FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS DE LAS TTII. Cód. 71021023
Grado en Ingeniería de las Tecnologías de la Información
Prueba de evaluación continua (**PEC**). Temas 1, 2, 3 y 4. Días 4 y 5 de Dic. 2018

INSTRUCCIONES.

• Antes de enviar sus respuestas lea el documento "NormasdeRealizaciondelaPEC.pdf", que está en el curso virtual, en

Documentos→PECs→Normas de realización de la PEC.

• Antes de acceder al envío de soluciones escriba en papel sus respuestas.

1. Se considera el siguiente sistema dependiente del parámetro real k:

$$\begin{cases} x+y+t= & k \\ kx-y+z-t= & 0 \\ -x+ky-z+t= & 0 \\ x+y+kz+t= & 0 \end{cases}$$

Indique la opción correcta:
(a) Si $k=0$ el sistema es compatible determinado.
(b) Si $k\neq 0$, $k\neq 1$ y $k\neq -1$ el sistema es compatible determinado y tiene como solución $(-1,1,1,k)$.
(c) Si $k=-1$, el sistema es compatible indeterminado y sus soluciones se expresan en función de dos parámetros.
(d) Ninguna de las anteriores.

2. En $\mathbb{R}^4$ se considera el subespacio U definido mediante las dos primeras ecuaciones del sistema del ejercicio anterior para $k=0$, y el subespacio V definido mediante las dos últimas ecuaciones del sistema anterior para $k=0$, es decir,

$$U=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4:\ x+y+t=0,\ \ -y+z-t=0\},$$
$$V=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4: -x-z+t=0,\ x+y+t=0\}$$

Indique la opción correcta:
(a) $\dim(V)=1$.
(b) $\dim(U+V)=3$.
(c) Una base de $U\cap V$ es $\{(-1,1,-1,0)\}$.
(d) Ninguna de las anteriores.

3. Sean

$$S_1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: y\leq -x^2\},$$
$$S_2=\left\{A\in\mathcal{M}_2: AM=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\right\},$$

donde $\mathcal{M}_2$ denota el conjunto de las matrices cuadradas de orden 2 y $M\in\mathcal{M}_2$ es una matriz no nula. Indique la opción correcta:
(a) S_1 es subespacio vectorial pero S_2 no lo es.
(b) S_1 y S_2 son subespacios vectoriales.
(c) S_2 es subespacio vectorial pero S_1 no lo es.
(d) Ninguna de las anteriores.

4. Sea la base de $\mathbb{R}^3$ dada por $B = \{(1,0,1),(1,-1,0),(0,-1,1)\}$ y sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal que tiene las siguientes ecuaciones en la base canónica, dependientes del parámetro $a \in \mathbb{R}$

$$\left\{ \begin{array}{ll} y_1 = & ax_1 - x_2 + x_3 \\ y_2 = & ax_2 - x_3 \\ y_3 = & -x_1 + x_2 + x_3 \end{array} \right.$$

El valor de $a \in \mathbb{R}$ para que la matriz de f en la base (inicial y final) B sea

$$\begin{pmatrix} 1 & -1/2 & -1/2 \\ 2 & 7/2 & 5/2 \\ -1 & -3/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

es
(a) $a = 1$.
(b) $a = 2$.
(c) $a = -1$.
(d) Ninguna de las anteriores.

5. Se considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Indique la opción correcta:
(a) 2 es un valor propio de A y la dimensión del subespacio propio asociado es 2.
(b) -2 es un valor propio de A y la dimensión del subespacio propio asociado es 1.
(c) $\bar{u} = (3,1,1)$ es vector propio de A.
(d) Ninguna de las anteriores.

6. Se considera la siguiente función dependiente del parámetro $a \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{lll} x^2 + ax & \text{si} & x \leq 0 \\ \ln(x+1) & \text{si} & x > 0 \end{array} \right.$$

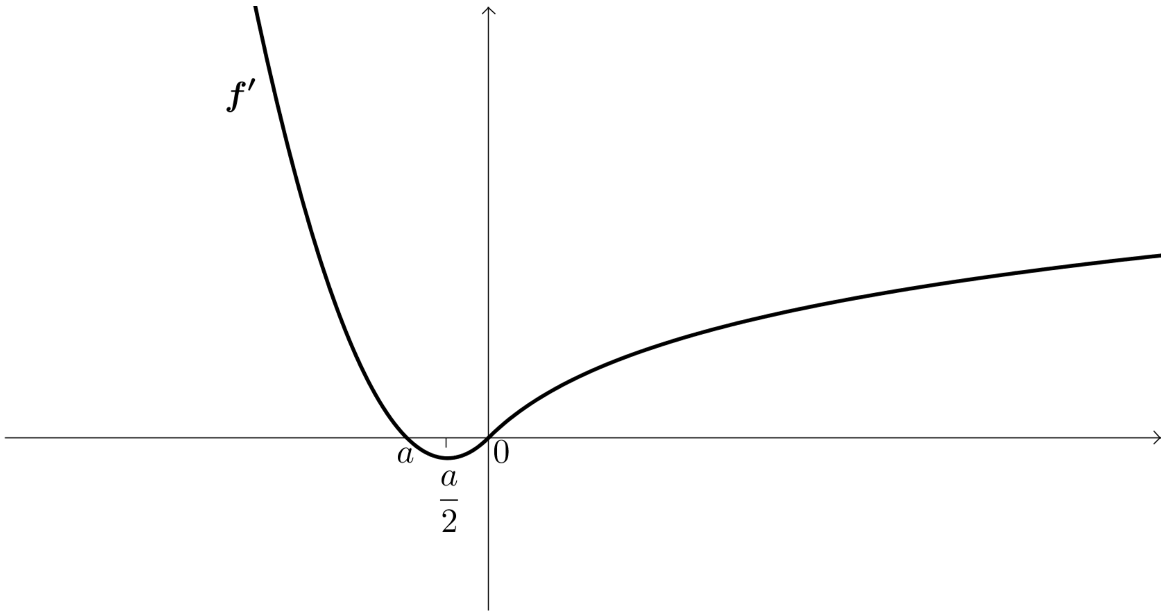
Indique el valor de $a \in \mathbb{R}$ para que la función sea derivable en $\mathbb{R}$:
(a) $a = 0$.
(b) $a = -1$.
(c) $a = 1$.
(d) Ninguna de las anteriores.

7. Sea

$$f(x) = \frac{4x^3 + x^2 + 2}{x^2 - 3}.$$

Indique la opción correcta:
(a) Se cumplen las hipótesis del Teorema de Bolzano en el intervalo $[-2,2]$.
(b) Existe una solución de la ecuación $f(x) = 0$ en el intervalo $[-1,0]$.
(c) La función tiene una asíntota oblicua de ecuación $y = 4x$.
(d) Ninguna de las anteriores.

8. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función dos veces derivable en $\mathbb{R}$. Se sabe que la gráfica de su función derivada es la representada en la imagen.



Indique la opción correcta:
(a) f tiene un máximo relativo en $x = a$ y un mínimo relativo en $x = 0$.
(b) f tiene un mínimo relativo en $x = \frac{a}{2}$.
(c) f es cóncava en $[0, +\infty)$.
(d) Ninguna de las anteriores.

NOTAS: (A) Si por error alguna pregunta tuviera dos opciones correctas, se deberá responder con la primera que sea correcta en el orden alfabético. Por ejemplo, si en una pregunta fueran ciertas (b) y (c), en la aplicación se deberá responder (b), y sólo se considerará como válida esta respuesta.
(B) Se puede usar Maxima, y se recomienda usarlo especialmente en los ejercicios que tienen mucho cálculo.

SOLUCIONES. Prueba de evaluación continua (**PEC**). Diciembre-2018.

RESUMEN: Las soluciones del test son: 1 (d), 2 (b), 3 (c), 4 (b), 5 (a), 6 (c), 7 (b) y 8 (a).

A continuación se hace la resolución.

1. La matriz ampliada A^* que representa el sistema viene dada por

$$A^* = \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 0 & 1 & k \\ k & -1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & k & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & k & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Aplicamos el método de Gauss (transformaciones elementales por filas) para obtener una matriz escalonada equivalente a la matriz ampliada.

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 0 & 1 & k \\ k & -1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & k & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & k & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{(1)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & k \\ 0 & -1-k & 1 & -1-k & -k^2 \\ 0 & 1+k & -1 & 2 & k \\ 0 & 0 & k & 0 & -k \end{array}\right) \xrightarrow{(2)}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & k \\ 0 & -1-k & 1 & -1-k & -k^2 \\ 0 & 0 & 0 & 1-k & k-k^2 \\ 0 & 0 & k & 0 & -k \end{array}\right) \xrightarrow{(3)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & k \\ 0 & -1-k & 1 & -1-k & -k^2 \\ 0 & 0 & k & 0 & -k \\ 0 & 0 & 0 & 1-k & k-k^2 \end{array}\right)$$

$(1) F_2 \to F_2 - kF_1$, $F_3 \to F_3 + F_1$, $F_4 \to F_4 - F_1$, (2) $F_3 \to F_3 + F_2$, $(3) F_3 \leftrightarrow F_4$.

La matriz obtenida tiene forma escalonada y ahora es más fácil estudiar el rango de la matriz de coeficientes y de la ampliada para así clasificar el sistema.

El rango máximo que puede tener la matriz ampliada es 4. Se observa que el rango de la matriz A de coeficientes es 4 si y sólo si el producto de los elementos de la diagonal es distinto de 0, es decir, si y sólo si $(-1-k)k(1-k) \neq 0$, o equivalentemente $k \neq -1, 0, 1$. Por tanto, se tienen los siguientes casos:

1. $k \neq -1, 0, 1$. En ese caso $\text{rang}(A) = \text{rang}(A^*) = 4 = \text{n}^\text{o}$ incógnitas. Luego por el Teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible determinado. Para obtener la solución, se utiliza la expresión escalonada equivalente del sistema:

$$\left\{\begin{array}{rl} x + y + t = & k \\ (-1-k)y + z + (-1-k)t = & -k^2 \\ kz = & -k \\ (1-k)t = & k - k^2 \end{array}\right.$$

De la última ecuación se deduce $t = \frac{k-k^2}{1-k} = k$. De la tercera ecuación, $z = -1$. Despejando los valores de z y t en la segunda ecuación resulta $y = -1$. Finalmente, despejando x en la primera ecuación se tiene que $x = 1$. Luego la solución es $(1, -1, -1, k)$, por lo que la opción (b) no es correcta.

2. Si $k = -1$, la matriz ampliada es equivalente a

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{array}\right)$$

La tercera fila representa la misma ecuación que la segunda, por tanto se podría suprimir, quedando una matriz escalonada con tres filas, y se tiene que $\mathrm{rang}(A) = \mathrm{rang}(A^*) = 3 < 4 =$ nº de incógnitas (el número de filas no nulas de la matriz de coeficientes escalonada y de la ampliada es 3). Luego por el Teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible indeterminado y sus soluciones se expresan en función de $4 - 3 = 1$ parámetro. Así pues, (c) no es correcta.

El sistema es equivalente a

$$\begin{cases} x + y + t = & -1 \\ z = & -1 \\ 2t = & -2 \end{cases}$$

Llamando, por ejemplo $y = \lambda$, se tiene que $t = -1$, $z = -1$, $y = \lambda$, $x = -1 - \lambda + 1 = -\lambda$. Luego las soluciones son

$$\{(-\lambda, \lambda, -1, -1), \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

3. Si $k = 0$, la matriz ampliada resultante es

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Esta matriz tiene una fila nula, e intercambiando de posición la tercera y cuarta filas se obtiene una matriz escalonada tal que $\mathrm{rang}(A) = \mathrm{rang}(A^*) = 3 < 4 =$ nº de incógnitas. Así que de nuevo se trata de un sistema compatible indeterminado cuyas soluciones se expresan en función de 1 parámetro. La opción (a) es por tanto falsa también. El sistema es ahora equivalente a

$$\begin{cases} x + y + t = & 0 \\ -y + z - t = & 0 \\ t = & 0 \end{cases}$$

Llamando de nuevo $y = \lambda$, las soluciones son

$$\{(-\lambda, \lambda, \lambda, 0), \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

4. Finalmente, si $k = 1$, la matriz ampliada es

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

De nuevo es un sistema compatible indeterminado, ya que $\mathrm{rang}(A) = \mathrm{rang}(A^*) = 3 < 4 =$ nº de incógnitas. El sistema resultante es

$$\begin{cases} x + y + t = & 1 \\ -2y + z - 2t = & -1 \\ z = & -1 \end{cases}$$

Luego, llamando $y = \lambda$, las soluciones son

$$\{(1, \lambda, -1, -\lambda), \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Observe que para la resolución del ejercicio no es necesario analizar este último caso, ni tampoco determinar las soluciones para los tres últimos casos.

Por tanto, la respuesta correcta es la (d).

Si tiene problemas para comprender la resolución de este ejercicio, le recomendamos que repase los contenidos del Tema 1 del libro de ejercicios y el vídeo del Tema 1, que puede encontrar en el curso virtual, en

Documentos→VÍDEOS RESUMEN DE CONTENIDOS→VÍDEO TEMA 1.

2. En primer lugar, calculamos la dimensión de los subespacios U y V. La matriz ampliada del sistema que define a U es

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right),$$

y es fácil ver que el rango de la matriz de coeficientes es igual al de la ampliada e igual a 2, menor que el número de incógnitas, que es 4, luego se trata de un sistema compatible indeterminado cuyas soluciones se expresan en función de dos parámetros. Así pues, $\dim(U) = 2$. Razonando de modo análogo, se concluye también que $\dim(V) = 2$.

Por otro lado, el sistema que define a $U \cap V$ se corresponde con el del ejercicio 1 para $k = 0$, y ya vimos que se trataba de un sistema compatible indeterminado cuyas soluciones venían dadas por

$$\{(-\lambda, \lambda, \lambda, 0), \lambda \in \mathbb{R}\} = \{\lambda(-1, 1, 1, 0), \lambda \in \mathbb{R}\},$$

luego $\dim(U \cap V) = 1$ y una base de $U \cap V$ viene dada por $\{(-1, 1, 1, 0)\}$.

Finalmente, aplicando la fórmula de Grassmann, se deduce que

$$\dim(U + V) = \dim(U) + \dim(V) - \dim(U \cap V) = 2 + 2 - 1 = 3,$$

luego $\dim(U + V) = 3$ y la respuesta correcta es la (b).

Para repasar este tipo de ejercicios, lea el Tema 2 del libro de ejercicios y vea el vídeo del Tema 2, que puede encontrar en el curso virtual, en

Documentos→VÍDEOS RESUMEN DE CONTENIDOS→VÍDEO TEMA 2.

3. S_1 no es subespacio vectorial. Para verlo, se busca un contraejemplo. Para ello, basta con buscar un par de puntos que pertenezcan a S_1 tales que una combinación lineal de estos puntos no esté en S_1. Por ejemplo, los puntos $(0, 0)$ y $(-1, -1)$ pertenecen a S_1, sin embargo, la combinación lineal $1(0, 0) + 2(-1, -1) = (-2, -2)$ no está en S_1, ya que $-2 \nleq -(2)^2 = -4$.

Sin embargo, S_2 sí es un subespacio vectorial. En efecto, sean $A_1, A_2 \in S_2$ y $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Se tiene que

$$(\lambda A_1 + \mu A_2)M = \lambda A_1 M + \mu A_2 M = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

luego $\lambda A_1 + \mu A_2 \in S_2$, cumpliéndose la condición de subespacio vectorial.

Por tanto, la respuesta correcta es la (c).

Para profundizar, repase el Tema 2 del libro de ejercicios y visualize el vídeo del Tema 2.

4. La matriz de f en la base canónica C es $Mf = \begin{pmatrix} a & -1 & 1 \\ 0 & a & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y la matriz de cambio de base de la base B a la canónica es $P = M_{B\to C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Así pues, la matriz de cambio de base de la canónica a B es $M_{C\to B} = P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Por tanto, la matriz de f en la nueva base B inicial y final viene dada por $Nf = P^{-1}MfP =$ (véase la cuestión teórica 3.12 del libro de Ejercicios resueltos), es decir,

$$Nf = \begin{pmatrix} a/2 & -1/2 & (1-a)/2 \\ (2+a)/2 & (3+2a)/2 & (3+a)/2 \\ -a/2 & -3/2 & (a-1)/2 \end{pmatrix}.$$

Así pues, la respuesta correcta es la (b). El software MAXIMA es útil para resolver los ejercicios de forma más rápida. Como ejemplo, resolvemos también este ejercicio utilizando MAXIMA. Para ello, basta con ejecutar las siguientes instrucciones:

Se define la matriz de f en la base canónica (Mf) dependiente del parámetro a:

```
(%i13) Mf(a):= matrix([a,-1,1], [0,a,-1], [-1,1,1])$
```

La matriz P de cambio de base de la base B a la canónica es:

```
(%i14) P: matrix([1,1,0], [0,-1,-1], [1,0,1])$
```

La matriz de f en la nueva base B (inicial y final), Nf(a), es:

```
(%i15) Nf(a):= invert(P).Mf(a).P$ ratsimp(Nf(a));
```

(%o16) $\begin{bmatrix} \frac{a}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{a-1}{2} \\ \frac{a+2}{2} & \frac{2a+3}{2} & \frac{a+3}{2} \\ -\frac{a}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{a-1}{2} \end{bmatrix}$

De la expresión de Nf es claro que la respuesta correcta es a=2. En efecto, evaluando Nf en a=2, se obtiene la matriz del enunciado:

```
(%i17) Nf(2);
```

(%o17) $\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 2 & \frac{7}{2} & \frac{5}{2} \\ -1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

Si necesita reforzar los conocimientos relativos a aplicaciones lineales y cambios de base repase los Temas 2 y 3 del libro de ejercicios y el vídeo relativo al Tema 3, que puede encontrar en el curso virtual, en

Documentos→VÍDEOS RESUMEN DE CONTENIDOS→VÍDEO TEMA 3.

5. Se tiene que

$$A\bar{u} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix},$$

y es claro que no existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $A\bar{u} = \lambda\bar{u}$, es decir, $\bar{u}$ no es vector propio de A, por lo que la opción (c) es falsa. Por otro lado, los autovalores de A son las soluciones de la ecuación característica, que viene dada por

$$p_A(t) = 0 \Leftrightarrow |A - tI| = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 3-t & -1 & 1 \\ 0 & 2-t & 0 \\ 1 & -1 & 3-t \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (2-t) \begin{vmatrix} 3-t & 1 \\ 1 & 3-t \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (2-t)((3-t)^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow (2-t)(t^2 - 6t + 8) = 0 \Leftrightarrow (2-t)^2(t-4) = 0,$$

por tanto A tiene dos valores propios: $\lambda_1 = 2$ y $\lambda_2 = 4$. Sus multiplicidades algebraicas son, respectivamente, $\alpha_1 = 2$ y $\alpha_2 = 1$. De aquí, se deduce que (b) es falsa.

Tenemos que calcular la multiplicidad geométrica d_1 de λ_1. Aunque no es necesario para la resolución del ejercicio, aprovechamos para recordar que la multiplicidad geométrica de λ_2 es $d_2 = 1$ (pues la multiplicidad geométrica es mayor o igual que 1 y menor o igual que la multiplicidad algebraica).

Un vector $(x, y, z)^t$ es autovector asociado a λ_1 si y sólo si

$$(A - 2I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Longleftrightarrow \; x - y + z = 0.$$

Las soluciones paramétricas de $x - y + z = 0$ son $x = \delta$, $y = \mu$, $z = -\delta + \mu$; $\delta, \mu \in \mathbb{R}$. Por tanto, una base del subespacio propio asociado a λ_1, $E(\lambda_1)$, es $\{(1, 0, -1), (0, 1, 1)\}$.

Así pues, la dimensión de $E(\lambda_1)$ es 2 ($d_1 = 2$), siendo (a) la opción correcta. Recordamos que como d_1 coincide con la multiplicidad algebraica α_1, y también $d_2 = \alpha_2$ se deduce además que A es diagonalizable.

Con MAXIMA la resolución de este ejercicio es casi inmediata:

```
(%i10) A: matrix([3,-1,1], [0,2,0], [1,-1,3]);
        [ 3  -1  1 ]
(%o10)  [ 0   2  0 ]
        [ 1  -1  3 ]

(%i11) eigenvalues(A);
(%o11) [[4,2],[1,2]]

(%i12) eigenvectors(A);
(%o12) [[[4,2],[1,2]],[[[1,0,1]],[[1,0,-1],[0,1,1]]]]
```

Repase el Tema 3 del libro de ejercicios y vea de nuevo el vídeo 3 si lo considera necesario.

6. La función f es derivable en todo el conjunto de los números reales por estar definida mediante funciones derivables en los dominios indicados, salvo quizá en $x = 0$, por ser el punto en el que cambia la definición de la función.

Estudiamos la continuidad de la función en $x = 0$:

Se tiene que $f(0) = 0$. Por otro lado,

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (x^2 + ax) = 0,$$
$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \ln(x+1) = \ln(1) = 0.$$

Como los límites laterales son finitos e iguales a 0, se tiene que $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$, y como el valor de este límite coincide con $f(0)$, se deduce que f es continua en $x = 0$, independientemente del valor a. Es decir, f es continua en $x = 0$ para cualquier valor de a.

Estudiamos la derivabilidad de f en $x = 0$. Para ello, recurrimos al estudio de las derivadas laterales en $x = 0$: $f'(0)^-$ y $f'(0)^+$. Se tiene que

$$f'(0)^- := \lim_{h \to 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{h^2 + ah - 0}{h} = \lim_{h \to 0^-} (h + a) = a,$$
$$f'(0)^+ := \lim_{h \to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{\ln(h+1) - 0}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{1}{h+1} = 1.$$

En el último límite se ha aplicado la regla de L'Hôpital (se obtiene la indeterminación $0/0$). Con MAXIMA, este límite se calcula ejecutando la siguiente instrucción:

```
(%i2) limit(log(h+1)/h, h, 0, plus);
(%o2) 1
```

La función f es derivable en $x = 0$ si las derivadas laterales son finitas y coinciden. Por tanto, f es derivable en $x = 0$ si y sólo si $a = 1$, y la respuesta correcta es la (c). Obsérvese que en el cálculo de $f'(0)^-$, h tiende a 0 por la izquierda, luego h es menor que 0, y por ello, $f(0+h) = h^2 + ah$. De manera análoga se razona para $f'(0)^+$.

En el Tema 4 del libro de ejercicios puede encontrar una colección de problemas de este tipo para repasar.

7. Se tiene que $f(-2) < 0$ y $f(2) > 0$. Sin embargo, por otro lado se observa que el denominador de f se anula en $x = \pm\sqrt{3}$, por lo que éstos valores son candidatos para que en ellos haya una asíntota vertical. En particular, para $x = -\sqrt{3} \in [-2, 2]$ se tiene que

$$\lim_{x \to -\sqrt{3}^+} \frac{4x^3 + x^2 + 2}{x^2 - 3} = \frac{-12\sqrt{3} + 3 + 2}{0^-} \approx \frac{-15{,}78}{0^-} = +\infty.$$

Con MAXIMA:

```
(%i17) limit((4*x^3+x^2+2)/(x^2-3), x, -sqrt(3), plus);
(%o17) ∞
```

Por tanto, se deduce en particular que f no es continua en $[-2, 2]$ (se razona de igual modo para $x = \sqrt{3}$), luego no se cumplen las hipótesis del Teorema de Bolzano en dicho intervalo y la opción (a) es falsa.

Sin embargo, en el intervalo $[-1, 0]$ la función es continua, pues es un cociente de polinomios y el denominador no se anula, y además $f(-1) = 1/2 > 0$ y $f(0) = -2/3 < 0$, luego en virtud del Teorema de Bolzano existe una solución de la ecuación $f(x) = 0$ en $[-1, 0]$, siendo (b) la opción correcta.

Comprobamos también que (c) es falsa. En efecto,

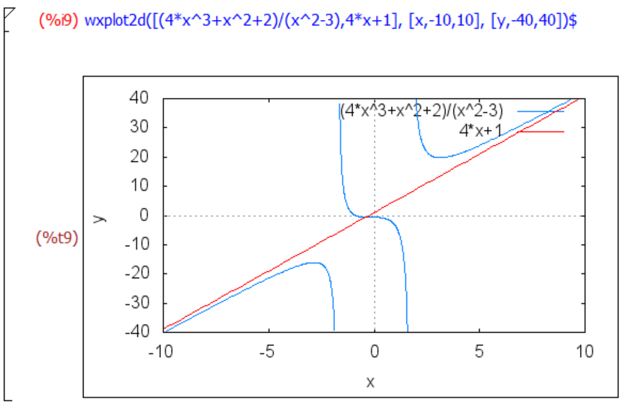
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{4x^3+x^2+2}{x^2-3}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{4x^3 + x^2 + 2}{x^3 - 3x} = 4,$$

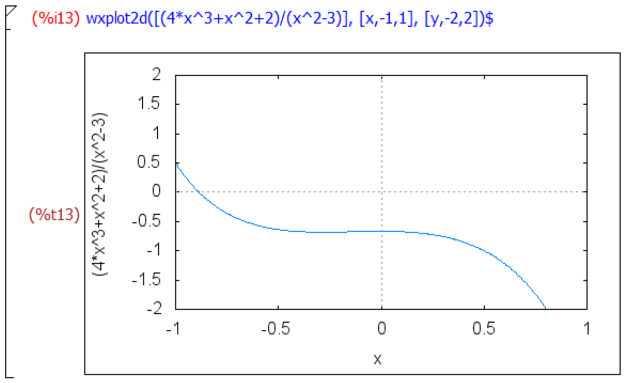
luego si existe asíntota oblicua cuando x tiende a $+\infty$ ésta tiene pendiente 4. Sin embargo, la ordenada en el origen es

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{4x^3 + x^2 + 2}{x^2 - 3} - 4x \right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{4x^3 + x^2 + 2 - 4x^3 + 12x}{x^2 - 3} = 1,$$

luego f tiene una asíntota oblicua de ecuación $y = 4x + 1$ cuando x tiende a $+\infty$ (se obtiene el mismo resultado cuando x tiende a $-\infty$).

En MAXIMA, se representa la gráfica de la función y se puede ver claramente la raíz de $f(x) = 0$ y la asíntota oblicua $y = 4x + 1$:





Repase los contenidos del Tema 4 del libro de ejercicios, si lo considera necesario.

8. De la gráfica de f' se deduce lo siguiente:

(i) $f'(a) = 0$, $f'(0) = 0$, luego los puntos críticos de f son $x = a$ y $x = 0$.

(ii) $f'(x) > 0$ en $(-\infty, a) \cup (0, +\infty)$, luego f es estrictamente creciente en $(-\infty, a) \cup (0, +\infty)$. Análogamente, $f'(x) < 0$ en $(a, 0)$, por lo que f es estrictamente decreciente en $(a, 0)$.

(iii) De los apartados (a) y (b) se deduce que en $x = a$ la función f alcanza un máximo relativo y en $x = 0$ un mínimo relativo.

(iv) f' es derivable en $\mathbb{R}$ y es decreciente en $\left(-\infty, \frac{a}{2}\right)$ y creciente en $\left(\frac{a}{2}, +\infty\right)$, luego $f''(x) \leq 0$ en $\left(-\infty, \frac{a}{2}\right)$ y $f''(x) \geq 0$ en $\left(\frac{a}{2}, +\infty\right)$. Por tanto, f es cóncava en $\left(-\infty, \frac{a}{2}\right)$ y convexa en $\left(\frac{a}{2}, +\infty\right)$ (véanse los puntos teóricos 4.70 y 4.71 del libro de ejercicios)

(v) Del apartado (d) se deduce que en $x = \frac{a}{2}$ la función pasa de cóncava a convexa, luego $x = \frac{a}{2}$ es un punto de inflexión.

Por tanto, la opción correcta es la (a).

Repase los contenidos del Tema 4 del libro de ejercicios, si lo considera necesario.