FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS DE LAS TTII. Cód. 71021023
Grado en Ingeniería de las Tecnologías de la Información
Segunda semana de Febrero de 2016. Tiempo: 2 horas

INSTRUCCIONES. Cada una de las preguntas tiene un valor máximo de 2 puntos. Sólo está permitido una calculadora no programable. No entregue esta hoja con los enunciados.

1. En el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ se consideran los subespacios vectoriales siguientes:

$$U = \langle \bar{u}_1 = (1,1,0),\ \bar{u}_2 = (0,1,1) \rangle \text{ y}$$
$$V = \{\bar{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 :\ x_1 + x_2 + x_3 = 0\}.$$

Escriba el vector $\bar{e} = (1,2,3)$ en la forma $\bar{e} = \bar{u} + \bar{v}$, con $\bar{u} \in U$ y $\bar{v} \in V$ (encuentre todas las soluciones posibles).

A la vista del resultado, ¿se puede asegurar que U y V están en posición de suma directa? *(2 puntos)*

2. Determine para que valores del parámetro real a es diagonalizable la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(2 puntos)

3. (a) Determine los intervalos de concavidad/convexidad y los puntos de inflexión de la función $f(x) = (x^2+1)e^x$. *(1 punto)*

(b) Halle el polinomio de Taylor de orden 2 de $f(x) = \sqrt{x}$ en el punto $x = 9$ y la expresión del resto. *(1 punto)*

4. Obtenga y clasifique los extremos relativos de la función

$$f(x,y) = x^4 + y^4 + 2x^2y^2 - 2x^2 + 2y^2.$$

(2 puntos)

5. Determine el área de la región plana encerrada por la elipse de ecuación

$$x^2 + \frac{y^2}{4} = 1.$$

(2 puntos)

SOLUCIONES. FMTI. Segunda semana de Febrero de 2016.

1. Hay que hallar $\bar{u} \in U$ y $\bar{v} \in V$ tales que $\bar{e} = \bar{u} + \bar{v}$. Por tanto, $\bar{u}$ es de la forma

$$\bar{u} = \lambda_1 \bar{u}_1 + \lambda_2 \bar{u}_2 = \lambda_1(1,1,0) + \lambda_2(0,1,1) = (\lambda_1, \lambda_1 + \lambda_2, \lambda_2). \quad (1)$$

Así pues, $(1,2,3) = (\lambda_1, \lambda_1 + \lambda_2, \lambda_2) + \bar{v}$, y de aquí (despejando $\bar{v}$):

$$\bar{v} = (1 - \lambda_1, 2 - \lambda_1 - \lambda_2, 3 - \lambda_2) \in V. \quad (2)$$

El hecho de que $\bar{v}$ sea un vector de V significa que sus componentes verifican la ecuación de V, por tanto

$$(1 - \lambda_1) + (2 - \lambda_1 - \lambda_2) + (3 - \lambda_2) = 0 \to 6 - 2\lambda_1 - 2\lambda_2 = 0 \to \begin{cases} \lambda_2 = 3 - \lambda_1 \\ \lambda_1 \text{ libre} \end{cases}$$

$$\to \begin{cases} \lambda_1 = t \\ \lambda_2 = 3 - t, \quad t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Sustituyendo en (1) y (2), hay infinitas soluciones de la forma

$$\bar{u} = (t, t+3-t, 3-t) = (t, 3, 3-t), \ \bar{v} = (1-t, 2-t-(3-t), 3-(3-t)) = (1-t, -1, t).$$

Una solución, por ejemplo, es con $t = 0$, con lo cual

$$\bar{u} = (0,3,3) \text{ y } \bar{v} = (1,-1,0).$$

Como hay infinitas formas de expresar $\bar{e}$ en la forma $\bar{u} + \bar{v}$, se concluye que la suma $U + V$ no es directa, ya que en caso contrario la descomposición $\bar{e} = \bar{u} + \bar{v}$ es única.

2. El polinomio característico es

$$p(t) = |A - tI| = \begin{vmatrix} 2-t & 1 & -3 \\ 0 & a-t & 0 \\ 0 & 1 & -1-t \end{vmatrix} = (2-t) \begin{vmatrix} a-t & 0 \\ 1 & -1-t \end{vmatrix}$$
$$= (2-t)(a-t)(-1-t).$$

Las raíces de este polinomio son 2, a, -1.

Por tanto, si $a \neq 2$ y $a \neq -1$, las 3 raíces son distintas y A es diagonalizable.

Si $a = 2$ o $a = -1$, $p(t)$ tiene una raíz doble y se estudia aparte.

<u>Caso 1.</u> $\boxed{a = 2}$. Entonces $p(t) = (2-t)^2(-1-t)$ tiene las raíces $t = 2$ doble y $t = -1$ simple. El espacio propio $E(2)$ correspondiente a la raíz $t = 2$ es el conjunto de soluciones del sistema $(A - 2I)X = \bar{0}$, es decir,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} y - 3z = 0 \\ y - 3z = 0 \\ x \text{ libre} \end{cases} \to \begin{cases} x = \alpha \\ y = 3\beta \\ z = \beta \end{cases}$$

Luego, el subespacio propio $E(2)$ viene dado por

$$(x,y,z) = (\alpha, 3\beta, \beta) = \alpha(1,0,0) + \beta(0,3,1).$$

Una base de $E(2)$ es $\{(1,0,0),\ (0,3,1)\}$ y, en consecuencia, su dimensión es 2. Como coincide con la multiplicidad de la raíz, se concluye que A es diagonalizable.

Caso 2. $\boxed{a=-1}$. Entonces $p(t)=(2-t)(-1-t)^2$ tiene las raíces $t=2$ simple y $t=-1$ doble. El espacio propio $E(-1)$ correspondiente a la raíz $t=-1$ es el conjunto de soluciones del sistema $(A+I)X=\bar{0}$, es decir,

$$\begin{pmatrix}3 & 1 & -3\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix} \Rightarrow \left\{\begin{array}{r} 3x+y-3z=0\\ 0=0\\ y=0\end{array}\right. \to \left\{\begin{array}{r} x=\alpha\\ y=0\\ z=\alpha\end{array}\right.$$

Luego, el subespacio propio $E(-1)$ viene dado por

$$(x,y,z)=(\alpha,0,\alpha)=\alpha(1,0,1).$$

Una base de $E(-1)$ es $\{(1,0,1)\}$ y, en consecuencia, su dimensión es 1. Como no coincide con la multiplicidad de la raíz, se concluye que A no es diagonalizable.

En resumen: A es diagonalizable para todo $a\neq -1$.

3. (a) Las dos primeras derivadas de f son:

$$\begin{aligned} f'(x)&=2xe^x+(x^2+1)e^x=(x^2+2x+1)e^x,\\ f''(x)&=(2x+2)e^x+(x^2+2x+1)e^x=(x^2+4x+3)e^x.\end{aligned}$$

Como e^x nunca es 0, las raíces de $f''(x)$ son las de la ecuación $x^2+4x+3=0$. Se resuelve y resultan $x=-1$, $x=-3$. La función f'' no tiene discontinuidades. Con lo anterior, se estudia el signo de $f''(x)$ y se deduce la convexidad de f, lo cual se resume en la siguiente tabla:

	$(-\infty,-3)$	$(-3,-1)$	$(-1,+\infty)$
f'' es	$+$	$-$	$+$
f es	convexa $\smile$	cóncava $\frown$	convexa $\smile$

Los puntos de inflexión son $x=-3$ y $x=-1$.

(b) El polinomio de Taylor de orden 2 en $x=9$ y el resto vienen dados por

$$P_2(x)=f(9)+f'(9)(x-9)+\frac{f''(9)}{2!}(x-9)^2,\quad R_2(x)=\frac{f'''(c)}{3!}(x-9)^3,$$

donde $c\in[9,x]$. Haciendo los cálculos, se tiene

$$\begin{array}{ll} f(x)=\sqrt{x}=x^{1/2}, & f(9)=3\\ f'(x)=\frac{1}{2}x^{-1/2}=\frac{1}{2\sqrt{x}}, & f'(9)=\frac{1}{6}\\ f''(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{-1}{2}x^{-3/2}=\frac{-1}{4\sqrt{x^3}}, & f''(9)=\frac{-1}{108}\\ f'''(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{-1}{2}\cdot\frac{-3}{2}x^{-5/2}=\frac{3}{8\sqrt{x^5}}, & f'''(c)=\frac{3}{8\sqrt{c^5}}.\end{array}$$

Por tanto, $P_2(x)=3+\frac{1}{6}(x-9)-\frac{1}{216}(x-9)^2$ y el resto $R_2(x)=\frac{1}{3!}\frac{3}{8\sqrt{c^5}}(x-9)^3=\frac{1}{16\sqrt{c^5}}(x-9)^3$.

4. Como f es diferenciable en $\mathbb{R}^2$, los extremos relativos son en particular puntos críticos, es decir, han de verificar las ecuaciones $D_1 f(x,y) = 0$, $D_2 f(x,y) = 0$ (aquí $D_1 f = \frac{\partial f}{\partial x}$ y $D_2 f = \frac{\partial f}{\partial y}$). Las derivadas parciales son

$$D_1 f(x,y) = 4x^3 + 4xy^2 - 4x, \quad D_2 f(x,y) = 4y^3 + 4x^2 y + 4y.$$

Hay que resolver el sistema

$$\begin{cases} 4x^3 + 4xy^2 - 4x = 0 \\ 4y^3 + 4x^2 y + 4y = 0 \end{cases} \to \begin{cases} x(x^2 + y^2 - 1) = 0 \\ y(y^2 + x^2 + 1) = 0 \end{cases} \to \begin{cases} x = 0 \text{ o } x^2 + y^2 - 1 = 0 \\ y = 0 \text{ o } y^2 + x^2 + 1 = 0 \end{cases}$$

Como $y^2 + x^2 + 1$ nunca es 0, se tienen dos casos:

(i) $x = 0$, $y = 0$. Resulta el punto $P_1 = (0,0)$.

(ii) $x^2 + y^2 - 1 = 0$, $y = 0$. Es decir, $x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$. Resultan los puntos $P_2 = (1,0)$ y $P_2 = (-1,0)$.

Para clasificar estos puntos, se necesita el Hessiano, $Hf(x,y) = \begin{pmatrix} D_{11} f(x,y) & D_{12} f(x,y) \\ D_{21} f(x,y) & D_{22} f(x,y) \end{pmatrix}$ y hay que utilizar la cuestión teórica 5.50 del libro de ejercicios. Las derivadas parciales segundas son

$$D_{11} f(x,y) = 12x^2 + 4y^2 - 4, \quad D_{12} f(x,y) = 8xy, \quad D_{22} f(x,y) = 12y^2 + 4x^2 + 4.$$

Luego,

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 + 4y^2 - 4 & 8xy \\ 8xy & 12y^2 + 4x^2 + 4 \end{pmatrix}.$$

Recordemos que $\Delta_1 = D_{11} f(x,y)$ y $\Delta_2 = \det(H(x,y))$. En la siguiente tabla se resume la discusión:

Punto P	$Hf(P)$	Δ_1	Δ_2	Conclusión
$(0,0)$	$\begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$	-4 $(-)$	-16 $(-)$	punto de silla
$(1,0)$	$\begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$	8	64 $(+)$	mínimo local
$(-1,0)$	$\begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$	8	64 $(+)$	mínimo local

5. Los cortes con el eje X se obtienen haciendo $y = 0$, con lo que $x^2 = 1$ y de aquí, $x = \pm 1$. Se obtienen los puntos $(1,0)$ y $(-1,0)$.

Los puntos de corte con el eje Y se obtienen haciendo $x = 0$, con lo que $\frac{y^2}{4} = 1$ y de aquí, $y = \pm 2$. Se obtienen los puntos $(0,2)$ y $(0,-2)$.

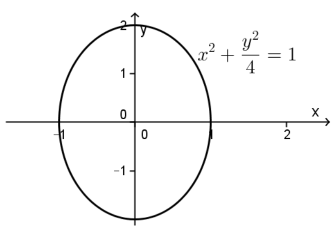

Fig. 1. Elipse.

Hallaremos el área A en el primer cuadrante y por simetría, el área total será $4 \cdot A$. La ecuación del borde superior de la elipse en forma explícita es $y = 2\sqrt{1-x^2}$. Por tanto, el área es

$$A = \int_0^1 2\sqrt{1-x^2}\,dx \overset{(1)}{=} 2\int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 t} \cdot \cos t\,dt = 2\int_0^{\pi/2} \cos^2 t\,dt$$
$$\overset{(2)}{=} 2\int_0^{\pi/2} \frac{1+\cos 2t}{2} dt = \left[t + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2t\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}.$$

(1) Cambio de variable: $x = \operatorname{sen} t$, $dx = \cos t dt$, $x = 0$ es $t = 0$, $x = 1$ es $t = \pi/2$.
(2) Usando la fórmula trigonométrica $\cos^2 t = \frac{1+\cos 2t}{2}$.

Por consiguiente, el área total es $4 \cdot A = 4 \cdot \frac{\pi}{2} = 2\pi$.

NOTA: La integral $\int \cos^2 t dt$ o $\int \operatorname{sen}^2 t dt$ está resuelta en los ejercicios 6.5, 6.23 y 6.26 del libro de ejercicios resueltos.