5. FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES. EJERCICIOS

EJERCICIO 5.1. Estúdiese la existencia del límite en (0,0) de la función f:R^2->R definida como

f(x,y)=(y+y^2)/(x^2-3y).

SOLUCIÓN. Se define f

(%i1) define(f(x,y),(y+y^2)/(x^2-3*y));

(%o1) $f(x,y):=\frac{y^2+y}{x^2-3\,y}$

Con Maxima no se pueden calcular límites de funciones de varias variables. Sustituyendo la variable x por 0 y la variable y por 0, resulta

(%i2) f(0,0);

expt: undefined: 0 to a negative exponent.
#0: f(x=0,y=0)
-- an error. To debug this try: debugmode(true);

y, por tanto, hay que estudiar la existencia del límite por otros métodos.
Los límites reiterados de f en (0,0) son:

(%i3) limit(f(x,y),x,0); limit(%,y,0);

limit(f(x,y),y,0); limit(%,x,0);

(%o3) $-\frac{y+1}{3}$

(%o4) $-\frac{1}{3}$

(%o5) 0

(%o6) 0

Como los límites reiterados no coinciden, no existe el límite de f en (0,0).

EJERCICIO 5.2. Estúdiese la existencia del límite en (0,0) de la función f:R^2->R definida como

f(x,y)=y^2x^2/(x^6+y^3).

SOLUCIÓN. Se define f:

(%i7) define(f(x,y), y^2*x^2/(x^6+y^3));

(%o7) $f(x,y):=\frac{x^2\,y^2}{y^3+x^6}$

En (0,0), al sustituir resulta 0/0, luego es una indeterminación. Los límites reiterados de f en (0,0) son:

```
(%i8) limit(f(x,y),x,0); limit(%,y,0);

      limit(f(x,y),y,0); limit(%,x,0);
(%o8) 0
(%o9) 0
(%o10) 0
(%o11) 0
```

Como los límites reiterados coinciden con el valor 0, en caso de existir el límite de f cuando (x,y) tiende hacia (0,0), éste es 0, pero falta demostrar la existencia del mismo. Calculando el límite de f en (0,0) a través de las rectas y=mx, con m número real, se tiene que

```
(%i12) limit(f(x,m*x),x,0);
(%o12) 0
```

De nuevo, se deduce que en caso de existir el límite, éste es 0. Si se calcula el límite de f en (0,0) a través de curvas de ecuación y=mx^2 se obtiene

```
(%i13) limit(f(x,m*x^2),x,0);
```

(%o13) $\frac{m^2}{m^3+1}$

y como este último límite depende del parámetro m, se concluye que no existe el límite de f en (0,0).

EJERCICIO 5.3. Estúdiese la continuidad de la función f:R^2->R definida como

f(x,y)=x^2*y/(x^2+y^2), si (x,y) es distinto de (0,0),   f(0,0)=0.

SOLUCIÓN. La función f es continua en R^2\{(0,0)} por ser cociente de polinomios y no anularse el denominador. Con respecto al punto (0,0), la función f será continua en (0,0) si existe el límite de f en (0,0) y éste coincide con f(0,0)=0.
Se define f para los puntos (x,y) distintos de (0,0):

```
(%i14) define(f(x,y),x^2*y/(x^2+y^2));
```

(%o14) $f(x,y):=\frac{x^2\,y}{y^2+x^2}$

Los límites reiterados de f en (0,0) son

```
(%i15) limit(f(x,y),x,0); limit(%,y,0);
       limit(f(x,y),y,0); limit(%,x,0);
```
(%o15) 0
(%o16) 0
(%o17) 0
(%o18) 0

Así pues, se deduce que en caso de existir el límite de f en (0,0), éste es 0.
Por el modo en que está definida la función f (aparecen sumas de cuadrados de las variables x e y) parece lógico pensar en hacer un cambio a coordenadas polares.
Se define F(r,t)=f(rcost, rsent):

```
(%i19) assume(r>0); define(F(r,t), f(r*cos(t),r*sin(t)));
```
(%o19) $[r>0]$

(%o20) $F(r,t):=\frac{r^3\cos(t)^2\sin(t)}{r^2\sin(t)^2+r^2\cos(t)^2}$

Si existe una función h(r) que tiende hacia 0 cuando r tiende hacia 0 tal que |F(r,t)-0|<=h(r), entonces se demuestra que el límite de f cuando (x,y) tiende hacia (0,0) es 0, con lo que f es continua en (0,0). Así pues, se calcula |F(r,t)-0| y se simplifica (el comando trigsimp sirve para simplificar expresiones trigonométricas):

```
(%i21) abs(F(r,t)-0); trigsimp(%);
```
(%o21) $\frac{r^3\cos(t)^2\left|\sin(t)\right|}{r^2\sin(t)^2+r^2\cos(t)^2}$

(%o22) $r\cos(t)^2\left|\sin(t)\right|$

Es claro que cos(t)^2|sin(t)|<=1, por tanto, definiendo h(r)=r, se tiene que h(r) tiende hacia 0 cuando r tiende hacia 0 y |F(r,t)-0|<=h(r). Luego el límite de f cuando (x,y) tiende hacia (0,0) es 0 y f es continua en (0,0).

EJERCICIO 5.4 Sea f:R^2->R la función definida como

f(x,y)=yx^2/(x-2y^2).

Calcúlese D_(1,-1)f(1,2), la derivada direccional de f en el punto (1,2) siguiendo la dirección del vector (1,-1).

SOLUCIÓN. Se define la función f

```
(%i23) define(f(x,y),y*x^2/(x-2*y^2));
```
(%o23) $f(x,y):=\frac{x^2\,y}{x-2\,y^2}$

Según la definición, la derivada direccional de f en el punto (1,2) siguiendo la dirección del vector (1,-1) es

(%i24) limit((f(1+h*1,2+h*(-1))-f(1,2))/h, h, 0);

(%o24) $-\frac{39}{49}$

Obsérvese que la función f es diferenciable en (1,2), pues es cociente de polinomios y en el punto (1,2) no se anula el denominador. Así pues, otra forma de determinar D_(1,-1)f(1,2) es a través de la igualdad D_(1,-1)f(1,2)=Gf(1,2).(1,-1), donde Gf(1,2) denota el gradiente de f en el punto (1,2).

Obtengamos también D_(1,-1)f(1,2) a través de la relación anterior. Se determina el gradiente de f en el punto (1,2):

(%i25) define(Gf(x,y), jacobian([f(x,y)],[x,y])); Gf(1,2);

(%o25) $\mathrm{Gf}(x,y):=\begin{bmatrix} \frac{2\,x\,y}{x-2\,y^2}-\frac{x^2\,y}{(x-2\,y^2)^2} & \frac{x^2}{x-2\,y^2}+\frac{4\,x^2\,y^2}{(x-2\,y^2)^2} \end{bmatrix}$

(%o26) $\begin{bmatrix} -\frac{30}{49} & \frac{9}{49} \end{bmatrix}$

Se calcula el producto escalar Gf(1,2).(1,-1):

(%i27) %.[1,-1];

(%o27) $-\frac{39}{49}$

EJERCICIO 5.5. Determínese el plano tangente a la gráfica de la función

f(x,y)=3-x^2+4x-4y^2

en el punto (2,2) y represéntense gráficamente la función y el plano tangente.

SOLUCIÓN. Se define f

(%i28) define(f(x,y), 3-x^2+4*x-4*y^2);

(%o28) $f(x,y):=-4\,y^2-x^2+4\,x+3$

La función f es diferenciable en R^2 por ser polinómica. Luego el plano tangente a f en el punto (2,2) tiene ecuación

T(x,y)=f(2,2)+Gf(2,2).(x-2,y-2),

donde Gf(2,2) denota el gradiente de f en el punto (2,2).

Se calcula el gradiente de f:

(%i29) define(Gf(x,y), jacobian([f(x,y)],[x,y]));

(%o29) $\mathrm{Gf}(x,y):=\begin{bmatrix} 4-2\,x & -8\,y \end{bmatrix}$

Por tanto, la ecuación del plano tangente (T(x,y)) viene dada por

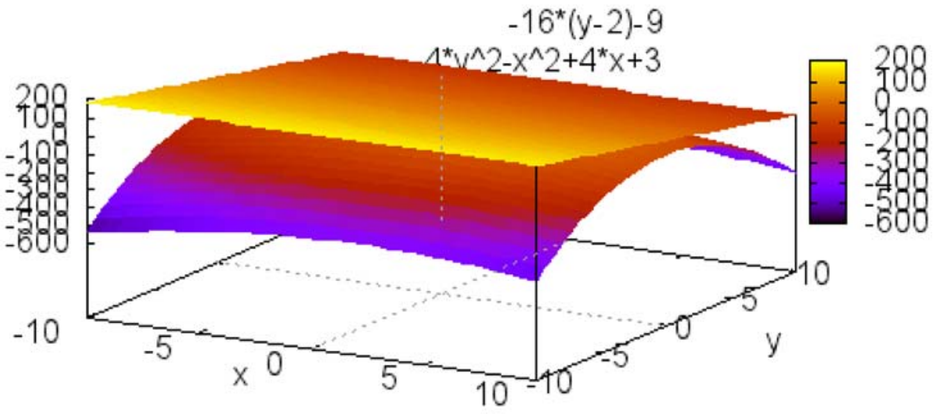
(%i30) define(T(x,y), f(2,2)+Gf(2,2).[x-2,y-2]);

(%o30) $T(x,y):=-16\,(y-2)-9$

En la siguiente figura se muestra la gráfica de f y el plano tangente calculado para x e y pertenecientes al intervalo [-10,10] (observe cómo se introduce la instrucción wxplot3d para dibujar dos funciones en una misma gráfica).

(%i31) wxplot3d([f(x,y), T(x,y), [x,-10,10], [y,-10,10]]);

(%t31)



(%o31)

EJERCICIO 5.6. Sean las funciones f:R^2->R y g:R^2->R^2 definidas, respectivamente, como

f(x,y)=x^3-xy^2+yln(x^2+1)

g(u,v)=(u^2-2uv, u+v).

Determínese el gradiente de la función composición de g con f (f(g)(x,y)) en el punto (1,1) aplicando la regla de la cadena.

SOLUCIÓN. Se definen f y g:

(%i32) define(f(x,y), x^3-x*y^2+y*log(x^2+1));

define(g(u,v), [u^2-2*u*v, u+v]);

(%o32) $f(x,y):=-x\,y^2+\log(x^2+1)\,y+x^3$

(%o33) $g(u,v):=[u^2-2\,u\,v,v+u]$

Puesto que las funciones f y g son diferenciables en R y en R^2, respectivamente, aplicando la regla de la cadena, la función f(g) es diferenciable en (1,1) y se tiene que

Gf(g)(1,1)=Gf(g(1,1)).Jg(1,1),

donde Gf(g)(1,1) denota el gradiente de f(g) en (1,1); Gf(g(1,1)) denota el gradiente de f en el punto g(1,1) y Jg(1,1) es la matriz jacobiana de g en el punto (1,1).

Se determina primero el gradiente de f:

```
(%i34) define(Gf(x,y), jacobian([f(x,y)],[x,y]));
```

(%o34) $Gf(x,y):=\begin{bmatrix} -y^2+\frac{2\,x\,y}{x^2+1}+3\,x^2 & \log(x^2+1)-2\,x\,y \end{bmatrix}$

g(1,1) vale

```
(%i35) g(1,1);
```

(%o35) $[-1,2]$

Luego Gf(g(1,1)) es igual a

```
(%i36) Gf(g(1,1)[1],g(1,1)[2]);
```

(%o36) $\begin{bmatrix} -3 & \log(2)+4 \end{bmatrix}$

A continuación, se obtiene la matriz jacobiana de g en el punto (1,1):

```
(%i37) define(Jg(u,v), jacobian(g(u,v), [u, v])); Jg(1,1);
```

(%o37) $Jg(u,v):=\begin{bmatrix} 2\,u-2\,v & -2\,u \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

(%o38) $\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

Por tanto, Gf(g)(1,1) es igual a

```
(%i39) %o36.%;
```

(%o39) $\begin{bmatrix} \log(2)+4 & \log(2)+10 \end{bmatrix}$

NOTA: Obsérvese que se puede obtener el gradiente pedido hallando primero la composición y luego el gradiente de la compuesta con las siguientes instrucciones:

(%i40) h(u,v):=f(g(u,v)[1],g(u,v)[2]);

define(Gh(u,v), jacobian([h(u,v)], [u, v])); Gh(1,1);

(%o40) $h(u,v):=f\left((g(u,v))_1,(g(u,v))_2\right)$

(%o41) $Gh(u,v):=$

$$\left[\log\left(\left(u^2-2\,u\,v\right)^2+1\right)+\frac{2\,(2\,u-2\,v)\,(v+u)\,\left(u^2-2\,u\,v\right)}{\left(u^2-2\,u\,v\right)^2+1}+3\,(2\,u-2\,v)\,\left(u^2-2\,u\,v\right)^2-(2\,u-2\,v)\,(v+u)^2-2\,(v+u)\,($$

(%o42) $\begin{bmatrix}\log(2)+4 & \log(2)+10\end{bmatrix}$

Como se puede ver, la expresión del gradiente de f(g) es muy larga. Aplicando la regla de la cadena los cálculos son mucho más sencillos.

EJERCICIO 5.7. Obtenga y clasifique los extremos relativos de la función

f(x,y)=-x^3+4xy-2y^2+1.

SOLUCIÓN. Se define la función f:

(%i43) define(f(x,y), -x^3+4*x*y-2*y^2+1);

(%o43) $f(x,y):=-2\,y^2+4\,x\,y-x^3+1$

La función f es diferenciable en R^2 por ser polinómica, luego los extremos relativos de f son en particular puntos críticos. Para obtener los puntos críticos, se calculan las derivadas parciales y se iguala a 0:

(%i44) solve([diff(f(x,y),x,1), diff(f(x,y),y,1)], [x,y]);

(%o44) $[[x=\frac{4}{3},y=\frac{4}{3}],[x=0,y=0]]$

Así pues, se obtienen los puntos críticos P1=(4/3,4/3) y P2=(0,0). Para clasificar estos dos puntos críticos, se estudia la matriz hessiana de f en cada uno de ellos:

(%i45) define(Hf(x,y), hessian(f(x,y), [x,y]));

(%o45) $Hf(x,y):=\begin{bmatrix}-6\,x & 4\\ 4 & -4\end{bmatrix}$

En el punto P1, se tiene que

(%i46) Hf(4/3,4/3)[1,1]; determinant(Hf(4/3,4/3));

(%o46) -8

(%o47) 16

Por tanto, la matriz hessiana en este punto es definida negativa y P1 es un máximo relativo.
En el punto P2 resulta

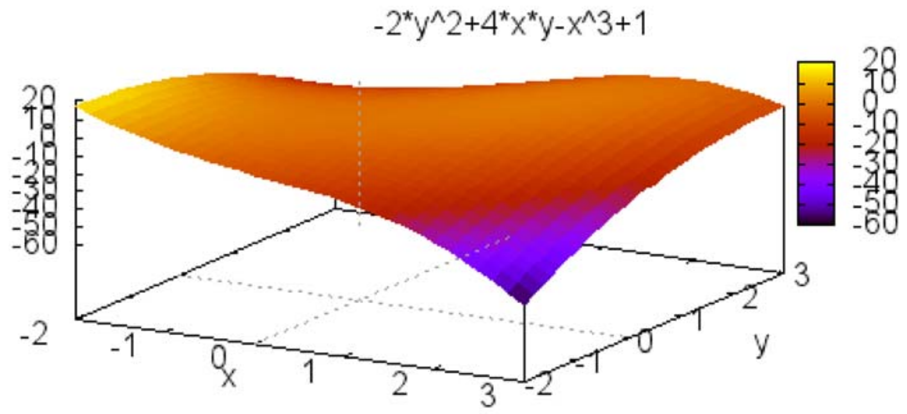
(%i48) Hf(0,0)[1,1]; determinant(Hf(0,0));
(%o48) 0
(%o49) -16

Como el determinante de Hf(0,0) es negativo, se deduce que P2 es un punto de silla.

En la siguiente figura se muestra la función f para x e y pertenecientes al intervalo [-2, 3].

(%i50) wxplot3d(f(x,y), [x,-2,3], [y,-2,3]);

(%t50)



(%o50)

Si se ejecuta la siguiente instrucción, aparece una ventana que permite girar la gráfica en la que se aprecia mejor que P1 es un máximo relativo y P2 es un punto de silla.

(%i51) plot3d(f(x,y), [x,-2,3], [y,-2,3]);
(%o51)