FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS DE LAS TTII
Funciones de una variable. Prueba de autoevaluación número 4 (**PAE-4**)

1. Considérese la sucesión $\{x_n\} = \left\{\frac{2^n}{3^{n+1}}\right\}$.

Indíquese cuál o cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas:
(a) La sucesión es monótona creciente.
(b) La sucesión es monótona decreciente.
(c) La sucesión es acotada.
(d) La sucesión no converge.

2. Justifíquese que la ecuación $-2x^4 + 1 = 0$ tiene al menos dos soluciones en el intervalo $[-1, 1]$.

3. Sea $f(x) = \operatorname{sen}(\pi x) + \frac{1}{x+1}$. Determínese la recta tangente a la gráfica de f en $x = \frac{1}{2}$.

4. Calcúlense los siguientes límites:

$$\text{(a)}\ \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2-3}}{2x+5}, \quad \text{(b)}\ \lim_{x\to+\infty} 2^{-x}\ln x, \quad \text{(c)}\ \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x^2) - e^{3x^2}}{x^2 e^x}, \quad \text{(d)}\ \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x-1}{x+3}\right)^{\ln x}.$$

5. Sea la función

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2-4}.$$

Determínense:
(a) Las asíntotas de f.
(b) Los puntos críticos de f.
(c) Los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f.
(d) Los intervalos de concavidad y convexidad de f.

A partir de la información obtenida en los apartados anteriores,
(e) represéntese la gráfica de la función f.

6. Determínese el polinomio de Taylor de orden 3 de la función $f(x) = x^2 \ln x$ en el punto $x = 1$. Calcúlese una estimación del error cometido al aproximar el valor de f por el valor de dicho polinomio en el punto $x = 2$.

SOLUCIONES. Prueba de autoevaluación núm. 4 (PAE-4).

1. Se tiene para cada n que

$$x_{n+1} - x_n = \frac{2^{n+1}}{3^{n+2}} - \frac{2^n}{3^{n+1}} = \frac{2^{n+1} - 3\cdot 2^n}{3^{n+2}} = \frac{2^n(2-3)}{3^{n+2}} = -\frac{2^n}{3^{n+2}} < 0,$$

luego $x_{n+1} < x_n$, por lo que la sucesión es monótona decreciente.

Además, la sucesión $\{x_n\}$ es acotada, ya que

$$\left|\frac{2^n}{3^{n+1}}\right| = \frac{2^n}{3^{n+1}} < \frac{2^n}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}.$$

Así pues, por el resultado 4.21 del libro de ejercicios se deduce que la sucesión es convergente. De hecho, se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{3^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{3\cdot 3^n} = \frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = 0,$$

ya que $\frac{2}{3} < 1$.

Por tanto, las opciones correctas son la (b) y la (c).

2. Sea $f(x) = -2x^4 + 1$. Veamos si se satisfacen las hipótesis del Teorema de Bolzano en el intervalo $[-1, 1]$. Es claro que la función f es continua en $\mathbb{R}$ por ser polinómica. Sin embargo, se tiene que $f(-1) = -1$ y $f(1) = -1$, por lo que $f(-1)\cdot f(1) > 0$ y no se verifican las hipótesis del Teorema de Bolzano. Por tanto, no se puede concluir nada aún sobre la existencia de raíces de la ecuación $f(x) = 0$ en $[-1, 1]$.

No obstante, obsérvese que $f(0) = 1$. Así pues, $f(-1)\cdot f(0) < 0$ y el Teorema de Bolzano garantiza la existencia de al menos una raíz de la ecuación $f(x) = 0$ en el intervalo $(-1, 0)$.

Del mismo modo, $f(0)\cdot f(1) < 0$ y por el Teorema de Bolzano se deduce que existe al menos una raíz de la ecuación $f(x) = 0$ en el intervalo $(0, 1)$.

Puesto que $(-1, 0), (0, 1) \subset [-1, 1]$, se concluye que existen al menos dos raíces de la ecuación $f(x) = 0$ en el intervalo $[-1, 1]$.

3. Claramente, la función f es derivable en $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ por ser suma de la función $f_1(x) = \operatorname{sen}(\pi x)$ y $f_2(x) = \frac{1}{x+1}$, la primera de ellas derivable en $\mathbb{R}$ y la segunda en $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$, ya que en $x = -1$ el denominador de f_2 se anula. Para $x \neq -1$ se tiene que

$$f'(x) = \pi\cos(\pi x) - \frac{1}{(x+1)^2},$$

y la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en $x = \frac{1}{2}$ viene dada por (véase el punto teórico 4.46 del libro de ejercicios)

$$y = f\left(\frac{1}{2}\right) + f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) \Longleftrightarrow y = \frac{5}{3} - \frac{4}{9}\left(x - \frac{1}{2}\right) \Longleftrightarrow y = -\frac{4}{9}x + \frac{17}{9}.$$

4. (a) Se obtiene una indeterminación del tipo $\frac{+\infty}{+\infty}$. La potencia de mayor grado tanto del numerador como del denominador es x. Así pues, dividiendo numerador y denominador por x se tiene que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2-3}}{2x+5} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}\sqrt{x^2-3}}{\frac{1}{x}(2x+5)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{\frac{x^2-3}{x^2}}}{2+\frac{5}{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{1-\frac{3}{x^2}}}{2+\frac{5}{x}} = \frac{1}{2}.$$

(b) Resulta una indeterminación del tipo $0\cdot(+\infty)$. Se convierte esta indeterminación a una del tipo $\frac{+\infty}{+\infty}$ y se aplica la regla de L'Hôpital (es fácil ver que se satisfacen las condiciones para aplicar esta regla):

$$\lim_{x\to+\infty} 2^{-x}\ln x = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{2^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{2^x \ln 2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x 2^x \ln 2} = 0.$$

(c) Puesto que la función coseno y la función exponencial son derivables en $\mathbb{R}$, se tiene que $f_1(x) = \cos(x^2) - e^{3x^2}$ y $f_2(x) = x^2 e^x$ son derivables en $\mathbb{R}$, y $f_2'(x) = 2xe^x + x^2e^x =$

$xe^x(x+2) \neq 0$ en un entorno del punto $x = 0$, menos en el punto $x = 0$. Aplicando la regla de L'Hôpital, resulta que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x^2) - e^{3x^2}}{x^2 e^x} = \lim_{x\to 0} \frac{-2x \operatorname{sen}(x^2) - 6xe^{3x^2}}{2xe^x + x^2 e^x} = \lim_{x\to 0} \frac{-2x\left(\operatorname{sen}(x^2) + 3e^{3x^2}\right)}{xe^x(2+x)}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{-2\left(\operatorname{sen}(x^2) + 3e^{3x^2}\right)}{e^x(2+x)} = \frac{-6}{2} = -3.$$

(d) Se obtiene una indeterminación del tipo $1^{+\infty}$. Este tipo de límites se resuelven utilizando el resultado 4.32 del libro de ejercicios. Obsérvese que

$$\left(\frac{x-1}{x+3}\right)^{\ln x} = \left[1 + \left(\frac{x-1}{x+3} - 1\right)\right]^{\ln x} = \left(1 + \frac{(-4)}{x+3}\right)^{\ln x} = \left(1 + \frac{1}{\frac{x+3}{(-4)}}\right)^{\ln x}$$
$$= \left(1 + \frac{1}{\frac{x+3}{(-4)}}\right)^{\frac{x+3}{(-4)}\cdot\frac{(-4)}{x+3}\ln x} = \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{x+3}{(-4)}}\right)^{\frac{x+3}{(-4)}}\right]^{\frac{-4\ln x}{x+3}}.$$

Por tanto,

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x-1}{x+3}\right)^{\ln x} = \lim_{x\to+\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{x+3}{(-4)}}\right)^{\frac{x+3}{(-4)}}\right]^{\frac{-4\ln x}{x+3}} = e^{\lim_{x\to+\infty} \frac{-4\ln x}{x+3}}.$$

Aplicando la regla de L'Hôpital (compruébese que se satisfacen las hipótesis para aplicar esta regla) se tiene que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{-4\ln x}{x+3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-4}{x} = 0.$$

Por consiguiente,

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x-1}{x+3}\right)^{\ln x} = e^{\lim_{x\to+\infty} \frac{-4\ln x}{x+3}} = e^0 = 1.$$

5. (a) El denominador se anula en $x = -2$ y $x = 2$, por lo que es probable que en esos puntos haya una asíntota vertical. En efecto, se tiene que

$$\lim_{x\to-2^-} \frac{x^3}{x^2-4} = -\infty, \qquad \lim_{x\to-2^+} \frac{x^3}{x^2-4} = +\infty,$$
$$\lim_{x\to 2^-} \frac{x^3}{x^2-4} = -\infty, \qquad \lim_{x\to 2^+} \frac{x^3}{x^2-4} = +\infty.$$

Luego $x = -2$ y $x = 2$ son asíntotas verticales. La función decrece hacia $-\infty$ cuando se aproxima por la izquierda a cada una de estas asíntotas y crece hacia $+\infty$ cuando se aproxima por la derecha.

Para comprobar la existencia de asíntotas oblicuas hay que calcular los siguientes límites:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}, \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}.$$

Resulta que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{x(x^2-4)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{x^3-4x} = 1.$$

Como resultado de este último límite, se deduce que si f tiene una asíntota oblicua, entonces dicha asíntota tiene pendiente $m = 1$, pero todavía no se ha garantizado la existencia de la misma. La función f tendrá asíntota oblicua con pendiente $m = 1$ si $\lim_{x\to+\infty}[f(x) - mx] = \lim_{x\to+\infty}[\frac{x^3}{x^2-4} - x]$ es finito. En efecto,

$$\lim_{x\to+\infty} [\frac{x^3}{x^2-4} - x] = \lim_{x\to+\infty} \frac{4x}{x^2-4} = 0,$$

por lo que la recta $y = x$ es una asíntota oblicua. Calculando $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$ se obtiene de nuevo, en este caso, la misma asíntota oblicua.

Como la existencia de asíntotas oblicuas excluye la existencia de asíntotas horizontales, se deduce que f no tiene asíntotas horizontales. Véase el punto teórico 4.34 del libro de ejercicios para reforzar conceptos.

(b) Los puntos críticos de f son los puntos $x \in \mathbb{R}$ en los que se anula su derivada. Se tiene que

$$f'(x) = \frac{x^4 - 12x^2}{(x^2-4)^2}.$$

Por tanto,

$$f'(x) = 0 \Longleftrightarrow x^4 - 12x^2 = 0 \Longleftrightarrow x^2(x^2 - 12) = 0 \Longleftrightarrow x = 0, x = \pm\sqrt{12},$$

y los puntos críticos son $x = 0$, $x = -\sqrt{12}$ y $x = \sqrt{12}$.

(c) Para determinar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento se analiza el signo de f' a ambos lados de los puntos críticos, calculados en el apartado anterior. Es fácil ver que $f'(x) > 0$ en $(-\infty, -\sqrt{12}) \cup (\sqrt{12}, +\infty)$, y $f'(x) < 0$ en $(-\sqrt{12}, -2) \cup (-2, 0) \cup (0, 2) \cup (2, \sqrt{12})$.

Por tanto, por el resultado teórico 4.61 del libro de ejercicios, se deduce que f es estrictamente creciente en $(-\infty, -\sqrt{12}) \cup (\sqrt{12}, +\infty)$ y estrictamente decreciente en $(-\sqrt{12}, -2) \cup (-2, 0) \cup (0, 2) \cup (2, \sqrt{12})$.

Así pues, se deduce que en $x = -\sqrt{12}$ hay un máximo relativo, en $x = \sqrt{12}$ un mínimo relativo y en $x = 0$ un punto de inflexión.

(d) Para determinar los intervalos de concavidad y de convexidad de f se analiza el signo de f'' (véase resultado teórico 4.71 del libro de ejercicios). Se tiene que

$$f''(x) = \frac{x(x^2-4)(8x^2+96)}{(x^2-4)^4}$$

Por tanto, se deduce que $f''(x) > 0$ si y sólo si $x(x^2 - 4) > 0$, es decir, si y sólo si $x \in (-2, 0) \cup (2, \infty)$, y $f''(x) < 0$ si y sólo si $x \in (-\infty, -2) \cup (0, 2)$. Luego f es convexa en $(-2, 0) \cup (2, \infty)$ y es cóncava en $(-\infty, -2) \cup (0, 2)$. De nuevo, aquí se comprueba que el punto $x = 0$ es de inflexión, ya que la función pasa de ser convexa a ser cóncava en las proximidades de ese punto.

En la Figura 1 se muestra la gráfica de f y sus asíntotas.

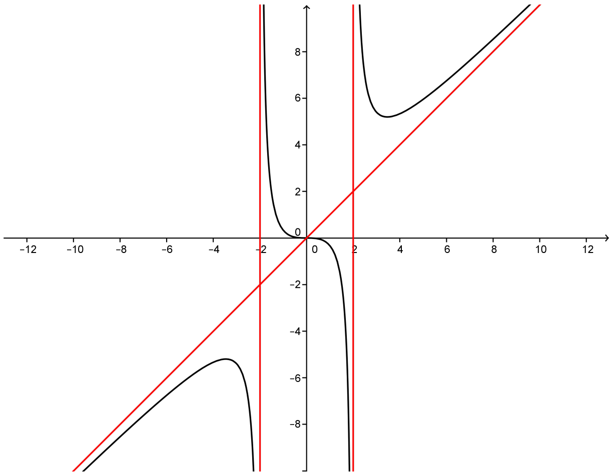

Figura 1: Gráfica de la función $f(x) = \frac{x^3}{x^2-4}$ y asíntotas

6. Se calculan las tres primeras derivadas de f y se evalúan en $x = 1$:

$$\begin{array}{ll} f(x) = x^2 \ln x & \to \; f(1) = 0 \\ f'(x) = x(2\ln x + 1) & \to \; f'(1) = 1 \\ f''(x) = 2\ln x + 3 & \to \; f''(1) = 3 \\ f'''(x) = \frac{2}{x} & \to \; f'''(1) = 2 \end{array}$$

Luego el polinomio de Taylor de orden 3 de la función f en $x = 1$ es

$$\begin{aligned} p_3(x) &= f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3 \\ &= (x-1) + \frac{3}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3. \end{aligned}$$

Por último, el error cometido al aproximar el valor de f por el valor de p_3 en el punto $x = 2$ (es decir, la diferencia $f(2) - p_3(2)$) viene dado por el resto de Lagrange de orden 3 evaluado en $x = 2$ (véase punto teórico 4.76 del libro de ejercicios):

$$R_3(2) = \frac{f^{iv}(c)}{4!}(2-1)^4,$$

donde $c \in (1, 2)$. Se tiene que

$$f^{iv}(x) = -\frac{2}{x^2},$$

por tanto,

$$R_3(2) = -\frac{1}{12c^2}$$

Puesto que $1 < c < 2$, se tiene que $\frac{1}{12 \cdot 4} < |R_3(2)| = \frac{1}{12c^2} < \frac{1}{12}$, es decir, el error cometido es menor que $\frac{1}{12} \simeq 0{,}083$ y mayor que $\frac{1}{48} \simeq 0{,}021$.