3. APLICACIONES LINEALES

En este documento vamos a explicar brevemente cómo manejar las aplicaciones lineales con Maxima, ya que las instrucciones nuevas son muy pocas.

1 Definir una aplicación lineal

EJEMPLO 3.1. Definir la aplicación lineal f de R^2 en R^3 dada por f(x1,x2)=(2x1-3x2, x1+x2, -x1).

SOLUCIÓN. Basta poner el vector de entrada entre paréntesis y el de salida entre corchetes y usar el operador de definir una función (:=). Así:

```
(%i1) f(x1,x2):=[2*x1-3*x2,x1+x2,-x1];
(%o1) f(x1,x2):=[2 x1 - 3 x2,x1+x2,- x1]
```

2 Obtener la imagen de un vector

EJEMPLO 3.2. Calcular la imagen del vector (4,-2), es decir, f(4,-2).

```
(%i2) f(4,-2);
(%o2) [14,2,- 4]
```

3 Matriz asociada a una aplicación lineal respecto de las bases B (inicial) y B' (final).

Basta hallar las imágenes de los vectores de la base B y determinar sus coordenadas en la base B', es decir, expresar las imágenes como combinación lineal de los elementos de B'. Estas coordenadas son las columnas de la matriz asociada. Esto es, si la base B={e1, e2, ...} y la base B'={u1, u2,...}, se calcula

f(e1)= a1 u1 + a2 u2 + ...
f(e2)= b1 u1 + b2 u2 + ...
...

los números (a1, a2, ...) forman la primera columna de la matriz asociada a f, y así sucesivamente.

EJEMPLO 3.3. Determinar la matriz de la aplicación lineal f del ejemplo 2.1 respecto de las bases canónicas.

```
(%i3) f(1,0);
      f(0,1);
(%o3) [2,1,- 1]
(%o4) [- 3,1,0]
```

Por tanto, la matriz asociada a f es

```
(%i5) A:transpose(matrix(f(1,0),f(0,1)));
```

$$(\%o5)\quad \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

4 Imagen de un vector en forma matricial

Basta hacer el producto de matrices A.v, siendo A la matriz asociada a f en las bases B y B' y expresado v como vector columna en la base B. Las coordenadas del vector imagen f(v) están en la base B'.

EJEMPLO 3.4. Hallar f(4,-2).

```
(%i6) A.transpose([4,-2]);
```

$$(\%o6)\quad \begin{bmatrix} 14 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix}$$

Obsérvese que se obtiene el mismo resultado que en el ejemplo 2.2.

Maxima no da error aunque no pongamos al vector como columna, pero eso es matemáticamente incorrecto:

```
(%i7) A.[4,-2];
```

$$(\%o7)\quad \begin{bmatrix} 14 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix}$$

5 Valores y vectores propios. Diagonalización.

Las únicas instrucciones nuevas de Maxima en este tema están relacionadas con la diagonalización y son las siguientes:

-charpoly(A,x): calcula el polinomio característico de la matriz A en la variable x,
-eingenvalues(A): halla los valores propios de A y sus multiplicidades,
-eigenvectors(A): halla los valores propios, sus multiplicidades y una base de cada subespacio propio.

EJEMPLO 3.5. Sea A la matriz de filas (4, 1, -1), (2, 5, -2) y (1, 1, 2).
Determinar el polinomio característico, los autovalores y sus multiplicidades, una base para cada subespacio propio e indicar si es diagonalizable, y en caso afirmativo, una matriz diagonal D, la matriz de paso P y compruébese que se verifica la igualdad D=P^(-1)AP.

SOLUCIÓN.

(%i8) A:matrix([4, 1, -1], [2, 5, -2], [1, 1, 2]);
charpoly(A,x);

(%o8) $\begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

(%o9) $-x+((2-x)(5-x)+2)(4-x)-2(2-x)+1$

(%i10) ratsimp(%);

(%o10) $-x^3+11x^2-39x+45$

(%i11) factor(%);

(%o11) $-(x-5)(x-3)^2$

Lo que nos indica que los valores propios (las raíces del polinomio) son el 5 con multiplicidad 1 y el 3 con multiplicidad 2. Se puede hacer con una única orden:

(%i12) eigenvalues(A);

(%o12) [[5,3],[1,2]]

Esta salida está formada por dos listas: la primera es la lista de valores propios 5 y 3 y la segunda son las multiplicidades respectivas 1 y 2.

Hallemos una base de cada subespacio propio:

(%i13) eigenvectors(A);

(%o13) [[[5,3],[1,2]],[[[1,2,1]],[[1,0,1],[0,1,1]]]]

Esta salida está formada por dos listas:
-la primera de las cuales es justamente la anterior: [5, 3], [1, 2] (valores propios y sus multiplicidades algebraicas).
-la segunda tiene tantas sublistas como valores propios, y cada sublista es una base del subespacio propio del correspondiente valor propio. Así:
(1, 2, 1) es una base del subespacio propio del valor propio 5, por tanto de dimensión 1.
(1, 0, 1) y (0, 1, 1) forman una base del subespacio propio del valor propio 3, luego de dim 2.
Como todas las multiplicidades coinciden con las dimensiones, podemos afirmar que A diagonaliza.
Una base de diagonalización es (1, 2, 1), (1, 0, 1) y (0, 1, 1).
Poniendo estos vectores como columnas de la matriz P, tenemos la matriz de paso:

(%i14) P:transpose(matrix([1, 2, 1], [1, 0, 1], [0, 1, 1]));

(%o14) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

La matriz diagonal es:

(%i15) D:matrix([5,0,0], [0,3,0], [0,0,3]);

(%o15) $\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

Nótese que se verifica la igualdad D=P^(-1)AP:

(%i16) P^^(-1).A.P;

(%o16) $\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

Nota: Obsérvese que el polinomio característico puede obtenerse con la instrucción

(%i17) determinant(A-x*ident(3));

(%o17) $-x+((2-x)(5-x)+2)(4-x)-2(2-x)+1$

(%i18) ratsimp(%);

(%o18) $-x^3+11x^2-39x+45$

EJEMPLO 3.6. Repita el ejemplo anterior con la matriz B de filas (-3,1,-1), (-7,5,-1) y (-6,6,-2).

SOLUCIÓN.

(%i19) B:matrix([-3,1,-1], [-7,5,-1], [-6,6,-2]);

(%o19) $\begin{bmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{bmatrix}$

(%i20) eigenvectors(%);

(%o20) [[[4,-2],[1,2]],[[[0,1,1]],[[1,1,0]]]]

A la vista de este resultado se tiene:
· Valor propio 4, multiplicidad 1, base del subespacio propio (0,1,1), por tanto de dimensión 1.
· Valor propio -2, multiplicidad 2, base del subespacio propio (1,1,0), por tanto de dimensión 1.
Como para el valor propio -2, la multiplicidad es distinta de la dimensión del subespacio propio, la matriz B no diagonaliza.