FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS DE LAS TTII
Integración. Prueba de autoevaluación número 6 (**PAE-6**)

1. Obténgase la integral indefinida de las siguientes funciones:

(a) $f(x) = \arctan x$,

(b) $g(x) = \dfrac{2x+6}{x^3 + x - 2x^2 - 2}$,

(c) $h(x) = \dfrac{1}{\sqrt{8x - x^2 - 7}}$,

(d) $j(x) = \dfrac{1}{1+\cos x}$.

2. Hállese el valor de $a > 0$ de forma que el área comprendida entre las gráficas de las funciones $f(x) = \dfrac{a}{x}$ y $g(x) = 1 - \dfrac{a}{x}$ en el intervalo $[a, 3a]$ sea igual a $\ln \dfrac{4}{3}$.

3. Calcúlese $\displaystyle\iint_D \frac{\arctan \frac{y}{x}}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dx\, dy$, donde $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 16, 0 \leq x \leq y\}$.

4. Determínese el volumen $V(t)$ del sólido de revolución generado al girar la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{e^x + e^{-x}}}$ con $0 \leq x \leq t$ sobre el eje X y razónese por qué su valor es inferior a $\dfrac{\pi^2}{4}$ para cualquier $t > 0$.

5. Considérese la función $f\colon (0,+\infty) \to (0,+\infty)$ dada por $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

(a) Calcúlese $\displaystyle\int_1^2 f(x)\, dx$.

(b) A partir del resultado anterior, obténgase una aproximación de $\ln 2$ aplicando la fórmula de los trapecios con 8 divisiones del intervalo de integración.

(c) A partir del resultado del apartado (a), obténgase otra aproximación de $\ln 2$ aplicando la fórmula de Simpson con 4 divisiones del intervalo de integración.

6. Obténgase la derivada de las siguientes funciones:

(a) $F(x) = \displaystyle\int_0^x e^{t^2} dt$,

(b) $G(x) = \displaystyle\int_0^{\operatorname{sen} x} e^{t^2} dt$.

SOLUCIONES. Prueba de autoevaluación núm. 6 (PAE-6).

1. (a) Esta integral se resuelve por el método de integración por partes. Sea $u = \arctan x$ y $dv = dx$. Se tiene que $du = \frac{1}{1+x^2}dx$ y $v = x$. Entonces

$$\begin{aligned}\int \arctan x dx &= x\arctan x - \int \frac{x}{1+x^2}dx\\ &= x\arctan x - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}dx\\ &= x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C.\end{aligned}$$

(b) En primer lugar, expresaremos el denominador $x^3 - 2x^2 + x - 2$ como producto de factores de grado 1 o de grado 2. Por medio de la regla de Ruffini,

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -2 & 1 & -2\\ 2 & & 2 & 0 & 2\\ \hline & 1 & 0 & 1 & 0\end{array}$$

se obtiene que $x^3 - 2x^2 + x - 2 = (x-2)(x^2+1)$. A continuación, utilizaremos el método de descomposición en suma de fracciones simples,

$$\begin{aligned}\frac{2x+6}{x^3-2x^2+x-2} &= \frac{A}{x-2} + \frac{Mx+N}{x^2+1} = \frac{A(x^2+1)+(Mx+N)(x-2)}{(x-2)(x^2+1)}\\ &= \frac{(A+M)x^2+(N-2M)x+A-2N}{(x-2)(x^2+1)},\end{aligned}$$

de donde se obtienen los valores A, M y N igualando los coeficientes de los términos de igual grado de los polinomios de los numeradores, resultando el siguiente sistema lineal de 3 ecuaciones con 3 incógnitas:

$$\left\{\begin{aligned} A+M &= 0,\\ N-2M &= 2,\\ A-2N &= 6.\end{aligned}\right.$$

La solución de este sistema es $A = 2$, $M = -2$, $N = -2$. En consecuencia,

$$\begin{aligned}\int \frac{2x+6}{x^3+x-2x^2-2}dx &= \int \frac{2}{x-2}dx + \int \frac{-2x-2}{x^2+1}dx\\ &= 2\int \frac{1}{x-2}dx - \int \frac{2x}{x^2+1}dx - 2\int \frac{1}{x^2+1}dx\\ &= 2\ln|x-2| - \ln(x^2+1) - 2\arctan x + C.\end{aligned}$$

(c) Para resolver esta integral, convertiremos el integrando $h(x)$ en una expresión del tipo $\dfrac{u'(x)}{\sqrt{1-u(x)^2}} = \dfrac{d}{dx}\operatorname{arc\,sen} u(x)$. Se tiene que $8x - x^2 - 7 = -(x-4)^2 + 16 - 7 = 9 - (x-4)^2$. Por tanto,

$$\int \frac{1}{\sqrt{8x-x^2-7}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{9-(x-4)^2}}dx = \int \frac{1}{3\sqrt{1-\left(\frac{x-4}{3}\right)^2}}dx = \operatorname{arc\,sen}\left(\frac{x-4}{3}\right) + C.$$

(d) Puede observarse que $j(x)$ es una función trigonométrica racional. Sin embargo, ni es par en $\cos x$ y en $\operatorname{sen} x$ (nótese que como la expresión $j(x)$ no contiene a $\operatorname{sen} x$, se tiene que este último no afecta a la paridad), ni es impar en $\cos x$ o en $\operatorname{sen} x$, por lo que usaremos el cambio de variable general $t = \tan \frac{x}{2}$. Es conocido que $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ y $dx = \frac{2}{1+t^2} dt$. Por tanto,

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{1+\cos x} dx &= \int \frac{1}{1+\frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt = \int \frac{2}{1+t^2+1-t^2} dt \\
&= \int dt = t + C = \tan \frac{x}{2} + C.
\end{aligned}$$

2. El recinto limitado por las hipérbolas $f(x) = \frac{a}{x}$ y $g(x) = 1 - \frac{a}{x}$ se muestra en la Figura 1. Para obtener los puntos de corte de las dos hipérbolas se resuelve el sistema formado

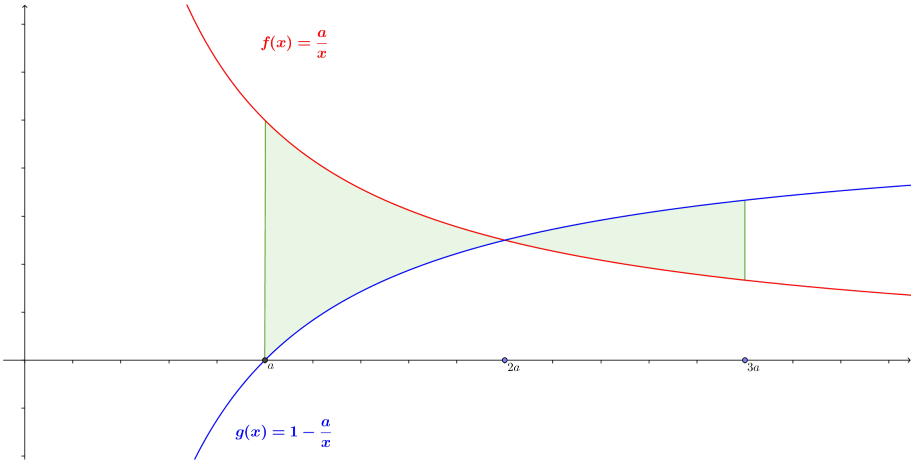

Figura 1: Recinto limitado por las hipérbolas $f(x) = \frac{a}{x}$ y $g(x) = 1 - \frac{a}{x}$ en $[a, 3a]$.

por sus ecuaciones y se tiene que

$$\frac{a}{x} = 1 - \frac{a}{x}, \;\; a = x - a, \;\; x = 2a.$$

Luego las hipérbolas se cortan en un único punto, $\left(2a, \frac{1}{2}\right)$. Para calcular el área comprendida ente las gráficas de f y g, debe tenerse en cuenta que, entre a y $2a$, la gráfica de f se encuentra por encima de la de g y, entre $2a$ y $3a$, la de g se encuentra por encima de la de f. Por tanto,

$$
\begin{aligned}
\text{Área} &= \int_a^{2a} (f(x) - g(x))\, dx + \int_{2a}^{3a} (g(x) - f(x))\, dx \\
&= \int_a^{2a} \left(\frac{2a}{x} - 1 \right) dx + \int_{2a}^{3a} \left(1 - \frac{2a}{x} \right) dx \\
&= \Big[2a \ln x - x \Big]_a^{2a} + \Big[x - 2a \ln x \Big]_{2a}^{3a} \\
&= [2a \ln(2a) - 2a - 2a \ln a + a] + [3a - 2a \ln(3a) - 2a + 2a \ln(2a)] \\
&= 2a(\ln(2a) - \ln a - \ln(3a) + \ln(2a)) \\
&= 2a \ln \frac{4}{3}.
\end{aligned}
$$

Por consiguiente, el valor pedido es $a = \dfrac{1}{2}$.

3. El dominio de integración D se muestra en la Figura 2.

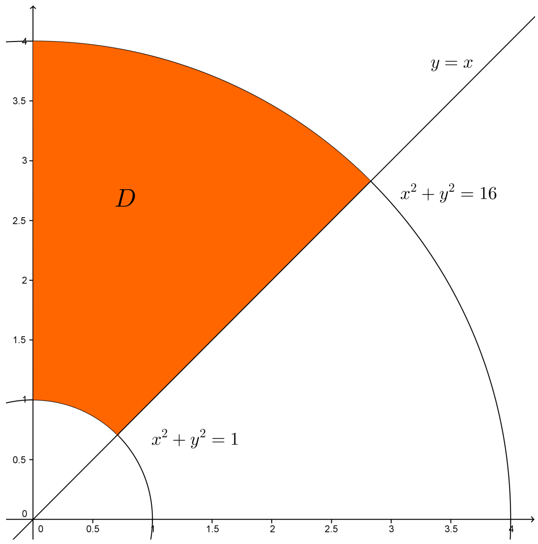

Figura 2: Dominio de integración D.

Si se observa D, resulta conveniente hacer un cambio a coordenadas polares. Sean $x = \rho \cos\theta$ e $y = \rho \operatorname{sen}\theta$ con $\rho > 0$ y $\theta \in [0, 2\pi]$. Se tiene que

$$
x^2 + y^2 = \rho^2(\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta) = \rho^2,
$$

$$
\arctan \frac{y}{x} = \arctan\left(\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} \right) = \arctan(\tan\theta) = \theta.
$$

Puesto que el dominio de integración oscila entre las circunferencias de radio 1 y 4, se tiene que $1 \leq \rho \leq 4$ y como las rectas $y = x$ y $x = 0$ forman ángulos de $\dfrac{\pi}{4}$ y $\dfrac{\pi}{2}$ con el eje X, respectivamente, se tiene que $\dfrac{\pi}{4} \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2}$. Por tanto,

$$
\begin{aligned}
\iint_D \frac{\arctan \frac{y}{x}}{\sqrt{x^2 + y^2}}\, dx\, dy &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \int_1^4 \frac{\theta}{\rho} \rho d\rho d\theta = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \theta \Big[\rho \Big]_1^4 d\theta = 3 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \theta d\theta \\
&= 3 \left[\frac{\theta^2}{2} \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{9\pi^2}{32}.
\end{aligned}
$$

4. El volumen del sólido viene dado por

$$\begin{aligned} V(t) &= \pi \int_0^t \left(\frac{1}{\sqrt{e^x + e^{-x}}} \right)^2 dx = \pi \int_0^t \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx \\ &= \pi \int_0^t \frac{1}{e^x + \frac{1}{e^x}} dx = \pi \int_0^t \frac{1}{\frac{(e^x)^2+1}{e^x}} dx = \pi \int_0^t \frac{e^x}{(e^x)^2 + 1} dx \\ &= \pi \Big[\arctan(e^x) \Big]_0^t = \pi \arctan(e^t) - \frac{\pi^2}{4}. \end{aligned}$$

Como $V(t)$ es una función estrictamente creciente (porque $V'(t) = \pi \dfrac{e^t}{1+e^{2t}} > 0$, para todo $t > 0$) y $\lim\limits_{t \to +\infty} V(t) = \pi \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi^2}{4} = \dfrac{\pi^2}{4}$, entonces $V(t) < \dfrac{\pi^2}{4}$ para todo $t > 0$.

El sólido de revolución es el representado en la Figura 3 con $t = 8$. Para representarlo con Maxima, el comando es

```
plot3d([x,(1/sqrt(exp(x)+exp(-x)))*cos(u),(1/sqrt(exp(x)+exp(-x)))
*sin(u)],[x,0,8],[u,0,2*%pi]);
```

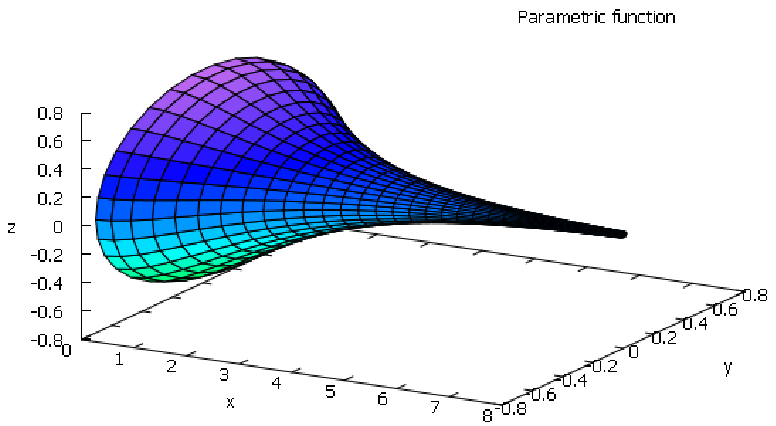

Figura 3: Sólido de revolución.

5. (a) Esta integral es inmediata:

$$\int_1^2 \frac{1}{x} dx = \Big[\ln x \Big]_1^2 = \ln 2.$$

Con el comando de Maxima `float(log(2));` se puede obtener la aproximación

$$\ln(2) \simeq 0{,}6931.$$

(b) Para aplicar la fórmula de los trapecios, dividimos el intervalo $[1,2]$ en 8 subintervalos de longitud $h := \dfrac{2-1}{8} = \dfrac{1}{8} = 0{,}125$. Evaluaremos f en los puntos extremos de estos subintervalos, que son: $x_0 = 1$, $x_2 = 1{,}125$, $x_3 = 1{,}25$, $x_4 = 1{,}375$, $\ldots$, $x_8 = 2$. Por tanto,

$$\begin{aligned}\ln 2 = \int_1^2 f(x)dx \simeq \frac{0{,}125}{2}\,&[f(1) + 2f\,(1{,}125) + 2f\,(1{,}25) + 2f\,(1{,}375) + 2f\,(1{,}5)\\ &+ 2f\,(1{,}625) + 2f\,(1{,}75) + 2f\,(1{,}875) + f\,(2)] = 0{,}0625\,[1 + 1{,}7778\\ &+ 1{,}6 + 1{,}4555 + 1{,}3333 + 1{,}2308 + 1{,}1429 + 1{,}0667 + 0{,}5] = 0{,}6942.\end{aligned}$$

(c) Para aplicar la fórmula de Simpson, dividimos el intervalo $[1,2]$ en 4 subintervalos de longitud $h = \dfrac{2-1}{4} = \dfrac{1}{4} = 0{,}25$ y se evaluará f en los extremos de estos subintervalos y los puntos medios de cada uno de ellos, que son: $x_0 = 1$, $x_2 = 1{,}125$, $x_3 = 1{,}25$, $x_4 = 1{,}375$, $\ldots$, $x_8 = 2$. Por tanto,

$$\begin{aligned}\ln 2 = \int_1^2 f(x)dx \simeq \frac{0{,}25}{6}\,&[f(1) + 4f\,(1{,}125) + 2f\,(1{,}25) + 4f\,(1{,}375) + 2f\,(1{,}5)\\ &+ 4f\,(1{,}625) + 2f\,(1{,}75) + 4f\,(1{,}875) + f\,(2)] \simeq 0{,}0417\,[1 + 3{,}5556\\ &+ 1{,}6 + 2{,}9091 + 1{,}3333 + 2{,}4615 + 1{,}1429 + 2{,}1333 + 0{,}5] = 0{,}6937.\end{aligned}$$

6. (a) Se aplica el Teorema Fundamental del Cálculo y se tiene directamente que

$$F'(x) = e^{x^2}.$$

(b) Nótese que $G(x) = F(\operatorname{sen} x)$. Se aplica la regla de la cadena y se obtiene

$$G'(x) = F'(\operatorname{sen} x) \cdot \cos x = e^{\operatorname{sen}^2 x} \cos x.$$