FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS DE LAS TTII. Cód. 71021023
Grado en Ingeniería de las Tecnologías de la Información
Primera semana de Febrero de 2017. Tiempo: 2 horas

INSTRUCCIONES. Cada una de las preguntas tiene un valor máximo de 2 puntos. Sólo está permitido una calculadora no programable. No entregue esta hoja con los enunciados.

1. En el espacio vectorial $\mathbb{R}^4$ se considera el subespacio vectorial

$$U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : \ x_1+x_2+2x_3 = 0, \ x_2+x_3+2x_4 = 0, \ 2x_1+x_2+3x_3-2x_4 = 0\}.$$

(a) Encuentre una base de U e indique su dimensión. *(1.5 puntos)*

(b) Determine las coordenadas del vector $\bar{v} = (0, -4, 2, 1)$ de U respecto de la base anterior. *(0.5 puntos)*

2. Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Se sabe que $\lambda = 2$ y $\lambda = -1$ son valores propios de multiplicidades 2 y 1, respectivamente. Estudie si A es diagonalizable y, en su caso, encuentre una diagonalización y una matriz de paso. *(2 puntos)*

3. Sea la función $f(x) = \dfrac{e^x}{x-1}$.

(a) Determine las asíntotas verticales y oblicuas de f (si alguna no existe se debe justificar). *(1 punto)*

(b) Determine los intervalos de crecimiento y, sin hacer más cálculos, deduzca los máximos y mínimos relativos de f. *(1 punto)*

4. Se considera la función

$$f(x, y) = \ln(1 + xy^2),$$

donde ln significa logaritmo neperiano.

(a) Determine el plano tangente a la gráfica de f en el punto $(1, 1)$ y la derivada de f en $(1, 1)$ en la dirección del vector $\bar{u} = \left(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2\right)$. *(1.5 puntos)*

(b) Calcule

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y).$$

(0.5 puntos)

5. Se consideran las siguientes integrales reiteradas:

$$I = \int_0^1 \int_{y^2}^1 \frac{1}{x+1} dx dy.$$

(a) Dibuje el dominio de integración de la correspondiente integral doble y exprese I mediante integrales reiteradas en el orden inverso. *(0.5 puntos)*

(b) Calcule el valor de I. *(1.5 puntos)*

SOLUCIONES. FMTI. Primera semana de Febrero de 2017.

1. (a) Vamos a llevar el sistema de ecuaciones que define U a la forma escalonada

$$\left\{\begin{array}{rl} x_1+x_2+2x_3 & =0 \\ x_2+x_3+2x_4 & =0 \\ 2x_1+x_2+3x_3-2x_4 & =0 \end{array}\right. \stackrel{(1)}{\rightarrow} \left\{\begin{array}{rl} x_1+x_2+2x_3 & =0 \\ x_2+x_3+2x_4 & =0 \\ -x_2-x_3-2x_4 & =0 \end{array}\right.$$

$$\stackrel{(2)}{\rightarrow} \left\{\begin{array}{l} x_1=-x_2-2x_3=-x_3+2x_4 \\ x_2=-x_3-2x_4 \end{array}\right.$$

(1) $E_3 \to E_3 - 2E_1$. (2) Se suprime E_3 porque es equivalente a E_2 y se despejan x_1 y x_2 en función de x_3, x_4.

Por tanto, los vectores de U son todos los de la forma

$$(x_1,x_2,x_3,x_4)=(-x_3+2x_4,-x_3-2x_4,x_3,x_4)=x_3(-1,-1,1,0)+x_4(2,-2,0,1). \qquad (1)$$

Una base de U es $B=\{\bar{u}_1=(-1,-1,1,0),\ \bar{u}_2=(2,-2,0,1)\}$ y su dimensión es 2.

(b) Teniendo en cuenta la expresión (1), las coordenadas del vector $\bar{v}=(0,-4,2,1)$ en la base B son justamente su tercera y cuarta componentes, esto es, se tiene que

$$\bar{v}=(0,-4,2,1)=2\bar{u}_1+\bar{u}_2,$$

por lo que las coordenadas de $\bar{v}$ en la base B son $(2,1)$.

2. Para que sea diagonalizable A, puesto que es de orden 3 y la única raíz doble del polinomio característico es 2 es suficiente que el espacio propio asociado al valor propio 2, $E(2)$, sea de dimensión 2. Hallemos $E(2)$ resolviendo el sistema $(A-2I)X=\bar{0}$:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \left\{\begin{array}{r} -x+y+z=0 \\ x-y-z=0 \\ x-y-z=0 \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=y+z \\ y,z \text{ libres} \end{array}\right.$$

Por tanto, los vectores de $E(2)$ son todos los de la forma

$$(x,y,z)=(y+z,y,z)=y(1,1,0)+z(1,0,1),$$

y se sigue que $\{\bar{e}_1=(1,1,0),\ \bar{e}_2=(1,0,1)\}$ es una base. Luego $E(2)$ es de dimensión 2 y, en consecuencia, A es diagonalizable. Una diagonalización de A es la matriz

$$D=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Para obtener una matriz de paso, se calcula una base del espacio propio $E(-1)$ resolviendo el sistema $(A+I)X=\bar{0}$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \left\{\begin{array}{r} 2x+y+z=0 \\ x+2y-z=0 \\ x-y+2z=0 \end{array}\right. \stackrel{(1)}{\rightarrow} \left\{\begin{array}{r} -3y+3z=0 \\ x+2y-z=0 \\ -3y+3z=0 \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{l} y=z \\ x=-z \end{array}\right.$$

(1) $E_1 \to E_1 - 2E_2$, $E_3 \to E_3 - E_2$.

Por tanto, los vectores de $E(-1)$ son todos los de la forma

$$(x, y, z) = (-z, z, z) = z(-1, 1, 1),$$

y se sigue que $\{\bar{e}_3 = (-1, 1, 1)\}$ es una base.

En consecuencia, una base en la que A diagonaliza es $\{\bar{e}_1,\ \bar{e}_2,\ \bar{e}_3\}$ y la matriz de paso es la que tiene por columnas a estos vectores:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. (a) Las asíntotas verticales (AV) hay que buscarlas en los puntos de discontinuidad de f, y es claro que el único que tiene es $x = 1$. Como el $\lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$ y $\lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$, se sigue que $x = 1$ es AV.

Para hallar la asíntota oblicua $y = mx + n$, se utiliza la cuestión teórica 4.34(c) del libro de ejercicios resueltos:

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2 - x} \overset{\text{l'Hôp}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{2x - 1} \overset{\text{l'Hôp}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{2} = +\infty.$$

Como no es finito, se concluye que no hay asíntota oblicua ni tampoco horizontal (que es la oblicua cuando $m = 0$) cuando $x \to +\infty$.

Por otro lado, como $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{e^x}{x-1} = 0$, se sigue que $y = 0$ es asíntota horizontal cuando $x \to -\infty$.

(b) La derivada de f es $f'(x) = \dfrac{(x-2)e^x}{(x-1)^2}$. Esta función f' presenta una discontinuidad en $x = 1$ y tiene una única raíz en $x = 2$. Teniendo esto en cuenta, hacemos la siguiente tabla para el estudio del crecimiento:

	$(-\infty, 1)$	$(1, 2)$	$(2, +\infty)$
f' es	$-$	$-$	$+$
f es	decrec. $\searrow$	decrec. $\searrow$	crec. $\nearrow$

Como f es continua en $x = 2$, se deduce que f tiene un mínimo relativo en $x = 2$.

4. (a) Las derivadas parciales de f son

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{y^2}{1 + xy^2},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{2xy}{1 + xy^2}.$$

Evaluadas en $(1, 1)$, se tiene que $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 1) = 1/2$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(1, 1) = 1$. Luego $\nabla f(1, 1) = (1/2, 1)$. La ecuación del plano tangente en (x_0, y_0) es (véase la cuestión teórica 5.35 del libro de ejercicios resueltos):

$$z = f(x_0, y_0) + \nabla f(x_0, y_0) \cdot (x - x_0, y - y_0) \Rightarrow z = \ln 2 + \left(\tfrac{1}{2}, 1\right) \cdot (x - 1, y - 1)$$
$$\Rightarrow z = \ln 2 - \tfrac{3}{2} + \tfrac{1}{2}x + y.$$

La derivada direccional, de acuerdo con la cuestión teórica 5.39 del libro de ejercicios resueltos, es:

$$D_{\bar{u}}f(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot \bar{u} \Rightarrow D_{\bar{u}}f(1,1) = \left(\tfrac{1}{2}, 1\right) \cdot \left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}, \tfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \tfrac{3\sqrt{2}}{4}.$$

(b) Derivando respecto a y la función $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{y^2}{1+xy^2}$, se obtiene:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = \frac{2y(1 + xy^2) - y^2(2xy)}{(1 + xy^2)^2} = \frac{2y}{(1 + xy^2)^2}.$$

5. (a) El dominio de integración es

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; 0 \leq y \leq 1, \; y^2 \leq x \leq 1\}$$

y se ha representado en la figura 1.

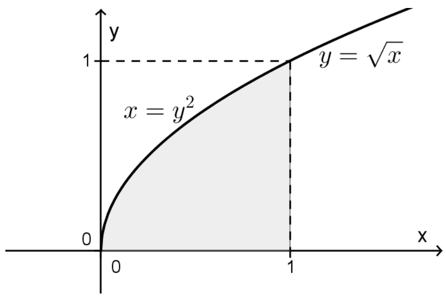

Fig. 1. Dominio de integración D.

Para invertir el orden de integración, se despeja y en la ecuación $x = y^2$ y resulta $y = \sqrt{x}$. Teniendo en cuenta la figura se deduce que

$$I = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{x}} \frac{1}{x+1} dydx.$$

(b) Para calcular I usamos el orden de integración dado en la expresión anterior, por lo que

$$I = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{x}} \frac{1}{x+1} dydx = \int_0^1 \left[\frac{y}{x+1}\right]_0^{\sqrt{x}} dx = \int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{x+1} dx.$$

En esta última integral, se hace el cambio de variable $\sqrt{x} = t$, con lo cual, $x = t^2$, $dx = 2tdt$, el intervalo de integración pasa de ser $0 \leq x \leq 1$ a $0 \leq t \leq 1$, y resulta la integral

$$I = \int_0^1 \frac{t}{t^2+1} 2tdt = 2 \int_0^1 \frac{t^2}{t^2+1} dt.$$

Haciendo la división de t^2 entre $t^2 + 1$ resulta 1 de cociente y -1 de resto, por lo que

$$I = 2 \int_0^1 \left(1 + \frac{-1}{t^2+1}\right) dt = 2 \left[t - \operatorname{arc\,tg} t\right]_0^1 = 2\left(1 - \frac{\pi}{4}\right) = 2 - \frac{\pi}{2} \simeq 0{,}4292.$$