FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS DE LAS TTII. Cód. 71021023
Grado en Ingeniería de las Tecnologías de la Información
Prueba de evaluación continua (**PEC**). Temas 1, 2, 3 y 4. Días 2 y 3 de Diciembre, 2014.

INSTRUCCIONES.

• Antes de enviar sus respuestas lea el documento "NormasdeRealizaciondelaPEC.pdf", que está en la carpeta PEC dentro de Documentos.

• Antes de acceder al envío de soluciones escriba en papel sus respuestas.

1. El elemento $(1, 4)$ de la matriz inversa de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

es
(a) $-1/3$.
(b) No existe porque A no tiene inversa.
(c) $-1/2$.
(d) Ninguna de las anteriores.

2. Indique la afirmación correcta:
(a) $\{(2, -1, 2),\ (-4, 2, -4)\}$ es linealmente independiente.
(b) $\{(2, -1, 2),\ (1, 1, -1),\ (1, 4, -5)\}$ es linealmente independiente.
(c) $\{(2, -1, 2),\ (1, 1, -1),\ (1, 4, 3)\}$ es linealmente independiente.
(d) Ninguna de las anteriores.

3. Se considera en $\mathbb{R}^4$ el subespacio vectorial U definido del siguiente modo:

$$U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 :\ x_1 - x_2 + x_3 = 0,\ x_2 + 2x_3 - x_4 = 0\}.$$

Indique la opción correcta:
(a) La dimensión de U es 1.
(b) Una base de U es $\{(0, 1, 1, 3),\ (2, 1, -1, -1)\}$.
(c) Un elemento de U es $(2, 1, -1, 0)$.
(d) Ninguna de las anteriores.

4. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la aplicación lineal que en las bases $B_1 = \{\bar{u}_1 = (1, 0, 1),\ \bar{u}_2 = (-1, 1, 0),\ \bar{u}_3 = (1, 1, 1)\}$ y $B_2 = \{\bar{v}_1 = (1, 0),\ \bar{v}_2 = (0, 1)\}$ es

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Entonces, la matriz de f en la base canónica de $\mathbb{R}^3$ y en la base B_2 viene dada por:
(a) $\begin{pmatrix} -9 & -5 & 12 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.
(b) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.
(c) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
(d) Ninguna de las anteriores.

5. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} -8 & 10 \\ -6 & 8 \end{pmatrix}$. El elemento $(2,1)$ de la matriz A^{11} es

(a) 1024.
(b) -6144.
(c) -8192.
(d) Ninguna de las anteriores.

6. Indique el valor del límite siguiente:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+1} - 2^n}{2^n + 2 \cdot 3^n}.$$

(a) 0.
(b) No existe.
(c) 3/2.
(d) Ninguna de las anteriores.

7. Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x & \text{si } x \geq 0 \\ x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Elija la opción correcta:
(a) f no es continua en $x = 0$.
(b) f no es derivable en $x = 0$.
(c) f es derivable en $x = 0$ pero la función f' no es continua.
(d) Ninguna de las anteriores.

8. El polinomio Mac Laurin de orden 4 de la función $f(x) = e^{x^2}$ es
(a) $1 + x^2 + \frac{x^4}{2}$.
(b) $1 + x + x^4$.
(c) $1 + \frac{x^2}{2}$.
(d) Ninguna de las anteriores.

NOTAS: (A) Si por error alguna pregunta tuviera dos opciones correctas, se deberá responder con la primera que sea correcta en el orden alfabético. Por ejemplo, si en una pregunta fueran ciertas (b) y (c), en la aplicación se deberá responder (b), y sólo se considerará como válida esta respuesta.
(B) Se puede usar Maxima, y se recomienda usarlo especialmente en los ejercicios que tienen mucho cálculo.

SOLUCIONES. Prueba de evaluación continua (**PEC**). Diciembre-2014.

RESUMEN: Las soluciones del test son: 1 (c), 2 (c), 3 (b), 4 (a), 5 (b), 6 (c), 7 (d) y 8 (a).

A continuación se hace la resolución detallada.

1. Según la cuestión teórica 1.30 del libro de ejercicios resueltos, la matriz inversa de A viene dada por $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\operatorname{Adj}(A)^t$. Por tanto, el elemento $(1,4)$ de A^{-1} se obtiene mediante el cociente $A_{4,1}/|A|$, siendo $A_{4,1}$ el adjunto del elemento $(4,1)$ de A, esto es $A_{4,1} = (-1)^{4+1}\alpha_{4,1} = -\alpha_{4,1}$, donde $\alpha_{4,1}$ es el menor complementario del elemento $(4,1)$.

En primer lugar se calcula el determinante de A consiguiendo ceros en la primera columna, sumando múltiplos adecuados de la primera fila:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 3 & 5 \end{vmatrix} \overset{(2)}{=} \begin{vmatrix} 3 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 5 \end{vmatrix} \overset{(3)}{=} \begin{vmatrix} 3 & 6 & 3 \\ -1 & 0 & 0 \\ 5 & 8 & 5 \end{vmatrix} = 6.$$

(1) $F_2 \to F_2 + F_1$, $F_3 \to F_3 - F_1$, $F_4 \to F_4 + 2F_1$. (2) Se desarrolla por la columna 1.
(3) $C_2 \to C_2 + C_1$.

Como el determinante es no nulo, la matriz A tiene inversa, y por tanto, el apartado (b) es falso. En segundo lugar, se halla el menor complementario $\alpha_{4,1}$ de A:

$$\alpha_{4,1} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3.$$

(1) $F_3 \to F_3 - F_2$.

Por consiguiente, el elemento $(1,4)$ de A^{-1} es $\frac{-\alpha_{4,1}}{|A|} = \frac{-3}{6} = \frac{-1}{2}$, y en consecuencia, la respuesta correcta es (c).

2. Empecemos con el apartado (a). Es claro que el segundo vector es -2 veces el primero, esto es, $(-4,2,-4) = (-2)\cdot(2,-1,2)$. Por tanto, son linealmente dependientes y (a) es falsa. Estudiemos la independencia de los vectores de (b) usando la caracterización de la cuestión teórica 2.11 del libro de ejercicios resueltos. De la ecuación

$$\lambda_1(2,-1,2) + \lambda_2(1,1,-1) + \lambda_3(1,4,-5) = (0,0,0)$$

resulta el siguiente sistema que se resuelve

$$\left\{\begin{array}{r} 2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 + 4\lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 - \lambda_2 - 5\lambda_3 = 0 \end{array}\right. \xrightarrow{(1)} \left\{\begin{array}{r} 2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ -3\lambda_1 \qquad + 3\lambda_3 = 0 \\ 4\lambda_1 \qquad - 4\lambda_3 = 0 \end{array}\right. \xrightarrow{(2)} \left\{\begin{array}{l} \lambda_2 = -3\lambda_1 \\ \lambda_3 = \lambda_1 \end{array}\right.$$

(1) $E_2 \to E_2 - E_1$, $E_3 \to E_3 + E_1$. (2) La segunda ecuación y la tercera son equivalentes, por lo que se puede suprimir la tercera.

Como el sistema tiene infinitas soluciones, los vectores son linealmente dependientes, y en consecuencia (b) es falsa.

Por último, examinamos (c) usando la caracterización citada. De la ecuación

$$\lambda_1(2,-1,2) + \lambda_2(1,1,-1) + \lambda_3(1,4,3) = (0,0,0)$$

resulta el siguiente sistema que se resuelve

$$\left\{\begin{array}{r} 2\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0 \\ -\lambda_1+\lambda_2+4\lambda_3=0 \\ 2\lambda_1-\lambda_2+3\lambda_3=0 \end{array}\right. \xrightarrow{(1)} \left\{\begin{array}{rr} 2\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0 \\ -3\lambda_1 \qquad +3\lambda_3=0 \\ 4\lambda_1 \qquad +4\lambda_3=0 \end{array}\right. \xrightarrow{(2)} \left\{\begin{array}{r} 2\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0 \\ -\lambda_1 \qquad +\lambda_3=0 \\ 8\lambda_3=0 \end{array}\right.$$

$$\to \left\{\begin{array}{l} \lambda_2=0 \\ \lambda_1=0 \\ \lambda_3=0 \end{array}\right.$$

(1) $E_2 \to E_2 - E_1$, $E_3 \to E_3 + E_1$. (2) $E_2 \to E_2/3$, $E_3 \to E_3 + 4E_2/3$.

Como la única solución es $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 0$, se concluye que los vectores son linealmente independientes y por tanto, la opción (c) es correcta.

NOTA. Este ejercicio también puede resolverse hallando el rango de las matrices formadas con las componentes de los vectores, y los apartados (b) y (c) también calculando el determinante de los vectores de estos apartados.

3. Vamos a obtener una base de U. Despejando x_1 en la primera ecuación y x_4 de la segunda se tiene:

$$x_1 = x_2 - x_3, \quad x_4 = x_2 + 2x_3.$$

Por tanto, todo vector de U puede expresarse en la forma

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_2 - x_3, x_2, x_3, x_2 + 2x_3) = x_2(1, 1, 0, 1) + x_3(-1, 0, 1, 2).$$

De aquí se sigue que los vectores $(1, 1, 0, 1)$ y $(-1, 0, 1, 2)$ son generadores de U y como son linealmente independientes, se concluye que son base. En consecuencia la dimensión de U es 2. Así pues, (a) es falsa. Es fácil comprobar que (c) también es falsa ya que el vector $(2, 1, -1, 0)$ no verifica la segunda ecuación que define U.

Para verificar que (b) es cierta se comprueba (fácilmente) en primer lugar que los vectores $\bar{a}_0 = (0, 1, 1, 3)$ y $\bar{b}_0 = (2, 1, -1, -1)$ son elementos de U sin más que sustituir en las ecuaciones que definen U. Además, como son linealmente independientes (ya que no son proporcionales) y la dimensión de U es 2, se concluye que son base de U, y en consecuencia, (b) es verdadera.

4. Sea B la base canónica de $\mathbb{R}^3$, esto es $B = \{\bar{e}_1 = (1, 0, 0),\ \bar{e}_2 = (0, 1, 0),\ \bar{e}_3 = (0, 0, 1)\}$. Una forma de resolver el ejercicio es hallar las imágenes de estos vectores y expresarlas como combinación lineal de los vectores $\bar{v}_1, \bar{v}_2$ (base canónica de $\mathbb{R}^2$). Para hallar dichas imágenes hay que expresar los vectores $\bar{e}_i$ en función de los $\bar{u}_i$. Pero vamos a resolver el ejercicio usando la fórmula de la matriz de la composición de aplicaciones lineales que es fácil de recordar.

Consideremos el siguiente esquema (véanse las cuestiones teóricas 3.9 y 3.11):

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{Id} & \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^2 \\ \{\bar{e}_i\} & P & \{\bar{u}_i\} & A & \{\bar{v}_i\} \end{array} \quad \Rightarrow \quad M = M(f \circ Id) = A \cdot P,$$

siendo M la matriz de f en las bases $B = \{\bar{e}_i\}$ y $B_2 = \{\bar{v}_i\}$ y siendo P la matriz de la identidad en la bases $\{\bar{e}_i\}$, $\{\bar{u}_i\}$. Nótese que $Q = P^{-1}$ es la traspuesta de la matriz de las coordenadas de los vectores $\bar{u}_i$ en la base $\{\bar{e}_i\}$, esto es,

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Para obtener $P = Q^{-1}$ procederemos como en la nota del ejercicio 2.18 del libro de ejercicios, o sea, expresaremos los vectores $\bar{e}_i$ en función de los vectores $\bar{u}_i$ (es decir, como combinación lineal de los $\bar{u}_i$).

$$\left\{\begin{array}{rl} \bar{e}_1 \phantom{+\bar{e}_2} + \bar{e}_3 &= \bar{u}_1 \\ -\bar{e}_1 + \bar{e}_2 \phantom{+\bar{e}_3} &= \bar{u}_2 \\ \bar{e}_1 + \bar{e}_2 + \bar{e}_3 &= \bar{u}_3 \end{array}\right. \overset{(1)}{\rightarrow} \left\{\begin{array}{rl} \bar{e}_1 \phantom{+\bar{e}_2} + \bar{e}_3 &= \bar{u}_1 \\ \bar{e}_2 + \bar{e}_3 &= \bar{u}_1 + \bar{u}_2 \\ \bar{e}_2 \phantom{+\bar{e}_3} &= -\bar{u}_1 + \bar{u}_3 \end{array}\right. \overset{(2)}{\rightarrow} \left\{\begin{array}{rl} \bar{e}_1 \phantom{+\bar{e}_2} + \bar{e}_3 &= \bar{u}_1 \\ \bar{e}_3 &= 2\bar{u}_1 + \bar{u}_2 - \bar{u}_3 \\ \bar{e}_2 \phantom{+\bar{e}_3} &= -\bar{u}_1 + \bar{u}_3 \end{array}\right.$$

$$\overset{(3)}{\rightarrow} \left\{\begin{array}{l} \bar{e}_1 = -\bar{u}_1 - \bar{u}_2 + \bar{u}_3 \\ \bar{e}_2 = -\bar{u}_1 \phantom{- \bar{u}_2} + \bar{u}_3 \\ \bar{e}_3 = 2\bar{u}_1 + \bar{u}_2 - \bar{u}_3 \end{array}\right. \Rightarrow P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(1) $E_2 \to E_2 + E_1$, $E_3 \to E_3 - E_1$. (2) $E_2 \to E_2 - E_3$. (3) $E_1 \to E_1 - E_2$, $E_2 \leftrightarrow E_3$.

En consecuencia

$$M = AP = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & -5 & 12 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix},$$

y por consiguiente, la opción correcta es (a).

5. Vamos a proceder como en el ejercicio 3.27 del libro de ejercicios resueltos, determinando una diagonalización de la matriz A (si es posible).

El polinomio característico es

$$|A - tI| = \begin{vmatrix} -8-t & 10 \\ -6 & 8-t \end{vmatrix} = (-8-t)(8-t) + 60 = t^2 - 4.$$

Sus raíces son $t_1 = -2$ y $t = 2$. Como tiene 2 raíces, que es igual al orden de la matriz, se sigue que A es diagonalizable y una diagonalización es $D = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Se halla a continuación una matriz de paso calculando los subespacios propios.

El subespacio propio de $t_1 = -2$ se obtiene resolviendo la ecuación $(A - (-2)I)X = \bar{0}$, siendo $X = (x, y)^t$, de donde

$$\begin{pmatrix} -6 & 10 \\ -6 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} -6x + 10y = 0 \\ -6x + 10y = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 5\alpha \\ y = 3\alpha \end{array}\right.$$

Luego una base del subespacio propio asociado a -2 es $(5, 3)$.

El subespacio propio de $t_2 = 2$ se obtiene resolviendo la ecuación $(A - 2I)X = \bar{0}$, siendo $X = (x, y)^t$, de donde

$$\begin{pmatrix} -10 & 10 \\ -6 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{\begin{array}{r} -10x + 10y = 0 \\ -6x + 6y = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \alpha \\ y = \alpha \end{array}\right.$$

Luego una base del subespacio propio asociado a 2 es $(1, 1)$.

En consecuencia, la matriz de paso es $P = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, la cual verifica que $D = P^{-1}AP$. De aquí, $A = PDP^{-1}$, de donde se deduce que

$$A^{11} = PD^{11}P^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-2)^{11} & 0 \\ 0 & 2^{11} \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8192 & 10240 \\ -6144 & 8192 \end{pmatrix}.$$

Por consiguiente, el elemento $(2, 1)$ de A^{11} es -6144 y la respuesta correcta es (b).

6. Para calcular el límite, se divide numerador y denominador entre la exponencial de base mayor, esto es, entre 3^n y resulta

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+1}-2^n}{2^n+2\cdot 3^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3^{n+1}}{3^n}-\frac{2^n}{3^n}}{\frac{2^n}{3^n}+2\cdot\frac{3^n}{3^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{\left(\frac{2}{3}\right)^n+2\cdot 1} = \frac{3}{2}.$$

Por tanto, la respuesta correcta es (c).

7. En primer lugar se calculan los límites laterales de f en $x=0$:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^-} f(x) &= \lim_{x\to 0^-} x = 0, \\ \lim_{x\to 0^+} f(x) &= \lim_{x\to 0^+} \operatorname{sen} x = 0. \end{aligned}$$

Como $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0) = 0$, se sigue que f es continua en $x=0$ y, por tanto, (a) es falsa.

Para estudiar si es derivable, se hallan las derivadas laterales en $x=0$:

$$\begin{aligned} f'(0^-) &= \lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(h)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{h}{h} = 1, \\ f'(0^+) &= \lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(h)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\operatorname{sen} h}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\cos h}{1} = 1 \end{aligned}$$

(en el penúltimo signo igual se ha aplicado la regla de l'Hôpital). Como las derivadas laterales son iguales, se deduce que f es derivable en $x=0$ y la derivada en 0 vale 1: $f'(0)=1$. Por tanto, (b) es falsa. Para ver si (c) es cierta, hay que detrminar la función derivada de f y estudiar su continuidad. Se tiene

$$f'(x) = \begin{cases} \cos x & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x \le 0 \end{cases}$$

Nótese que como hemos probado previamente que $f'(0)=1$, se puede incluir $x=0$ en la última desigualdad $x \le 0$. Ahora es fácil ver que f' es una función continua ya que $g_1(x) = \cos x$ es continua en $\mathbb{R}$ (en particular, para $x>0$) y $g_2(x)=1$ es continua en $\mathbb{R}$ (en particular, para $x<0$) y se tiene $\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} f'(x) = f'(0) = 1$. Por tanto, f' es continua en $\mathbb{R}$ y, por consiguiente, (c) es falsa. Así pues, la opción correcta es (d).

8. El polinomio Mac Laurin de orden 4 es el polinomio de Taylor de orden 4 en $x=0$ y viene dado por

$$P_4(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{iv}(0)}{4!}x^4.$$

Haciendo los cálculos, se tiene (no se detalla el cálculo de las derivadas)

$$\begin{array}{ll} f(x) = e^{x^2}, & f(0)=1 \\ f'(x) = 2xe^{x^2}, & f'(0)=0 \\ f''(x) = (4x^2+2)e^{x^2}, & f''(0)=2 \\ f'''(x) = (8x^3+12x)e^{x^2}, & f'''(0)=0 \\ f^{iv}(x) = (16x^4+48x^2+12)e^{x^2}, & f^{iv}(0)=12. \end{array}$$

Por tanto, como $2! = 2$ y $4! = 24$, el polinomio Mac Laurin de orden 4 es

$$P_4(x) = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2},$$

y por consiguiente, es cierta (a).