**FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS DE LAS TTII. Cód. 71021023**
Grado en Ingeniería de las Tecnologías de la Información
Prueba de evaluación continua (**PEC**). Temas 1, 2, 3 y 4. Días 4 y 5 de Dic. 2017

INSTRUCCIONES.

• Antes de enviar sus respuestas lea el documento "NormasdeRealizaciondelaPEC.pdf", que está en la carpeta PEC dentro de Documentos.

• Antes de acceder al envío de soluciones escriba en papel sus respuestas.

**1.** Se considera el siguiente sistema de parámetro real $m$:

$$\begin{cases} x \quad\quad - z = m+1 \\ 4x - y + mz = 2 \\ my + 3z = 2 \end{cases}$$

Indique la opción correcta:
($a$) Si $m = -3$, el sistema es compatible indeterminado.
($b$) Si $m \neq -1$, el sistema es compatible determinado.
($c$) Si $m = -1$, el sistema es compatible indeterminado.
($d$) Ninguna de las anteriores.

**2.** En $\mathbb{R}^4$ se consideran los subespacios siguientes:

$$U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : \; x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0, \; 3x_1 - x_2 + 6x_3 + 7x_4 = 0\}$$
$$V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : -2x_1 + 2x_2 - 4x_3 - 3x_4 = 0, \; 2x_1 - x_2 + 5x_3 + 5x_4 = 0\}$$

Indique la opción correcta:
($a$) $U + V = \mathbb{R}^4$.
($b$) Una base de $U \cap V$ es $\{(5, 5, 3, -4)\}$.
($c$) $U = V$.
($d$) Ninguna de las anteriores.

**3.** Sea $S$ el subespacio de $\mathbb{R}^3$ generado por los vectores $\bar{u}_1 = (2, -1, 2)$ y $\bar{u}_2 = (3, 1, 1)$. Indique la opción correcta:
($a$) El vector $\bar{v} = (0, -5, 4)$ es un elemento de $S$.
($b$) Una base de $S$ es $\{\bar{e}_1 = (5, 0, 3), \; \bar{e}_2 = (-1, -2, 2)\}$.
($c$) La ecuación implícita de $S$ es $-3x + 4y + 6z = 0$.
($d$) Ninguna de las anteriores.

**4.** Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal (endomorfismo) que en la base canónica tiene de ecuaciones

$$\begin{cases} y_1 = 2x_1 + x_2 - x_3 \\ y_2 = \; x_1 \quad\quad - 2x_3 \\ y_3 = -3x_1 + 2x_2 + 2x_3 \end{cases}$$

La matriz de $f$ en la base (inicial y final) $B = \{(1, 1, 0), \; (0, 1, -1), \; (1, 1, 1)\}$ es:

($a$) $\begin{pmatrix} 6 & 2 & 4 \\ -2 & 0 & -3 \\ -3 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

($b$) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

$(c)$ $\begin{pmatrix} 0 & 4 & -5 \\ 2 & -2 & 3 \\ -3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.
$(d)$ Ninguna de las anteriores.

**5.** Se considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

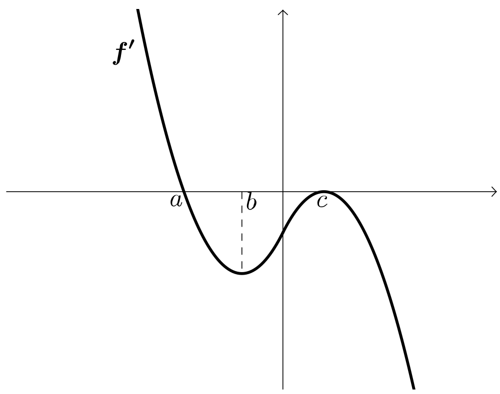
Indique la opción correcta:
$(a)$ $\bar{u} = (2, 1, -2)$ es un vector propio de $A$.
$(b)$ 3 es un valor propio de $A$.
$(c)$ 4 es un valor propio de $A$ y la dimensión del subespacio propio asociado es 1.
$(d)$ Ninguna de las anteriores.

**6.** Indique el valor del límite

$$\lim_{x \to +\infty} x \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{x}\right).$$

$(a)$ $+\infty$.
$(b)$ 0.
$(c)$ $\pi$.
$(d)$ Ninguna de las anteriores.

**7.** Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función dos veces derivable en $\mathbb{R}$. Se sabe que la gráfica de <u>su función derivada</u> es la representada en la imagen.




Indique la opción correcta:
$(a)$ $f$ tiene un punto de inflexión en $x = b$ y un máximo relativo en $x = c$.
$(b)$ $f$ tiene un máximo relativo en $x = a$ y un punto de inflexión en $x = c$.
$(c)$ $f$ es decreciente y cóncava en $(a, c)$.
$(d)$ Ninguna de las anteriores.

**8.** Sea $P_2(x) = 1 - 2x^2$ el polinomio de Mac Laurin de orden 2 de una función $f$ derivable en $\mathbb{R}$. Indique la opción correcta.
$(a)$ $f$ tiene un mínimo relativo en $x = 0$ cuyo valor es 1.
$(b)$ $f$ tiene un máximo relativo en $x = 0$ cuyo valor es 0.
$(c)$ No se tiene información suficiente para afirmar que $x = 0$ es un extremo relativo de $f$.
$(d)$ Ninguna de las anteriores.

NOTAS: (A) Si por error alguna pregunta tuviera dos opciones correctas, se deberá responder con la primera que sea correcta en el orden alfabético. Por ejemplo, si en una pregunta fueran ciertas (b) y (c), en la aplicación se deberá responder (b), y sólo se considerará como válida esta respuesta.
(B) Se puede usar Maxima, y se recomienda usarlo especialmente en los ejercicios que tienen mucho cálculo.

**SOLUCIONES.** Prueba de evaluación continua (**PEC**). Diciembre-2017.

**RESUMEN:** Las soluciones del test son: 1 (c), 2 (b), 3 (a), 4 (a), 5 (c), 6 (c), 7 (b) y 8 (d).

A continuación se hace la resolución.

**1.** La matriz de los coeficientes y la matriz ampliada están dadas por

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & m+1 \\ 4 & -1 & m & 2 \\ 0 & m & 3 & 2 \end{array}\right)$$

El determinante de la matriz de los coeficientes vale $-m^2-4m-3$, y resulta que es cero precisamente si $m=-3$ o si $m=-1$. Por tanto, si $m\neq -3$ y $m\neq -1$, los rangos de la matriz de los coeficientes y de la ampliada valen 3 y el sistema es compatible determinado.

Si $m=-1$, se sustituye en el sistema, se resuelve por Gauss y resulta un sistema compatible indeterminado con solución $x=\lambda$, $y=3\lambda-2$, $z=\lambda$.

Si $m=-3$, se sustituye en el sistema, se resuelve por Gauss y resulta un sistema incompatible. Por consiguiente, es cierta (c). La opción (b) no es cierta puesto que, en particular, para $m=-3$ (que es distinto de $-1$), el sistema es incompatible.

**2.** Es necesario conocer al menos la dimensión del subespacio intersección $U\cap V$ para responder. Para ello, basta resolver el sistema homogéneo formado por las ecuaciones que definen los dos subespacios y se tiene:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 6 & 7 & 0 \\ -2 & 2 & -4 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & 5 & 5 & 0 \end{array}\right) \overset{(1)}{\to} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -3 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 3 & 0 \end{array}\right) \overset{(2)}{\to} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 5 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

(1) $E_2\to E_2-3E_1$, $E_3\to E_3+2E_1$, $E_4\to E_4-2E_1$. (2) $E_2\to E_2+4E_3$, $E_4\to E_4+3E_3$

De aquí se sigue que se puede suprimir la 4ª ecuación (que es equivalente a la 2ª) y que es un sistema compatible indeterminado con 1 grado de libertad, cuya solución es

$$x_1=\frac{5}{3}\lambda,\ x_2=\frac{5}{3}\lambda,\ x_3=\lambda,\ x_4=\frac{-4}{3}\lambda.$$

Por tanto, el subespacio intersección $U\cap V$ tiene por base el vector $(5/3,5/3,1,-4/3)$ o cualquier múltiplo no nulo suyo, por ejemplo (multiplicando por 3), $(5,5,3,-4)$. En consecuencia, es cierta la opción (b).

**3.** Es claro que los vectores $\bar{u}_1=(2,-1,2)$ y $\bar{u}_2=(3,1,1)$ forman una base de $S$.

Para decidir si (a) es cierta basta comprobar si el vector $\bar{v}=(0,-5,4)$ es combinación lineal de $\bar{u}_1$ y $\bar{u}_2$:

$$\lambda_1(2,-1,2)+\lambda_2(3,1,1)=(0,-5,4).$$

De aquí resulta el siguiente sistema que se resuelve

$$\left\{\begin{array}{l} 2\lambda_1+3\lambda_2=0 \\ -\lambda_1+\lambda_2=-5 \\ 2\lambda_1+\lambda_2=4 \end{array}\right. \to \left\{\begin{array}{l} \lambda_1=3 \\ \lambda_2=-2 \end{array}\right.$$

Como tiene solución, se deduce que $\bar{v}$ es un elemento de $S$ y por tanto, es cierta (a).

Las otras dos opciones se descartan fácilmente: la (c) porque la ecuación implícita de $S$ es $-3x+4y+5z=0$ y la (b), porque el vector $\bar{e}_2=(-1,-2,2)$ no es un elemento de $S$ (porque no verifica la ecuación implícita).

**4.** La matriz de $f$ en la base canónica es $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ y la matriz de cambio de base es $P=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Por tanto, la matriz de $f$ en la nueva base $B$ viene dada por $A'=P^{-1}AP$ (véase la cuestión teórica 3.12 del libro de Ejercicios resueltos). Operando resulta:

$$A'=\begin{pmatrix} 6 & 2 & 4 \\ -2 & 0 & -3 \\ -3 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

con lo que la opción correcta es (a).

**5.** (a) Se tiene:

$$A.\bar{u}=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix}\neq\lambda\bar{u},$$

Por consiguiente, $\bar{u}$ no es un vector propio de $A$, por lo que (a) es falsa.

(b) 3 es un valor propio si y sólo si la matriz $A-3I$ es una matriz singular (de determinante nulo). Se tiene

$$|A-3I|=\left|\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}-3\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right|=\begin{vmatrix} -2 & 3 & 3 \\ 0 & -5 & 0 \\ 3 & 3 & -2 \end{vmatrix}=25,$$

y por tanto, 3 no es un valor propio de $A$. Así pues, (b) no es cierta.

(c) Resolvamos la ecuación $(A-4I)\bar{x}=\bar{0}$ (donde $\bar{x}=(x,y,z)^t$), que da lugar al sistema

$$\left\{\begin{array}{c} -3x+3y+3z=0 \\ -6y=0 \\ 3x+3y-3z=0 \end{array}\right.$$

cuya solución es

$$x=\lambda,\ y=0,\ z=\lambda$$

Por tanto, es un subespacio de dimensión 1, y en consecuencia es cierta la (c).

**6.** Al calcular el límite, se obtiene la indeterminación $(+\infty)\cdot 0$. Para abordarla, se considera la siguiente expresión equivalente

$$x\text{sen}\left(\frac{\pi}{x}\right)=\frac{\text{sen}\left(\frac{\pi}{x}\right)}{\frac{1}{x}},$$

y se estudia el límite $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\text{sen}\left(\frac{\pi}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$. Ahora, se obtiene la indeterminación $\dfrac{0}{0}$, que se resuelve aplicando la regla de L'Hôpital. En efecto, es claro que se satisfacen las condiciones de la misma: Las funciones $f(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{x}\right)$ y $g(x) = \dfrac{1}{x}$ son derivables en $(a, +\infty)$, $a > 0$, $g'(x) = -\dfrac{1}{x^2} \neq 0$ para todo $x \in (a, +\infty)$ y el siguiente límite existe

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-\frac{\pi}{x^2}\cos\left(\frac{\pi}{x}\right)}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \pi\cos\left(\frac{\pi}{x}\right) = \pi\cos(0) = \pi.$$

Por tanto, en virtud de la regla de L'Hôpital se tiene que

$$\lim_{x\to+\infty} x\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \pi,$$

siendo $(c)$ la opción correcta.

Este límite se puede calcular con Maxima mediante la instrucción

```
limit(x*sin(%pi/x),x,inf);
```

**7.** De la gráfica de $f'$ se deduce lo siguiente:

(a) $f'$ es derivable en $\mathbb{R}$ y $f'(a) = 0$, $f'(c) = 0$, luego los puntos críticos de $f$ son $x = a$ y $x = c$.

(b) $f'(x) > 0$ en $(-\infty, a)$, luego $f$ es estrictamente creciente en $(-\infty, a)$. Análogamente, $f'(x) < 0$ en $(a, c) \cup (c, +\infty)$, por lo que $f$ es estrictamente decreciente en $(a, c) \cup (c, +\infty)$.

(c) De los apartados (a) y (b) se deduce que en $x = a$ la función $f$ alcanza un máximo relativo.

(d) $f'$ es decreciente en $(-\infty, b) \cup (c, +\infty)$ y creciente en $(b, c)$, luego $f''(x) \leq 0$ en $(-\infty, b) \cup (c, +\infty)$ y $f''(x) \geq 0$ en $(b, c)$. Por tanto, $f$ es cóncava en $(-\infty, b) \cup (c, +\infty)$ y convexa en $(b, c)$.

(e) Del apartado (d) se deduce que en $x = b$ la función pasa de cóncava a convexa y en $x = c$ la función pasa de convexa a cóncava, por lo que $x = b$ y $x = c$ son puntos de inflexión.

Por tanto, la opción correcta es la (b).

**8.** La expresión general del polinomio de Mac Laurin de orden 2 de $f$ es

$$P_2(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2,$$

de donde se deduce que $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$ y $f''(0) = -4$. Así pues, como la derivada en $x = 0$ es 0, se deduce que $x = 0$ es un punto crítico de $f$, y como $f''(0) < 0$, se concluye que en dicho punto crítico se alcanza un máximo relativo, cuyo valor es $f(0) = 1$, luego la respuesta correcta es la $(d)$.