FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS DE LAS TTII. Cód. 71021023
Grado en Ingeniería de las Tecnologías de la Información
Prueba de evaluación continua (**PEC**). Temas 1, 2, 3 y 4. Días 2 y 3 de Diciembre, 2015.

INSTRUCCIONES.
• Antes de enviar sus respuestas lea el documento "NormasdeRealizaciondelaPEC.pdf", que está en la carpeta PEC dentro de Documentos.
• Antes de acceder al envío de soluciones escriba en papel sus respuestas.

1. Se consideran los sistemas

$$(S_1)\left\{\begin{array}{c} 2x+y+z=-4 \\ x+3y-z=2 \\ -3x+ky+z=3 \\ -3x+3y-2z=11 \end{array}\right. \quad \text{y} \quad (S_2)\left\{\begin{array}{l} ax+2by \qquad = -2 \\ cx-2y+bz=-2a \\ -3x-by+cz=a \end{array}\right.$$

Los valores de k, a, b, c para los cuales, simultáneamente, el sistema (S_1) es compatible determinado y el sistema (S_2) es equivalente a (S_1) son
(a) $k=-2$, $a=3$, $b=2$, $c=1$.
(b) Para ningún valor de k, a, b, c se cumple lo pedido.
(c) $k=0$, $a=1$, $c=2$, b cualquier valor.
(d) Ninguna de las anteriores.

2. Los valores de a para los cuales el vector $\bar{w}=(a,2,a+1,-2)$ pertenece al subsepacio generado por los vectores $\bar{u}_1=(1,2,-1,2)$ y $\bar{u}_2=(2,-1,1,3)$ son
(a) $a=-3/2$.
(b) No hay ningún valor de a.
(c) $a=-5/2$.
(d) Ninguna de las anteriores.

3. En el espacio vectorial $\mathbb{R}^4$ se consideran los subespacios vectoriales siguientes:

$$U=\langle \bar{u}_1=(2,1,1,1),\ \bar{u}_2=(0,1,7,2),\ \bar{u}_3=(6,2,-4,1)\rangle \text{ y}$$
$$V=\{\bar{x}=(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{R}^4:\ 2x_1-3x_2+x_3-2x_4=0,\ x_1+x_2+x_3-4x_4=0\}.$$

Elija la opción correcta:
(a) $\dim U=2$ y $\dim V=1$.
(b) $U=V$.
(c) $\dim(U\cap V)=1$.
(d) Ninguna de las anteriores.

4. Sea $f:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^3$ la aplicación lineal determinada por

$$\begin{aligned}(1,0,0,0)&\to(1,0,2)\\(0,1,0,0)&\to(1,1,-1)\\(0,0,1,0)&\to(0,1,-1)\\(1,3,-2,2)&\to(2,3,1).\end{aligned}$$

Las coordenadas de $f(-1,1,-1,1)$ en la base

$$B=\{\bar{v}_1=(2,1,1),\ \bar{v}_2=(-2,1,1),\ \bar{v}_3=(1,2,3)\}$$

de $\mathbb{R}^3$ son
(a) $(-1, 1, -2)$.
(b) $(1, 0, 0)$.
(c) $(4, 3, -3)$.
(d) Ninguna de las anteriores.

5. El conjunto de todos los valores $a \in \mathbb{R}$ para los cuales la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 6 \\ 1 & 4 & a \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

es diagonalizable viene determinado por
(a) $a \leq -15$.
(b) $a > -15$.
(c) $a > -15$ y $a \neq -6$.
(d) Ninguna de las anteriores.

6. Considere una función $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ que es continua en el intervalo abierto $(0,1)$. Señale la afirmación correcta:
(a) Si $f(0) \cdot f(1) < 0$, por el Teorema de Bolzano, f tiene una raíz en $(0,1)$.
(b) Si $f(0) = f(1) = 0$, por el Teorema de Bolzano, f tiene una raíz en $(0,1)$.
(c) Si $f(1/4) \cdot f(3/4) < 0$, por el Teorema de Bolzano, f tiene una raíz en $(1/4, 3/4)$.
(d) Ninguna de las anteriores.

7. Indique el valor del límite

$$\lim_{x \to -\infty} x^2 e^{2x}.$$

(a) 0.
(b) $+\infty$.
(c) 1.
(d) Ninguna de las anteriores.

8. Dado $m \in \mathbb{N}$, el polinomio de Mac Laurin de orden 3 de la función $f(x) = \operatorname{tg}(mx)$ es:
(a) mx.
(b) $mx + \frac{m^3}{3}x^3$.
(c) $mx + \frac{m^2}{2}x^2 + \frac{m^3}{3}x^3$.
(d) Ninguna de las anteriores.

NOTAS: (A) Si por error alguna pregunta tuviera dos opciones correctas, se deberá responder con la primera que sea correcta en el orden alfabético. Por ejemplo, si en una pregunta fueran ciertas (b) y (c), en la aplicación se deberá responder (b), y sólo se considerará como válida esta respuesta.
(B) Se puede usar Maxima, y se recomienda usarlo especialmente en los ejercicios que tienen mucho cálculo.

SOLUCIONES. Prueba de evaluación continua (**PEC**). Diciembre-2015.

RESUMEN: Las soluciones del test son: 1 (a), 2 (b), 3 (b), 4 (c), 5 (b), 6 (c), 7 (a) y 8 (b).

A continuación se hace la resolución detallada.

1. De cara a facilitar los cálculos, se colocan las ecuaciones en el orden (1ª, 4ª, 2ª, 3ª) y las incógnitas en el orden (z, x, y) (lo importante es que el parámetro k quede en la última ecuación y en la última incógnita) y se obtiene

$$\left\{\begin{array}{c} z+2x+y=-4 \\ -2z-3x+3y=11 \\ -z+x+3y=2 \\ z-3x+ky=3 \end{array}\right.$$

Se resuelve por el método de Gauss reducido:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & -4 \\ -2 & -3 & 3 & 11 \\ -1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & -3 & k & 3 \end{array}\right) \overset{(1)}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & 3 & 4 & -2 \\ 0 & -5 & k-1 & 7 \end{array}\right) \overset{(2)}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & k+24 & 22 \end{array}\right)$$

$$\overset{(3)}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -k-2 \end{array}\right)$$

(1) $E_2 \rightarrow E_2 + 2E_1$, $E_3 \rightarrow E_3 + E_1$, $E_4 \rightarrow E_4 - E_1$. (2) $E_3 \rightarrow (E_3 - 3E_2)/11$, $E_4 \rightarrow E_4 + 5E_2$. (3) $E_4 \rightarrow E_4 + (k+24)E_3$.

El sistema es compatible determinado si y sólo si $-k-2=0$, es decir si $\boxed{k=-2}$. Además, en ese caso, la solución del sistema, que se obtiene de abajo hacia arriba en el escalonado, es $y=1$, $x+5y=3$, luego $x=-2$, y $z+2x+y=-4$, o sea $z=-1$. La solución es pues $\boxed{x=-2, y=1, z=-1}$.

Para que los sistemas (S_1) y (S_2) sean equivalentes tienen que tener las mismas soluciones. Luego (S_2) tiene que tener como solución única $x=-2, y=1, z=-1$. Sustituyendo estos valores en (S_2) se tiene que verificar el sistema

$$\left\{\begin{array}{c} -2a+2b=-2c \\ -2c-2-b=-2a \\ 6-b-c=a \end{array}\right. \overset{(1)}{\rightarrow} \left\{\begin{array}{c} -a+b+c=0 \\ 2a-b-2c=2 \\ a+b+c=6 \end{array}\right. \overset{(2)}{\rightarrow} \left\{\begin{array}{c} -a+b+c=0 \\ b \quad =2 \\ 2b+2c=6 \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{c} a=3 \\ b=2 \\ c=1 \end{array}\right.$$

(1) Se simplifica y se reordena. (2) $E_2 \rightarrow E_2 + 2E_1$, $E_3 \rightarrow E_3 + E_1$.

Para esos valores de a, b, c tenemos garantizado que el sistema (S_2) admite la solución $x=-2, y=1, z=-1$, pero no que sea la única (podría ser compatible indeterminado). Se sustituyen $a=3, b=2, c=1$ en (S_2) y resulta

$$(S_3)\ \left\{\begin{array}{l} 3x+4y \quad =-2 \\ x-2y+2z=-6 \\ -3x-2y+2z=3 \end{array}\right.$$

Como $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \\ -3 & -2 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$, se concluye que (S_3) tiene solución única y es equivalente a (S_1).

La opción correcta es (a).

2. La condición para que $\bar{w}$ pertenezca al subespacio generado por $\bar{u}_1$ y $\bar{u}_2$ es que sea combinación lineal de ellos. Por tanto, hay que ver si existen números λ_1,λ_2 tales que $\lambda_1\bar{u}_1 + \lambda_2\bar{u}_2 = \bar{w}$, esto es

$$\lambda_1(1,2,-1,2) + \lambda_2(2,-1,1,3) = (a,2,a+1,-2).$$

Efectuando las operaciones indicadas e igualando resulta el siguiente sistema:

$$\left\{\begin{array}{r} \lambda_1 + 2\lambda_2 = a \\ 2\lambda_1 - \lambda_2 = 2 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 = a+1 \\ 2\lambda_1 + 3\lambda_2 = -2 \end{array}\right.$$

Se resuelve el sistema formado por la segunda ecuación y la cuarta, y resulta $\lambda_1 = 1/2$ y $\lambda_2 = -1$. Se sustituyen estos valores en la primera ecuación y en la tercera y se obtiene $a = -3/2$ y $a = -5/2$, respectivamente. Como se tienen que cumplir ambas condiciones a la vez, resulta que es imposible, y por tanto no hay solución. Así pues, la opción correcta es (b).

3. En primer lugar se halla la dimensión de U calculando el rango de la matriz formada por los vectores $\bar{u}_1$, $\bar{u}_2$ y $\bar{u}_3$, para lo cual se lleva a la forma escalonada:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 7 & 2 \\ 6 & 2 & -4 & 1 \end{pmatrix} \overset{(1)}{\rightarrow} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 7 & 2 \\ 0 & -1 & -7 & -2 \end{pmatrix} \overset{(2)}{\rightarrow} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(1) $F_3 \to F_3 - 3F_1$. (2) $F_3 \to F_3 + F_2$

Como tiene dos filas no nulas, el rango es 2, y por tanto la dimensión de U es 2 y una base está constituida por los vectores $\bar{u}_1$ y $\bar{u}_2$.

En segundo lugar vamos a determinar la dimensión de V para lo cual se obtienen unas ecuaciones paramétricas. En las ecuaciones implícitas de V, los coeficientes de las incógnitas x_1, x_3 forman un determinante de orden 2 de valor 1 lo que se aprovecha para despejar x_1, x_3 en función de x_2, x_4, del siguiente modo:

$$\left\{\begin{array}{r} 2x_1 + x_3 = 3x_2 + 2x_4 \\ x_1 + x_3 = -x_2 + 4x_4 \end{array}\right. \overset{(1)}{\rightarrow} \left\{\begin{array}{l} x_1 = 4x_2 - 2x_4 \\ x_3 = -5x_2 + 6x_4 \end{array}\right.$$

(1) $E_1 \to E_1 - E_2$, se sustituye el valor de x_1 en la 2ª ecuación y se despeja x_3.

Por tanto, V es el conjunto de vectores de la forma:

$$(x_1,x_2,x_3,x_4) = (4x_2 - 2x_4, x_2, -5x_2 + 6x_4, x_4) = x_2(4,1,-5,0) + x_4(-2,0,6,1).$$

En consecuencia, una base de V es $\{(4,1,-5,0),\ (-2,0,6,1)\}$, y su dimensión es 2, luego (a) es falsa.

Para decidir si (c) es cierta, averiguaremos la dimensión del subespacio $U \cap V$ por medio de la fórmula de Grassman, para lo cual se necesita la dimensión de $U + V$. Sabemos que un sistema de generadores de $U + V$ es la unión de una base de U con una base de V. A continuación se escalona la matriz cuyas filas son los vectores de las bases de U y de V:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 7 & 2 \\ 4 & 1 & -5 & 0 \\ -2 & 0 & 6 & 1 \end{pmatrix} \overset{(1)}{\rightarrow} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 7 & 2 \\ 0 & -1 & -7 & -2 \\ 0 & 1 & 7 & 2 \end{pmatrix} \overset{(2)}{\rightarrow} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(1) $F_3 \to F_3 - 2F_1$, $F_4 \to F_4 + F_1$. (2) $F_3 \to F_3 + F_2$, $F_4 \to F_4 - F_2$.

Por tanto, el rango es 2 y $\dim(U+V) = 2$. Se aplica la fórmula de Grassmann y resulta: $\dim(U+V) = \dim U + \dim V - \dim(U \cap V)$. De aquí,

$$\dim(U \cap V) = \dim U + \dim V - \dim(U+V) = 2 + 2 - 2 = 2.$$

En consecuencia, (c) es falsa. Como $U \cap V$ es un subespacio de U y de V y los 3 tienen la misma dimensión, se concluye que

$$U \cap V = U = V,$$

y por consiguiente, la opción correcta es (b).

4. Consideremos la base canónica de $\mathbb{R}^4$: $\bar{e}_1 = (1,0,0,0)$, $\bar{e}_2 = (0,1,0,0)$, $\bar{e}_3 = (0,0,1,0)$ y $\bar{e}_4 = (0,0,0,1)$. Según el enunciado del ejercicio, se conocen $f(\bar{e}_1)$, $f(\bar{e}_2)$, $f(\bar{e}_3)$ y $f(1,3,-2,2) = f(\bar{e}_1 + 3\bar{e}_2 - 2\bar{e}_3 + 2\bar{e}_4) = (2,3,1)$. Usando la linealidad de f se tiene $f(\bar{e}_1) + 3f(\bar{e}_2) - 2f(\bar{e}_3) + 2f(\bar{e}_4) = (2,3,1)$, y despejando $2f(\bar{e}_4)$:

$$\begin{aligned} 2f(\bar{e}_4) &= (2,3,1) - f(\bar{e}_1) - 3f(\bar{e}_2) + 2f(\bar{e}_3) \\ &= (2,3,1) - (1,0,2) - 3\cdot(1,1,-1) + 2\cdot(0,1,-1) = (-2,2,0), \end{aligned}$$

y por consiguiente $f(\bar{e}_4) = (-1,1,0)$. Usando la expresión matricial, $f(-1,1,-1,1)$ viene dado por

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Luego, $\bar{w} := f(-1,1,-1,1) = (-1,1,-2)$. Por último hay que hallar las coordenadas de este vector en la base B. Para ello, basta resolver la ecuación $\lambda_1\bar{v}_1 + \lambda_2\bar{v}_2 + \lambda_3\bar{v}_3 = \bar{w}$, esto es

$$\lambda_1(2,1,1) + \lambda_2(-2,1,1) + \lambda_3(1,2,3) = (-1,1,-2).$$

Se plantea el sistema y se obtiene como solución $\lambda_1 = 4, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = -3$, que son las coordenadas pedidas. Por consiguiente, la respuesta correcta es (c).

5. Se calcula el polinomio característico:

$$\begin{aligned} p(t) = |A - tI| &= \begin{vmatrix} 2-t & -1 & 6 \\ 1 & 4-t & a \\ 1 & 1 & -3-t \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} \begin{vmatrix} 3-t & 0 & 3-t \\ 1 & 4-t & a \\ 1 & 1 & -3-t \end{vmatrix} \\ &= (3-t)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 4-t & a \\ 1 & 1 & -3-t \end{vmatrix} \overset{(2)}{=} (3-t)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4-t & a-1 \\ 1 & 1 & -4-t \end{vmatrix} = (3-t)(t^2 - 16 - a + 1) \\ &= (3-t)(t^2 - a - 15). \end{aligned}$$

(1) $F_1 \to F_1 + F_3$. (2) $C_3 \to C_3 - C_1$.

Las raíces del polinomio $p(t)$ son $t = 3$ además de las raíces de $t^2 - a - 15$, que son:

$$t^2 - a - 15 = 0 \ \Rightarrow\ t^2 = a + 15 \ \Rightarrow\ t = \pm\sqrt{a+15} \text{ si } a + 15 \geq 0.$$

Si $a+15<0$, es decir si $a<-15$, el polinomio t^2-a-15 no tiene raíces reales, y en consecuencia A no es diagonalizable.

Suponiendo que $a+15\geq 0$, $p(t)$ tiene alguna raíz doble en los casos siguientes:

(i) $a+15=0$, es decir $a=-15$, en el cual $p(t)$ tiene la raíz doble $t=0$.

(ii) $\sqrt{a+15}=3$, es decir, $a+15=9$, o sea $a=-6$, donde $p(t)$ tiene la raíz doble $t=3$,

En todos los demás casos, siempre que $a\geq -15$, $p(t)$ tiene 3 raíces distintas simples, y por tanto, A es diagonalizable. Hay que analizar por separado los casos en los que hay alguna raíz doble.

Caso (i). $\boxed{a=-15}$. Entonces $p(t)=(3-t)t^2$, cuyas raíces on $t=3$ simple y $t=0$ doble. Tenemos que determinar la dimensión del espacio propio $E(0)$ correspondiente a la raíz $t=0$, el cual es justamente el conjunto de soluciones de la ecuación $(A-0\cdot I)X=\bar{0}$, e.d., $AX=\bar{0}$, esto es,

$$\begin{pmatrix}2 & -1 & 6\\ 1 & 4 & -15\\ 1 & 1 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix} \Rightarrow \left\{\begin{array}{r}2x-y+6z=0\\ x+4y-15z=0\\ x+y-3z=0\end{array}\right. \overset{(1)}{\to} \left\{\begin{array}{r}x+y-3z=0\\ x+4y-15z=0\\ 2x-y+6z=0\end{array}\right.$$
$$\overset{(2)}{\to} \left\{\begin{array}{r}x+y-3z=0\\ 3y-12z=0\\ -3y+12z=0\end{array}\right. \to \left\{\begin{array}{l}x=-\alpha\\ y=4\alpha\\ z=\alpha\end{array}\right.$$

(1) Se reordenan. (2) $E_2\to E_2-E_1$, $E_3\to E_3-2E_1$.

Por tanto, el subespacio propio $E(0)$ viene dado por $(x,y,z)=\alpha(-1,4,1)$ y su dimensión es 1. Como la multiplicidad es 2, se concluye que A NO es diagonalizable.

Caso (ii). $\boxed{a=-6}$. Entonces $p(t)=(3-t)(t^2-9)=-(t-3)^2(t+3)$, cuyas raíces son $t=3$ doble y $t=-3$ simple. Hay que hallar la dimensión del espacio propio $E(3)$ correspondiente a la raíz $t=3$, para lo cual se resuelve la ecuación $(A-3I)X=\bar{0}$, e.d.,

$$\begin{pmatrix}-1 & -1 & 6\\ 1 & 1 & -6\\ 1 & 1 & -6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix} \Rightarrow \left\{\begin{array}{r}-x-y+6z=0\\ x+y-6z=0\\ x+y-6z=0\end{array}\right. \to \{x=-y+6z$$
$$\to \left\{\begin{array}{l}x=-\alpha+6\beta\\ y=\alpha\\ z=\quad\ \beta\end{array}\right.$$

Luego, el subespacio propio $E(3)$ viene dado por

$$(x,y,z)=\alpha(-1,1,0)+\beta(6,0,1),$$

y tiene dimensión 2. Como coincide con la multiplicidad de la raíz, se concluye que A sí es diagonalizable.

En resumen: A es diagonalizable para todo $a>-15$ y la respuesta correcta es (b).

6. Considere la función f definida como

$$f(x)=\left\{\begin{array}{ll}x, & \text{si } 0<x\leq 1,\\ -1, & \text{si } x=0.\end{array}\right.$$

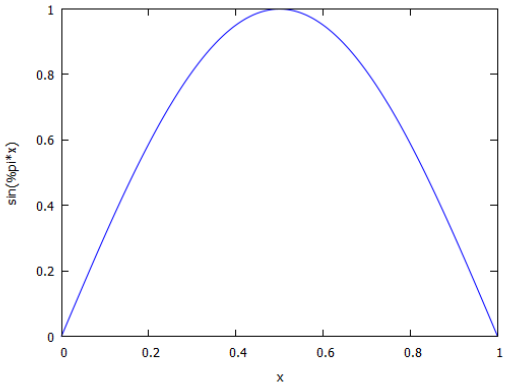

Figura 1: Gráfica de $\mathrm{sen}(\pi x)$

Claramente, f cumple las condiciones del enunciado, es decir, es continua en el intervalo abierto $(0,1)$, $f(0) < 0$ y $f(1) > 0$. Sin embargo, no existe ningún punto $x_0 \in [0,1]$ tal que $f(x_0) = 0$. Luego (a) no es cierta en general.

Considerando la función $f(x) = \mathrm{sen}(\pi x)$, se tiene que f es continua en el intervalo **cerrado** $[0,1]$, que $f(0) = f(1) = 0$. No obstante, $\mathrm{sen}(\pi x) > 0$ para todo $x \in (0,1)$, luego (b) no es cierta en general. Para comprobar esta última afirmación, que debe conocerse de cursos anteriores, se puede ver la Figura 1, la cual se ha obtenido con Maxima mediante la instrucción:

```
plot2d( sin(%pi*x),[x,0,1] );
```

Por último, en la opción (c), f es continua en el intervalo **cerrado** $[1/4, 3/4]$ ya que está estrictamente contenido en $(0,1)$, donde f es continua por hipótesis. Al tener que $f(1/4)f(3/4) < 0$, se verifican todas las hipótesis del Teorema de Bolzano y, por tanto, podemos afirmar que existe $c \in (1/4, 3/4)$ tal que $f(c) = 0$. Luego, (c) es la opción correcta.

7. En este caso se tiene una indeterminación del tipo $+\infty \cdot 0$, que se puede transformar en una indeterminación del tipo $\dfrac{\infty}{\infty}$ para poder utilizar la Regla de L'Hôpital:

$$L = \lim_{x\to-\infty} x^2 e^{2x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{e^{-2x}}.$$

Derivando el numerador y el denominador para aplicar la Regla de L'Hôpital, se obtiene que

$$L = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{-2e^{-2x}} = \lim_{x\to-\infty} -\frac{x}{e^{-2x}},$$

que es de nuevo una indeterminación del tipo $\dfrac{\infty}{\infty}$. Volvemos a aplicar la Regla de L'Hôpital,

$$L = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{2e^{-2x}} = 0,$$

luego la opción correcta es (a). También podemos calcular este límite con Maxima mediante la instrucción:

```
limit (x^2*exp(2*x), x, -inf);
```

8. El polinomio Mac Laurin de orden 3 es el polinomio de Taylor de orden 3 en $x = 0$ y viene dado por

$$P_3(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3.$$

Haciendo los cálculos, se tiene que

$$\begin{array}{ll}
f(x) = \operatorname{tg}(mx), & f(0) = 0 \\
f'(x) = m(1 + \operatorname{tg}^2(mx)), & f'(0) = m \\
f''(x) = 2m^2 \operatorname{tg}(mx)(1 + \operatorname{tg}^2(mx)), & f''(0) = 0 \\
f'''(x) = 2m^3(1 + 4\operatorname{tg}^2(mx) + 3\operatorname{tg}^4(mx)), & f'''(0) = 2m^3.
\end{array}$$

Por tanto, como $3! = 6$, el polinomio Mac Laurin de orden 3 es

$$P_3(x) = mx + \frac{m^3}{3}x^3,$$

y por consiguiente, es cierta (b). También podemos calcular este polinomio con Maxima mediante la instrucción:

```
taylor(tan(m*x),x,0,4);
```