Regla de L'Hôpital

Regla de L'Hôpital. Sean $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ y $x_0 \in [a, b]$. Si se cumplen las siguientes condiciones:

C1. f y g son derivables en $(a, b) \backslash \{x_0\}$,

C2. $g'(x) \neq 0$, para todo $x \in (a, b) \backslash \{x_0\}$,

C3. $\text{lím}_{x \to x_0} f(x) = \text{lím}_{x \to x_0} g(x) = 0$ o
$\text{lím}_{x \to x_0} f(x) = \text{lím}_{x \to x_0} g(x) = \pm\infty$,

C4. Existe $\text{lím}_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ (puede ser $\pm\infty$),

entonces

$$\text{lím}_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \text{lím}_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Este resultado también es válido para límites laterales (cuando $x \to x_0^-$ ó $x \to x_0^+$) y también es extensible para límites en el infinito (cuando $x \to \pm\infty$).

(a) Determínese $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^2+3x-4}{x^2+2x-3}$ (Indeterminación $\frac{0}{0}$).
Sean $f(x) = x^2+3x-4$ y $g(x) = x^2+2x-3$. Condiciones de la regla de L'Hôpital:

1. f y g son derivables en $\mathbb{R}$ ($C1\checkmark$),
2. $g'(x) = 2x+2 \neq 0$ para todo $x \in (0,2)$ ($C2\checkmark$),
3. Indeterminación $\frac{0}{0}$ ($C3\checkmark$),
4. $\lim_{x\to 1} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 1} \dfrac{2x+3}{2x+2} = \dfrac{5}{4}$ ($C4\checkmark$),

- $\Rightarrow$ (L'Hôpital) $\lim_{x\to 1} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 1} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \dfrac{5}{4}$.

(a) Determínese $\text{lím}_{x\to 1} \dfrac{x^2+3x-4}{x^2+2x-3}$.

(Sin usar regla de L'Hôpital) Se tiene que

$$\text{lím}_{x\to 1} \frac{f(x)}{g(x)} = \text{lím}_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+4)}{(x-1)(x+3)} = \text{lím}_{x\to 1} \frac{x+4}{x+3} = \frac{5}{4}.$$

(b) Calcúlese $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1 - x}{3x^2}$ (Indeterminación $\frac{0}{0}$).

1. $f(x) = e^x - 1 - x$ y $g(x) = 3x^2$ son derivables en $\mathbb{R}$ ($C1\checkmark$),
2. $g'(x) = 6x \neq 0$ para todo $x \neq 0$ ($C2\checkmark$),
3. Indeterminación $\frac{0}{0}$ ($C3\checkmark$),
4. $\lim_{x\to 0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{6x}$ (Ind. $\frac{0}{0}$),

$\Rightarrow$ Se aplica de nuevo la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{6} = \frac{1}{6}\,(C4\checkmark) \;\Rightarrow$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \frac{1}{6}.$$

(c) $\lim_{x\to 0^+} x\ln(x)$ (Indeterminación $0\cdot(-\infty)$).

$$x\ln(x) = \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}} \Rightarrow \lim_{x\to 0} x\ln(x) = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(x)}{\dfrac{1}{x}}.$$

- Indeterminación $\dfrac{\infty}{\infty}$, regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln(x) = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+}(-x) = 0.$$

(d) Calcúlese $\lim_{x\to 0^+} x^x$ (Indeterminación 0^0).

Supóngase que $\lim_{x\to 0^+} x^x = l$. Entonces,

$$\lim_{x\to 0^+} \ln\left(x^x\right) = \ln(l).$$

$$\lim_{x\to 0^+} \ln\left(x^x\right) = \lim_{x\to 0^+} x \ln\left(x\right) = 0$$

Por tanto, $\ln(l) = 0$, luego $l = 1$.

(e) Calcúlese $\lim_{x\to 0^+} \left(\dfrac{1}{3^x-1} - \dfrac{1}{x}\right)$ (Indeterminación $\infty - \infty$).

$$\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{3^x-1} - \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x-3^x+1}{x(3^x-1)}.$$

- Indeterminación $\dfrac{0}{0}$, regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x-3^x+1}{x(3^x-1)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1-3^x\ln(3)}{3^x-1+x3^x\ln(3)} = \frac{1-\ln(3)}{0^+} = -\infty$$