5. FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

1 Definición de una función de varias variables

Las funciones de varias variables se definen igual que las de una sóla variable:
1) Con el operador de asignación ':='.
Por ejemplo,
f(x,y):=x^2+y^2 (en este caso, f es una función escalar)
g(x,y):=[x^2+y, x*y] (aquí g es una función vectorial)
2) Con el comando 'define'.
Por ejemplo,
define(f(x,y), x^2+y^2).
define(g(x,y), [x^2+y, x*y]).

EJEMPLO 5.1. Defínase la función h(x,y)=(x^2+xy-2y^2, xy) utilizando los dos procedimientos anteriores y evalúese en el punto (5,-3).

(%i1) h(x,y):=[x^2+x*y-2*y^2,x*y]; h(5,-3);

(%o1) $h(x,y):=[x^2+x\,y+(-2)\,y^2,x\,y]$

(%o2) $[-8,-15]$

(%i3) define(h(x,y),[x^2+x*y-2*y^2,x*y]); h(5,-3);

(%o3) $h(x,y):=[-2\,y^2+x\,y+x^2,x\,y]$

(%o4) $[-8,-15]$

Al igual que sucede con las funciones de una variable real, en ocasiones es necesario utilizar el comando 'define' en lugar del operador ':=' para definir una función, como se pone de manifiesto en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 5.2. Sea f(x,y)=x^2+xy-2y^2. Defínase la función
g(x,y)=f(x,y)/(x-y)
y evalúese en el punto (1,1).

(%i5) f(x,y):=x^2+x*y-2*y^2;

(%o5) $f(x,y):=x^2+x\,y+(-2)\,y^2$

Definiendo g como la expresión simplificada de f(x,y)/(x-y) mediante el operador ':=' resulta

(%i6) g(x,y):=ratsimp(f(x,y)/(x-y)); g(1,1);

(%o6) $g(x,y):=\mathrm{ratsimp}\left(\frac{f(x,y)}{x-y}\right)$

expt: undefined: 0 to a negative exponent.
#0: g(x=1,y=1)
-- an error. To debug this try: debugmode(true);

Al evaluar en (1,1) da error ya que en este punto se anula el denominador de g al no haberse simplificado la función. Sin embargo, utilizando el comando 'define' se soluciona el problema:

(%i8) define(g(x,y), ratsimp(f(x,y)/(x-y))); g(1,1);

(%o8) $g(x,y):=2\,y+x$

(%o9) 3

2 Gráficas de funciones de varias variables

Para dibujar gráficas, los comandos más utilizados son plot3d (wxplot3d) y draw3d (wxdraw3d).

El comando plot3d se puede ejecutar también desde Gráficos > Gráficos 3D. Tiene asociados cuatro formatos: 'predeterminado', 'gnuplot', 'openmath' y 'en línea'. La elección del formato se realiza desde la ventana de Gráficos 3D.

Si se utilizan los formatos 'predeterminado', 'gnuplot' u 'openmath' se abre una nueva ventana en la que se representa la gráfica y se permite girar la misma para encontrar la perspectiva más conveniente.

Si se utiliza el formato 'en línea', entonces la gráfica aparece representada en la misma ventana de trabajo de Maxima y no se permite realizar movimientos. La instrucción plot3d utilizando el formato 'en línea' es equivalente a la instrucción wxplot3d.

EJEMPLO 5.3. (a) Represéntese la función

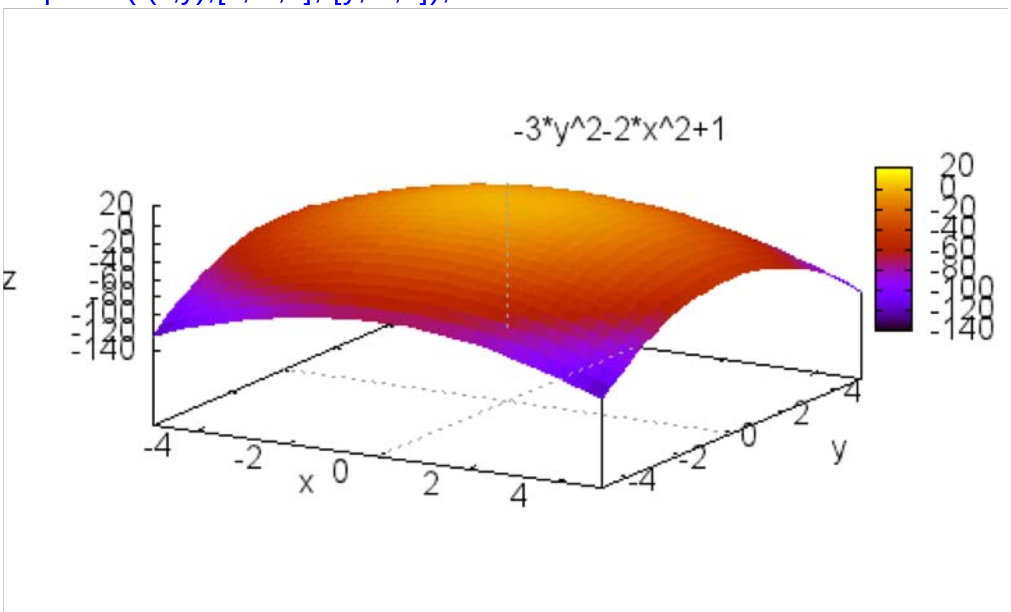
f(x,y)=1-2x^2-3y^2,

en el rango de valores -5<=x<=5 y -5<=y<=5, utilizando la instrucción wxplot3d.

(%i10) f(x,y):=1-2*x^2-3*y^2;

(%o10) $f(x,y):=1-2\,x^{2}+(-3)\,y^{2}$

(%i11) wxplot3d(f(x,y),[x,-5,5], [y,-5,5]);

(%t11) 

(%o11)

Si se quiere dibujar una gráfica con draw3d, es necesario cargar previamente el paquete draw ejecutando la instrucción load(draw).

Si se utiliza draw3d se abre una nueva ventana que permite girar la gráfica y si se ejecuta wxdraw3d la gráfica aparece en la misma página de trabajo de Maxima y no se permite girarla para cambiar la perspectiva.

El comando draw3d permite dibujar gráficas de funciones expresadas de forma explícita (con el comando 'explicit') e implícita (con el comando 'implicit').
En el Ejemplo 4.4 se muestran estos dos casos.

Otras opciones interesantes asociadas al comando wxdraw3d son:

user_preamble="set size ratio 1": Para obtener la misma unidad en los ejes x,y.
proportional_axes='xy: Para que los ejes x e y sean proporcionales.
proportional_axes='xyz: Para que los ejes x,y,z sean proporcionales (utilizar con 'explicit').

EJEMPLO 5.4. (a) Represéntese la función
f(x,y)=x^3-y^2-2xy
en el rango de valores -10<=x<=10, -10<=y<=10.

(b) Represéntese la esfera de centro (0,0,0) y de radio 4.

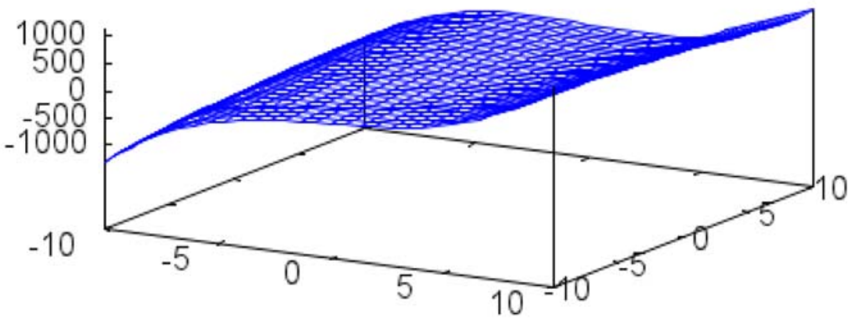
```
(%i12) load(draw);
Loading C:/Users/user/maxima/binary/binary-gcl/share/draw/grcommon.o
Finished loading C:/Users/user/maxima/binary/binary-gcl/share/draw/grcommon.o
Loading C:/Users/user/maxima/binary/binary-gcl/share/draw/gnuplot.o
Finished loading C:/Users/user/maxima/binary/binary-gcl/share/draw/gnuplot.o
Loading C:/Users/user/maxima/binary/binary-gcl/share/draw/vtk.o
Finished loading C:/Users/user/maxima/binary/binary-gcl/share/draw/vtk.o
Loading C:/Users/user/maxima/binary/binary-gcl/share/draw/picture.o
Finished loading C:/Users/user/maxima/binary/binary-gcl/share/draw/picture.o
(%o12) C:/PROGRA~1/MAXIMA~1.0/share/maxima/5.30.0/share/draw/draw.lisp
```

(a) Se define la función f. Como esta función está expresada de forma explícita, es decir, la variable z (=f(x,y)) está despejada en función de las variables x e y, para dibujarla se utiliza la instrucción 'explicit'.

(%i13) f(x,y):= x^3-y^2-2*x*y;
wxdraw3d(user_preamble="set size ratio 1", explicit(f(x,y),x,-10,10,y,-10,10));

(%o13) $f(x,y):=x^3-y^2+(-2)\,x\,y$

(%t14)

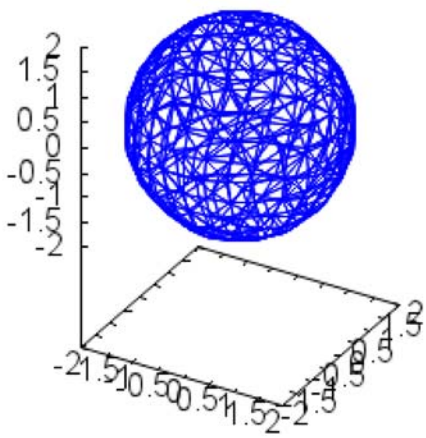


(%o14)

(b) La esfera de centro (0,0,0) y de radio 4 tiene ecuación x^2+y^2+z^2=4. En este caso, la variable z no está despejada en función de las variables x e y, es decir, la esfera se ha definido de forma implícita. Para dibujarla, se utiliza el comando 'implicit'.

(%i15) wxdraw3d(implicit(x^2+y^2+z^2=4, x,-2,2,y,-2,2,z,-2,2), proportional_axes='xyz);

(%t15)



(%o15)

3 Derivación de funciones de varias variables

Se utiliza el comando diff, al igual que para funciones de una variable real. Por ejemplo, para una función f(x,y), la instrucción

diff(f(x,y),x,n1,y,n2),

proporciona la derivada de f(x,y) con respecto a x n1 veces y con respecto a y n2 veces.

EJEMPLO 5.5. Calcule la derivada de la función f(x,y)=x^4+2x^3y-3y^2 con respecto a la variable x dos veces y con respecto a la variable y una vez.

```
(%i16) define(f(x,y), x^4+2*x^3*y-3*y^2);
       diff(f(x,y),x,2,y,1);
```

(%o16) $f(x,y):=-3\,y^2+2\,x^3\,y+x^4$

(%o17) $12\,x$

Observe que diff(f(x,y),x,2,y,1) es equivalente a:

```
(%i18) diff(f(x,y),x,2); diff(%,y,1);
```

(%o18) $12\,x\,y+12\,x^2$

(%o19) $12\,x$

4 Gradiente/matriz jacobiana de una función de varias variables

Para determinar el gradiente/matriz jacobiana de una función f de varias variables se utiliza el comando jacobian. Se distinguen dos casos:

Si la función f es real, por ejemplo, f(x,y)=x^2+y^2, la instrucción

jacobian([f(x,y)],[x,y])

proporciona el gradiente de f (Obsérvese que es obligatorio poner a la función entre corchetes).

Si la función f tiene dos o más funciones componentes, por ejemplo, f(x,y)=(f1(x,y), f2(x,y)), donde f1(x,y)=x^2+y^2 y f2(x,y)=xy, la instrucción

jacobian([f1(x,y), f2(x,y)],[x,y])

determina la matriz jacobiana de f.

EJEMPLO 5.6. Determínese el gradiente de la función f(x,y,z)=xln(z^2+1)+2x^2y^2 en el punto (2,1,0).

```
(%i20) define(f(x,y,z), x*log(z^2+1)+2*x^2*y^2);
       define(Gf(x,y,z), jacobian([f(x,y,z)],[x,y,z]));
       Gf(2,1,0);
```

(%o20) $f(x,y,z):=x\log(z^2+1)+2x^2y^2$

(%o21) $Gf(x,y,z):=\begin{bmatrix}\log(z^2+1)+4xy^2 & 4x^2y & \dfrac{2xz}{z^2+1}\end{bmatrix}$

(%o22) $\begin{bmatrix}8 & 16 & 0\end{bmatrix}$

Obsérvese que otra forma de calcular el gradiente de f es utilizando el comando diff para las derivadas parciales con respecto a cada una de las variables:

```
(%i23) define(Gf(x,y,z), [diff(f(x,y,z),x,1), diff(f(x,y,z),y,1),diff(f(x,y,z),z,1)]);
```

(%o23) $Gf(x,y,z):=[\log(z^2+1)+4xy^2, 4x^2y, \dfrac{2xz}{z^2+1}]$

EJEMPLO 5.7. Obténgase la matriz jacobiana de la función f(x,y)=(yx^2, y^3-2x)
en el punto (0,1).

```
(%i24) define(f1(x,y), y*x^2); define(f2(x,y), y^3-2*x);  define(f(x,y), [f1(x,y), f2(x,y)]);
       define(Jf(x,y),jacobian(f(x,y), [x,y]));
       Jf(0,1);
```

(%o24) $f1(x,y):=x^2y$

(%o25) $f2(x,y):=y^3-2x$

(%o26) $f(x,y):=[x^2y, y^3-2x]$

(%o27) $Jf(x,y):=\begin{bmatrix}2xy & x^2\\ -2 & 3y^2\end{bmatrix}$

(%o28) $\begin{bmatrix}0 & 0\\ -2 & 3\end{bmatrix}$

5 Matriz Hessiana de una función real de varias variables

La matriz Hessiana de una función real de varias variables se obtiene con el comando hessian.
Por ejemplo, para una función real f(x,y), la matriz hessiana de f se obtiene ejecutando la instrucción

hessian(f(x,y), [x,y]).

EJEMPLO 5.8. Determínese la matriz hessiana de la función f(x,y)=xy^2-y^3 en
el punto (1,1).

```
(%i29) define(f(x,y), x*y^2-y^3);
       define(Hf(x,y),hessian(f(x,y),[x,y]));
       Hf(1,1);
```

(%o29) $f(x,y):=x\,y^2-y^3$

(%o30) $Hf(x,y):=\begin{bmatrix}0 & 2\,y\\ 2\,y & 2\,x-6\,y\end{bmatrix}$

(%o31) $\begin{bmatrix}0 & 2\\ 2 & -4\end{bmatrix}$