FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS DE LAS TECNOLOGÍAS DE LA INFORMACIÓN

TEMA 4. Parte II.

Funciones de una variable. Teorema de Taylor.

Equipo docente: Lidia Huerga y Vicente Novo

Polinomio de Taylor

• La expresión general de un polinomio de grado n es

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$$

• Sea f una función n veces derivable y $x_0 \in \operatorname{dom} f$. El polinomio de Taylor de orden n en el punto x_0, $P_{n,x_0}(x)$, es el polinomio que satisface las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} P_{n,x_0}(x_0) &= f(x_0), \\ P'_{n,x_0}(x_0) &= f'(x_0), \\ P''_{n,x_0}(x_0) &= f''(x_0), \\ &\vdots \\ P^{(n}_{n,x_0}(x_0) &= f^{(n}(x_0). \end{aligned}$$

Su expresión es

$$P_{n,x_0}(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Si $x_0 = 0$, se denomina también polinomio de Mac Laurin.

Teorema de Taylor

Supóngase que I es abierto. Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función $n+1$ veces derivable en un punto $x_0 \in I$. Entonces, para cada $x \in I$ existe c perteneciente al intervalo de extremos x_0 y x tal que

$$\begin{aligned} f(x) =& f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \\ &+ \frac{f^{(n}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}. \end{aligned}$$

Al término

$$R_{n,x_0}(x) = \frac{f^{(n+1}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

se le denomina resto de Lagrange de orden n.

Entonces, según el Teorema de Taylor se tiene que

$$f(x) = P_{n,x_0}(x) + R_{n,x_0}(x).$$

El error cometido al aproximar $f(x)$ por $P_{n,x_0}(x)$ es $R_{n,x_0}(x)$.

Ejercicio 1.

Determine el polinomio de Mac Laurin de orden 2 de la función $f(x) = \cos^2(x)$ y obtenga una cota del error cometido al aproximar la función f por dicho polinomio en $x = 0.1$.

Solución. f admite derivada de cualquier orden. Se calculan las dos primeras derivadas de f y se evalúan en $x_0 = 0$:

$$
\begin{array}{ll}
f(x) = \cos^2 x, & f(0) = 1, \\
f'(x) = -2\operatorname{sen}(x)\cos(x), & f'(0) = 0, \\
f''(x) = -2\cos^2(x) + 2\operatorname{sen}^2(x) = -2\cos(2x), & f''(0) = -2.
\end{array}
$$

El polinomio de Mac Laurin de orden 2 de la función f es

$$P_2(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 = 1 - \frac{2}{2!}x^2 = 1 - x^2.$$

Ejercicio 1.

Solución. El error cometido al aproximar $f(0.1)$ por $P_2(0.1)$ viene dado por $R_2(0.1)$. El resto de Lagrange de orden 2 evaluado en $x = 0.1$ es

$$R_2(0.1) = \frac{f'''(c)}{3!}(0.1)^3,$$

con $c \in (0, 0.1)$. Se tiene que

$$f'''(x) = 4\mathrm{sen}(2x),$$

luego $R_2\,(0.1) = \dfrac{4\mathrm{sen}(2c)}{3!}\,(0.1)^3$.
Como $|\mathrm{sen}(2c)| \leq 1$, se tiene que

$$|R_2\,(0.1)\,| = \left|\frac{4\mathrm{sen}(2c)}{3!}\,(0.1)^3\right| \leq \frac{4}{3!}(0.1)^3 \simeq 6.66 \cdot 10^{-4},$$

por lo que el error cometido es menor que 0.00066.

Ejercicio 1.