Matrices.

En los epígrafes siguientes vamos a aprender qué instrucciones posee MAXIMA para realizar las operaciones usuales con matrices. Comos sabemos, algunas de ellas requiere un trabajo muy pesado cuando se realizan a mano.
Estas instrucciones vienen definidas por distintas funciones u órdenes.

Se puede encontrar más información de las funciones desde
F1>Indice>(escribir el nombre de la función)>Mostrar

1 Cómo definir e introducir matrices:

Procedimiento 1:
Mediante la instrucción matrix. Ejemplo:

(%i1) A:matrix([1,2,3],[-4,5,-6]);

(%o1) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 5 & -6 \end{bmatrix}$

Nótese que cada fila va entre corchetes con sus elementos separados por comas. El nombre (o etiqueta) que asignamos a la matriz se coloca a la izquierda de los dos puntos.

Procedimiento 2:
Mediante el cuadro interactivo del comando Álgebra: Álgebra>Introducir matriz.
Seleccionar en el cuadro las características deseadas:
Número de filas.
Número de columnas.
Tipo de matriz.
Nombre de la matriz.
Ejemplo, vamos a generar una matriz de nombre H que sea diagonal y de orden 2

(%i2) H: matrix([2,0], [0,1]);

(%o2) $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Nótese que se han creado a la vez el input y el ouput.

Para escribir una matriz genérica hay que completar los datos siguiendo la secuencia anterior.
Al introducir como elementos m[11],m[12],m[13],m[21],m[22],m[23],m[31],m[32],m[33]
y aceptar se genera la matriz:

(%i3) M:matrix([m[11],m[12],m[13]], [m[21],m[22],m[23]], [m[31],m[32],m[33]]);

(%o3) $\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix}$

2 Obsérvese:
*MAXIMA asigna un nombre a una matriz poniendo dos puntos y la matriz tras el nombre elegido.
*Para MAXIMA una matriz es una lista de filas, cada una de las cuales es una lista de elementos.
*El papel de los corchetes como delimitadores para indicar subíndices y líneas de la matriz.
*Se puede ejecutar una instrucción con "Evaluar celda(s)" del botón derecho del ratón situando el cursor sobre el símbolo de la celda que contiene la instrucción.

Procedimiento 2:
Se obtiene el mismo resultado por definición directa utilizando la función matrix([primera fila],...,[última fila]) introduciendo cada fila entre corchetes separados por comas

```
(%i4) M:matrix([m[11],m[12],m[13]] , [m[21],m[22],m[23]],[m[31],m[32],m[33]]);
```

(%o4) $\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix}$

Procedimiento 3 (Opcional):
Si el valor del elemento que ocupa la fila i, columna j es el resultado de hacer una operación con dichos subíndices, se puede generar la matriz dando una regla para obtener el elemento que ocupa la fila i, columna j y la orden genmatrix de la siguiente manera:

genmatrix(nombre de la función generadora, número de filas, número de columnas)

Ejemplo:

```
(%i5) s[i,j]:=i+j$
      A:genmatrix(s,2,4);
```

(%o6) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$

Obsérvese que Maxima utiliza ':=' para definir una función (p. ej., f(x):=3*x-4). En el ejemplo anterior se ha usado la función s de las variables [i,j] (entre corchetes porque va a ser el elemento (i,j) de una matriz) para referirnos al elemento que ocupa la fila i y la columna j. Así, el elemento (i,i) de A (A[i,j]) es la suma i+j.

Al resolver con MAXIMA los ejercicios siguientes se utilizarán las técnicas anteriores.

3 OPERACIONES CON MATRICES

Las operaciones suma y resta se indican con los operadores aritméticos + y -. P. ej. A+B; A-B.
El producto de un número por una matriz se indica con *, p. ej., 3*A.
El PRODUCTO DE MATRICES se indica con punto ("."), no con el asterisco. P. ej. A.B.
La POTENCIA de una matriz se indica con ^^, p. ej., A^^3.
En el ejemplo siguiente se realizan estas 5 operaciones con matrices 2 x 2.

Ejemplo. 1º definimos las dos matrices A y B

```
(%i7) A:matrix([2,1],[3,-4]);
      B:matrix([1,3],[1,3]);
```

(%o7) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$

(%o8) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

2º Hallamos su suma A+B, su diferencia A-B y el producto 3*A:

```
(%i9) A+B;
      A-B;
      3*A;
```

(%o9) $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$

(%o10) $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -7 \end{bmatrix}$

(%o11) $\begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 9 & -12 \end{bmatrix}$

3º Hallamos el producto AB:

```
(%i12) A.B;
```

(%o12) $\begin{bmatrix} 3 & 9 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$

4º Hallamos la potencia A^^2, obsérvese que coincide con A.A:

```
(%i13) A^^2;
       A.A;
```

(%o13) $\begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -6 & 19 \end{bmatrix}$

(%o14) $\begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -6 & 19 \end{bmatrix}$

OBSERVACIÓN 1: el símbolo "*" entre dos matrices realiza el producto elemento a elemento, por tanto, Maxima no da un error, pero NO es el producto de matrices. Ejemplo:

(%i15) A*B;

(%o15) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -12 \end{bmatrix}$

OBSERVACIÓN 2: el símbolo "A^n$ eleva a n cada elemento de la matriz A. NO ES LA POTENCIA n-ÉSIMA de A. Ejemplo:

(%i16) A^2;

(%o16) $\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 9 & 16 \end{bmatrix}$

4 Otras funciones para operar con matrices:

·invert(A): inversa de la matriz A. También puede hallarse con la expresión A^^(-1).
·transpose: traspuesta de una matriz.
·ident(n): define la matriz identidad de orden n.
·zeromatrix: define la matriz nula.
·echelon(A): escalona la matriz A.
·rank(A): halla el rango de la matriz A.
·triangularize(A): triangulariza la matriz A.
·submatrix(i,A,j): se obtiene la submatriz de A cuando se prescinde de la fila i y la columna j.
·minor(A,i,j): se obtiene la submatriz de A cuando se prescinde de la fila i y la columna j.

5 EJEMPLOS

5.1 Solución con MAXIMA del ejercicio 88 de "Ejercicos resueltos de MATEMÁTICAS I".

El rango del sistema de vectores (1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,1,1,-1), (0,0,1,-1) es: a) Calculable escalonando la matriz que forman sus filas; b) Dos; c) El número de filas de su matriz escalonada; d) Ninguna de las anteriores.

SOLUCIÓN.

(%i17) A: matrix([1,0,0,0], [0,1,0,0], [0,1,1,-1], [0,0,1,-1]);

(%o17) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

MAXIMA puede escalonar directamente la matriz y hallar el rango:

(%i18) echelon (A);

(%o18) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(%i19) rank(A);

(%o19) 3

La opción cierta es A.

Obsérvese que si se triangulariza A, el resultado, en este caso coincide. En efecto:

(%i20) triangularize(A);

(%o20) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Como sabemos, en general, esto no sucede. Veámoslo con un ejemplo:

(%i21) triangularize(matrix ([2,1,3],[1,2,3]));

(%o21) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix}$

(%i22) echelon(matrix([2,1,3],[1,2,3]));

(%o22) $\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Resolución con MAXIMA de los ejercicios propuestos en el Curso Cero.

1 Ejercicio 1. (Página 15)

Dada una matriz hay que calcular la traspuesta y la inversa,

(%i23) A: matrix([2,1], [-1,3]);

(%o23) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

(%i24) transpose(A);

(%o24) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

(%i25) invert (A);

(%o25) $\begin{bmatrix} \frac{3}{7} & -\frac{1}{7} \\ \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{bmatrix}$

También se puede hacer elevando la matriz A a la potencia -1.

(%i26) A^^(-1);

(%o26) $\begin{bmatrix} \frac{3}{7} & -\frac{1}{7} \\ \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{bmatrix}$

2 Recuerde que:
-El símbolo que indica a MAXIMA elevar una matriz a una potencia es "^^".
-Para elevar cada elemento de A a la potencia n MAXIMA utiliza A seguida de "^(n)" .

(%i27) A^(-1);

(%o27) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ -1 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$

3 Ejercicio 2. (Página 15)

Dadas las matrices A, B, hay que calcular AB, BA y A-3I.

(%i28) A: matrix([2,1], [1,3], [3,4]);

(%o28) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

(%i29) B: matrix([1,2,1,1], [1,3,5,2]);

(%o29) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & 2 \end{bmatrix}$

(%i30) A.B;

(%o30) $\begin{bmatrix} 3 & 7 & 7 & 4 \\ 4 & 11 & 16 & 7 \\ 7 & 18 & 23 & 11 \end{bmatrix}$

4 Recuerde que:

-El operador que indica el producto de matrices es ".", si se utiliza "*" saldrá un mensaje de error.
-El operador que indica la multiplicación de un es calar por una matriz es "*".

(%i31) B.A;

MULTIPLYMATRICES: attempt to multiply nonconformable matrices.
-- an error. To debug this try: debugmode(true);

MAXIMA detecta que no puede hacer el producto porque el número de columnas de A no es el de filas de B.

Para hacer A-3I, hay que generar I del orden de A.
No se puede generar porque A no es cuadrada, e I sí.
Sí se puede generar la matriz nula de cualquier orden.

5 Introducción de matrices unidad.

(%i32) ident(3);

(%o32) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

6 Introducción de matrices nulas.

(%i33) zeromatrix(3,2);

(%o33) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

7 Ejercico 3. (Página 15).

Dadas las matrices A, B, hay que calcular 3A y BA.

(%i34) A: matrix([4,1,0], [1,2,1], [3,5,1]);

(%o34) $\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}$

(%i35) B: matrix([6,2,1], [1,3,5]);

(%o35) $\begin{bmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$

(%i36) 3*A;

(%o36) $\begin{bmatrix} 12 & 3 & 0 \\ 3 & 6 & 3 \\ 9 & 15 & 3 \end{bmatrix}$

(%i37) B.A;

(%o37) $\begin{bmatrix} 29 & 15 & 3 \\ 22 & 32 & 8 \end{bmatrix}$

8 Ejercicio 4. (Página 15).

Dada una matriz, A, hay que extraer varias submatrices.

(%i38) A: matrix([2,1], [1,2], [1,4]);

(%o38) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

(%i39) minor(A,1,1);

(%o39) $\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$

9 Al ejecutar la instrucción submatrix(i,A,j) se obtiene la submatriz de A cuando se prescinde de la fila i y la columna j.

La matriz A tiene tres filas y dos columnas.

Se pueden obtener submatrices de un elemento de las siguientes formas:

(%i40) submatrix(2,3, A,2) ;

(%o40) $\begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix}$

(%i41) submatrix(1,2,A,2);

(%o41) $\begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$

(%i42) submatrix(1,3,A,2);

(%o42) $\begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$

(%i43) submatrix(2,3,A,1);

(%o43) $\begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$

(%i44) submatrix(1,2,A,1);

(%o44) $\begin{bmatrix} 4 \end{bmatrix}$

(%i45) submatrix(1,3,A,1);

(%o45) $\begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix}$

Para obtener submatrices cuadradas de orden dos sólo se puede prescindir de alguna fila, no de columnas porque sólo hay dos:

(%i46) submatrix(1,A) ;

(%o46) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

(%i47) submatrix(2,A) ;

(%o47) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

(%i48) submatrix(3,A) ;

(%o48) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

También se considera A como submatriz de A.

(%i49) submatrix(A) ;

(%o49) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

10 RECUERDE:
***Antes de hacer una operación donde intervengan A y B, hay que generar las matrices A y B. (Los obtiene y guarda al ejecutar la instrucción)**
***Cuando MAXIMA tiene que operar con A o con B, utiliza los últimos valores que haya guardado de dichas matrices.**
***Se puede ejecutar una instrucción con "Evaluar celda" del botón derecho del ratón situando el cursor sobre la celda que contiene dicha instrucción.**

Nótese que los vectores pueden ser considerados como matrices.
Sin embargo podemos definir los vectores como una lista de la forma siguiente:
Por ejemplo el vector (2,3,4)

```
(%i50) a:[2,3,4];
(%o50) [2,3,4]
```

Ejercicio.
En su archivo de pruebas, defina distintas matrices y vectores para utilizar todas las funciones anteriores y realizar las distintas operaciones entre vectores y matrices.

11 Solución con MAXIMA del ejercicio 67 de Ejercicios resueltos de MATEMÁTICAS I:
Si A,B son matrices de 3 filas y 4 columnas que verifican a[i,j]=i+2j, b[i,j]=2i-j, respectivamente, entonces las matrices A+2B y -2A+B son: a)Inversas; b)Diagonales; c)Simétricas y opuestas; d)Ninguna de las anteriores.

Definición de la matriz A por el procedimiento 3:

Es fundamental para poder utilizar las misma etiquetas borrar los valores que se les había adjudicado antes con:

```
(%i51) kill(all);
(%o0) done
```

12 Es importante recordar que:
MAXIMA usa ':' para asignar un valor a una etiqueta (x:3) y ':=' para definir una función (f(x):=2*x).

Para definir la función a[i,j] que depende de i, j y generar la matriz a la que nombraremos con la etiqueta A:

```
(%i1) a[i,j]:=i+2*j$
      A:genmatrix(a,3,4);
```

(%o2) $\begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 & 9 \\ 4 & 6 & 8 & 10 \\ 5 & 7 & 9 & 11 \end{bmatrix}$

Se puede saber el valor de cualquier elemento a[i,j] de una matriz indicando el nombre de la matriz, la fila (i) y la columna (j) mediante A[i,j] y ejecutando la orden, por ejemplo:

```
(%i3) A[3,2];
```

(%o3) 7

Definición de la matriz B por el procedimiento 3:

```
(%i4) b[i,j]:=2*i-j$
      B:genmatrix(b,3,4);
```

(%o5) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

13 *Recuerde que:*
-Las instrucciones al ejecutar se escriben en celdas de matemáticas y están precedidas por el símbolo -->.
-Al ejecutarlas:
Dejan de llevar --> delante.
Se numeran como entradas mediante % i (input).
El resultado de la ejecución aparece como salida numerada mediante %o(output).

Matriz A+2B:

Obtener las matrices A y B ejecutando las órdenes correspondientes.
Obtener la matriz C=A+2B mediante la instrucción:

```
(%i6) C:A+2*B;
```

(%o6) $\begin{bmatrix} 5 & 5 & 5 & 5 \\ 10 & 10 & 10 & 10 \\ 15 & 15 & 15 & 15 \end{bmatrix}$

Para obtener el valor del elemento de C que ocupa la fila i, columna j, hay que definir la función: c[i,j]:= a[i,j]+2*b[i,j].

(%i7) c[i,j]:= a[i,j]+2*b[i,j];

(%o7) $c_{i,j} := a_{i,j} + 2\, b_{i,j}$

Para obtener el valor simplificado de la expresión anterior se puede utilizar la función "simplificar" del cuadro de comandos de la parte inferior de la pantalla con el cursor situado sobre la expresión a simplificar o escribir la función ratsimp:

Lo que indica que sólo depende de la fila que ocupe, no de la columna.

Para obtener el valor del elemento de D que ocupa la fila i, columna j, hay que ejecutar la orden: d[i,j]:= -2*a[i,j]+b[i,j].

(%i8) -2*a[i,j]+b[i,j];

(%o8) $-2\,(2\,j+i)-j+2\,i$

Para obtener el valor simplificado de la expresión anterior se puede utilizar la función "simplificar" del cuadro de comandos de la parte inferior de la pantalla con el cursor situado sobre la expresión a simplificar o escribir la función ratsimp():

(%i9) ratsimp(%);

(%o9) $-5\,j$

Para simplificar el valor de la expresión obtenida hay que simplificar desde el cuadro de comandos o llamando a la expresión mediante la etiqueta creada y simplificando:

Lo que indica que sólo depende de la columna que ocupe, no de la fila.

Es evidente que no son cuadradas, por tanto no pueden ser inversas ni diagonales.
Las opciones a y b son falsas.
Para que fueran opuestas y simétricas c[i,j] debería ser igual que c[j,i], que es falso.
Por ejemplo: No se puede comparar c[1,4] con c[4,1] porque c[4,1] no existe.
La opción correcta es D.

MAXIMA puede comparar si son iguales, o no, los valores de dos elementos, por ejemplo c[i,j] y c[j,i], ejecutando la orden is():

(%i10) is(c[i,j]=c[j,i]);

(%o10) false

En su fichero de instrucciones debe guardar entre otros:

ratsimpl(expresión): simplifica la expresión

invert(matriz): matriz inversa

transpose(matriz): matriz transpuesta

rank(matriz): rango de la matriz

minor(matriz,i,j): menor de la matriz obtenido al eliminar la fila i y la columna j

submatrix(fila1,fila2,..,matriz,col1,col2,..): matriz obtenida al eliminar las filas y columnas mencionadas

triangularize(matriz) forma triangular superior de la matriz.
NO normaliza el primer elemento no nulo de cada fila (obtenida por eliminación gaussiana).

echelon (matriz): devuelve la forma escalonada de la matriz (obtenida por eliminación gaussiana).

is(expresion 1= expresión 2): compara si son iguales ambas expresiones