FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS DE LAS TECNOLOGÍAS DE LA INFORMACIÓN

TEMA 3

Aplicaciones lineales

Equipo docente: Lidia Huerga y Vicente Novo

Ejercicio 1.

Estudie si las siguientes aplicaciones son lineales:

(a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por $f(x, y) = (x - 2y, 0, 2x + y)$,

(b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $f(1, 1) = (2, 4)$, $f(0, 1) = (-1, 2)$ y $f(2, 3) = (3, 7)$.

Solución. (a) f es aplicación lineal si y sólo si

$$f(\lambda\bar{a} + \mu\bar{b}) = \lambda f(\bar{a}) + \mu f(\bar{b}), \quad \text{para todo } \bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{R}^2,\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Sean $\bar{a} = (a_1, a_2), \bar{b} = (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$ y $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Se tiene que

$$\begin{aligned} f(\lambda\bar{a} + \mu\bar{b}) &= f(\lambda a_1 + \mu b_1, \lambda a_2 + \mu b_2) \\ &= (\lambda a_1 + \mu b_1 - 2(\lambda a_2 + \mu b_2), 0, 2(\lambda a_1 + \mu b_1) + \lambda a_2 + \mu b_2) \\ &= \lambda(a_1 - 2a_2, 0, 2a_1 + a_2) + \mu(b_1 - 2b_2, 0, 2b_1 + b_2) \\ &= \lambda f(\bar{a}) + \mu f(\bar{b}). \end{aligned}$$

Por tanto, f es aplicación lineal.

Ejercicio 1.

Solución. (b) f cumple: $f(1,1) = (2,4)$, $f(0,1) = (-1,2)$ y $f(2,3) = (3,7)$.
Si f fuese lineal, se debería cumplir que

$$\begin{aligned} f(2,3) &= f(2(1,1) + (0,1)) = 2f(1,1) + f(0,1) \\ &= 2(2,4) + (-1,2) = (4,8) + (-1,2) = (3,10), \end{aligned}$$

pero según el enunciado $f(2,3) = (3,7)$. Por tanto, f no es aplicación lineal.

Ejercicio 2. Determine una base y dimensión del subespacio imagen y del núcleo de las siguientes aplicaciones lineales:
(a) $f(x,y) = (x-3y, -x+2y, y)$,
(b) $g(x,y,z) = (x+3y, -x-3y, x+3y+z, -x-3y+z)$.

Solución. (a) • Sabemos que $\{f(1,0), f(0,1)\}$ es sistema de generadores de $\mathrm{Im} f$. Se tiene que $f(1,0) = (1,-1,0)$ y $f(0,1) = (-3,2,1)$. Como estos dos vectores son linealmente independientes, se deduce que $\{(1,-1,0),(-3,2,1)\}$ es base de $\mathrm{Im} f$, luego $\dim(\mathrm{Im} f) = 2$.

$$\mathrm{Im} f =< (1,-1,0),(-3,2,1) >\subset \mathbb{R}^3.$$

• Un vector $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ pertenece a $\mathrm{Ker} f$ si $f(x,y) = (0,0,0)$, luego hay que resolver el sistema

$$x-3y = 0, -x+2y = 0, y = 0$$

que tiene por solución $x = y = 0$. Luego $\mathrm{Ker} f = \{(0,0)\}$, y $\dim(\mathrm{Ker} f) = 0$.

Ejercicio 2.

(b) $g(x,y,z) = (x+3y, -x-3y, x+3y+z, -x-3y+z)$.

• $\{g(1,0,0), g(0,1,0), g(0,0,1)\}$ es sistema de generadores de $\mathrm{Im}g$. Se tiene que $g(1,0,0) = (1,-1,1,-1)$, $g(0,1,0) = (3,-3,3,-3)$, $g(0,0,1) = (0,0,1,1)$. Se deduce que $\{(1,-1,1,-1), (0,0,1,1)\}$ es base de $\mathrm{Im}g$, luego $\dim(\mathrm{Im}g) = 2$.

$$\mathrm{Im}g = < (1,-1,1,-1), (0,0,1,1) > \subset \mathbb{R}^4.$$

• Un vector $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ pertenece a $\mathrm{Ker}g$ si $g(x,y,z) = (0,0,0,0)$, luego hay que resolver el sistema

$$x+3y = 0, -x-3y = 0, x+3y+z = 0, -x-3y+z = 0$$

que tiene por solución $x = -3y$, $z = 0$. Luego $\mathrm{Ker}g = \{(-3\lambda, \lambda, 0), \lambda \in \mathbb{R}\} = < (-3,1,0) >$, y $\dim(\mathrm{Ker}g) = 1$.

Ejercicio 3. Obtenga la matriz de la aplicación lineal $g \circ f$, donde f y g son las aplicaciones lineales del ejercicio anterior.

Solución. La matriz de f con respecto a las bases canónicas es

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matriz de g con respecto a las bases canónicas es

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & -3 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Por tanto, la matriz de $g \circ f$ es

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & -3 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 4. Se consideran las bases de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$, respectivamente, dadas por

$$B = \{(1,1),(0,1)\},$$
$$E = \{(1,1,-1),(0,1,0),(1,1,0)\},$$

y sea $f(x,y) = (x-3y, -x+2y, y)$. Determine la matriz de f con respecto de las bases B y E.

Solución. La matriz de f con respecto a las bases canónicas es

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matriz de cambio de la base B a la canónica de $\mathbb{R}^2$ es $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, y la matriz de cambio de la base E a la canónica de $\mathbb{R}^3$ es $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Por tanto, la matriz de f con respecto a las bases B y E viene dada por el siguiente producto:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 5. Estudie si la siguiente matriz es diagonalizable en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & a & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Solución. El polinomio característico viene dado por

$$p_A(t) = |A - tI| = \begin{vmatrix} 1-t & 0 & -1 \\ 2 & a-t & 3 \\ 0 & 0 & -1-t \end{vmatrix} = (a-t)(1-t)(-1-t).$$

<u>CASO 1.</u> Si $a \neq -1$ y $a \neq 1$, entonces A tiene 3 autovalores:
$\lambda_1 = a$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -1$.
Por tanto, $\alpha_i = d_i = 1$, $i = 1, 2, 3$, donde α_i denota la multiplicidad algebraica del autovalor λ_i y d_i denota la multiplicidad geométrica. Así pues, A es diagonalizable.

Ejercicio 5. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & a & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 1-a & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1-a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} : \left\{ \begin{array}{l} (1-a)x - z = 0 \\ 2x + 3z = 0 \\ (-1-a)z = 0 \end{array} \right.$$

Base de $E(a)$: $\{(0,1,0)\}$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 2 & a-1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} : \left\{ \begin{array}{l} -z = 0 \\ 2x + (a-1)y + 3z = 0 \\ -2z = 0 \end{array} \right.$$

Base de $E(1)$: $\{(1, 2/(1-a), 0)\}$.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 2 & a+1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} : \left\{ \begin{array}{l} 2x - z = 0 \\ 2x + (a+1)y + 3z = 0 \end{array} \right.$$

Base de $E(-1)$: $\{(1, -8/(a+1), 2)\}$.

Ejercicio 5. Matriz de paso:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{2}{1-a} & -\frac{8}{1+a} \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Matriz diagonal semejante:

$$D = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & a & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} P.$$

Ejercicio 5.

CASO 2. $a = 1$. Se obtienen dos autovalores $\lambda_1 = 1$ $(\alpha_1 = 2)$ y $\lambda_2 = -1$ $(\alpha_2 = 1)$. Tenemos que ver si $d_1 = \alpha_1$. Calculamos los autovectores asociados a λ_1:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} : \left\{ \begin{array}{l} -z = 0 \\ 2x + 3z = 0 \\ -2z = 0 \end{array} \right.$$

Base de $E(1)$: $\{(0,1,0)\} \Rightarrow d_1 = 1 < \alpha_1 = 2 \Rightarrow A$ no diag.

CASO 3. $a = -1$. Se obtienen dos autovalores $\lambda_1 = 1$ $(\alpha_1 = 1)$ y $\lambda_2 = -1$ $(\alpha_2 = 2)$. Tenemos que ver si $d_2 = \alpha_2$. Calculamos los autovectores asociados a λ_2:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} : \left\{ \begin{array}{l} 2x - z = 0 \\ 2x + 3z = 0 \end{array} \right.$$

Base de $E(-1)$: $\{(0,1,0)\} \Rightarrow d_2 = 1 < \alpha_2 = 2 \Rightarrow A$ no diag.