3. APLICACIONES LINEALES. EJERCICIOS

1 Determinación de una aplicación lineal.

EJERCICIO 3.1. Si f de R^2 en R^3 es la aplicación lineal tal que f(1,0)=(1,2,1) y f(0,1)=(-3,1,1), determine:
a) las ecuaciones de f,
b) las ecuaciones cartesianas de un subespacio de dimensión 2 que contenga todas las imágenes.

SOLUCIÓN. a) Sabemos que una aplicación lineal queda completamente determinada dando las imágenes de una base. En este caso nos dan las imágenes de la base canónica e1=(1,0) y e2=(0,1), con lo que la imagen de cualquier vector (x1,x2), usando que f es lineal, será
f(x1,x2)=f(x1 e1+x2 e2)=x1 f(e1)+ x2 f(e2)=x1(1,2,1)+x2(-3,1,1). Operando:

```
(%i1) x1*[1,2,1]+x2*[-3,1,1];
```
(%o1) $[x1-3\,x2, x2+2\,x1, x2+x1]$

Así pues las ecuaciones de f son: y1=x1-3x2, y2=2x1+x2, y3=x1+x2.

b) Todas las imágenes de f son de la forma
(x1-3x2, 2x1+x2, x1+x2)=x1(1,2,1)+x2(-3,1,1)
con x1 y x2 números arbitrarios. Por tanto, se trata del subespacio de R^3 generado por los vectores (1,2,1) y (-3,1,1). Como son base de dicho subespacio, su ecuación cartesiana está dada por:

```
(%i2) A:matrix([x,y,z],[1,2,1],[-3,1,1]);
      determinant(A);
```
(%o2) $\begin{bmatrix} x & y & z \\ 1 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

(%o3) $7\,z-4\,y+x$

Esto es, x-4y+7z=0.

EJERCICIO 3.2. Si f de R^2 en R^3 es la aplicación lineal tal que f(3,1)=(-1,3,1) y f(2,1)=(0,1,2), determine:
a) la imagen de (-2,4),
b) las ecuaciones de f en las bases canónicas.

SOLUCIÓN. a) Teniendo en cuenta que u1=(3,1) y u2=(2,1) son base de R^2, basta hallar las coordenadas de (-2,4) en dicha base y aplicar que f es lineal:

```
(%i4) u1:[3,1];u2:[2,1];v:[-2,4];
```
(%o4) $[3,1]$
(%o5) $[2,1]$
(%o6) $[-2,4]$

```
(%i7) linsolve(a*u1+b*u2-v,[a,b]);
(%o7) [a=-10,b=14]
```

Luego, v=-10 u1 + 14 u2, y por tanto f(v)= -10 f(u1)+ 14 f(u2)=

```
(%i8) -10*[-1,3,1]+14*[0,1,2];
(%o8) [10,-16,18]
```

b) Ahora tenemos que hallar la imagen de un vector genérico v=(x1,x2). Primero lo expresamos en la base u1, u2:

```
(%i9) v:[x1,x2];
      linsolve(a*u1+b*u2-v,[a,b]);
(%o9) [x1,x2]
(%o10) [a=x1-2 x2,b=3 x2-x1]
```

Con lo cual, f(x1,x2)=f(a u1+b u2)=a f(u1) + b f(u2) = (x1-2x2)(-1,3,1) + (3x2-x1)(0,1,2). Operando:

```
(%i11) (x1-2*x2)*[-1,3,1]+(3*x2-x1)*[0,1,2];
(%o11) [2 x2-x1,3 x2+3 (x1-2 x2)-x1,2 (3 x2-x1)-2 x2+x1]
```

```
(%i12) ratsimp(%);
(%o12) [2 x2-x1,2 x1-3 x2,4 x2-x1]
```

Y de aquí, las ecuaciones de f son: y1=-x1+2x2, y2=2x1-3x2, y3=-x1+4x2.

2 Operaciones con aplicaciones lineales y con matrices.

2.1 Suma de aplicaciones lineales y producto por un número. Matriz asociada.

EJERCICIO 3.3. Sean las aplicaciones lineales f y g de R^2 en R^3 dadas por
f(x1,x2)=(2x1-3x2, x1+x2, -x1),
g(x1,x2)=(-x1+x2,-3x1+2x2,3x1).
a) Halle la suma de f y g (f+g), las matrices de f, g y f+g en las bases canónicas y compruebe que la matriz de f+g es igual a la matriz de f + la matriz de g, esto es:
M(f+g)=Mf + Mg.
b) Halle el producto 3f, la matriz de 3f en la base canónica y compruebe que la matriz de 3f es igual a 3 por la matriz de f, esto es:
M(3f)=3 Mf.

SOLUCIÓN. a) SUMA

(%i13)
```
f(x1,x2):=[2*x1-3*x2,x1+x2,-x1];
g(x1,x2):=[-x1+x2,-3*x1+2*x2,3*x1];
s(x1,x2):=f(x1,x2)+g(x1,x2);
f(x1,x2)+g(x1,x2);
```

(%o13) $f(x1,x2):=[2\,x1-3\,x2,x1+x2,-x1]$

(%o14) $g(x1,x2):=[-x1+x2,(-3)\,x1+2\,x2,3\,x1]$

(%o15) $s(x1,x2):=f(x1,x2)+g(x1,x2)$

(%o16) $[x1-2\,x2,3\,x2-2\,x1,2\,x1]$

Las matrices de f, g y s=f+g son respectivamente:

(%i17)
```
Mf:transpose(matrix(f(1,0),f(0,1)));
Mg:transpose(matrix(g(1,0),g(0,1)));
Ms:transpose(matrix(s(1,0),s(0,1)));
```

(%o17) $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

(%o18) $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$

(%o19) $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$

Obsérvese que la matriz de s coincide con la suma de las matrices de f y de g: Mf+Mg:

(%i20)
```
Mf+Mg;
```

(%o20) $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$

b) PRODUCTO POR UN NÚMERO

(%i21)
```
p(x1,x2):=3*f(x1,x2);
Mp:transpose(matrix(p(1,0),p(0,1)));
```

(%o21) $p(x1,x2):=3\,f(x1,x2)$

(%o22) $\begin{bmatrix} 6 & -9 \\ 3 & 3 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$

Obsérvese que la matriz de p=3f coincide con el producto 3.Mf:

(%i23) 3*Mf;

(%o23) $\begin{bmatrix} 6 & -9 \\ 3 & 3 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$

2.2 Composición de aplicaciones lineales. Matriz asociada.

EJERCICIO 3.4. Se consideran las aplicaciones lineales f de R^3 en R^2 y g de R^2 en R^2 dadas por:
f(x1,x2,x3)=(x1+x2+2x3,2x1-3x2+x3),
g(x1,x2)=(-x1+2x2,4x1-x2)
Halle f compuesta con g, esto es gof, las matrices de f, g y gof en las bases canónicas y compruebe que la matriz de gof es igual a la matriz de g por la matriz de f, esto es:
M(gof) = Mg . Mf.
Si A es la base del primer espacio, B la del segundo y C la del tercero, y denotamos la matriz de f en las bases A y B como [f]_AB, entonces la fórmula anterior se escribe así:
[gof]_AC = [g]_BC . [f]_AB.

SOLUCIÓN.

(%i24) f(x1,x2,x3):=[x1+x2+2*x3,2*x1-3*x2+x3];
g(x1,x2):=[-x1+2*x2,5*x1-x2];

(%o24) $f(x1, x2, x3) := [x1 + x2 + 2\, x3, 2\, x1 - 3\, x2 + x3]$

(%o25) $g(x1, x2) := [-x1 + 2\, x2, 5\, x1 - x2]$

(%i26) h(x1,x2,x3):=g(f(x1,x2,x3));

(%o26) $h(x1, x2, x3) := g(f(x1, x2, x3))$

Obsérvese que Maxima no permite componer aplicaciones lineales, debido a que f(x1,x2,x3) es un vector (una lista para Maxima) que se escribe entre corchetes y la entrada de g ha de ser un par escrito entre paréntesis. Así, para la expresión siguiente proporciona un error:

(%i27) h(1,1,1);

Too few arguments supplied to $g(x1, x2)$; found: $[[4, 0]]$
#0: h(x1=1,x2=1,x3=1)
-- an error. To debug this try: debugmode(true);

Podemos solucionar este problema con el siguiente truco (haciendo que g actúe sobre la primera componente de f y sobre la segunda):

(%i28) h(x1,x2,x3):=g(f(x1,x2,x3)[1],f(x1,x2,x3)[2]);

(%o28) $h(x1, x2, x3) := g\left((f(x1, x2, x3))_1, (f(x1, x2, x3))_2\right)$

Ahora, al pedir h(1,1,1) o h(x1,x2,x3) ya no da un error:

```
(%i29) h(1,1,1);
```
(%o29) $[-4,20]$

```
(%i30) h(x1,x2,x3);
```
(%o30) $[2\,(x3-3\,x2+2\,x1)-2\,x3-x2-x1,5\,(2\,x3+x2+x1)-x3+3\,x2-2\,x1]$

```
(%i31) ratsimp(%);
```
(%o31) $[3\,x1-7\,x2,9\,x3+8\,x2+3\,x1]$

Las matrices de f, g y h=gof en las bases canónicas son respectivamente:

```
(%i32) Mf:transpose(matrix(f(1,0,0),f(0,1,0),f(0,0,1)));
       Mg:transpose(matrix(g(1,0),g(0,1)));
       Mh:transpose(matrix(h(1,0,0),h(0,1,0),h(0,0,1)));
```
(%o32) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$

(%o33) $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$

(%o34) $\begin{bmatrix} 3 & -7 & 0 \\ 3 & 8 & 9 \end{bmatrix}$

Obsérvese que esta última matriz (la de gof) coincide con el producto Mg . Mf:

```
(%i35) Mg.Mf;
```
(%o35) $\begin{bmatrix} 3 & -7 & 0 \\ 3 & 8 & 9 \end{bmatrix}$

o sea

```
(%i36) print(Mg,Mf,"=",Mh)$
```
$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -7 & 0 \\ 3 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

3 Cambio de base. Expresión matricial del cambio de coordenadas de un vector cuando cambia la base.

Para entender bien esta sección, repase el apartado 2.4.2 del libro de teoría (págs. 81-84) y el ejercicio 2.8 del documento "Maxima2_Vectores_Ejercicios.wxm".

EJERCICIO 3.5. Resuelva el ejercicio 2.8 de nuevo usando matrices.

SOLUCIÓN. Para mayor comodidad copiemos aquí el enunciado completo:
"En R^2, se considera la base canónica y la base B={u1=(2,1), u2=(5,3)}.
a) Si las coordenadas de un vector v respecto de la base canónica son (-4,-3), ¿cuáles son las coordenadas de v respecto de la base B?
b) Si las coordenadas del vector w respecto de la base B son (6,-2), ¿cuáles son las coordenadas de w respecto de la base canónica?
c) Obtenga una expresión general en el caso a), es decir, si u=(a,b) en la base canónica, halle las coordenadas de u en la base B.
d) Exprese la base canónica {e1, e2} en función de la base B".

a) Sea Q_BC la matriz del cambio de coordenadas de la base B a la base C={e1, e2} (canónica). Esto significa que las columnas de Q son las coordenadas de los ui en la base C. Por tanto:

```
(%i37) u1:[2,1];u2:[5,3];
       Q:transpose(matrix(u1,u2));
```

(%o37) $[2,1]$

(%o38) $[5,3]$

(%o39) $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

Según el libro de teoría, si las coordenadas de un vector v en la base C son (x1,x2), denotado [v]_C=(x1,x2) y en la base B son (y1,y2), denotado [v]_B=(y1,y2), entonces: x=Qy, esto es:
(x1,x2)^t=Q (y1,y2)^t, o bien
[v]_C = Q_BC . [v]_B   (aquí [v]_C y [v]_B designan vectores columna).

En consecuencia, será (-4,-3)^t=Q (y1,y2)^t, y por tanto y=Q^(-1)(-4,-3)^t. Operando:

```
(%i40) Q^^(-1). transpose([-4,-3]);
```

(%o40) $\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$

Es decir, las coordenadas de v en la base B son (3,-2).

b) Ahora es el producto Q.w. Operando:

```
(%i41) Q.transpose([6,-2]);
```

(%o41) $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$

Por tanto, las coordenadas de w en la base canónica son (2,0).

c) Hay que hallar el producto Q^(-1) .u. Operando:

```
(%i42) Q^^(-1).transpose([a,b]);
```

(%o42) $\begin{bmatrix} 3a-5b \\ 2b-a \end{bmatrix}$

Por tanto, las coordenadas de u=(a,b) en la base B son (3a-5b,-a+2b).

d) Basta hallar Q^(-1):

(%i43) Q^^(-1);

(%o43) $\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

Esto significa que
e1=3 u1-u2, e2=-5 u1 +2 u2.

OBSERVACIÓN. La matriz Q es la matriz de la aplicación lineal Identidad (Id) respecto de las bases (inicial) B={u1, u2} y (final) C={e1, e2}, ya que la primera columna de Q son las coordenadas de Id(u1)=u1=a1 e1 + a2 e2 respecto de la base C y la segunda columna de Q son las coordenadas de Id(u2)=u2=b1 e1+b2 e2.

4 Matriz asociada a una aplicación lineal al cambiar las bases.

EJERCICIO 3.6. Se considera la aplicación lineal f de R^3 en R^2 dada por f(x1,x2,x3)=(x1-2x2+x3,3x1+x2-2x3).
a) Hallar la matriz de f respecto de las bases canónicas B1={u1=(1,0,0), u2=(0,1,0), u3=(0,0,1)} y B2={v1=(1,0), v2=(0,1)}.
b) Si en R^3 se cambia la base a B1'={u1'=(1,1,2), u2'=(2,0,-1), u3'=(6,1,0)}, ¿cuál es la matriz de f en las bases B1' y B2?
c) Si en R^2 se cambia la base a B2'={v1'=(1,2), v2'=(1,1)}, ¿cuál es la matriz de f en las bases B1 y B2'?
d) Hallar la matriz de f respecto de las bases B1' y B2'.

SOLUCIÓN. a) En primer lugar definimos f y hallamos su matriz A en las bases canónicas:

(%i44) f(x1,x2,x3):=[x1-2*x2+x3,3*x1+x2-2*x3];
A:transpose(matrix(f(1,0,0),f(0,1,0),f(0,0,1)));

(%o44) $\mathrm{f}(x1,x2,x3):=[x1-2\,x2+x3,3\,x1+x2+(-2)\,x3]$

(%o45) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

b) Si llamamos Q a la matriz de cambio de coordenadas de B1 a B1', según el libro de teoría, la matriz de f en las bases B1' y B2 es AQ. Operando (como Maxima no admite u1' ponemos u1p):

(%i46) u1p:[1,1,2]$ u2p:[2,0,-1]$ u3p:[6,1,0]$
Q:transpose(matrix(u1p,u2p,u3p));

(%o49) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

```
(%i50) A. Q;
```

(%o50) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 8 & 19 \end{bmatrix}$

Se obtiene el mismo resultado si hallamos las imágenes de u1', u2' y u3':

```
(%i51) transpose(matrix(f(u1p[1],u1p[2],u1p[3]), f(u2p[1],u2p[2],u2p[3]),f(u3p[1],u3p[2],u3p[3])));
```

(%o51) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 8 & 19 \end{bmatrix}$

Recordemos que Maxima da un error al intentar hallar f(u1p), por eso lo hemos puesto con sus componentes: f(u1p[1],u1p[2],u1p[3]).

c) Si llamamos P a la matriz de cambio de coordenadas de B2' a B2, según el libro de teoría, la matriz de f en las bases B1 y B2' es P^(-1)A. Operando:

```
(%i52) v1p:[1,2]$ v2p:[1,1]$
       P:transpose(matrix(v1p,v2p));
```

(%o54) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

```
(%i55) C:P^^(-1).A;
```

(%o55) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & -3 \\ -1 & -5 & 4 \end{bmatrix}$

Ya sabemos que esto equivale a hallar las coordenadas de los vectores

```
(%i56) f(1,0,0); f(0,1,0);f(0,0,1);
```

(%o56) $[1,3]$
(%o57) $[-2,1]$
(%o58) $[1,-2]$

respecto de la base B2'. Por ejemplo, la 1ª columna de C=P^(-1)A coincide con la solución del sistema

```
(%i59) linsolve(x1*v1p+x2*v2p-f(1,0,0),[x1,x2]);
```

(%o59) $[x1=2, x2=-1]$

d) Teniendo en cuenta lo anterior, según el libro de teoría, la matriz de f en las bases B1' y B2' es P^(-1)AQ:

```
(%i60) P^^(-1).A.Q;
```

(%o60) $\begin{bmatrix} -1 & 7 & 15 \\ 2 & -6 & -11 \end{bmatrix}$

lo cual significa que f(u1')=-v1'+2v2', f(u2')=7v1'-6v2' y f(u3')=15v1'-11v2'.

5 Equivalencia de matrices.

EJERCICIO 3.7. Se consideran las matrices A y B siguientes:

```
(%i61) A:matrix([1,4],[1,3])$ B:matrix([5,4],[-1,-1])$ print("A=",A,",  B=",B, " ");
```

$A=\begin{bmatrix}1 & 4\\ 1 & 3\end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix}5 & 4\\ -1 & -1\end{bmatrix}$

(%o63)

Determine si son semejantes hallando todas las matrices de paso P.

SOLUCIÓN. A y B son semejantes si y sólo si existe una matriz invertible (regular) P tal que
B=P^(-1)AP. (1)
A la matriz P se le llama matriz de paso de A a B. Multiplicando esta igualdad a la izquierda por P, se obtiene la condición equivalente PB=AP, que puede escribirse como
AP-PB=0. (2)
Sea la matriz de paso

```
(%i64) P:matrix([x,y],[z,t]);
```

(%o64) $\begin{bmatrix}x & y\\ z & t\end{bmatrix}$

y resolvamos el sistema a que da lugar la ecuación matricial (2):

```
(%i65) A.P-P.B;
```

(%o65) $\begin{bmatrix}4z+y-4x & 2y-4x+4t\\ -2z+x+t & -4z+y+4t\end{bmatrix}$

```
(%i66) linsolve([4*z+y-4*x,2*y-4*x+4*t,-2*z+x+t,-4*z+y+4*t],[x,y,z,t]);
```

solve: dependent equations eliminated: (3 4)

(%o66) $[x=2\,\%r2-\%r1, y=4\,\%r2-4\,\%r1, z=\%r2, t=\%r1]$

Esto nos indica que hay infinitas soluciones con dos grados de libertad, las incógnitas z y t son libres y se tiene:
x=2z-t, y=4z-4t,
siempre que además se obtenga una matriz invertible, o sea que se cumpla xt-yz =! 0 (aquí =! significa distinto de). Para obtener una solución concreta basta dar valores a z y t, p.ej, z=1, t=1, siempre que resulte una matriz invertible:

```
(%i67) P:matrix([2*z-t,4*z-4*t],[z,t]);
```

(%o67) $\begin{bmatrix}2z-t & 4z-4t\\ z & t\end{bmatrix}$

(%i68) Q:P,z=1,t=1;

(%o68) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

Comprobemos que para esta matriz Q se cumple la condición de semejanza B=Q^(-1)AQ:

(%i69) Q^^(-1).A.Q;

(%o69) $\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$

EJERCICIO 3.8. Se consideran las matrices A y B siguientes:

(%i70) A:matrix([1,4],[1,3])$ B:matrix([5,-3],[3,-2])$ print("A=",A,", B=",B, " ");

$A= \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad B= \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$

(%o72)

Determine si son semejantes hallando todas las matrices de paso P.

SOLUCIÓN. Se procede como en el ejercicio anterior.
Sea la matriz de paso

(%i73) P:matrix([x,y],[z,t]);

(%o73) $\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$

y resolvamos el sistema a que da lugar (2):

(%i74) A.P-P.B;

(%o74) $\begin{bmatrix} 4z-3y-4x & 3y+3x+4t \\ -2z+x-3t & 3z+y+5t \end{bmatrix}$

(%i75) linsolve(matrix([4*z-3*y-4*x,3*y+3*x+4*t,-2*z+x-3*t,3*z+y+5*t]),[x,y,z,t]);

(%o75) []

Esto nos indica que no hay solución. Por tanto, A y B no son semejantes.

6 Diagonalización.

EJERCICIO 3.9. Se considera la matriz A siguiente:

(%i76) A:matrix([2,3,-3],[-1,0,1],[-1,1,0])$ print("A=",A, " ");

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 3 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(%o77)

Determine el valor de m en los siguiente casos:
a) El vector v=(m,0,1) es un vector propio de A.
b) El vector u=(2,m,-1) es un vector propio de A.

SOLUCIÓN. a) El vector v es un vector propio de A si existe un número k tal que Av=kv. Operando y resolviendo el sistema resultante:

(%i78) v:transpose([m,0,1]); A.v=k*v;

(%o78) $\begin{bmatrix} m \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

(%o79) $\begin{bmatrix} 2m-3 \\ 1-m \\ -m \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} k\,m \\ 0 \\ k \end{bmatrix}$

(%i80) A.v-k*v;

(%o80) $\begin{bmatrix} -k\,m+2m-3 \\ 1-m \\ -m-k \end{bmatrix}$

(%i81) solve([-k*m+2*m-3,1-m,-m-k],[k,m]);

(%o81) $[[k=-1,m=1]]$

lo cual significa que hay solución única m=1, k=-1 y que, por tanto, para m=1, se obtiene el vector v=(1,0,1) que es un autovector de A de valor propio -1.

b) Procediendo de la misma forma:

(%i82) u:transpose([2,m,-1]); A.u=k*u;

(%o82) $\begin{bmatrix} 2 \\ m \\ -1 \end{bmatrix}$

(%o83) $\begin{bmatrix} 3m+7 \\ -3 \\ m-2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2k \\ k\,m \\ -k \end{bmatrix}$

```
(%i84) A.u-k*u;
```

(%o84) $\begin{bmatrix} 3\,m-2\,k+7 \\ -k\,m-3 \\ m+k-2 \end{bmatrix}$

```
(%i85) solve([3*m-2*k+7,-k*m-3,m+k-2],[k,m]);
```

(%o85) [ ]

lo que significa que no tiene solución. Esto quiere decir que el vector (2, m, -1) no es vector propio de A para ningún valor de m.

EJERCICIO 3.10. Se considera la matriz A siguiente:

```
(%i86) A:matrix([-1,0,0,0],[3,-2,-1,2],[6,0,-3,2],[3,0,-1,0])$ print("A=",A, " ");
```

$A=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & -1 & 2 \\ 6 & 0 & -3 & 2 \\ 3 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

(%o87)

Sin usar las funciones de Maxima eigenvalues y eigenvectors, determine si es diagonalizable y en caso afirmativo halle una matriz diagonal D, una matriz de paso P y compruebe la igualdad D=P^(-1)AP. ¿Se obtiene lo mismo si se usa eigenvectors?

SOLUCIÓN. El polinomio característico es

```
(%i88) determinant(A-t*ident(4));
```

(%o88) $(-t-2)(-t-1)(2-(-t-3)\,t)$

que factorizado resulta

```
(%i89) factor(%);
```

(%o89) $(t+1)^2\,(t+2)^2$

Por tanto es claro que las raices (=valores propios) son -1 y -2 ambas con multiplicidad 2. Hallemos los subespacios propios.

· Subespacio propio asociado a -1.

(%i90) x:transpose(matrix([x1,x2,x3,x4]));
(A-(-1)*ident(4)).x;

(%o90) $\begin{bmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \\ x4 \end{bmatrix}$

(%o91) $\begin{bmatrix} 0 \\ 2\,x4-x3-x2+3\,x1 \\ 2\,x4-2\,x3+6\,x1 \\ x4-x3+3\,x1 \end{bmatrix}$

(%i92) linsolve([0,2*x4-x3-x2+3*x1,2*x4-2*x3+6*x1,x4-x3+3*x1],[x1,x2,x3,x4]);

solve: dependent equations eliminated: (1 3)

(%o92) $[x1=-\frac{\%r3-\%r4}{3}, x2=\%r3, x3=\%r4, x4=\%r3]$

Que nos permite escribir
(x1,x2,x3,x4) = ((x3-x4)/3,x4,x3,x4) = x4(-1/3,1,0,1) + x3(1/3,0,1,0).
Luego, una base de este subespacio son los vectores (-1/3,1,0,1) y (1/3,0,1,0), y por tanto es de dimensión 2.

· Subespacio propio asociado a -2.

(%i93) x:transpose(matrix([x1,x2,x3,x4]))$
(A-(-2)*ident(4)).x;

(%o94) $\begin{bmatrix} x1 \\ 2\,x4-x3+3\,x1 \\ 2\,x4-x3+6\,x1 \\ 2\,x4-x3+3\,x1 \end{bmatrix}$

(%i95) linsolve([x1,2*x4-x3+3*x1,2*x4-x3+6*x1,2*x4-x3+3*x1],[x1,x2,x3,x4]);

solve: dependent equations eliminated: (3 4)

(%o95) $[x1=0, x2=\%r6, x3=2\,\%r5, x4=\%r5]$

Que nos permite escribir
(x1,x2,x3,x4) = (0,x2,2x4,x4) = x2(0,1,0,0) + x4(0,0,2,1).
Luego, una base de este subespacio son los vectores (0,1,0,0) y (0,0,2,1), y es de dimensión 2.
Como las multiplicidades algebraicas coinciden con las dimensiones de los subespacios propios, la matriz A es diagonalizable. Una matriz de paso P y una diagonalización D son, respectivamente:

(%i96) P:transpose(matrix([-1/3,1,0,1],[1/3,0,1,0],[0,1,0,0],[0,0,2,1]));
D:matrix([-1,0,0,0],[0,-1,0,0],[0,0,-2,0],[0,0,0,-2]);

(%o96) $\begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(%o97) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

Obsérvese que esta última coincide con

(%i98) P^^(-1).A.P;

(%o98) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

Notas: 1) Si tuviéramos que comprobar "a mano" la igualdad D=P^(-1)AP, comprobaríamos que det(P)=!0 (lo que garantiza que P tiene inversa) y la igualdad
PD=AP,
y nos evitaríamos el "engorro" de hallar la inversa.
2) Como base del espacio propio asociado a -1 se pueden tomar los vectores (-1,3,0,3) y (1,0,3,0), resultantes de multiplicar los que habíamos elegido por 3, y nos evitaríamos los denominadores.

Si utilizamos la potente orden eigenvectors de Maxima, sería así de sencillo:

(%i99) eigenvectors(A);

(%o99) $[[[-2,-1],[2,2]],[[[0,1,0,0],[0,0,1,\frac{1}{2}]],[[1,0,3,0],[0,1,1,1]]]]$

Como se ve, se obtienen claro está los mismos valores propios -2 y -1 con las mismas multiplicidades que habíamos hallado. La base del subespacio propio de -2 es prácticamente la misma (un vector está dividido entre 2) y la base del subsepacio propio de -1 cambia un vector. Esto es lógico, pues no tiene por qué obtenerse exactamente la misma base, ya que un espacio tiene infinitas bases.