FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS DE LAS TTII. Cód. 71021023
Grado en Ingeniería de las Tecnologías de la Información
Septiembre de 2018. Original. Tiempo: 2 horas

INSTRUCCIONES. Cada una de las preguntas tiene un valor máximo de 2 puntos. Sólo está permitido una calculadora no programable. No entregue esta hoja con los enunciados.

1. Sean $B_1 = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ y $B_2 = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3\}$ dos bases de $\mathbb{R}^3$ relacionadas por las expresiones

$$\begin{aligned} \bar{u}_1 &= 2\bar{e}_1 + \bar{e}_2, \\ \bar{u}_2 &= \bar{e}_1 + \bar{e}_2 - \bar{e}_3, \\ \bar{u}_3 &= \bar{e}_1 - 3\bar{e}_2 + \bar{e}_3. \end{aligned}$$

(a) Obtenga las coordenadas de $\bar{v}$ en la base B_1 si en la base B_2 son $(1, 1, 1)$. *(0.5 puntos)*

(b) Obtenga las coordenadas de $\bar{w}$ en la base B_2 si en la base B_1 son $(3, 1, 0)$. *(1.5 puntos)*

2. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 0 & -5 & 3 \\ 0 & -6 & 4 \end{pmatrix}$. Calcule los autovalores y autovectores de A y estudie si A es diagonalizable. *(2 puntos)*

3. Se considera la función $f(x) = e^{\cos(x)}$.

(a) Determine el polinomio de Taylor de orden 2 de f en $x = 0$. *(1 punto)*

(b) Calcule una cota del error cometido al aproximar el valor de f por el del polinomio obtenido en el apartado anterior en el punto $x = \frac{1}{10}$. *(1 punto)*

4. Sea $f(x, y) = x \ln\left(\frac{2y}{x}\right) - x^2 y$.

(a) Obtenga el plano tangente a la gráfica de f en el punto $(2, 1)$. *(0.75 puntos)*

(b) Calcule $D_{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)} f\,(2, 1)$. *(0.75 puntos)*

(c) Indique la dirección de máximo crecimiento de f en $(2, 1)$. *(0.5 puntos)*

5. Sea $f(x) = \sqrt{x} e^{x^2}$.

(a) Determine el volumen del sólido de revolución generado al girar sobre el eje X el trozo de la gráfica de la función f comprendido en el intervalo $[0, 1]$. *(1 punto)*

(b) Calcule

$$\int\int_D \frac{\ln(y)[f(x)]^2}{y}\, dx\, dy,$$

donde $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 1 \leq y \leq e\}$. *(1 punto)*

SOLUCIONES. FMTI. Septiembre de 2018. Original.

1. (a) Se tiene que

$$\bar{v} = \bar{u}_1 + \bar{u}_2 + \bar{u}_3 = 2\bar{e}_1 + \bar{e}_2 + \bar{e}_1 + \bar{e}_2 - \bar{e}_3 + \bar{e}_1 - 3\bar{e}_2 + \bar{e}_3 = 4\bar{e}_1 - \bar{e}_2,$$

luego las coordenadas de $\bar{v}$ en B_1 son $(4, -1, 0)$.

(b) Se tiene que

$$\begin{aligned} \bar{w} = 3\bar{e}_1 + \bar{e}_2 &= \alpha\bar{u}_1 + \beta\bar{u}_2 + \gamma\bar{u}_3 \\ &= \alpha(2\bar{e}_1 + \bar{e}_2) + \beta(\bar{e}_1 + \bar{e}_2 - \bar{e}_3) + \gamma(\bar{e}_1 - 3\bar{e}_2 + \bar{e}_3) \\ &= (2\alpha + \beta + \gamma)\bar{e}_1 + (\alpha + \beta - 3\gamma)\bar{e}_2 + (-\beta + \gamma)\bar{e}_3, \end{aligned}$$

de donde resulta el sistema

$$\left\{ \begin{array}{rl} 2\alpha + \beta + \gamma & = 3 \\ \alpha + \beta - 3\gamma & = 1 \\ -\beta + \gamma & = 0, \end{array} \right.$$

que tiene por solución $\alpha = \frac{4}{3}$, $\beta = \gamma = \frac{1}{6}$, luego las coordenadas de $\bar{w}$ en B_2 son $\left(\frac{4}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right)$.

2. En primer lugar, se calculan los autovalores de A, que son las soluciones λ de la siguiente ecuación:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 & 3 \\ 0 & -5-\lambda & 3 \\ 0 & -6 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0 \iff (1-\lambda) \begin{vmatrix} -5-\lambda & 3 \\ -6 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0 \iff (1-\lambda)(\lambda^2 + \lambda - 2) = 0.$$

Luego se tiene que los autovalores de A son $\lambda_1 = 1$, con multiplicidad algebraica $\alpha_1 = 2$ y $\lambda_2 = -2$, con multiplicidad algebraica $\alpha_2 = 1$.

Así pues, A será diagonalizable si y sólo si la multiplicidad geométrica de λ_1 es también igual a 2. Para comprobarlo, se calcula el subespacio de autovectores $E(\lambda_1)$, cuyas ecuaciones implícitas vienen dadas por

$$\begin{pmatrix} 0 & -3 & 3 \\ 0 & -6 & 3 \\ 0 & -6 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \left\{ \begin{array}{rl} -3y + 3z & = 0 \\ -6y + 3z & = 0, \end{array} \right.$$

de donde se deduce fácilmente que $y = z = 0$ y x es libre. Luego $(1, 0, 0)$ es el único autovector asociado a λ_1, por tanto la multiplicidad geométrica de λ_1 es igual a 1, distinta de α_1, y se deduce que A no es diagonalizable.

3. (a) El polinomio de Taylor de orden 2 de f en $x = 0$ viene dado por

$$P_2(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2.$$

Se tiene que

$$\begin{aligned} f(x) = e^{\cos(x)} &\implies f(0) = e, \\ f'(x) = -\text{sen}(x)e^{\cos(x)} &\implies f'(0) = 0, \\ f''(0) = (\text{sen}^2(x) - \cos(x))e^{\cos(x)} &\implies f''(0) = -e. \end{aligned}$$

Por tanto, $P_2(x) = e - \frac{e}{2}x^2$.

(b) El error cometido al aproximar el valor de f por el de P_2 en $x = \frac{1}{10}$ viene dado por

$$R_2\left(\frac{1}{10}\right) = \frac{f'''(c)}{3!}\left(\frac{1}{10}\right)^3,$$

donde $c \in \mathbb{R}$ pertenece al intervalo $\left(0, \frac{1}{10}\right)$. Se tiene que

$$f'''(x) = e^{\cos(x)}\mathrm{sen}(x)\cos(x)(3+\cos(x)).$$

Como e^x es creciente y las funciones seno y coseno toman valores menores o iguales que 1, se tiene que $|f'''(c)| \le e^1 \cdot 1 \cdot 1(3+1) = 4e$. Por tanto,

$$\left|R_2\left(\frac{1}{10}\right)\right| \le \frac{4e}{6}\left(\frac{1}{10}\right)^3 = \frac{e}{1500},$$

por lo que $e/1500 \approx 0{,}0018$ es una cota del error cometido.

4. (a) Las derivadas parciales de f son

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \ln\left(\frac{2y}{x}\right) + x\frac{x}{2y}\left(-\frac{2y}{x^2}\right) - 2xy = \ln\left(\frac{2y}{x}\right) - 1 - 2xy,\\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= x\frac{x}{2y}\frac{2}{x} - x^2 = \frac{x}{y} - x^2.
\end{aligned}$$

Por tanto, $\nabla f\,(2,1) = (-5,-2)$. El plano tangente a la gráfica de f en $(2,1)$ viene dado por la ecuación

$$\begin{aligned}
z = f\,(2,1) + \nabla f\,(2,1)\cdot(x-2, y-1) &\iff z = -4 + (-5,-2)\,(x-2,y-1)\\
&\iff z = -5x - 2y + 8.
\end{aligned}$$

(b) Como la función f es diferenciable, se tiene que

$$D_{\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} f\,(2,1) = \nabla f\,(2,1)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = (-5,-2)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{7}{\sqrt{2}}.$$

(c) La dirección de máximo crecimiento de f en $(2,1)$ es la dada por el gradiente, es decir, $\frac{\nabla f(2,1)}{\|\nabla f(2,1)\|}$.

5. (a) El volumen viene dado por $\pi\int_0^1 [f(x)]^2\,dx$. Se tiene que

$$\int [f(x)]^2\,dx = \int xe^{2x^2}\,dx.$$

El cálculo de la primitiva anterior es casi inmediato. Haciendo el cambio de variable $u = 2x^2$ se obtiene $du = 4xdx$ y $xdx = \frac{1}{4}du$, luego

$$\int xe^{2x^2}\,dx = \frac{1}{4}\int e^u\,du = \frac{1}{4}e^u + C = \frac{e^{2x^2}}{4} + C.$$

Por tanto, aplicando la regla de Barrow, se tiene que

$$\int_0^1 [f(x)]^2\,dx = \left[\frac{e^{2x^2}}{4}\right]_0^1 = \frac{e^2-1}{4}.$$

Así pues, el volumen del sólido de revolución es $\frac{\pi}{4}(e^2-1)$ unidades cúbicas.

(b) Operando, resulta que

$$\int\int_D \frac{\ln(y)[f(x)]^2}{\sqrt{y}}\,dx\,dy = \int_0^1 \left[\int_1^e \frac{\ln(y)[f(x)]^2}{\sqrt{y}}\,dy\right]dx = \int_0^1 [f(x)]^2 \left[\int_1^e \frac{\ln(y)}{\sqrt{y}}\,dy\right]dx.$$

Para obtener una primitiva de $\frac{\ln(y)}{\sqrt{y}}$ se aplica integración por partes (véase, por ejemplo, Ejercicio 6.4(b) del libro de problemas). Se tiene que $\int \frac{\ln(y)}{\sqrt{y}}\,dy = 2\sqrt{y}\ln(y) - 4\sqrt{y} + C$. Luego

$$\int_1^e \frac{\ln(y)}{\sqrt{y}}\,dy = [2\sqrt{y}\ln(y) - 4\sqrt{y}]_1^e = 4 - 2\sqrt{e}.$$

Así pues,

$$\int\int_D \frac{\ln(y)[f(x)]^2}{\sqrt{y}}\,dx\,dy = (4-2\sqrt{e})\int_0^1 [f(x)]^2\,dx = \frac{1}{2}(e^2-1)(2-\sqrt{e}).$$