FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS DE LAS TTII. Cód. 71021023
Grado en Ingeniería de las Tecnologías de la Información
Prueba de evaluación continua núm. 2 (**PEC-2**),
Funciones de una y varias variables. 14 al 16 de Enero, 2014.

INSTRUCCIONES.
• Antes de enviar sus respuestas lea el documento "NormasdeRealizaciondelaPEC-2.pdf", que está en la carpeta PEC dentro de Documentos.
• Antes de acceder al envío de soluciones escriba en papel sus respuestas.

1. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida como:

$$f(x) = \begin{cases} x(x+1) & \text{si } x \le 0 \\ \ln(x+1) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Indique la opción correcta:
(a) La función f es derivable en $x = 0$.
(b) La función f es continua en $x = 0$, pero no derivable en este punto.
(c) La función f no es continua en $x = 0$.
(d) Ninguna de las anteriores.

2. Sea $f(x) = x^3 e^x$. Indique la opción correcta:
(a) f tiene un mínimo relativo y un máximo relativo en $\mathbb{R}$.
(b) La función f no tiene asíntotas.
(c) El resto de Lagrange asociado al polinomio de Mac Laurin de orden 2 de f es $R_2(x) = e^c x^3$, donde c es un valor comprendido entre 0 y x.
(d) Ninguna de las anteriores.

3. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función definida como:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{y^2(e^x-1)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Indique la opción correcta:
(a) f es continua en $\mathbb{R}$.
(b) La derivada parcial de f con respecto a x en $(0,0)$ no existe.
(c) $D_{(2,1)}f(1,1) = \frac{e}{2}$.
(d) Ninguna de las anteriores.

4. Sean las funciones $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definidas como

$$f(x,y) = x^2 \operatorname{sen}(\pi xy), \qquad g(u,v) = (uv, 2u - v).$$

Indique la opción correcta:
(a) El plano tangente a la gráfica de f en $(1,1)$ es $z = -2\pi x - \pi y + 3\pi$.
(b) $\nabla(f \circ g)(1,1) = (-3\pi, 0)$.
(c) El plano tangente a la gráfica de $f \circ g$ en $(1,1)$ es $w = -3\pi u - 3\pi v + 3\pi$.
(d) Ninguna de las anteriores.

5. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función definida como

$$f(x, y) = y^3 - ay^2 - x^2 + 3,$$

donde $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Indique la opción correcta:
(a) f tiene como único punto crítico el $(0, 0)$.
(b) Si $a > 0$, el punto $(0, 0)$ es un máximo relativo.
(c) Si $a < 0$, el punto $(0, 0)$ es un mínimo relativo.
(d) Ninguna de las anteriores.

NOTAS: (A) Si por error alguna pregunta tuviera dos opciones correctas, se deberá responder con la primera que sea correcta en el orden alfabético. Por ejemplo, si en una pregunta fueran ciertas (b) y (c), en la aplicación se deberá responder (b), y sólo se considerará como válida esta respuesta.
(B) Se puede usar Maxima, y se recomienda usarlo especialmente en los ejercicios que tienen mucho cálculo.

SOLUCIONES. Prueba de evaluación continua núm. 2 (**PEC-2**). Enero-2014.

RESUMEN: Las soluciones del test son: 1 (a), 2 (d), 3 (a), 4 (b), 5 (b).

A continuación se hace la resolución detallada.

1. La función f está definida a trozos por las funciones $f_1, f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por $f_1(x) = x(x+1)$ y $f_2(x) = \ln(x+1)$. La función f_1 es derivable en $\mathbb{R}$ por ser polinómica, luego en particular f_1 es derivable en $(-\infty, 0)$. A su vez, el dominio de f_2 es el conjunto de los puntos x tales que $x+1 > 0$, es decir, $\text{dom} f_2 = (-1, +\infty)$ y en ese dominio es claro que f_2 es derivable. Así pues, en particular f_2 es derivable en $(0, +\infty)$. Por todo lo anterior, f es derivable y por tanto continua en $\mathbb{R}$ salvo quizá en el punto de unión $x = 0$.

A continuación, se analiza la derivabilidad en $x = 0$. Puesto que f está definida de diferente forma a la izquierda y a la derecha de este punto, hay que estudiar los límites laterales

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}, \quad \lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}.$$

En el límite por la izquierda, h se aproxima hacia 0 tomando valores negativos. Por consiguiente, $f(h) = f_1(h) = h(h+1)$, resultando que

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{h(h+1) - 0}{h} = \lim_{h\to 0^-} (h+1) = 1.$$

De modo análogo, en el límite por la derecha, h se aproxima hacia 0 tomando valores positivos, por lo que $f(h) = f_2(h) = \ln(h+1)$, resultando

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\ln(h+1)}{h}.$$

En el límite anterior se obtiene una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$. Es claro que se satisfacen las condiciones para aplicar la regla de L'Hôpital, por lo tanto

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{\ln(h+1)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h+1} = 1.$$

Como los límites laterales coinciden, se deduce que f es derivable y por consiguiente continua en $x = 0$ y $f'(0) = 1$.

Por tanto, la opción correcta es (a). En la Figura 1 se muestra la gráfica de f. Como se puede observar, en las proximidades del punto $x = 0$ la función cambia de forma suave, lo que indica que f es derivable en $x = 0$, como se ha demostrado.

2. La función f es producto de un polinomio con la función exponencial, que son funciones derivables en $\mathbb{R}$. Por tanto, f es derivable en $\mathbb{R}$ y su derivada es

$$f'(x) = e^x x^2 (3+x).$$

Así pues, $f'(x) = 0$ si y sólo si $x^2(3+x) = 0$, por lo que los puntos críticos de f son $x_1 = 0$ y $x_2 = -3$. Por otra parte, es claro que $f'(x) < 0$ si $3 + x < 0$ o, equivalentemente, si $x \in (-\infty, -3)$, y $f'(x) > 0$ si $x \in (-3, 0) \cup (0, +\infty)$. Por consiguiente, por la Proposición 3.16 de la página 159 del libro de texto, f es estrictamente decreciente en $(-\infty, -3)$ y creciente en $(-3, +\infty)$, deduciéndose que en $x = -3$ hay un mínimo relativo con valor $f(-3) = -27e^{-3}$, ya que en este punto la función pasa de ser decreciente a ser creciente,

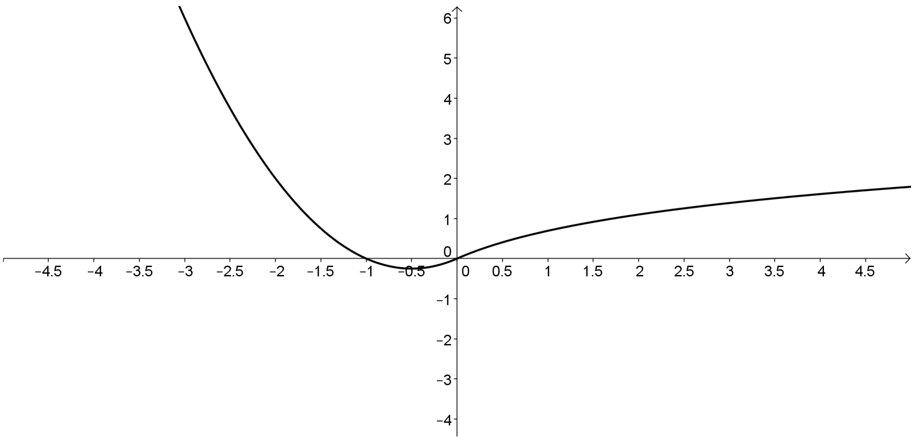

Figura 1: Función a trozos.

y en $x = 0$ hay un punto de inflexión o punto de silla, puesto que la función no cambia su monotonía en las proximidades de este punto (aunque sí su curvatura). Además, obsérvese que del estudio del crecimiento y decrecimiento de f y puesto que la función es continua en $\mathbb{R}$, se deduce que $f(-3) \leq f(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$, por lo que el punto $x = -3$ es, de hecho, el mínimo absoluto de f. Así pues, la opción (a) es incorrecta.

Por otra parte, se tiene que

$$\begin{aligned} \lim_{x\to-\infty} f(x) &= \lim_{x\to-\infty} x^3e^x = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3}{e^{-x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{3x^2}{-e^{-x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{6x}{e^{-x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{6}{-e^{-x}} \\ &= \frac{6}{-e^{+\infty}} = \frac{6}{-\infty} = 0. \end{aligned}$$

En el cálculo de este límite se ha expresado la función como $\frac{x^3}{e^{-x}}$ para obtener una indeterminación del tipo $\frac{-\infty}{+\infty}$ y de este modo poder aplicar la regla de L'Hôpital, la cual se ha utilizado, en este caso, tres veces consecutivas. Por consiguiente, la recta $y = 0$ es una asíntota horizontal de f, siendo la opción (b) incorrecta. En la Figura 2 se muestra la gráfica de f.

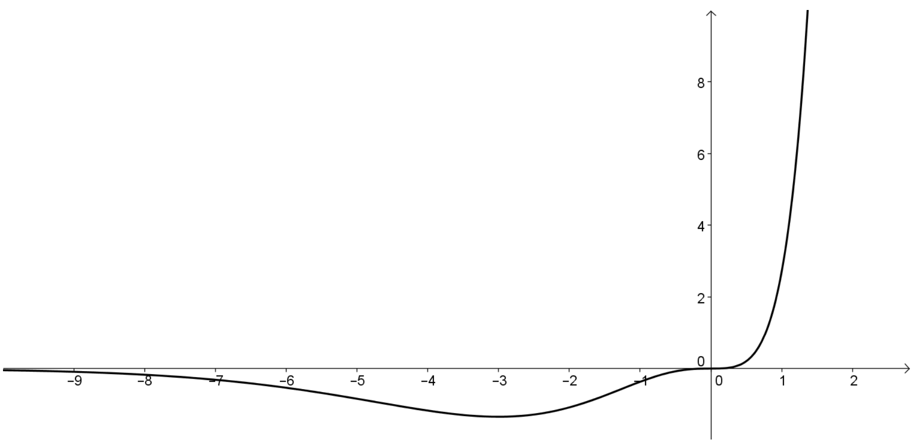

Figura 2: Gráfica de $f(x) = x^3e^x$.

Por último, el resto de Lagrange de orden 2 viene dado por (véase Definición 3.24 de la página 171 del libro de texto)

$$R_2(x) = \frac{f'''(c)}{3!}x^3,$$

donde c es un valor comprendido entre 0 y x. Derivando,

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^x(x^3+3x^2),\\ f''(x) &= e^x(x^3+6x^2+6x),\\ f'''(x) &= e^x(x^3+9x^2+18x+6). \end{aligned}$$

Luego

$$R_2(x) = \frac{e^c(c^3+9c^2+18c+6)}{6}x^3,$$

para c comprendido entre 0 y x, y la opción (c) es incorrecta. Por tanto, la opción correcta es la (d).

3. La función es continua en $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ por ser cociente de funciones continuas en $\mathbb{R}^2$ y no anularse el denominador. Para estudiar la continuidad de f en el punto $(0,0)$ hay que ver si existe $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ y este límite coincide con $f(0,0)=0$. Obsérvese que

$$0 \le \left|\frac{y^2(e^x-1)}{x^2+y^2}\right| \le \left|\frac{y^2(e^x-1)}{y^2}\right| = |e^x-1|.$$

En la segunda desigualdad se ha utilizado que $x^2+y^2 \ge y^2$. Como $\lim_{(x,y)\to(0,0)} |e^x-1| = 0$, por la regla del emparedado (véase página 206 del libro de texto), se deduce que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$, luego f es continua en $\mathbb{R}$, siendo la opción (a) correcta.

Por otro lado, se tiene que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{0^2(e^h-1)}{h^2+0^2}-0}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0.$$

Por tanto, la opción (b) es incorrecta.

Finalmente, es claro que f es diferenciable en $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ por ser cociente de funciones diferenciables en $\mathbb{R}^2$ y no anularse el denominador. Luego, en particular, f es diferenciable en el punto $(1,1)$ y se satisface que $D_{(2,1)}f(1,1) = \nabla f(1,1)\cdot(2,1)$ (véase Teorema 4.11 del documento de ejercicios resueltos del capítulo 4 colgado en el curso virtual). Para $(x,y)\in\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{y^2e^x(x^2+y^2)-y^2(e^x-1)2x}{(x^2+y^2)^2},\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \frac{2y(e^x-1)(x^2+y^2)-y^2(e^x-1)2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2x^2y(e^x-1)}{(x^2+y^2)^2}. \end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = \frac{1}{2}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = \frac{e-1}{2}$$

y

$$D_{(2,1)}f(1,1) = \left(\frac{1}{2},\frac{e-1}{2}\right)\cdot(2,1) = \frac{1}{2}\cdot 2 + \frac{e-1}{2}\cdot 1 = \frac{e+1}{2},$$

siendo la opción (c) incorrecta.

4. La función f es diferenciable en $\mathbb{R}^2$ por ser producto de funciones diferenciables en $\mathbb{R}^2$. Así pues, existen las derivadas parciales de f en todo punto de $\mathbb{R}^2$ y éstas son

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x\,\mathrm{sen}(\pi xy) + \pi x^2 y\cos(\pi xy), \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \pi x^3\cos(\pi xy).$$

Por tanto,

$$\nabla f(1,1) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(1,1), \frac{\partial f}{\partial y}(1,1)\right) = (-\pi, -\pi)$$

y la ecuación del plano tangente a f en $(1,1)$ es

$$\begin{aligned} &z = f(1,1) + \nabla f(1,1)\cdot(x-1, y-1) \iff \\ &z = 0 - \pi(x-1) - \pi(y-1) \iff \\ &z = -\pi x - \pi y + 2\pi, \end{aligned}$$

por lo que la opción (a) es incorrecta.

Con respecto a la opción (b), puesto que las funciones componentes de g: $g_1(u,v) = uv$ y $g_2(u,v) = 2u - v$ son diferenciables en $\mathbb{R}^2$, y en particular en $(1,1)$, y f es diferenciable en $\mathbb{R}^2$, y en particular en $g(1,1) = (g_1(1,1), g_2(1,1)) = (1,1)$, por la regla de la cadena (véase página 233 del libro de texto) la función $f\circ g$ es diferenciable en $(1,1)$ y se tiene que

$$\nabla(f\circ g)(1,1) = \nabla f(g_1(1,1), g_2(1,1))\cdot\begin{pmatrix}\nabla g_1(1,1)\\ \nabla g_2(1,1)\end{pmatrix} = \nabla f(1,1)\cdot\begin{pmatrix}\nabla g_1(1,1)\\ \nabla g_2(1,1)\end{pmatrix}.$$

Calculando,

$$\begin{aligned} \nabla g_1(u,v) &= \left(\frac{\partial g_1}{\partial u}(u,v), \frac{\partial g_1}{\partial v}(u,v)\right) = (v,u), \\ \nabla g_2(u,v) &= \left(\frac{\partial g_2}{\partial u}(u,v), \frac{\partial g_2}{\partial v}(u,v)\right) = (2,-1). \end{aligned}$$

Por tanto, $\nabla g_1(1,1) = (1,1)$, $\nabla g_2(1,1) = (2,-1)$ y

$$\nabla(f\circ g)(1,1) = \nabla f(1,1)\cdot\begin{pmatrix}\nabla g_1(1,1)\\ \nabla g_2(1,1)\end{pmatrix} = (-\pi,-\pi)\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix} = (-3\pi, 0).$$

Así pues, la opción correcta es la (b). Por último, el plano tangente a la gráfica de $f\circ g$ en el punto $(1,1)$ viene dado por

$$\begin{aligned} &w = (f\circ g)(1,1) + \nabla(f\circ g)(1,1)(u-1, v-1), \\ &w = f(g(1,1)) + \nabla(f\circ g)(1,1)(u-1, v-1), \\ &w = 0 + (-3\pi, 0)\cdot(u-1, v-1), \\ &w = -3\pi u + 3\pi. \end{aligned}$$

5. La función f es diferenciable en $\mathbb{R}^2$ por ser polinómica. Los extremos relativos de f, si existen, son en particular puntos críticos (véase página 248 del libro de texto). Dichos puntos son solución del sistema (véase Definición 4.23 de la página 246 del libro de texto):

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -2x = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3y^2 - 2ay = 0. \end{array}\right.$$

De la primera ecuación se deduce que $x = 0$. Por otra parte, la segunda ecuación tiene por soluciones $y = 0$ e $y = \frac{2a}{3}$, luego se obtienen los puntos críticos $(0,0)$ y $\left(0, \frac{2a}{3}\right)$. Para clasificar los puntos críticos obtenidos, se analiza la matriz Hessiana en cada uno de ellos. En un punto genérico $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, la matriz Hessiana de f es

$$\mathrm{H}f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 6y - 2a \end{pmatrix}.$$

En particular, en el punto $(0,0)$ se tiene que

$$\mathrm{H}f(0,0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2a \end{pmatrix},$$

luego $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = -2 < 0$ y $|\mathrm{H}f(0,0)| = 4a$.
En el punto $\left(0, \frac{3a}{2}\right)$ resulta

$$\mathrm{H}f\left(0, \frac{3a}{2}\right) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 7a \end{pmatrix},$$

y por tanto $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(0, \frac{3a}{2}\right) = -2 < 0$ y $|\mathrm{H}f\left(0, \frac{3a}{2}\right)| = -14a$.
Hay que analizar los siguientes casos:

(A) $a > 0$: En este caso $\mathrm{H}f(0,0)$ es definida negativa, deduciéndose que $(0,0)$ es un máximo relativo. Por otra parte, $\mathrm{H}f\left(0, \frac{3a}{2}\right)$ es indefinida, luego $\left(0, \frac{3a}{2}\right)$ es un punto de silla.

(B) $a < 0$: Se tiene que $\mathrm{H}f(0,0)$ es indefinida, por lo que $(0,0)$ es un punto de silla y $\mathrm{H}f\left(0, \frac{3a}{2}\right)$ es definida negativa, por tanto, $\left(0, \frac{3a}{2}\right)$ es un máximo relativo.

Así pues, la opción correcta es la (b).