FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS DE LAS TTII
Espacios vectoriales. Prueba de autoevaluación número 2 (**PAE-2**)

1. El vector $(1, -1, 3)$ es combinación lineal de:
(a) $(1, 1, 1)$, $(1, 2, 0)$ y $(3, 2, 4)$.
(b) $(1, 1, 1)$ y $(3, 2, 4)$.
(c) $(1, 2, 0)$, $(3, 1, 2)$ y $(-2, 6, -2)$.
(d) Ninguna de las anteriores.

2. Indique cuáles de los siguientes conjuntos son linealmente independientes:
(a) $\{(2, -1, 1),\ (-4, 2, -2)\}$.
(b) $\{(2, -1, 1),\ (-3, 1, 2),\ (-1, 0, 3)\}$.
(c) $\{(2, -1, 1),\ (-3, 1, 2),\ (-5, 2, -1)\}$.
(d) $\{(2, -1, 1),\ (-3, 1, 2)\}$.

3. Se sabe que el conjunto $U = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 :\ 2x_1 - x_2 - 4x_3 = 0\}$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$. Indique cuáles de los siguientes conjuntos son generadores de U:
(a) $\{(2, 0, 1),\ (1, 2, 0)\}$.
(b) $\{(1, 2, 0),\ (0, -4, 1)\}$.
(c) $\{(1, 2, 0),\ (1, -3, 1)\}$.
(d) Ninguno de los anteriores.

4. Se considera el subespacio vectorial U de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores $\bar{u}_1 = (1, 1, 2, -1)$, $\bar{u}_2 = (-2, -1, -3, 1)$ y $\bar{u}_3 = (1, 2, 2, 3)$. El vector $\bar{v} = (-a+1, 1, -a+2, b)$ es un elemento de U en los siguientes casos:
(a) $a = 1$ y $b = 2$.
(b) Para todo valor de a y $b = -1$.
(c) $a = 0$ y $b = 1$.
(d) Ninguno de los anteriores.

5. Sean U_1 y U_2 los subespacios de $\mathbb{R}^4$ definidos por $U_1 = \langle (1, 1, 0, 1),\ (0, 2, 2, 5),\ (-2, 0, 2, 3) \rangle$ y $U_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 :\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0,\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$. Indique las afirmaciones correctas.
(a) $\dim U_1 = \dim U_2 = 2$.
(b) $U_1 \cap U_2 = \langle (3, 1, -2, -2) \rangle$.
(c) $U_1 + U_2 = \mathbb{R}^4$.
(d) $U_1 + U_2$ es suma directa.

6. Sean $B_1 = \{\bar{e}_1,\ \bar{e}_2,\ \bar{e}_3,\ \bar{e}_4\}$ y $B_2 = \{\bar{u}_1,\ \bar{u}_2,\ \bar{u}_3,\ \bar{u}_4\}$ dos bases de $\mathbb{R}^4$ tales que $\bar{u}_1 = \bar{e}_1 + \bar{e}_2 + \bar{e}_3 + \bar{e}_4$, $\bar{u}_2 = -\bar{e}_2 + \bar{e}_3$, $\bar{u}_3 = \bar{e}_1 - \bar{e}_2$ y $\bar{u}_4 = \bar{e}_1$.
a) Si las coordenadas de $\bar{v}$ respecto de la base B_2 son $(3, 4, -5, 6)$, ¿cuáles son las coordenadas de $\bar{v}$ respecto de la base B_1?
b) Si las coordenadas de $\bar{w}$ respecto de la base B_1 son $(2, 3, 4, -7)$, ¿cuáles son las coordenadas de $\bar{w}$ respecto de la base B_2?

7. Se considera el espacio vectorial $\mathbb{R}^4$ y el subconjunto U definido por $U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 :\ 3x_2 + x_3 - 2x_4 = 0\}$. Se pide:
a) Probar que U es un subespacio vectorial.
b) Encontrar una base de U e indicar su dimensión.

c) Hallar las coordenadas del vector $\bar{u} = (2, 1, 5, 4)$ respecto de la base anterior.
d) Hallar las coordenadas del vector $\bar{v} = (5, -1, 4, 1)$ respecto de la base del apartado b). ¿Hay algo extraño?

SOLUCIONES. Prueba de autoevaluación número 2 (PAE-2).

1. Empecemos con la opción (b). Resolvemos la ecuación

$$\alpha(1, 1, 1) + \beta(3, 2, 4) = (1, -1, 3)$$

y tiene la solución única $\alpha = -5$, $\beta = 2$. Esto significa que (b) es cierta y (a) también es cierta porque si un vector $\bar{v}$ es combinación lineal de $\bar{a}$ y $\bar{b}$, también es combinación lineal de $\bar{a}$, $\bar{b}$ y $\bar{c}$, siendo $\bar{c}$ cualquier vector del espacio.

Para ver si es cierta (c), resolvemos la ecuación

$$\alpha(1, 2, 0) + \beta(3, 1, 2) + \gamma(-2, 6, -2) = (1, -1, 3),$$

resultando con solución única: $\alpha = -22/5$, $\beta = 12/5$, $\gamma = 9/10$. Por lo tanto, (c) es cierta.

2. (a) Es inmediato observar que las componentes de los dos vectores son proporcionales o que se verifica que $(-4, 2, -2) = (-2)(2, -1, 1)$, y por tanto, son lin. dependientes.

(b) Hay que resolver la siguiente ecuación de incógnitas α, β y γ:

$$\alpha(2, -1, 1) + \beta(-3, 1, 2) + \gamma(-1, 0, 3) = (0, 0, 0).$$

De aquí resulta el sistema:

$$\left\{\begin{array}{c} 2\alpha - 3\beta - \gamma = 0 \\ -\alpha + \beta \quad = 0 \\ \alpha + 2\beta + 3\gamma = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} -\beta - \gamma = 0 \\ -\alpha + \beta = 0 \\ 3\alpha + 3\gamma = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} \gamma = -\beta \\ \alpha = \beta \\ \beta \text{ libre} \end{array}\right.$$

Como tiene infinitas soluciones, por ejemplo $\beta = 1$, $\alpha = 1$, $\gamma = 1$, el conjunto es lin. dependiente.

(c) Ahora hay que resolver la siguiente ecuación de incógnitas α, β y γ:

$$\alpha(2, -1, 1) + \beta(-3, 1, 2) + \gamma(-5, 2, -1) = (0, 0, 0).$$

De aquí resulta el sistema:

$$\left\{\begin{array}{c} 2\alpha - 3\beta - 5\gamma = 0 \\ -\alpha + \beta + 2\gamma = 0 \\ \alpha + 2\beta - \gamma = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} -\beta - \gamma = 0 \\ -\alpha + \beta + 2\gamma = 0 \\ 3\beta + \gamma = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} -\beta - \gamma = 0 \\ -\alpha + \beta + 2\gamma = 0 \\ 2\beta = 0 \end{array}\right.$$

Se deduce que la única solución es $\beta = 0$, $\alpha = 0$, $\gamma = 0$, y por tanto, el conjunto es lin. independiente.

(d) Como *todo subconjunto de un conjunto de vectores lin. independiente es lin. independiente*, se deduce que el del apartado (d) es lin. independiente por ser un subconjunto del conjunto del apartado (c) anterior.

3. Basta despejar x_2 de la ecuación que define U, resultando: $x_2 = 2x_1 - 4x_3$. Por consiguiente, los elementos de U pueden expresarse así:

$$(x_1, x_2, x_3) = (x_1, 2x_1 - 4x_3, x_3) = x_1(1, 2, 0) + x_3(0, -4, 1) = \alpha(1, 2, 0) + \beta(0, -4, 1)$$

(hemos sustituido $x_1 = \alpha$, $x_3 = \beta$). Esto nos indica que $\bar{a} = (1, 2, 0)$ y $\bar{b} = (0, -4, 1)$ son generadores de U y en consecuencia, (b) es cierta.

Para decidir sobre (a), y puesto que $\bar{c} = (2, 0, 1)$ es un elemento de U, ya que verifica su ecuación $(2 \cdot 2 - 0 - 4 \cdot 1 = 0)$, lo escribimos como combinación lineal de $\bar{a}$ y $\bar{b}$:

$$\alpha(1, 2, 0) + \beta(0, -4, 1) = (2, 0, 1).$$

Resultando la solución $\alpha = 2$, $\beta = 1$, lo cual significa que $\bar{c} = 2\bar{a} + \bar{b}$. Por tanto, $\bar{c}$ y $\bar{a}$ son también generadores de U ya que *si* $\{\bar{a},\ \bar{b}\}$ *es un sistema de generadores de* U *y* $\bar{c}$ *es combinación lineal de* $\bar{a}$ *y* $\bar{b}$*, entonces se puede sustituir* $\bar{b}$ *por* $\bar{c}$ *obteniéndose el conjunto* $\{\bar{a},\ \bar{c}\}$ *que también es un sistema generador de* U *(siempre que el coeficiente del vector sustituido sea no nulo).*

Respecto de (c) basta observar que $(1, -3, 1)$ no es un elemento de U porque no verifica la ecuación que define U. Por tanto, (c) es falso.

4. Dados los números a y b, hemos de resolver la siguiente ecuación de incógnitas α, β y γ:

$$\alpha(1, 1, 2, -1) + \beta(-2, -1, -3, 1) + \gamma(1, 2, 2, 3) = (-a + 1, 1, -a + 2, b).$$

Resultando el sistema (escribimos sólo los coeficientes):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -a+1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 & -a+2 \\ -1 & 1 & 3 & b \end{array}\right)$$

Llevándolo a la forma escalonada se obtiene:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -a+1 \\ 0 & 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & 0 & a \\ 0 & -1 & 4 & -a+b+1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -a+1 \\ 0 & 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & b+1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -a+1 \\ 0 & 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b+1 \end{array}\right)$$

Para que tenga solución tiene que ser $b = -1$, con lo cual

$$\alpha = a + 1,\ \beta = a,\ \gamma = 0,\ a = \text{libre},$$

es decir, hay solución para cualquier valor de a y $b = -1$. Por consiguiente, sólo es cierta la (b).

5. Empezando por el subespacio U_2, llevando las ecuaciones que lo definen

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0. \end{array} \right. \tag{1}$$

a la forma escalonada resulta:

$$\left\{ \begin{array}{r} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 0. \end{array} \right.$$

Despejando x_1 y x_3 en función de x_2 y x_4 se obtiene:

$$\begin{cases} x_3 = 2x_2 + 2x_4 \\ x_1 = -3x_2 - 3x_4. \end{cases}$$

Por consiguiente, los elementos de U_2 se expresan así:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-3x_2 - 3x_4, x_2, 2x_2 + 2x_4, x_4) = x_2(-3, 1, 2, 0) + x_4(-3, 0, 2, 1).$$

Es pues claro que los vectores $\bar{a} = (-3, 1, 2, 0)$ y $\bar{b} = (-3, 0, 2, 1)$ forman una base de U_2 (ya que son generadores y linealmente independientes), y por tanto, $\dim U_2 = 2$.

Por otro lado, los vectores $\bar{c} = (1, 1, 0, 1)$, $\bar{d} = (0, 2, 2, 5)$ y $\bar{e} = (-2, 0, 2, 3)$ son generadores de U_1, y su rango es 2 como puede verse fácilmente llevando a la forma escalonada la matriz cuyas filas son dichos vectores. Una base de U_1 está formada por $\bar{c}$ y $\bar{d}$. Por tanto, la dimensión de U_1 es 2 y es cierta la opción (a). Obsérvese que $\bar{e} = -2\bar{c} + \bar{d}$.

Para decidir sobre (c), se sabe que los vectores $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ y $\bar{d}$ forman un sistema de generadores de $U_1 + U_2$. Hallando el rango de la matriz cuyas filas son dichos vectores, se obtiene que es 3 y en consecuencia, $U_1 + U_2$ no puede ser $\mathbb{R}^4$. Así pues, (c) es falsa. Además, por la fórmula de Grassman:

$$3 = \dim(U_1 + U_2) = \dim U_1 + \dim U_2 - \dim(U_1 \cap U_2) = 4 - \dim(U_1 \cap U_2),$$

se deduce que $\dim(U_1 \cap U_2) = 1$.

Para hallar un vector generador del subespacio $U_1 \cap U_2$ hemos de encontrar un vector no nulo que esté en los dos subespacios. Para ello, basta resolver la ecuación:

$$\alpha\bar{a} + \beta\bar{b} = \lambda\bar{c} + \mu\bar{d},$$

que tiene por solución:

$$\alpha = -t, \ \beta = 2t, \ \lambda = -3t, \ \mu = t,$$

siendo $t \in \mathbb{R}$ el parámetro. Una solución concreta, se obtiene por ejemplo para $t = 1$, resultando $\alpha = -1$, $\beta = 2$, $\lambda = -3$ y $\mu = 1$. Por tanto, el vector $\bar{v} = -\bar{a} + 2\bar{b} = (-3, -1, 2, 2)$ es un generador de $U_1 \cap U_2$ y también lo es su opuesto $(3, 1, -2, -2)$. Así pues, la opción (b) es cierta.

<u>NOTAS.</u> Debido al interés de esta última parte, vamos a obtener un vector generador del subespacio intersección $U_1 \cap U_2$ por otro método: utilizando las ecuaciones implícitas de los subespacios.

Las ecuaciones implícitas de U_2 nos las dan, las ecuaciones implícitas de $U_1 \cap U_2$ se forman añadiendo a las de U_2 las de U_1. Hallemos las de U_1. Como $\bar{c}$, $\bar{d}$ son base de U_1, unas ecuaciones paramétricas son:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = \alpha(1, 1, 0, 1) + \beta(0, 2, 2, 5).$$

Para eliminar los parámetros, usamos el hecho de que el rango de los vectores $\bar{c}$, $\bar{d}$, $\bar{x}$ es 2, es decir, el rango de la siguiente matriz tiene que ser 2:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 5 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}$$

Entonces los dos orlados de orden 3 de la submatriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ tienen que ser 0:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 5 \\ x_1 & x_2 & x_4 \end{vmatrix} = 0,$$

esto es, las ecuaciones implícitas de U_1 son (la primera se ha simplificado dividiendo entre 2):

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 - 5x_2 + 2x_4 = 0. \end{cases}$$

Estas ecuaciones junto con las de U_2 dan lugar al sistema siguiente que define $U_1 \cap U_2$:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 - 5x_2 + 2x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

Una vez resuelto, se obtiene $(x_1, x_2, x_3, x_4) = \alpha(-3, -1, 2, 2)$, que son las ecuaciones paramétricas de $U_1 \cap U_2$, y que como vemos coincide con el resultado obtenido anteriormente.

Y por último, otro método (más corto) para hallar los generadores de $U_1 \cap U_2$. Usamos las ecuaciones paramétricas de U_1:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = \alpha(1, 1, 0, 1) + \beta(0, 2, 2, 5) = (\alpha, \alpha + 2\beta, 2\beta, \alpha + 5\beta). \tag{2}$$

Se sustituyen x_1, x_2, x_3, x_4 en las ecuaciones implícitas de U_2 (sistema (1)), resultando

$$\alpha - (\alpha + 2\beta) + 2(2\beta) - (\alpha + 5\beta) = 0,\ \alpha + (\alpha + 2\beta) + 2\beta + (\alpha + 5\beta) = 0,$$

cuya solución es $\alpha = -3\beta$, β libre. Tomando, por ejemplo, $\beta = 1$, resulta $\alpha = -3$ y sustituyendo en (2) un generador es $(-3, -1, 2, 2)$, el mismo que habíamos obtenido por los métodos anteriores.

6. a) Basta tener en cuenta la definición de coordenadas de un vector en una base y operar:

$$\begin{aligned} \bar{v} &= 3\bar{u}_1 + 4\bar{u}_2 - 5\bar{u}_3 + 6\bar{u}_4 = 3(1, 1, 1, 1) + 4(0, -1, 1, 0) - 5(1, -1, 0, 0) + 6(1, 0, 0, 0) \\ &= (4, 4, 7, 3) \end{aligned}$$

que son las coordenadas de $\bar{v}$ en la base B_1.

b) Como las coordenadas de $\bar{w}$ respecto de B_1 son $[\bar{w}]_{B_1} = (2, 3, 4, -7)$, para hallar sus coordenadas respecto de B_2 hay que resolver la ecuación:

$$\lambda_1(1, 1, 1, 1) + \lambda_2(0, -1, 1, 0) + \lambda_3(1, -1, 0, 0) + \lambda_4(1, 0, 0, 0) = (2, 3, 4, -7).$$

Su solución es $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) = (-7, 11, -21, 30)$ que son las coordenadas pedidas.

7. a) Vamos a usar la caracterización de la página 24 del libro de texto. Sean $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ y $\bar{b} = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ elementos de U y $\alpha \in \mathbb{R}$. Esto significa que $3a_2 + a_3 - 2a_4 = 0$ y $3b_2 + b_3 - 2b_4 = 0$. Multiplicando a la segunda ecuación por α y sumándole la primera y reagrupando resulta: $3(a_2 + \alpha b_2) + (a_3 + \alpha b_3) - 2(a_4 + \alpha b_4) = 0$, lo cual significa que el vector $\bar{a} + \alpha\bar{b} = (a_1 + \alpha b_1, a_2 + \alpha b_2, a_3 + \alpha b_3, a_4 + \alpha b_4) \in U$.

b) Despejando x_3 de la ecuación que define U queda $x_3 = -3x_2 + 2x_4$. Por tanto, las ecuaciones paramétricas son:

$$\begin{aligned}(x_1, x_2, x_3, x_4) &= (x_1, x_2, -3x_2 + 2x_4, x_4) = x_1(1, 0, 0, 0) + x_2(0, 1, -3, 0) + x_4(0, 0, 2, 1) \\ &= \alpha(1, 0, 0, 0) + \beta(0, 1, -3, 0) + \gamma(0, 0, 2, 1).\end{aligned}$$

Es pues claro que los vectores $\bar{a} = (1, 0, 0, 0)$, $\bar{b} = (0, 1, -3, 0)$ y $\bar{c} = (0, 0, 2, 1)$ son una base de U ya que son generadores y linealmente independientes. En consecuencia, la dimensión de U es 3.

c) Basta resolver la ecuación

$$\alpha(1, 0, 0, 0) + \beta(0, 1, -3, 0) + \gamma(0, 0, 2, 1) = (2, 1, 5, 4),$$

obteniéndose $\alpha = 2$, $\beta = 1$ y $\gamma = 4$, que son las coordenadas de $\bar{u}$ respecto de la base $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$.

d) Ahora hay que resolver la ecuación

$$\alpha(1, 0, 0, 0) + \beta(0, 1, -3, 0) + \gamma(0, 0, 2, 1) = (5, -1, 4, 1),$$

resultando un sistema que es incompatible. La explicación es muy sencilla: el vector $\bar{v}$ no pertenece al subespacio U, como puede comprobarse viendo que no verifica la ecuación que define U, por ello no es combinación lineal de $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$.