**FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS DE LAS TTII. Cód. 71021023**
Grado en Ingeniería de las Tecnologías de la Información
Primera semana de Febrero de 2016. Tiempo: 2 horas

INSTRUCCIONES. Cada una de las preguntas tiene un valor máximo de 2 puntos. Sólo está permitido una calculadora no programable. No entregue esta hoja con los enunciados.

**1.** En el espacio vectorial $\mathbb{R}^4$ se consideran los subespacios vectoriales siguientes:

$$U = \langle (2,-1,1,2),\ (0,1,1,-2) \rangle \text{ y}$$
$$V = \{\bar{x} = (x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 :\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0,\ \ -x_1 + 2x_2 + x_3 = 0\}.$$

(a) Encuentre una base de $V$ y su dimensión. *(1 punto)*

(b) Determine una base del subespacio $U \cap V$. *(1 punto)*

**2.** Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la aplicación lineal definida por

$$f(x,y,z) = (2x - 2y - z, x + y - z).$$

Determine la matriz de $f$ en la base canónica de $\mathbb{R}^3$ y en la base

$$B = \{\bar{u}_1 = (2,-1),\ \bar{u}_2 = (-1,1)\}$$

de $\mathbb{R}^2$. *(2 puntos)*

**3.** Sea la función $f(x) = \ln(x^2 + 4x + 5)$.

(a) Determine las asíntotas verticales y oblicuas de $f$ (si alguna no existe se debe justificar). *(1 punto)*

(b) Determine los intervalos de crecimiento y, sin hacer más cálculos, deduzca los máximos y mínimos relativos de $f$. *(1 punto)*

**4.** Se considera la función $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, donde $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ \ y \neq 0\}$, que está definida por

$$f(x,y) = ye^{x/y}.$$

(a) Determine el plano tangente a la gráfica de $f$ en el punto $(0,1)$. *(1 punto)*

(b) Halle la derivada de $f$ en $(0,1)$ en la dirección del vector $\bar{u} = (\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$ y encuentre el valor de $\alpha$ para el cual dicha derivada direccional es máxima cuando $\alpha$ varía en $[0, 2\pi]$. *(1 punto)*

**5.** Se consideran las siguientes integrales reiteradas:

$$I = \int_1^2 \int_x^{x+1} \frac{x}{y^3}\,dy\,dx.$$

(a) Dibuje el dominio de integración de la correspondiente integral doble. *(0.5 puntos)*

(b) Calcule el valor de $I$. *(1.5 puntos)*

**SOLUCIONES.** FMTI. Primera semana de Febrero de 2016.

**1.** (a) Sumando las ecuaciones que definen $V$ se tiene:

$$\left\{\begin{array}{r} x_1+x_2-x_3-x_4=0 \\ 3x_2 \quad -x_4=0 \end{array}\right. \to \left\{\begin{array}{l} x_1=2x_2+x_3 \\ x_4=3x_2 \end{array}\right. \to \left\{\begin{array}{l} x_1=2\alpha+\beta \\ x_2=\alpha \\ x_3=\quad\beta \\ x_4=3\alpha \end{array}\right.$$

Luego, los vectores de $V$ son todos los de la forma

$$(x_1,x_2,x_3,x_4)=(2\alpha+\beta,\alpha,\beta,3\alpha)=\alpha(2,1,0,3)+\beta(1,0,1,0).$$

Una base de $V$ es $\{(2,1,0,3),\ (1,0,1,0)\}$ y su dimensión es 2.

(b) Los vectores de $U$ son de la forma

$$\bar{x}=\alpha(2,-1,1,2)+\beta(0,1,1,-2)=(2\alpha,-\alpha+\beta,\alpha+\beta,2\alpha-2\beta). \quad (1)$$

Se sustituye en las ecuaciones de $V$ (usamos las iniciales) y se simplifica:

$$\left\{\begin{array}{c} 2\alpha+(-\alpha+\beta)-(\alpha+\beta)-(2\alpha-2\beta)=0 \\ -2\alpha+2(-\alpha+\beta)+(\alpha+\beta)=0 \end{array}\right. \to \left\{\begin{array}{l} -2\alpha+2\beta=0 \\ -3\alpha+3\beta=0 \end{array}\right. \to \left\{\ \beta=\alpha\right.$$

Luego, sustituyendo en (1), los vectores de la forma $(2\alpha,0,2\alpha,0)=\alpha(2,0,2,0)$ son todos los de $U\cap V$, y por consiguiente una base de $U\cap V$ es $\{(2,0,2,0)\}$ y su dimensión es 1.

**2.** Considérese la base canónica de $\mathbb{R}^3$:

$$\{\bar{e}_1=(1,0,0),\ \bar{e}_2=(0,1,0),\ \bar{e}_3=(0,0,1)\}.$$

Utilizando la definición de $f$, se tiene

$$\begin{array}{l} f(\bar{e}_1)=(2,1), \\ f(\bar{e}_2)=(-2,1), \\ f(\bar{e}_3)=(-1,-1), \end{array}$$

y hay que expresar estos 3 vectores en la base $B$:

$$(2,1)=\alpha(2,-1)+\beta(-1,1)\ \Rightarrow \left\{\begin{array}{r} 2\alpha-\beta=2 \\ -\alpha+\beta=1 \end{array}\right. \to \left\{\begin{array}{l} \alpha=3 \\ \beta=4 \end{array}\right.$$

$$(-2,1)=(-1)\bar{u}_1$$

$$(-1,-1)=\alpha(2,-1)+\beta(-1,1)\ \Rightarrow \left\{\begin{array}{r} 2\alpha-\beta=-1 \\ -\alpha+\beta=-1 \end{array}\right. \to \left\{\begin{array}{l} \alpha=-2 \\ \beta=-3 \end{array}\right.$$

Por lo tanto, $f(\bar{e}_1)=3\bar{u}_1+4\bar{u}_2$, $f(\bar{e}_2)=-\bar{u}_1$ y $f(\bar{e}_3)=-2\bar{u}_1-3\bar{u}_2$, y en consecuencia, la matriz pedida es

$$[f]_{\bar{e}_i}^{\bar{u}_i}=\begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 4 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

**3.** (a) Las asíntotas verticales (A.V.) hay que buscarlas en los puntos de discontinuidad de $f$. Veamos cuándo se anula la expresión de dentro de ln: $x^2+4x+5=0 \Rightarrow x=\frac{-4\pm\sqrt{16-20}}{2}=\frac{-4\pm\sqrt{-4}}{2}$ y no hay solución. Entonces, $x^2+4x+5>0$ para todo $x$ de $\mathbb{R}$ y se sigue que $f$ es continua en $\mathbb{R}$, por lo que no hay A.V.

Para hallar la asíntota oblicua (A.O.) $y=mx+n$, se utiliza la cuestión teórica 4.34(c) del libro de ejercicios resueltos:

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x^2+4x+5)}{x}\overset{(1)}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2x+4}{x^2+4x+5}}{1}=0.$$

(1) Regla de l'Hôpital.

$$n=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-mx)=\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\ln(x^2+4x+5)=+\infty.$$

Como no es finito, se concluye que no hay asíntota oblicua ni tampoco horizontal (que es la oblicua cuando $m=0$). Lo mismo sucede cuando $x\to-\infty$.

(b) La derivada de $f$ es $f'(x)=\frac{2x+4}{x^2+4x+5}$. Como $f'$ no tiene discontinuidades y además el denominador es positivo para todo $x$, se tiene que $f'(x)>0$ si y sólo si $2x+4>0$, lo cual equivale a $x>-2$, y $f'(x)<0$ si y sólo si $x<-2$. En consecuencia, $f$ es creciente en el intervalo $(-2,+\infty)$ y es decreciente en $(-\infty,-2)$. Como $f$ es continua en $\mathbb{R}$, se deduce que $f$ tiene un mínimo relativo en $x=-2$ (en este caso, este mínimo es absoluto).

**4.** (a) Las derivadas parciales de $f$ son

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=y\cdot e^{x/y}\cdot\frac{1}{y}=e^{x/y},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=e^{x/y}+y\cdot e^{x/y}\cdot\frac{-x}{y^2}=e^{x/y}-\frac{xe^{x/y}}{y}.$$

Evaluadas en $(0,1)$, se tiene que $\frac{\partial f}{\partial x}(0,1)=1$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(0,1)=1$. Luego $\nabla f(0,1)=(1,1)$. La ecuación del plano tangente en $(x_0,y_0)$ es (véase la cuestión teórica 5.35 del libro de ejercicios resueltos):

$$z=f(x_0,y_0)+\nabla f(x_0,y_0)\cdot(x-x_0,y-y_0)\Rightarrow z=1+(1,1)\cdot(x-0,y-1)\Rightarrow z=x+y.$$

(b) De acuerdo con la cuestión teórica 5.39 del libro de ejercicios resueltos:

$$D_{\bar u}f(x_0,y_0)=\nabla f(x_0,y_0)\cdot\bar u\Rightarrow D_{\bar u}f(0,1)=(1,1)\cdot(\cos\alpha,\operatorname{sen}\alpha)=\cos\alpha+\operatorname{sen}\alpha.$$

El máximo de la función $g(\alpha)=\cos\alpha+\operatorname{sen}\alpha$ se encuentra con la derivada e igualando a cero:

$$g'(\alpha)=-\operatorname{sen}\alpha+\cos\alpha\Rightarrow-\operatorname{sen}\alpha+\cos\alpha=0\Rightarrow\operatorname{sen}\alpha=\cos\alpha\Rightarrow\operatorname{tg}\alpha=1.$$

De aquí se sigue que $\alpha=\frac{\pi}{4}$ o $\alpha=\frac{5\pi}{4}$. Para decidir si hay máximo se estudia el signo de la derivada segunda: $g''(\alpha)=-\cos\alpha-\operatorname{sen}\alpha$,

$$g''\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\cos\frac{\pi}{4}-\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}=-\sqrt{2}<0,\ \text{hay máximo;}$$
$$g''\left(\frac{5\pi}{4}\right)=-\cos\frac{5\pi}{4}-\operatorname{sen}\frac{5\pi}{4}=-\frac{-\sqrt{2}}{2}-\frac{-\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}>0,\ \text{hay mínimo.}$$

Los valores de $g$ en los extremos del intervalo $[0,2\pi]$ son $g(0)=1$ y $g(2\pi)=1$. Como $g\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}>1$, se sigue que $\alpha=\frac{\pi}{4}$ es el máximo absoluto de $g$ en $[0,2\pi]$.

**5.** (a) El dominio de integración es

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; 1 \le x \le 2, \; x \le y \le x+1\}$$

y se ha representado en la figura 1.

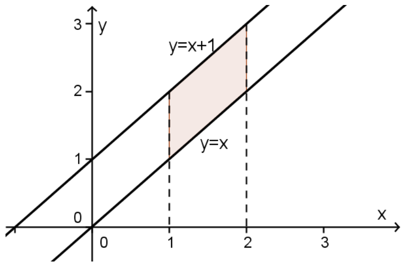


*Fig. 1. Dominio de integración D.*

(b) A la vista de la figura, para calcular $I$ mantenemos el orden de integración dado en el enunciado.

Una primitiva de $g(y) = \frac{1}{y^3}$ es $\int \frac{1}{y^3} dy = \int y^{-3} dy = \frac{1}{-2} y^{-2} = \frac{-1}{2y^2}$, con lo cual

$$I = \int_1^2 \left[\frac{-x}{2y^2}\right]_{y=x}^{y=x+1} dx = \frac{-1}{2}\int_1^2 \left(\frac{x}{(x+1)^2} - \frac{x}{x^2}\right) dx = \frac{-1}{2}\int_1^2 \frac{x}{(x+1)^2} dx + \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{1}{x} dx$$
$$= \frac{-1}{2} I_1 + \frac{1}{2} I_2,$$

donde $I_1 = \int_1^2 \frac{x}{(x+1)^2} dx$ y $I_2 = \int_1^2 \frac{1}{x} dx$. Esta última integral es inmediata:

$$I_2 = \int_1^2 \frac{1}{x} dx = [\ln x]_1^2 = \ln 2.$$

Para hallar la primera se descompone en fracciones simples:

$$\frac{x}{(x+1)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} = \frac{A(x+1)+B}{(x+1)^2} \Rightarrow A(x+1) + B = x \Rightarrow A = 1, \; B = -1.$$

Por tanto,

$$I_1 = \int_1^2 \frac{x}{(x+1)^2} dx = \int_1^2 \left(\frac{1}{x+1} + \frac{-1}{(x+1)^2}\right) dx = \left[\ln(x+1) + \frac{1}{x+1}\right]_1^2$$
$$= \ln 3 + \frac{1}{3} - \ln 2 - \frac{1}{2} = \ln 3 - \ln 2 - \frac{1}{6}.$$

Con lo cual

$$I = \frac{-1}{2} I_1 + \frac{1}{2} I_2 = \frac{-1}{2}\left(\ln 3 - \ln 2 - \frac{1}{6}\right) + \frac{1}{2}\ln 2 = \frac{1}{12} + \ln 2 - \frac{1}{2}\ln 3.$$