FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS DE LAS TTII. Cód. 71021023
Grado en Ingeniería de las Tecnologías de la Información
Febrero de 2014. Tiempo: 2 horas

INSTRUCCIONES. Cada una de las preguntas tiene un valor máximo de 2 puntos. No está permitido ningún tipo de material.

1. Sea $U \subset \mathbb{R}^4$ el conjunto definido como

$$U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0, x_1 - x_2 + x_4 = 0\}.$$

(a) Demuestre que U es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$. *(0.5 puntos)*

(b) Encuentre una base de U e indique su dimensión. *(1.5 puntos)*

2. Sean A y B las matrices

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 2 & b & -c \\ 0 & a & c \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

donde A depende de los parámetros $a, b, c \in \mathbb{R}$.

(a) Determine los valores de $a, b, c \in \mathbb{R}$ para que A tenga como vector propio a $\bar{v} = (1, 2, 2)$, asociado al valor propio $\lambda = -1$. *(1.5 puntos)*

(b) Compruebe si la matriz B es semejante a la matriz A para los valores de a, b y c obtenidos en el apartado anterior. *(0.5 puntos)*

3. (a) Compruebe que la ecuación $x + \operatorname{sen} x - 1 = 0$ tiene al menos una raíz real. *(0.5 puntos)*

(b) Dada la función $f(x) = xe^x$, determine el polinomio de Mac Laurin de orden 3 de f y obtenga la expresión del resto de Lagrange de orden 3. *(1.5 puntos)*

4. Sean las funciones $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definidas, respectivamente, como

$$f(x, y) = e^{x-y} + 3xy, \qquad g(u, v) = (uv - 1, 3u - v^2).$$

Utilizando la regla de la cadena, calcule $\nabla(f \circ g)(0, 1)$. *(2 puntos)*

5. Calcule la integral

$$\int\int_D \frac{x}{y} dA,$$

donde D es la región del plano delimitada por las rectas $y = x$ e $y = 1$, con $1 \leq x \leq 2$. *(2 puntos)*

SOLUCIONES. FMTI. Modelo de examen. Febrero de 2014.

1. (a) Sean $a = (a_1, a_2, a_3, a_4), b = (b_1, b_2, b_3, b_4) \in U$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Hay que demostrar que $a + \lambda b = (a_1 + \lambda b_1, a_2 + \lambda b_2, a_3 + \lambda b_3, a_4 + \lambda b_4) \in U$. Puesto que a y b pertenecen a U, se tiene que $2a_1 + 3a_2 - a_3 = 0, a_1 - a_2 + a_4 = 0$ y $2b_1 + 3b_2 - b_3 = 0, b_1 - b_2 + b_4 = 0$, luego agrupando convenientemente se deduce que

$$\begin{aligned} &2(a_1 + \lambda b_1) + 3(a_2 + \lambda b_2) - (a_3 + \lambda b_3) = (2a_1 + 3a_2 - a_3) + \lambda(2b_1 + 3b_2 - b_3) = 0, \\ &(a_1 + \lambda b_1) - (a_2 + \lambda b_2) + (a_4 + \lambda b_4) = (a_1 - a_2 + a_4) + \lambda(b_1 - b_2 + b_4) = 0, \end{aligned}$$

por lo que $a + \lambda b \in U$ y queda probado que U es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$.

(b) El sistema que define a U es

$$\left\{ \begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 0 \\ x_1 - x_2 + x_4 &= 0 \end{aligned} \right.$$

Despejando x_3 en la primera ecuación resulta $x_3 = 2x_1 + 3x_2$ y despejando x_4 en la segunda ecuación se obtiene $x_4 = -x_1 + x_2$. Por tanto, cualquier vector $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in U$ puede expresarse del siguiente modo:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1, x_2, 2x_1 + 3x_2, -x_1 + x_2) = x_1(1, 0, 2, -1) + x_2(0, 1, 3, 1).$$

Así pues, el conjunto de vectores $B = \{(1, 0, 2, -1), (0, 1, 3, 1)\}$ es un sistema de generadores de U linealmente independiente, por lo que se concluye que B es una base de U y la dimensión de U es 2.

2. (a) La matriz A tiene como vector propio a $\bar{v} = (1, 2, 2)$ con autovalor asociado $\lambda = -1$ si se cumple que $A\bar{v} = -\bar{v}$. Luego hay que resolver el sistema

$$\begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 2 & b & -c \\ 0 & a & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix},$$

que da lugar a las ecuaciones

$$\left\{ \begin{aligned} a + 2b &= -1 \\ 2b - 2c &= -4 \\ 2a + 2c &= -2 \end{aligned} \right. \iff \left\{ \begin{aligned} a + 2b &= -1 \quad (1) \\ b - c &= -2 \quad (2) \\ a + c &= -1 \quad (3) \end{aligned} \right.$$

Sumando las ecuaciones (2) y (3) se obtiene $a + b = -3$ y restando esta ecuación a (1) resulta $b = 2$, luego $a = -3 - b = -5$ y despejando c en (3) se deduce que $c = 4$, por lo que la matriz A resultante es

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \\ 0 & -5 & 4 \end{pmatrix}.$$

(b) La ecuación característica de la matriz B es $|B - \lambda I| = 0$, donde I es la matriz identidad de dimensión 3. Calculando,

$$|B - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 0 & 0 \\ 2 & 2 - \lambda & 0 \\ 3 & -1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)(2 - \lambda)^2.$$

Luego la ecuación característica de B es $(1-\lambda)(2-\lambda)^2 = 0$. Si B fuese semejante a A, ambas matrices tendrían la misma ecuación característica y, en particular, los mismos autovalores, que son las soluciones de dicha ecuación. Sin embargo, para los valores de a, b y c obtenidos en el apartado anterior, $\lambda = -1$ es autovalor de A, pero claramente no es autovalor de B (de hecho, los autovalores de B son $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 2$). Por consiguiente, se deduce que A y B no son matrices semejantes.

3. (a) Veamos que la función $f(x) = x + \operatorname{sen} x - 1$ verifica el teorema de Bolzano en algún intervalo cerrado que tendremos que encontrar.

La función es continua en $\mathbb{R}$ por ser suma de funciones continuas, con lo que es suficiente encontrar dos valores en los que presente cambio de signo.

La imagen más sencilla de obtener es la del 0 que vale $f(0) = -1$. Como $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}+1-1 = \frac{\pi}{2}$, resulta que $f(0)\cdot f\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0$ y por tanto el teorema de Bolzano garantiza la existencia de al menos una solución en el intervalo $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

(b) El polinomio de Mac Laurin de orden 3 de f es

$$p_3(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3.$$

Se tiene que

$$\begin{array}{lcl} f(x) = xe^x & \Longrightarrow & f(0) = 0 \\ f'(x) = e^x(x+1) & \Longrightarrow & f'(0) = 1 \\ f''(x) = e^x(x+2) & \Longrightarrow & f''(0) = 2 \\ f'''(x) = e^x(x+3) & \Longrightarrow & f'''(0) = 3 \end{array}$$

Luego $p_3(x) = x + x^2 + \frac{1}{2}x^3$.

El resto de Lagrange de orden 3 viene dado por

$$R_3(x) = \frac{f^{iv}(c)}{4!}\cdot x^4,$$

donde $c \in (0,1)$. La derivada cuarta de f es $f^{iv}(x) = e^x(x+4)$. Por tanto, $R_3(x) = \frac{e^c(c+4)}{4!}x^4$, con $c \in (0,1)$.

4. Sean $g_1, g_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ las funciones componentes de g, es decir, $g_1(u,v) = uv - 1$ y $g_2(u,v) = 3u - v^2$. Como g_1 y g_2 son diferenciables en $\mathbb{R}^2$, y en particular en $(0,1)$, y f es diferenciable en $\mathbb{R}^2$, y en particular en $g(0,1) = (-1,-1)$, por la regla de la cadena se deduce que $f \circ g$ es diferenciable en $(0,1)$ y

$$\nabla(f\circ g)(0,1) = \nabla f(g(0,1)) \cdot \begin{pmatrix} \nabla g_1(0,1) \\ \nabla g_2(0,1) \end{pmatrix}.$$

Se tiene que

$$\begin{array}{lcl} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = e^{x-y} + 3y & \Longrightarrow & \frac{\partial f}{\partial x}(-1,-1) = -2, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -e^{x-y} + 3x & \Longrightarrow & \frac{\partial f}{\partial y}(-1,-1) = -4, \\ \frac{\partial g_1}{\partial u}(u,v) = v & \Longrightarrow & \frac{\partial g_1}{\partial u}(0,1) = 1, \\ \frac{\partial g_1}{\partial v}(u,v) = u & \Longrightarrow & \frac{\partial g_1}{\partial v}(0,1) = 0, \\ \frac{\partial g_2}{\partial u}(u,v) = 3 & \Longrightarrow & \frac{\partial g_2}{\partial u}(0,1) = 3, \\ \frac{\partial g_2}{\partial v}(u,v) = -2v & \Longrightarrow & \frac{\partial g_2}{\partial v}(0,1) = -2. \end{array}$$

Luego

$$\nabla(f\circ g)(0,1) = (-2,-4)\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = (-14, 8).$$

5. En la Figura 1 se representa el dominio de integración, que se corresponde con el triángulo de vértices $(1,1)$, $(2,1)$ y $(2,2)$.

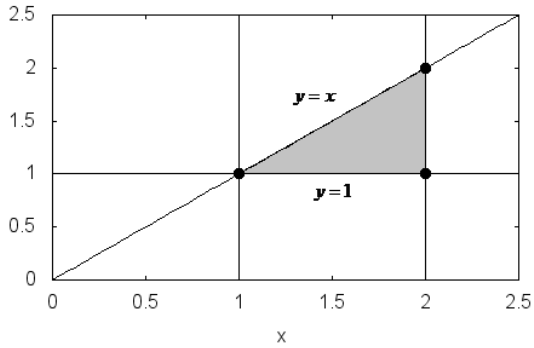

Figura 1: Dominio de integración D.

Expresado de forma analítica, dicho dominio de integración es

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x \le 2, 1 \le y \le x\}.$$

Por tanto,

$$\int\int_D \frac{x}{y} dA = \int_1^2 \int_1^x \frac{x}{y} dy dx = \int_1^2 x \ln|y|\Big]_1^x dx$$
$$= \int_1^2 x(\ln x - \ln 1) dx = \int_1^2 x \ln x dx,$$

y esta última integral se resuelve aplicando el método de integración por partes. Sean $u = \ln x$ y $dv = xdx$, luego $du = \frac{1}{x}dx$ y $v = \frac{x^2}{2}$. Se tiene que

$$\int_1^2 x \ln x dx = \frac{x^2}{2} \ln x\Big]_1^2 - \int_1^2 \frac{x}{2} dx = 2\ln 2 - \frac{x^2}{4}\Big]_1^2 = 2\ln 2 - 1 + \frac{1}{4} = \frac{8\ln 2 - 3}{4}.$$

Por consiguiente,

$$\int\int_D \frac{x}{y} dA = \frac{8\ln 2 - 3}{4}.$$