FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS DE LAS TECNOLOGÍAS DE LA INFORMACIÓN

TEMA 4

Funciones de una variable

Equipo docente: Lidia Huerga y Vicente Novo

Ejercicio 1.

Sea $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$. Se pide:

(a) Determine $\operatorname{dom} f$,

(b) Calcule los puntos de corte de f con los ejes,

(c) Determine las asíntotas de f,

(d) Estudie los intervalos de monotonía de f,

(e) Determine los máximos y mínimos locales de f,

(f) Estudie los intervalos de convexidad/concavidad de f,

(g) Determine los puntos de inflexión de f.

(h) Con la información obtenida, represente gráficamente la función f.

Ejercicio 1.

Solución. (a) Se tiene que $x^2 - 1 = 0$ si y sólo si $x = \pm 1$, luego

$$\mathrm{dom}\, f = \mathbb{R} \backslash \{-1, 1\}.$$

(b)

- Puntos de corte con el eje x (hay que resolver la ecuación $f(x) = 0$)

$$f(x) = 0 \Longleftrightarrow x^3 = 0 \Longleftrightarrow x = 0.$$

  $\Longrightarrow P = (0, 0)$.
- Puntos de corte con el eje y (sustituir x por 0)
  Se tiene que $f(0) = 0$, y se obtiene de nuevo el punto P.

Ejercicio 1.

Solución. (c)

- Posibles asíntotas verticales $x = -1$ y $x = 1$. Efectivamente:

$$\lim_{x \to -1^-} \frac{x^3}{x^2 - 1} = \frac{(-1)^3}{0^+} = -\infty, \quad \lim_{x \to -1^+} \frac{x^3}{x^2 - 1} = \frac{(-1)^3}{0^-} = +\infty,$$
$$\lim_{x \to 1^-} \frac{x^3}{x^2 - 1} = \frac{1^3}{0^-} = -\infty, \quad \lim_{x \to 1^+} \frac{x^3}{x^2 - 1} = \frac{1^3}{0^+} = +\infty.$$

- No hay asíntotas horizontales:

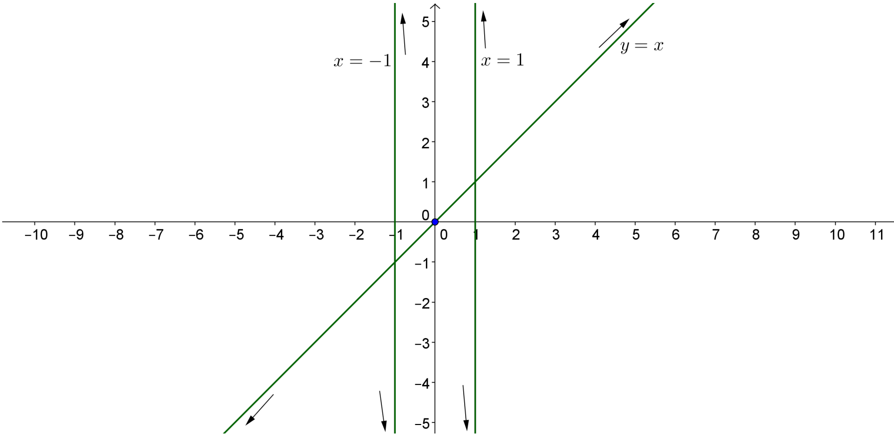
$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^3}{x^2 - 1} = -\infty, \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3}{x^2 - 1} = +\infty.$$

- Asíntotas oblicuas $y = mx + n$:

$$m : \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^3}{x^3 - x} = 1,$$
$$n : \lim_{x \to -\infty} (f(x) - 1 \cdot x) = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{x^3 - x^3 + x}{x^2 - 1} \right) = 0.$$

$\Rightarrow y = x$ asíntota oblicua cuando $x \to -\infty$. Mismo resultado cuando $x \to +\infty$.

Ejercicio 1.

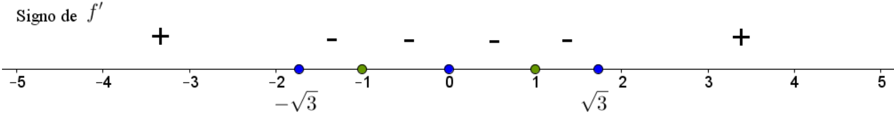


Ejercicio 1.

Solución. (d)-(e) Puntos críticos de f:

$$f'(x) = \frac{3x^2(x^2-1) - x^3 \cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{x^4 - 3x^2}{(x^2-1)^2}.$$

$f'(x) = 0 \iff x^4 - 3x^2 = 0 \iff x^2(x^2-3) = 0 \iff x = 0, x = \pm\sqrt{3}.$



- $f'(x) > 0$ en $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$

$\Rightarrow f$ estrictamente creciente en $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$,

- $f'(x) < 0$ en $(-\sqrt{3}, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, 1) \cup (1, \sqrt{3})$

$\Rightarrow f$ estrictamente decreciente en
$(-\sqrt{3}, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, 1) \cup (1, \sqrt{3})$,

- máximo local en $x = -\sqrt{3}$,
- mínimo local en $x = \sqrt{3}$.

Ejercicio 1.

Solución. (f)-(g) Posibles puntos de inflexión de f:

$$f''(x) = \frac{2x^3 + 6x}{(x^2-1)^3}.$$

$$f''(x) = 0 \Longleftrightarrow 2x^3 + 6x = 0 \Longleftrightarrow 2x(x^2+3) = 0 \Longleftrightarrow x = 0.$$

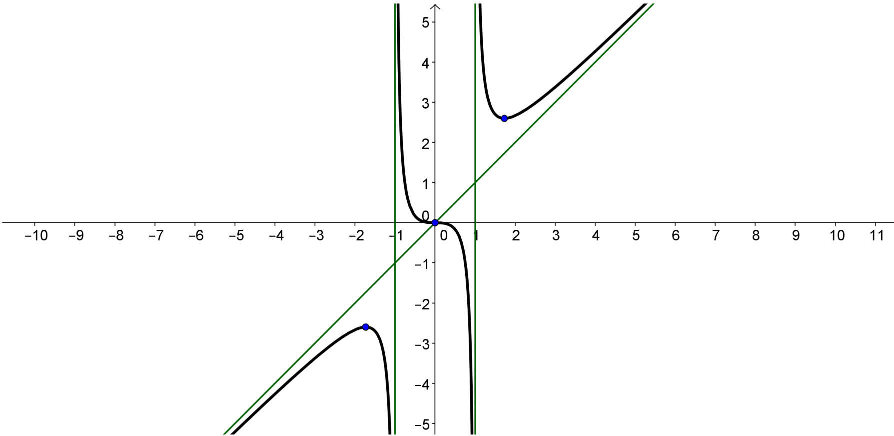
• $f''(x) > 0$ en $(-1,0) \cup (1,+\infty)$,
$\Rightarrow f$ convexa en $(-1,0)$ y $(1,+\infty)$,

• $f''(x) < 0$ en $(-\infty,-1) \cup (0,1)$
$\Rightarrow f$ cóncava en $(-\infty,-1)$ y $(0,1)$,

• punto de inflexión en $x = 0$.

Ejercicio 1.

Solución. (h)



Ejercicio 1.