FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS DE LAS TTII. Cód. 71021023
Grado en Ingeniería de las Tecnologías de la Información
Segunda semana de Febrero de 2015. Tiempo: 2 horas

INSTRUCCIONES. Cada una de las preguntas tiene un valor máximo de 2 puntos. Sólo está permitido una calculadora no programable.

1. En $\mathbb{R}^4$ se considera el subespacio vectorial U definido por

$$U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : \; x_1 - 2x_2 + x_4 = 0, \; x_2 - x_3 - 2x_4 = 0, \; 2x_1 - 3x_2 - x_3 = 0\}.$$

(a) Encuentre una base de U e indique su dimensión. *(1 punto)*

(b) Defina qué es el subespacio suplementario de un subespacio vectorial y determine un subespacio suplementario, indicando una base, del subespacio U anterior. *(1 punto)*

2. Estudie si es diagonalizable la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 4 \\ -1 & -2 & -5 \end{pmatrix}.$$

En caso afirmativo, encuentre una diagonalización y una matriz de paso. *(2 puntos)*

3. (a) Estudie la monotonía y la acotación de la sucesión

$$a_n = \frac{2n}{n+1}.$$

¿Qué se puede decir de su convergencia? *(1 punto)*

(b) Estudie si es derivable en $x = 1$ la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \leq 1 \\ 2 + \ln x & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

(1 punto)

4. Obtenga y clasifique los extremos relativos de la función

$$f(x, y) = x^2 + 2y^2 + xy^2.$$

(2 puntos)

5. Calcule la integral

$$\int\int_D x^2 y dx dy,$$

donde D es la región del plano definida por

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, \; y \geq 0\}.$$

(2 puntos)

SOLUCIONES. FMTI. Segunda semana de Febrero de 2015.

1. (a) Se resuelve el sistema que define al subespacio U:

$$\left\{\begin{array}{rl} x_1 - 2x_2 \qquad + x_4 &= 0 \\ x_2 - x_3 - 2x_4 &= 0 \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 \qquad &= 0 \end{array}\right. \overset{(1)}{\to} \left\{\begin{array}{rl} x_1 - 2x_2 \qquad + x_4 &= 0 \\ x_2 - x_3 - 2x_4 &= 0 \\ x_2 - x_3 - 2x_4 &= 0 \end{array}\right. \overset{(2)}{\to} \left\{\begin{array}{rl} x_1 - 2x_2 \qquad + x_4 &= 0 \\ x_2 - x_3 - 2x_4 &= 0 \end{array}\right.$$

$$\overset{(3)}{\to} \left\{\begin{array}{l} x_1 = 2x_2 - x_4 \\ x_3 = x_2 - 2x_4 \end{array}\right.$$

(1) $E_3 \to E_3 - 2E_1$. (2) Se suprime E_3. (3) Se despejan x_1, x_3 en función de x_2, x_4.

Por tanto, los vectores de U son todos los de la forma

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2x_2 - x_4, x_2, x_2 - 2x_4, x_4) = x_2(2, 1, 1, 0) + x_4(-1, 0, -2, 1),$$

y en consecuencia, una base de U es $\{(2, 1, 1, 0),\ (-1, 0, -2, 1)\}$ ya que es sistema de generadores y son, claramente, linealmente independientes. Así pues, la dimensión de U es 2.

(b) Un subespacio suplementario de U es cualquier subespacio V tal que la suma de U con V es directa y se obtiene el espacio total E, es decir, $U \oplus V = E$.

Si colocamos los vectores de la base de U en una matriz (empezando por el 2º)

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

se observa que es escalonada de derecha a izquierda. Por eso, si añadimos los vectores $(0, 1, 0, 0)$ y $(1, 0, 0, 0)$ se obtiene una matriz escalonada de derecha a izquierda con todas sus filas no nulas, por consiguiente, de rango 4. Los 4 vectores son linealmente independientes, y un subespacio suplementario de U es $V = \langle(0, 1, 0, 0), (1, 0, 0, 0)\rangle$.

2. El polinomio característico es

$$p_A(t) = |A - tI| = \begin{vmatrix} -3-t & -2 & -3 \\ 0 & -t & 4 \\ -1 & -2 & -5-t \end{vmatrix} = (-3-t)(-t)(-5-t) + 8 + 3t + 8(-3-t)$$
$$= -t^3 - 8t^2 - 20t - 16.$$

Para hallar una de las raíces de este polinomio, lo intentamos con los divisores del término independiente, que son ±1, ±2, ±4, ±8 y ±16. Ninguno de los números positivos puede ser raíz porque todos los coeficientes del polinomio son negativos. Probando con los negativos:

$$p_A(-1) = -(-1)^3 - 8(-1)^2 - 20(-1) - 16 \neq 0,$$
$$p_A(-2) = -(-2)^3 - 8(-2)^2 - 20(-2) - 16 = 8 - 32 + 40 - 16 = 0.$$

Con la raíz $t = -2$ nos vale para seguir. Dividimos $p_A(t)$ entre $t + 2$ aplicando la Regla de Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrr} & -1 & -8 & -20 & -16 \\ -2 & & 2 & 12 & 16 \\ \hline & -1 & -6 & -8 & \underline{|\ 0} \end{array}$$

y resulta

$$p_A(t) = -t^3 - 8t^2 - 20t - 16 = (t+2)(-t^2 - 6t - 8).$$

Las otras raíces ya se obtienen fácilmente resolviendo la ecuación $-t^2 - 6t - 8 = 0$ y son -2 y -4. Por tanto, la descomposición factorial de $p_A(t)$ es $p_A(t) = (t+2)^2(t+4)$, y las raíces son -2 doble y -4 simple. Para decidir si A es diagonalizable es suficiente con hallar la dimensión del subespacio propio asociado a -2. Para esto, hay que resolver el sistema $(A - (-2)I)(x, y, z)^t = (0, 0, 0)^t$, esto es

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 0 & 2 & 4 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} -x - 2y - 3z &= 0 \\ 2y + 4z &= 0 \\ -x - 2y - 3z &= 0 \end{aligned} \right. \rightarrow \left\{ \begin{aligned} x &= z \\ y &= -2z \end{aligned} \right.$$

Luego, los vectores solución son de la forma $(x, y, z) = (z, -2z, z) = z(1, -2, 1)$. Por consiguiente, una base del subespacio propio $E(-2)$ es $(1, -2, 1)$. Como el subespacio propio $E(-2)$ es de dimensión 1 y la multiplicidad algebraica de la raíz -2 es 2 se concluye que A no es diagonalizable.

3. (a) Monotonía:

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{2(n+1)}{(n+1)+1} - \frac{2n}{n+1} = \frac{2n+2}{n+2} - \frac{2n}{n+1} = \frac{(2n+2)(n+1) - 2n(n+2)}{(n+2)(n+1)} \\ &= \frac{2}{(n+2)(n+1)} > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Luego, $a_{n+1} > a_n$, y por consiguiente, a_n es creciente.

Acotación. Es claro que $a_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Dividiendo $2n$ entre $n+1$ se obtiene 2 de cociente y -2 de resto, con lo cual

$$\frac{2n}{n+1} = 2 - \frac{2}{n+1} < 2 \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

ya que $\frac{2}{n+1} > 0$. Por consiguiente $0 < a_n < 2$, luego a_n está acotada. Como es creciente y acotada, se deduce que es convergente. De hecho, es fácil hallar el límite sin más que dividir numerador y denominador entre n y resulta que $\lim_{n\to\infty} \frac{2n}{n+1} = 2$.

(b) Para estudiar si es derivable, se hallan las derivadas laterales en $x = 1$:

$$f'(1^-) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{2(1+h) - 2}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{2h}{h} = 2,$$

$$f'(1^+) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{2 + \ln(1+h) - 2}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\ln(1+h)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\frac{1}{1+h}}{1} = 1$$

(en el penúltimo signo igual se ha aplicado la regla de l'Hôpital). Como las derivadas laterales son distintas, se deduce que f no es derivable en $x = 1$.

4. Como f es diferenciable en $\mathbb{R}^2$, los extremos relativos son en particular puntos críticos, es decir, han de verificar las ecuaciones $D_1 f(x, y) = 0$, $D_2 f(x, y) = 0$ (aquí $D_1 f = \frac{\partial f}{\partial x}$ y $D_2 f = \frac{\partial f}{\partial y}$). Las derivadas parciales son

$$D_1 f(x, y) = 2x + y^2, \quad D_2 f(x, y) = 4y + 2xy.$$

Hay que resolver el sistema

$$\left\{\begin{array}{r} 2x+y^2=0 \\ 4y+2xy=0 \end{array}\right. \to \left\{\begin{array}{r} 2x+y^2=0 \\ y(2+x)=0 \end{array}\right.$$

De la segunda ecuación se deduce que $y=0$ o $2+x=0$, es decir $x=-2$. Sustituyendo estos dos valores en la primera ecuación se obtiene:

- Si $y=0$, entonces $2x=0$, luego $x=0$. Punto $P_1=(0,0)$.

- Si $x=-2$, entonces $-4+y^2=0$, luego $y=2$ o $y=-2$. Puntos $P_2=(-2,2)$ y $P_3=(-2,-2)$.

Para clasificar estos puntos, se necesita el Hessiano y hay que utilizar la cuestión teórica 5.50 del libro de ejercicios. Las derivadas parciales segundas son

$$D_{11}f(x,y)=2, \quad D_{12}f(x,y)=2y, \quad D_{22}f(x,y)=4+2x.$$

Luego,

$$Hf(x,y)=\begin{pmatrix} 2 & 2\,y \\ 2\,y & 2\,x+4 \end{pmatrix}, \;\Delta_1=D_{11}f(x,y)=2, \;\Delta_2=\det(H(x,y)).$$

En la siguiente tabla se resume la discusión:

Punto	$Hf(P)$	Δ_1	Δ_2	Conclusión
$(0,0)$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$	$2\ (+)$	$8\ (+)$	mínimo local
$(-2,2)$	$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$	2	$-16\ (-)$	punto de silla
$(-2,-2)$	$\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$	2	$-16\ (-)$	punto de silla

5. La inecuación $x^2+y^2 \leq 4$ corresponde al círculo de centro $(0,0)$ y radio 2, la inecuación $1 \leq x^2+y^2$ corresponde al exterior del círculo de centro $(0,0)$ y radio 1 y la inecuación $y \geq 0$ corresponde al semiplano superior de borde el eje X, por tanto el recinto D es el que se ha dibujado en la figura 1.

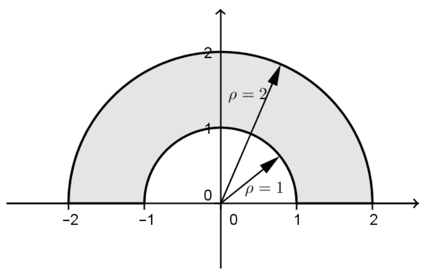

Fig. 1. Recinto de integración D.

Por su forma, vamos a calcular la integral pasando a coordenadas polares

$$x=\rho\cos\theta, \;y=\rho\,\mathrm{sen}\,\theta, \;\text{luego } x^2+y^2=\rho^2.$$

En polares, el dominio D es

$$D=\{(\rho,\theta)\in\mathbb{R}_+\times[0,2\pi]: \;1\leq\rho\leq 2, \;0\leq\theta\leq\pi\},$$

la función $f(x,y) = x^2y = (\rho\cos\theta)^2(\rho\operatorname{sen}\theta) = \rho^3\cos^2\theta\operatorname{sen}\theta$ y la integral es

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{\pi}\int_1^2 \rho\cdot f(\rho\cos\theta,\rho\operatorname{sen}\theta)d\rho d\theta = \int_0^{\pi}\int_1^2 \rho^4\cos^2\theta\operatorname{sen}\theta d\rho d\theta \\
&= \int_0^{\pi}\cos^2\theta\operatorname{sen}\theta\left[\frac{\rho^5}{5}\right]_1^2 d\theta = \frac{31}{5}\int_0^{\pi}\cos^2\theta\operatorname{sen}\theta d\theta = \frac{31}{5}\left[\frac{-\cos^3\theta}{3}\right]_0^{\pi} \\
&= \frac{31}{5}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right) = \frac{62}{15}.
\end{aligned}$$