4. FUNCIONES DE UNA VARIABLE. EJERCICIOS

EJERCICIO 4.1. Sea f:R->R la función definida como:
f(x)=x^2+2x+1, si x<=-1; f(x)=-x^2+1, si -1<x<=1; f(x)=-2x+2, si x>1.
a) Represéntese gráficamente la función.
b) Estúdiese la continuidad de f.
c) Estúdiese la derivabilidad de f.

SOLUCIÓN. a) Para empezar, se define la función f:

(%i1) `f1(x):=x^2+2*x+1; f2(x):=-x^2+1; f3(x):=-2*x+2;`

(%o1) $\mathrm{f1}(x):=x^2+2\,x+1$

(%o2) $\mathrm{f2}(x):=-x^2+1$

(%o3) $\mathrm{f3}(x):=(-2)\,x+2$

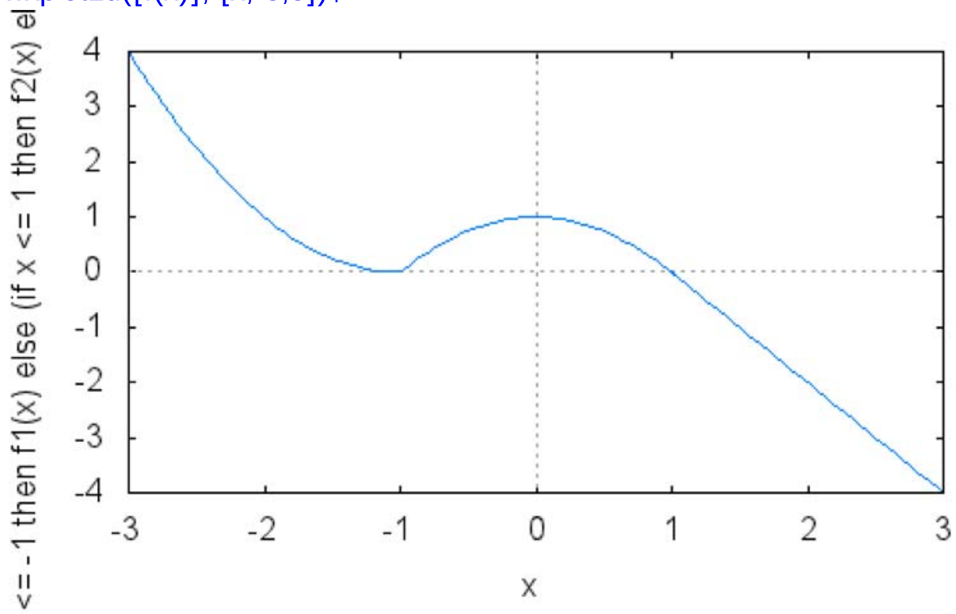
(%i4) `f(x):=if x<=-1 then f1(x) else (if x<=1 then f2(x) else f3(x));`

(%o4) $f(x):=\mathrm{if}\ \ x<=-1\ \ \mathrm{then}\ \ \mathrm{f1}(x)\ \ \mathrm{else}\ \ \mathrm{if}\ \ x<=1\ \ \mathrm{then}\ \ \mathrm{f2}(x)\ \ \mathrm{else}\ \ \mathrm{f3}(x)$

Su representación gráfica en el intervalo [-3, 3] es:

(%i5) `wxplot2d([f(x)], [x,-3,3])$`

(%t5)



b) Observando la gráfica, es claro que f es continua en todo R. Aún así, vamos a estudiar la continuidad siguiendo la definición. Las funciones que definen a trozos a f son continuas, ya que son polinómicas, por lo que sólo es necesario estudiar la continuidad de f en los puntos x=-1 y x=1.

En x=-1 se tiene

(%i6) f(-1);
(%o6) 0

Ahora hay que estudiar el límite de f por la izquierda y por la derecha de x=-1, respectivamente. Con Maxima no se pueden calcular límites de funciones definidas a trozos, por lo que hay que indicar explícitamente la función correspondiente a cada trozo. Así pues,

(%i7) limit(f1(x),x,-1,minus); limit(f2(x),x,-1,plus);
(%o7) 0
(%o8) 0

Los límites laterales coinciden con el valor 0, luego el límite cuando f tiende hacia -1 es 0. Como el valor del límite coincide con f(-1), se deduce que f es continua en x=-1.

Razonando de modo análago, se concluye que f es continua también en x=1.

c) Las funciones que definen a f a trozos son derivables por ser polinómicas, por lo que sólo hay que estudiar la derivabilidad en los puntos x=-1 y x=1.

Para x=-1, hay que comprobar si existe el limite cuando h tiende hacia 0 de (f(-1+h)-f(-1))/h. Puesto que f está definida de diferente forma a la izquierda y a la derecha de x=-1, se estudian los límites laterales:

(%i9) limit((f1(-1+h)-f(-1))/h,h,0,minus);
limit((f2(-1+h)-f(-1))/h,h,0,plus);
(%o9) 0
(%o10) 2

Dado que los límites laterales no coinciden, se deduce que no existe f'(-1).

Para el punto x=1:

(%i11) limit((f2(1+h)-f(1))/h,h,0,minus); limit((f3(1+h)-f(1))/h,h,0,plus);
(%o11) - 2
(%o12) - 2

Como los límites laterales coinciden, existe el límite cuando h tiende hacia 0 de (f(1+h)-f(1))/h y vale -2, es decir, f es derivable en x=1 y f'(1)=-2. Por tanto, se concluye que f es derivable en R\{-1}.

EJERCICIO 4.2. Determínense los valores de a y b para que la función f:R->R definida como:
f(x)=ax^3-3x+1, si x<=2; f(x)=2x+b, si x>2;
sea derivable en R.

SOLUCIÓN. Se define la función f:

(%i13) f1(x):=a*x^3-3*x+1; f2(x):=2*x+b;
f(x):=if x<=2 then f1(x) else f2(x);

(%o13) $\mathrm{f1}(x):=a\,x^3-3\,x+1$

(%o14) $\mathrm{f2}(x):=2\,x+b$

(%o15) $\mathrm{f}(x):=\mathrm{if}\ x<=2\ \mathrm{then}\ \mathrm{f1}(x)\ \mathrm{else}\ \mathrm{f2}(x)$

Las funciones f1 y f2 son derivables en R por ser polinómicas, luego la función f es derivable en R salvo quizá en el punto x=2.
Por otra parte, para que f sea derivable en x=2, tiene que ser en particular continua, es decir, el límite de f cuando x tiende hacia 2 tiene que coincidir con f(2).
Se calcula el valor de f y de los límites laterales en x=2:

(%i16) f(2); limit(f1(x),x,2,minus); limit(f2(x),x,2,plus);

(%o16) $8\,a-5$

(%o17) $8\,a-5$

(%o18) $b+4$

Para que exista el límite cuando x tiende hacia 2 de f(x), los límites laterales calculados tienen que coincidir con f(2)=8a-5. Por tanto, se debe cumplir que 8a-5=b+4.

Se resuelve la ecuación 8a-5=b+4 en función de las variables a y b.
Se utiliza la instrucción globalsolve:true para asignar a las variables a y b la solución obtenida.

(%i19) globalsolve:true$
solve([%o17-%o18],[a,b]);

(%o20) $[[a:\frac{\%r1+9}{8},b:\%r1]]$

Puesto que se trata de una ecuación con dos incógnitas, la solución aparece expresada en forma paramétrica, en este caso, en función del parámetro %r1.

Además, para que f sea derivable en x=2, deben coincidir los límites laterales cuando h tiende hacia 0 de (f(2+h)-f(2))/h.
Se calculan dichos límites:

(%i21) limit((f1(2+h)-f(2))/h,h,0,minus);
limit((f2(2+h)-f(2))/h,h,0,plus);

(%o21) $\frac{3\,\%r1+21}{2}$

(%o22) 2

Se igualan los límites y se resuelve la ecuación en función de la variable %r1:

(%i23) solve(%o21-%o22);

(%o23) $[\%r1=-\frac{17}{3}]$

Se calculan a y b en función del valor obtenido de %r1:

(%i24) a:ev(a,%r1=-17/3); b:ev(b,%r1=-17/3);

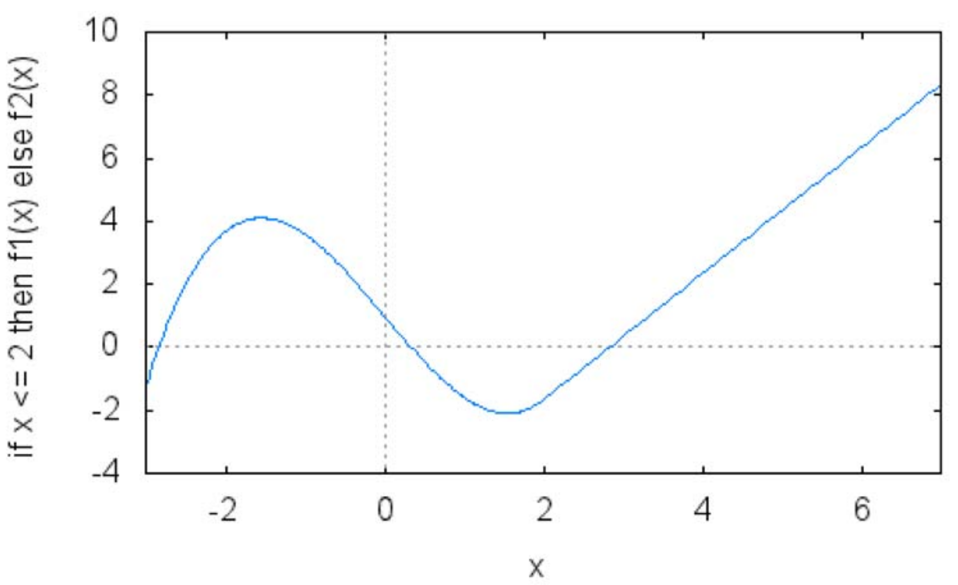
(%o24) $\frac{5}{12}$

(%o25) $-\frac{17}{3}$

Para los valores obtenidos, se representa la gráfica de f
en el intervalo [-3, 7]:

(%i26) wxplot2d(f(x), [x,-3,7])$

(%t26)



EJERCICIO 4.3. Determínese la recta tangente a la gráfica de la función
f(x)=x^4+3x^2-5
en el punto x=1 y represéntese gráficamente la función y la tangente.

SOLUCIÓN. Se define la función f:

(%i27) f(x):=x^4+3*x^2-5;

(%o27) $f(x):=x^4+3\,x^2-5$

La ecuación de la recta tangente a f en x=1 viene dada por:
tgte(x)=f(1)+f'(1)(x-1):

(%i28) define(Df(x),diff(f(x),x));
define(tgte(x),f(1)+Df(1)*(x-1));

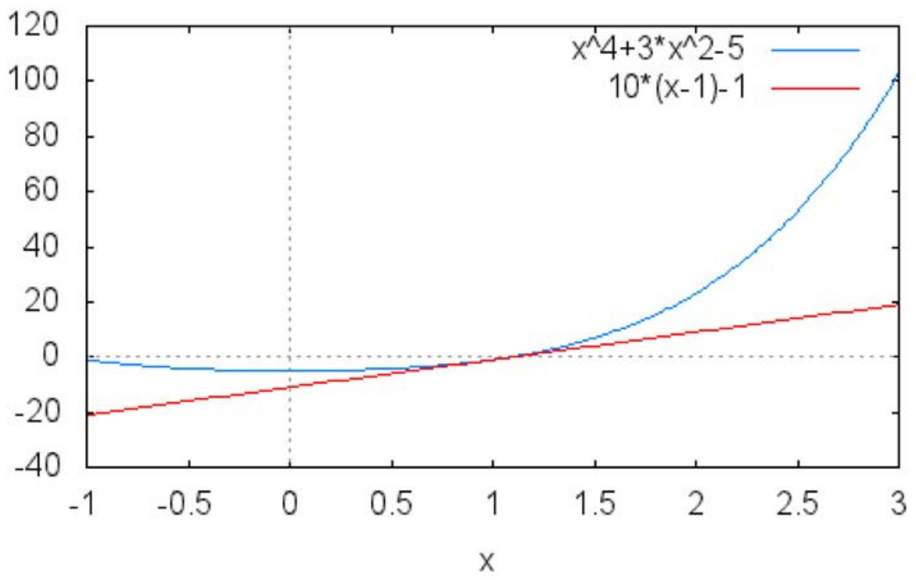
(%o28) $Df(x):=4\,x^3+6\,x$

(%o29) $tgte(x):=10\,(x-1)-1$

En la siguiente figura se puede ver la representación gráfica de f y de
la recta tangente a f en x=1.

(%i30) wxplot2d([f(x), tgte(x)], [x,-1,3])$

(%t30)



EJERCICIO 4.4. Sea la función f:R->R definida como
f(x)=5x^2/(3x-2).
Analícese y represéntese gráficamente la función.

SOLUCIÓN. Primero se define la función con Maxima:

(%i31) f(x):=5*x^2/(3*x-2);

(%o31) $f(x):=\frac{5\,x^2}{3\,x-2}$

Puesto que se trata de un cociente de polinomios, el dominio viene dado
por el conjunto de los puntos x tales que el denominador no se anula,
es decir, tales que x es distinto de 2/3.

Estudiemos las asíntotas. En x=2/3 se tiene que

(%i32) limit(f(x), x, 2/3, minus); limit(f(x),x,2/3,plus);

(%o32) $-\infty$

(%o33) ∞

Por tanto, hay una asíntota vertical en x=2/3. Al acercarse a esta asíntota
por la izquierda la función tiende hacia -infinito y al acercarse por
la derecha tiende a +infinito.

Estudiemos la existencia de asíntotas oblicuas y=mx+n. En caso de que haya
una asíntota oblicua cuando x tiende a +infinito, el valor de su pendiente
m viene dado por

(%i34) limit(f(x)/x, x, inf);

(%o34) $\frac{5}{3}$

y el valor de n:

(%i35) limit(f(x)-%*x, x, inf);

(%o35) $\frac{10}{9}$

Puesto que el límite anterior es finito, existe una asíntota oblicua,
cuya ecuación es y= (5/3)x+10/9. Llamémosla a(x):

(%i36) define(a(x),5/3*x+10/9);

(%o36) $a(x):=\frac{5x}{3}+\frac{10}{9}$

Análogamente, la asíntota oblicua cuando x -> -infinito:

(%i37) limit(f(x)/x, x, minf);

(%o37) $\frac{5}{3}$

(%i38) limit(f(x)-%*x, x, minf);

(%o38) $\frac{10}{9}$

Por lo que se obtiene la misma asíntota oblicua cuando x -> -infinito.

Dado que f tiene una asíntota oblicua, no tiene asíntotas horizontales,
pues la existencia de una excluye la existencia de las otras.

Estudiemos los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos
relativos. Denotemos la derivada de f por Df:

(%i39) define(Df(x),diff(f(x),x,1));

(%o39) $Df(x):=\frac{10x}{3x-2}-\frac{15x^2}{(3x-2)^2}$

Simplificamos:

(%i40) ratsimp(%);

(%o40) $Df(x):=\frac{15x^2-20x}{9x^2-12x+4}$

El dominio de Df viene dado por el conjunto de puntos donde no se anula
el denominador. El denominador se anula en

(%i41) solve(9*x^2-12*x+4,x);

(%o41) $[x=\frac{2}{3}]$

Por tanto, el dominio de Df es (-infinito, 2/3) unión (2/3, +infinito)

Las raíces de Df son:

(%i42) solve(Df(x),x);

(%o42) $[x=\frac{4}{3},x=0]$

Luego los puntos x=4/3 y x=0 son posibles extremos relativos.

Para estudiar el signo de la derivada en los intervalos que resultan: (-infinito, 0), (0, 2/3), (2/3, 4/3) y (4/3, +infinito), basta con comprobar el signo en un punto de cada uno de ellos:

(%i43) Df(-1); Df(1/3); Df(1); Df(2);

(%o43) $\frac{7}{5}$

(%o44) -5

(%o45) -5

(%o46) $\frac{5}{4}$

Así pues, Df es positiva en (-infinito, 0) y (4/3, +infinito) y negativa en (0, 2/3) y (2/3, 4/3), por tanto, f es creciente en (-infinito, 0) unión (4/3, +infinito) y decreciente en (0, 2/3) unión (2/3, 4/3). Luego en x=0 hay un máximo relativo y en x=4/3 hay un mínimo relativo.
El valor del máximo relativo es

(%i47) f(0);

(%o47) 0

Y el valor del mínimo relativo es

(%i48) f(4/3);

(%o48) $\frac{40}{9}$

Para determinar los intervalos de concavidad y convexidad se analiza la derivada segunda, que se denota con Df2:

(%i49) define(Df2(x),diff(f(x),x,2));

(%o49) $\mathrm{Df2}(x):=\frac{10}{3x-2}-\frac{60x}{(3x-2)^2}+\frac{90x^2}{(3x-2)^3}$

cuya expresión simplificada es:

(%i50) ratsimp(%);

(%o50) $Df2(x):=\frac{40}{27\,x^3-54\,x^2+36\,x-8}$

Puesto que el numerador es 40>0, para estudiar el signo de Df2 hay que analizar sólamente el signo del denominador. Éste se anula en:

(%i51) solve(27*x^3-54*x^2+36*x-8, x);

(%o51) $[x=\frac{2}{3}]$

por lo que basta con evaluar Df2 en un punto cualquiera a la izquierda y a la derecha de x=2/3:

(%i52) Df2(0); Df2(1);

(%o52) -5

(%o53) 40

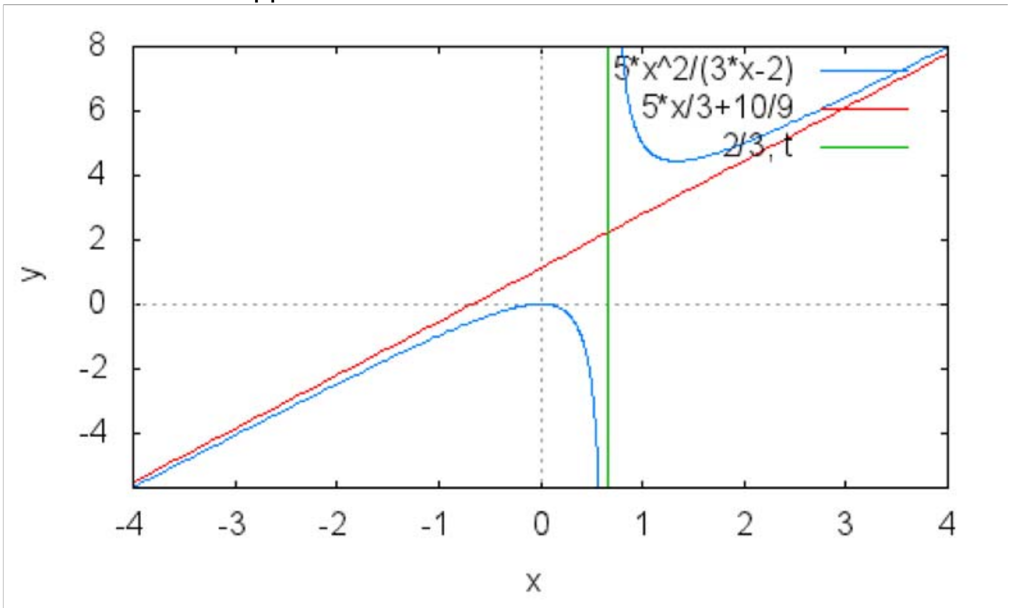
Por tanto, Df2 es negativa en (-infinito, 2/3) y es positiva en (2/3, +infinito), luego f es cóncava en (-infinito, 2/3) y convexa en (2/3, +infinito).

El análisis realizado permite esbozar la gráfica de f. A continuación se representan f y las asíntontas con Maxima. Dado que la asíntota vertical no puede ser expresada por medio de una función, hay que utilizar coordenadas paramétricas para representarla. Utilizando la sentencia ['parametric, 2/3, t, [t, -20, 20] se representa el conjunto de puntos de la forma [2/3, t], con t variando entre -20 y 20, que pertenecen a la recta x=2/3.

(%i54) wxplot2d([f(x),a(x),['parametric, 2/3, t, [t, -20, 20], [nticks, 300]]],[x,-4,4],[y,f(-4),f(4)])$

plot2d: some values were clipped.

(%t54)



EJERCICIO 4.5. Obténgase el polinomio de Taylor de orden 7 (p7(x))
de la función
f(x)=ln(x)
en el punto x=1 y determínese una estimación del error cometido al
aproximar f por p7 en el punto x=2.

SOLUCIÓN. Definimos f:

```
(%i55) define(f(x), log(x));
```

(%o55) $f(x):=\log(x)$

El polinomio de Taylor de orden 7 de f en el punto x=1 es

```
(%i56) define(p7(x),taylor(f(x),x,1,7));
```

(%o56)/T/ $p7(x):=x-1-\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{(x-1)^3}{3}-\frac{(x-1)^4}{4}+\frac{(x-1)^5}{5}-\frac{(x-1)^6}{6}+\frac{(x-1)^7}{7}+...$

El error cometido al aproximar f por p7 en x=2 viene dado por el resto de
Lagrange de orden 7 en x=2 (R7), que es igual a

```
(%i57) define(Df8(x), diff(f(x),x,8));  R7: (Df8(c)/8!)*(2-1)^8;
```

(%o57) $Df8(x):=-\frac{5040}{x^8}$

(%o58) $-\frac{1}{8\,c^8}$

donde c es un valor perteneciente al intervalo (1, 2). Así pues,
el error cometido está comprendido entre los siguientes valores:

```
(%i59) float(-1/8); float(-1/(8*2^8));
```

(%o59) -0.125

(%o60) $-4.8828125\,10^{-4}$

EJERCICIO 4.6 Determínese el polinomio de Mac Laurin de orden 5 (p5(x))
de la función
f(x)=sen(x)
y hállese el error cometido al aproximar f por p5 en el punto x=1.

SOLUCIÓN: Se define f:

```
(%i61) define(f(x), sin(x));
```

(%o61) $f(x):=\sin(x)$

El polinomio de Mac Laurin de orden 5 de f viene dado por

```
(%i62) define(p5(x),taylor(f(x),x,0,5));
```

(%o62)/T/ $p5(x):=x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+...$

y la diferencia f(1)- p5(1) es

(%i63) f(1)-p5(1);

(%o63)/R/ $\frac{120\,\sin(1)-101}{120}$

La expresión anterior vale

(%i64) float(%);

(%o64) $-1.9568185877017659\;10^{-4}$

Por otra parte, la diferencia f(1)-p5(1) viene dada también por el
resto de Lagrange de orden 5 en x=1 (R5). Se calcula la derivada sexta

(%i65) define(Df6(x),diff(f(x),x,6));

(%o65) $\mathrm{Df6}(x):=-\sin(x)$

Y el resto de Lagrange de orden 5 en x=1 es:

(%i66) R5: (Df6(c)/6!)*(1)^6;

(%o66) $-\frac{\sin(c)}{720}$

donde c es un valor comprendido entre 0 y 1. Se puede obtener el valor
de c resolviendo

(%i67) float(solve(%o66-%o64,c));

rat: replaced 1.9568185877017659E-4 by 159219/813662549 = 1.9568185877017673E-4
solve: using arc-trig functions to get a solution.
Some solutions will be lost.

(%o67) $[c=0.14136127206865]$

que efectivamente está comprendido entre 0 y 1.

EJERCICIO 4.7. Se considera la ecuación x+sen(x)=3.
a) Pruébese que tiene solución en el intervalo [1, 3].
b) Estúdiese si g(x)=3-sen(x) cumple el teorema del punto fijo en
ese intervalo.
c) En caso afirmativo, obténganse los cincuenta primeros valores de
aproximación de la solución de la ecuación inicial por el método del
punto fijo a partir del valor inicial x0=2.

SOLUCIÓN. a) Se define la función f del siguiente modo:

(%i68) define(f(x),x+sin(x)-3);

(%o68) $f(x):=\sin(x)+x-3$

La función f(x)=x+sen(x)-3 verifica el Teorema de Bolzano,
ya que f es continua en R por ser suma de funciones continuas y

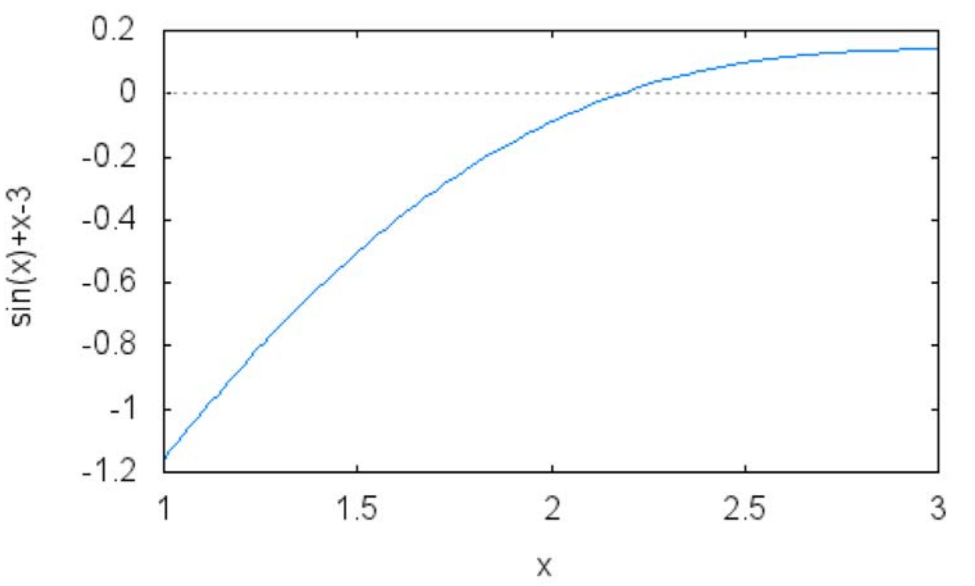
(%i69) float(f(1)*f(3));
(%o69) -0.1634916239615

es menor que 0. Así pues, la ecuación f(x)=0 tiene al menos
una raíz en el intervalo [1, 3].

Representando gráficamente f en el intervalo [1, 3]

(%i70) wxplot2d(f(x), [x,1,3]);

(%t70)



(%o70)

es claro que f(x)=0 tiene una única raíz en [1, 3], que se
corresponde con la coordenada x donde la gráfica de f
corta al eje x.

b) Veamos primero que g([1, 3]) está contenido en [1, 3]. Para
ello, hay que calcular el mínimo y el máximo absolutos de g en
el intervalo [1, 3]. Como g es continua en ese intervalo, que
es cerrado y acotado, g alcanza el máximo y el mínimo absolutos
o bien en puntos críticos, o bien en los extremos del intervalo
[1, 3]. Se define g y su derivada Dg:

(%i71) define(g(x), 3-sin(x)); define(Dg(x), diff(g(x),x));
(%o71) $g(x):=3-\sin(x)$
(%o72) $Dg(x):=-\cos(x)$

Los puntos críticos de g son:

(%i73) solve(Dg(x),x);

solve: using arc-trig functions to get a solution.
Some solutions will be lost.

(%o73) $[x=\frac{\pi}{2}]$

Luego el único punto crítico es x=pi/2, que pertenece a [1, 3].
Se tiene que

(%i74) float(g(%pi/2)); float(g(1)); float(g(3));

(%o74) 2.0
(%o75) 2.158529015192103
(%o76) 2.858879991940133

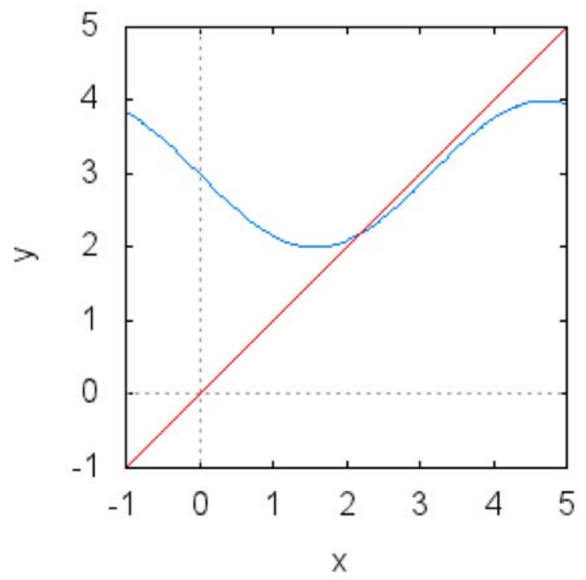
por tanto, el mínimo absoluto de g se alcanza en pi/2 y el máximo absoluto en 3 y como g(pi/2) y g(3) pertenecen a [1, 3] se cumple que g([1, 3]) está contenido en [1, 3].

Además, es evidente que Dg(x)<=k, para todo x en (1, 3) y para algún k en [0, 1), con lo que se satisfacen las hipótesis del teorema del punto fijo y g tiene un único punto fijo en [1, 3].

Representando gráficamente la función g (en azul) y la bisectriz del primer cuadrante y=x (en rojo), la solución (llamémosla c) de f(x)=0 es el valor de la coordenada x del punto de corte de g con la bisectriz, siendo las coordenadas de este punto [c,c].

(%i77) wxplot2d([g(x),x], [x,-1,5],[y,-1,5],[legend, false],[gnuplot_preamble, "set size ratio 1; set zeroaxis;"]);

(%t77)



(%o77)

c) Calculemos los cincuenta primeros valores de aproximación de la solución de la ecuación inicial por el método del punto fijo.

Generaremos una sucesión recurrente cuyo valor inicial es 2:

(%i78) c[1]:2; c[n]:=g(c[n-1]);

(%o78) 2

(%o79) $c_n := g(c_{n-1})$

Y los cincuenta primeros valores de aproximación son:

(%i80) float(makelist(c[n],n,1,50));

(%o80) [2.0,2.090702573174318,2.132134239824455,2.15345632800787,
2.164998051940865,2.171404325029546,2.175007839243745,
2.177049696277345,2.178211417258738,2.178873911586063,
2.179252208292936,2.179468384405713,2.179591970090704,2.17966263999456,
2.179703056740294,2.179726173277658,2.179739395486308,
2.179746958528911,2.179751284619006,2.179753759180638,
2.179755174658586,2.179755984330643,2.179756447474479,
2.179756712399527,2.179756863940608,2.179756950624394,
2.179757000208836,2.179757028571893,2.179757044795996,2.17975705407643,
2.179757059384981,2.179757062421553,2.179757064158519,2.17975706515209,
2.179757065720428,2.179757066045526,2.179757066231487,2.17975706633786,
2.179757066398707,2.179757066433512,2.179757066453421,
2.179757066464809,2.179757066471324,2.17975706647505,2.179757066477182,
2.179757066478401,2.179757066479098,2.179757066479497,
2.179757066479725,2.179757066479856]

En el valor de aproximación número 50, la función f vale

(%i81) float(f(c[50]));

(%o81) $-7.4718009557273035\ 10^{-14}$

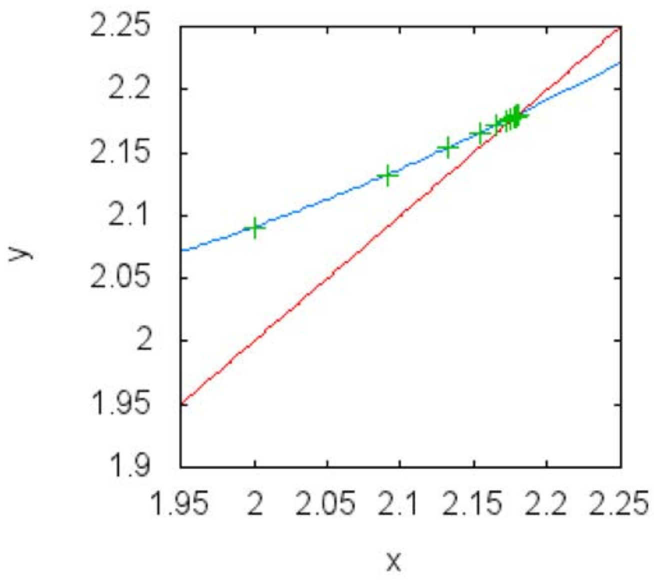
que es prácticamente 0, por lo que c[50] es una muy buena aproximación
a la raíz de f(x)=0 en el intervalo [1, 3].

Ampliando la gráfica anterior, se puede ver cómo los puntos [c[i], g(c[i])]
se aproximan al punto [c,c]. Se dibujan sólo los 15 primeros puntos. Para
representar puntos se emplea la sentencia [discrete, puntosg] y se utiliza
la instrucción [style,lines,lines,points] para indicar que las funciones g(x)
e y=x se representan de forma continua y los puntos de forma discreta, sin
unirlos mediante líneas rectas.

(%i82) puntosg: float(makelist([c[n],g(c[n])],n,1,15));

(%o82) [[2.0,2.090702573174318],[2.090702573174318,2.132134239824455],[2.132134239824455,2.15345632800787],[2.15345632800787,2.164998051940865],[2.164998051940865,2.171404325029546],[2.171404325029546,2.175007839243745],[2.175007839243745,2.177049696277345],[2.177049696277345,2.178211417258738],[2.178211417258738,2.178873911586063],[2.178873911586063,2.179252208292936],[2.179252208292936,2.179468384405713],[2.179468384405713,2.179591970090704],[2.179591970090704,2.17966263999456],[2.17966263999456,2.179703056740294],[2.179703056740294,2.179726173277658]]

(%i83) wxplot2d([g(x),x,[discrete, puntosg]], [x,1.95,2.25],[y,1.90,2.25], [style, lines, lines, points], [legend, false],[gnuplot_preamble, "set size ratio 1; set zeroaxis;"]);

(%t83) 

(%o83)

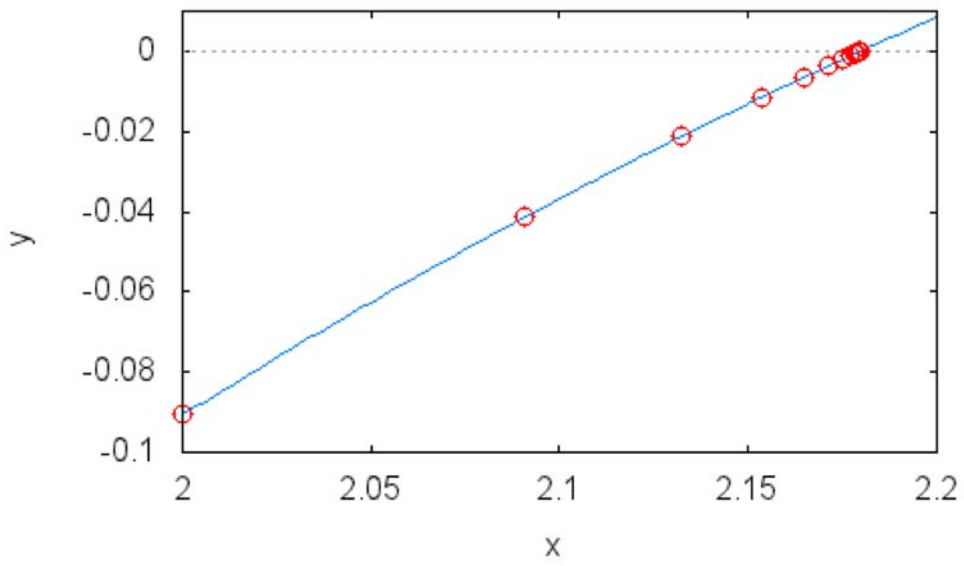
En la siguiente gráfica se muestra cómo los puntos [c[i],f(c[i])] se aproximan al punto [c,0]. Se representan sólo los 15 primeros puntos.

(%i84) puntosf: float(makelist([c[n],f(c[n])],n,1,15));

(%o84) [[2.0,-0.090702573174318],[2.090702573174318,-0.041431666650137],[2.132134239824455,-0.021322088183415],[2.15345632800787,-0.011541723932994],[2.164998051940865,-0.006406273088682],[2.171404325029546,-0.0036035142141985],[2.175007839243745,-0.0020418570335999],[2.177049696277345,-0.0011617209813931],[2.178211417258738,$-6.624943273253469710^{-4}$],[2.178873911586063,$-3.782967068727272110^{-4}$],[2.179252208292936,$-2.161761127765782210^{-4}$],[2.179468384405713,$-1.235856849912675410^{-4}$],[2.179591970090704,$-7.066990385662386110^{-5}$],[2.17966263999456,$-4.041674573340703310^{-5}$],[2.179703056740294,$-2.311653736408736410^{-5}$]]

```
(%i85) wxplot2d([f(x), [discrete, puntosf]], [x,2,2.2],[y,-0.1,0.01],
       [style, lines, points],[legend, false]);
```

(%t85)



(%o85)

EJERCICIO 4.8. Dada la ecuación x^3-2x-5=0,
a) justifíquese que tiene al menos una solución en el intervalo [2,3],
b) calcúlense los sesenta primeros valores de aproximación por el método de la bisección,
c) estímese el error cometido al aproximar la raíz de la ecuación por el valor de aproximación número 60.

SOLUCIÓN. a) Se define la función f como:

```
(%i86) define(f(x),x^3-2*x-5);
```

(%o86) $f(x):=x^3-2\,x-5$

f es continua por ser polinómica y además

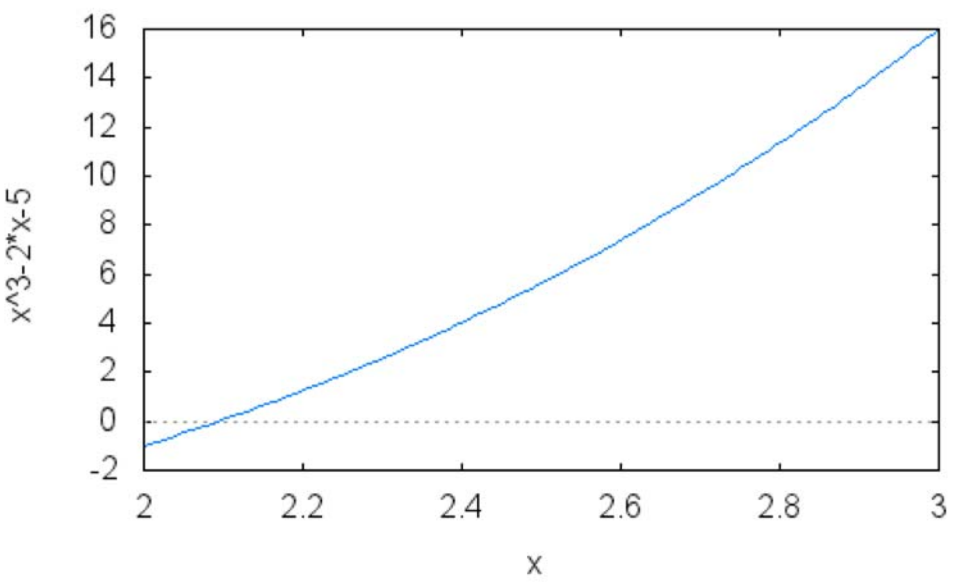
```
(%i87) f(2)*f(3);
```

(%o87) -16

es menor que 0, por lo que se satisface el teorema de Bolzano, lo que garantiza la existencia de al menos una solución de la ecuación f(x)=0 en el intervalo [2, 3]. De hecho, representando gráficamente f

(%i88) wxplot2d(f(x), [x, 2,3]);

(%t88)



(%o88)

se ve que la gráfica de f corta a la recta y=0 en dicho intervalo,
teniendo la ecuación f(x)=0 una única solución en [2, 3].

b) Sean A y B los extremos del intervalo [2, 3]:

(%i89) A:2; B:3;
(%o89) 2
(%o90) 3

Con el siguiente bucle se genera la sucesión con las 60 primeras
aproximaciones a la raíz de f(x)=0. Con él se ha programado
el método de la bisección (aunque la programación con Maxima
no forma parte del curso, las sentencias for e if empleadas
son similares a las de la mayoría de los lenguajes de
programación, por lo que nos permitimos la introducción
de este programa a modo de un pequeño ejemplo de la
programación con Maxima).
Inicializamos las variables: a=A, b=B.

(%i91) a:A; b:B;
(%o91) 2
(%o92) 3

```
(%i93) for i:1 thru 60 step 1 do
       (
       if (f(a)*f(b)<0)
       then
       (
       c[i]:(a+b)/2,
       if (f(a)*f(c[i])<0)
       then b:c[i]
       else a:c[i]
       )
       else
       return(false)
       );
(%o93) done
```

```
(%i94) fpprec:20;  bfloat(makelist(c[i],i,1,60));
(%o94) 20
(%o95) [2.5b0,2.25b0,2.125b0,2.0625b0,2.09375b0,2.109375b0,2.1015625b0,
2.09765625b0,2.095703125b0,2.0947265625b0,2.09423828125b0,
2.094482421875b0,2.0946044921875b0,2.09454345703125b0,
2.094573974609375b0,2.0945587158203125b0,2.09455108642578125b0,
2.094554901123046875b0,2.0945529937744140625b0,2.09455204010009765625b0,
2.0945515632629394531b0,2.0945513248443603516b0,
2.0945514440536499023b0,2.0945515036582946777b0,2.0945514738559722900b0,
2.0945514887571334839b0,2.0945514813065528870b0,2.0945514850318431854b0,
2.0945514831691980362b0,2.0945514822378754616b0,
2.0945514817722141743b0,2.0945514815393835306b0,
2.0945514816557988524b0,2.0945514815975911915b0,
2.0945514815684873611b0,2.0945514815539354459b0,
2.0945514815466594882b0,2.0945514815430215094b0,2.0945514815412025200b0,
2.0945514815421120147b0,2.0945514815425667621b0,
2.0945514815423393884b0,2.0945514815422257016b0,2.0945514815422825450b0,
2.0945514815423109667b0,2.0945514815423251775b0,2.0945514815423322830b0,
2.0945514815423287303b0,2.0945514815423269539b0,
2.0945514815423260657b0,2.0945514815423265098b0,
2.0945514815423267319b0,2.0945514815423266208b0,
2.0945514815423265653b0,2.0945514815423265931b0,
2.0945514815423265792b0,2.0945514815423265861b0,
2.0945514815423265896b0,2.0945514815423265913b0,
2.0945514815423265922b0]
```

Evaluando f en la aproximación número 60, se comprueba que f(c[60]) es muy próximo a 0, es decir, c[60] es un valor muy próximo a la raíz de f(x)=0.

```
(%i96) bfloat(f(c[60]));
(%o96) 8.1189931304461297 9b-18
```

c) El error cometido al aproximar la raíz c por c[60] es menor que

```
(%i97) bfloat((B-A)/2^60);
(%o97) 8.673617379884035472 1b-19
```

Por otra parte, el comando find_root utiliza el método de la bisección
y con él se obtiene una solución aproximada de f(x)=0:

```
(%i98) find_root(f(x),x,2,3); bfloat(%);
(%o98) 2.094551481542327
(%o99) 2.094551481542326509 8b0
```

Como se puede comprobar, la solución que facilita find_root se corresponde
con c[51] y el valor de f en esa solución es

```
(%i100) bfloat(f(%));
(%o100) -9.115700815714999905b-16
```