FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS DE LAS TECNOLOGÍAS DE LA INFORMACIÓN

TEMA 2

Espacios vectoriales

Equipo docente: Lidia Huerga y Vicente Novo

Ejercicio 1

Estudie si los siguientes conjuntos son subespacios vectoriales:

(a) $S = \{A \in \mathcal{M}_n : A = A^t\}$,
(b) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y = 0\} \cup \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0\}$.

Solución. (a) S es subespacio vectorial.
Sean $A_1, A_2 \in S$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Se tiene que

$$(\lambda A_1 + \mu A_2)^t = (\lambda A_1)^t + (\mu A_2)^t = \lambda A_1^t + \mu A_2^t = \lambda A_1 + \mu A_2 \\ \Longrightarrow \lambda A_1 + \mu A_2 \in S.$$

(b)

- $S_1 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y = 0\}$ y $S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0\}$ son subespacios vectoriales (planos que pasan por el origen $(0, 0, 0)$),
- pero $S = S_1 \cup S_2$ no es subespacio vectorial. Contraejemplo: $(1, -1, 2) \in S$, $(1, 1, 0) \in S$, pero $(1, -1, 2) + (1, 1, 0) = (2, 0, 2) \notin S$.

Ejercicio 2

(*a*) Determine el valor de $k \in \mathbb{R}$ para que exista una matriz cuadrada no nula M tal que $AM = \mathbf{0}$, donde
$A = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 1 & k \end{pmatrix}$.

(*b*) Sea $S = \{M \in \mathcal{M}_2 : AM = \mathbf{0}\}$. Pruebe que S es un subespacio vectorial para el valor de k obtenido en el apartado anterior, y determine una base de S y su dimensión.

Solución. (*a*) Denotamos $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} AM = \mathbf{0} \quad &\Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 1 & k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} -a+4c & -b+4d \\ a+kc & b+kd \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ejercicio 2

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} -a+4c &= 0 \\ a+kc &= 0 \\ -b+4d &= 0 \\ b+kd &= 0 \end{cases}$$

De la primera y segunda ecuaciones $(4+k)c = 0$.
Caso 1. Si $k = -4$, entonces el sistema es equivalente a

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} -a+4c &= 0 \\ -b+4d &= 0 \end{cases}$$

luego $M = \begin{pmatrix} 4c & 4d \\ c & d \end{pmatrix}$, con $c, d \in \mathbb{R}$, satisface $AM = \mathbf{0}$.
Caso 2. Si $c = 0$, entonces $a = 0$ y de la tercera y cuarta ecuaciones $(4+k)d = 0$.
Caso 2.1. Si $k = -4$, entonces $M = \begin{pmatrix} 0 & 4d \\ 0 & d \end{pmatrix}$, con $d \in \mathbb{R}$ (caso particular del Caso 1).
Caso 2.2. Si $d = 0$, entonces $M = \mathbf{0}$.

$$\Longrightarrow k = -4.$$

Ejercicio 2

$$\Longrightarrow S = \{M \in \mathcal{M}_2 : AM = \mathbf{0}\} = \left\{ \begin{pmatrix} 4\alpha & 4\beta \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}.$$

b) S es subespacio vectorial:

Sean $M_1 = \begin{pmatrix} 4\alpha_1 & 4\beta_1 \\ \alpha_1 & \beta_1 \end{pmatrix}, M_2 = \begin{pmatrix} 4\alpha_2 & 4\beta_2 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{pmatrix} \in S$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \lambda M_1 + \mu M_2 &= \lambda \begin{pmatrix} 4\alpha_1 & 4\beta_1 \\ \alpha_1 & \beta_1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 4\alpha_2 & 4\beta_2 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4(\lambda\alpha_1 + \mu\alpha_2) & 4(\lambda\beta_1 + \mu\beta_2) \\ \lambda\alpha_1 + \mu\alpha_2 & \lambda\beta_1 + \mu\beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\alpha' & 4\beta' \\ \alpha' & \beta' \end{pmatrix} \in S, \end{aligned}$$

$$\alpha' = \lambda\alpha_1 + \mu\alpha_2, \qquad \beta' = \lambda\beta_1 + \mu\beta_2.$$

Ejercicio 2

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

es una base de S. En efecto,

- B es sistema de generadores: Sea $M = \begin{pmatrix} 4\alpha & 4\beta \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} \in S$. Se tiene que $M = \alpha \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- Los elementos de B son linealmente independientes: Si $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ verifican

  $$\lambda_1 \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\lambda_1 & 4\lambda_2 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

  entonces $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

Por tanto, B es base de S y $\dim(S) = 2$.

Ejercicio 3

(a) Determine las ecuaciones paramétricas e implícitas y una base del subespacio S_1 de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores $\bar{u} = (1, 2, 0, 1)$, $\bar{v} = (-1, 0, 3, 4)$ y $\bar{w} = (0, 0, 0, 1)$.

(b) Determine las ecuaciones paramétricas y una base del subespacio S_2 de $\mathbb{R}^4$ de ecuaciones implícitas

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 0 \\ \qquad x_2 + 2x_3 - x_4 &= 0 \end{cases}$$

Solución. (a) Por definición, $\{\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}\}$ es un sistema de generadores. Veamos si $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ son linealmente independientes.

$$rang \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3, \text{ pues } \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 6 \neq 0.$$

Luego $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ son linealmente independientes y, por tanto, $\{\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}\}$ es base de S_1, y $\dim(S_1) = 3$.

Ejercicio 3 Todo vector $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in S_1$ se representa como

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = \lambda_1(1, 2, 0, 1) + \lambda_2(-1, 0, 3, 4) + \lambda_3(0, 0, 0, 1),$$

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$.

- Ecuaciones paramétricas de S_1:

$$\left\{\begin{array}{ll} x_1 & = \lambda_1 - \lambda_2 \\ x_2 & = 2\lambda_1 \\ x_3 & = 3\lambda_2 \\ x_4 & = \lambda_1 + 4\lambda_2 + \lambda_3 \end{array}\right. , \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}.$$

- Ecuaciones implícitas de S_1: Como $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in S_1$ se expresa como combinación lineal de $\bar{u}$, $\bar{v}$ y $\bar{w}$, entonces $\bar{x}$, $\bar{u}$, $\bar{v}$ y $\bar{w}$ son linealmente dependientes, es decir,

$$rang \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3 \Longleftrightarrow \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad 6x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0 \text{ (ec. implícita de } S_1).$$

Ejercicio 3

(*b*) S_2 viene dado por las ecuaciones implícitas

$$\left\{ \begin{array}{rl} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 & = 0 \\ x_2 + 2x_3 - x_4 & = 0 \end{array} \right.$$

La matriz ampliada que representa al sistema es

$$A^* = \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \end{array} \right),$$

$\Longrightarrow rang(A) = rang(A^*) = 2 < 4 =$nº incógnitas. El sistema es C.I., y sus soluciones se expresan en función de 4-2=2 parámetros. Elegimos como parámetros x_3 y x_4: $x_3 = \lambda$, $x_4 = \mu$. Entonces,

$$\left\{ \begin{array}{ll} x_1 & = 3\lambda - 2\mu \\ x_2 & = -2\lambda + \mu \\ x_3 & = \lambda \\ x_4 & = \mu \end{array} \right. , \lambda, \mu \in \mathbb{R} \text{ (ecuaciones paramétricas)}$$

Base de S_2: $\{(3, -2, 1, 0), (-2, 1, 0, 1)\}$, $\dim(S_2) = 2$.

Ejercicio 4

En $\mathbb{R}^4$ se consideran de nuevo los subespacios S_1 y S_2 del ejercicio anterior. Determine una base y dimensión de $S_1 \cap S_2$ y $S_1 + S_2$.

Solución. Base de $S_1 \cap S_2$:

- <u>Método 1.</u> Concatenamos las ecuaciones implícitas de S_1 y S_2:

$$\left\{ \begin{array}{rl} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 & = 0 \\ x_2 + 2x_3 - x_4 & = 0 \\ 6x_1 - 3x_2 + 2x_3 & = 0 \end{array} \right.$$

Obtenemos una matriz escalonada equivalente a la matriz ampliada del sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 6 & -3 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{(1)}{\rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -9 & 8 & -6 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\overset{(2)}{\rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 26 & -15 & 0 \end{pmatrix}$$

(1) $F_3 \rightarrow F_3 - 6F_1$, $F_3 \rightarrow F_3 + 9F_2$.

Ejercicio 4

Por tanto, $rang(A) = rang(A^*) = 3 < 4 =$nº incógnitas. Se trata de un sistema C.I. cuyas soluciones se expresan en función de $4 - 3 = 1$ parámetro. El sistema es equivalente a

$$\left\{ \begin{array}{rl} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 & = 0 \\ x_2 + 2x_3 - x_4 & = 0 \\ 26x_3 - 15x_4 & = 0 \end{array} \right.$$

Eligiendo como parámetro x_4, las ecuaciones paramétricas de $S_1 \cap S_2$ son

$$\left\{ \begin{array}{rl} x_1 = -x_2 + x_3 - x_4 & = -\frac{7}{26}\lambda \\ x_2 = -2x_3 + x_4 & = -\frac{4}{26}\lambda \\ x_3 & = \frac{15}{26}\lambda \\ x_4 & = \lambda \end{array} \right. , \lambda \in \mathbb{R}$$

Base de $S_1 \cap S_2$: $\{(-7, -4, 15, 26)\}$, $\dim(S_1 \cap S_2) = 1$.

Ejercicio 4

- <u>Método 2.</u> Sustituimos las ecuaciones paramétricas de un subespacio en las implícitas del otro.
  Ecuación implícita de S_1: $6x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0$.
  Ecuaciones paramétricas de S_2:

$$\left\{\begin{array}{ll} x_1 & = 3\lambda - 2\mu \\ x_2 & = -2\lambda + \mu \\ x_3 & = \lambda \\ x_4 & = \mu \end{array}\right. , \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Sustituyendo,

$$6(3\lambda - 2\mu) - 3(-2\lambda + \mu) + 2\lambda = 0 \Longleftrightarrow 26\lambda - 15\mu = 0 \Longleftrightarrow \lambda = \frac{15}{26}\mu.$$

Por tanto,

$$\left\{\begin{array}{ll} x_1 & = -\frac{7}{26}\mu \\ x_2 & = -\frac{4}{26}\mu \\ x_3 & = \frac{15}{26}\mu \\ x_4 & = \mu \end{array}\right. , \mu \in \mathbb{R}. \Rightarrow \text{Base de } S_1 \cap S_2 : \{(-7, -4, 15, 26)\}.$$

Ejercicio 4

Finalmente, por la fórmula de Grassmann:

$$\dim(S_1+S_2)=\dim(S_1)+\dim(S_2)-\dim(S_1\cap S_2)=3+2-1=4,$$

por tanto, $S_1+S_2=\mathbb{R}^4$. $\mathbb{R}^4$ no es suma directa de S_1 y S_2, pues

$S_1\cap S_2\neq\{(0,0,0,0)\}$, por tanto, S_1 no es subespacio suplementario de S_2.

Ejercicio 5

Se considera en $\mathbb{R}^3$ la base canónica
$C = \{\bar{e}_1 = (1,0,0), \bar{e}_2 = (0,1,0), \bar{e}_3 = (0,0,1)\}$, y la base
$A = \{\bar{u}_1 = (1,-1,0), \bar{u}_2 = (2,1,0), \bar{u}_3 = (0,1,-1)\}$.

(a) Si las coordenadas del vector $\bar{v}$ en la base A son $(1,1,1)$, es decir, $\bar{v}_A = (1,1,1)$, determine las coordenadas de $\bar{v}$ en la base canónica.

(b) Si las coordenadas del vector $\bar{w}$ en la base canónica son $(-1,0,1)$, es decir, $\bar{w}_C = (-1,0,1)$, determine sus coordenadas en la base A.

Solución. En primer lugar, comprobamos que A es efectivamente una base de $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0.$$

Ejercicio 5

(a) La matriz de cambio de la base A a la canónica C viene dada por aquélla cuyas columnas son los vectores de A:

$$P = M_{A\to C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Por tanto, como $\bar{v}_A = (1,1,1)$, sus coordenadas en la base canónica son

$$\bar{v}_C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 5

(b) La matriz de cambio de la base canónica a la base A es P^{-1}:

$$P^{-1} = M_{C\to A} = \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & -2/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Por tanto, como $\bar{w}_C = (-1, 0, 1)$, sus coordenadas en la base A son

$$\bar{w}_A = \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & -2/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Otra forma de proceder: Se buscan las coordenadas $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ de $\bar{w}$ en A, luego se trata de resolver el sistema:

$$(-1, 0, 1) = \lambda_1(1, -1, 0) + \lambda_2(2, 1, 0) + \lambda_3(0, 1, -1)$$

Ejercicio 5

Es decir,

$$\left\{ \begin{array}{rl} \lambda_1 + 2\lambda_2 & = -1 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 & = 0 \\ -\lambda_3 & = 1 \end{array} \right.$$

La representación matricial del sistema viene dada por

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

es decir,

$$P \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ luego } \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$