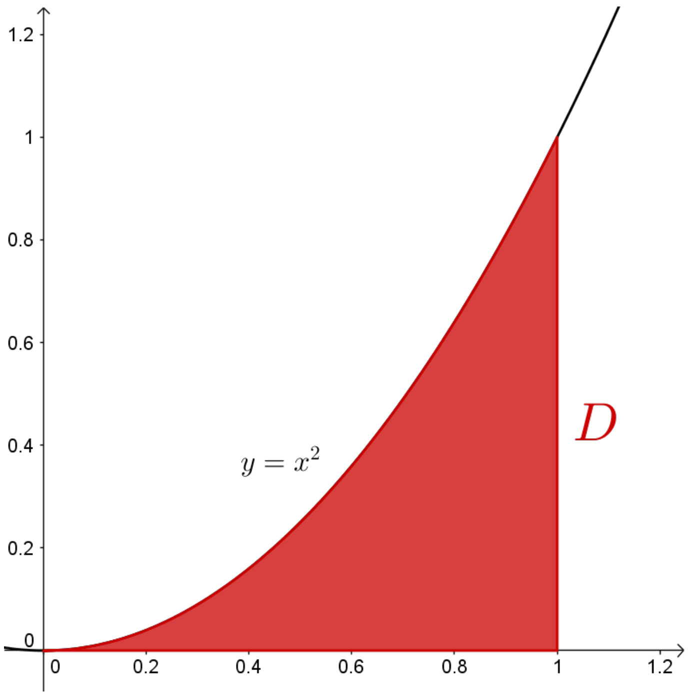

Fig. 1. Gráfica del recinto D.

(b) Calculemos la integral,

$$\int_0^1 \int_0^{x^2} xe^y dydx = \int_0^1 x\left[e^y\right]_0^{x^2} dx = \int_0^1 xe^{x^2}dx - \int_0^1 xdx = \frac{1}{2}\int_0^1 2xe^{x^2}dx - \int_0^1 xdx$$

$$= \frac{1}{2}\left[e^{x^2}\right]_0^1 - \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}(e-1) - \left(\frac{1}{2}-0\right) = \frac{1}{2}e - 1.$$