FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS DE LAS TTII. Cód. 71021023
Grado en Ingeniería de las Tecnologías de la Información
Segunda semana de Febrero de 2017. Tiempo: 2 horas

INSTRUCCIONES. Cada una de las preguntas tiene un valor máximo de 2 puntos. Sólo está permitido una calculadora no programable. No entregue esta hoja con los enunciados.

1. En el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ se consideran los subespacios vectoriales siguientes:

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ 2x - 3y + 2z = 0\} \quad \text{y} \quad V = \langle (1, 1, -2) \rangle.$$

(a) Demuestre que U y V son suplementarios. *(0.5 puntos)*

(b) Dado $\bar{w} = (-1, 0, 6)$, determine dos vectores $\bar{a} \in U$ y $\bar{b} \in V$ tales que $\bar{w} = \bar{a} + \bar{b}$. ¿Hay solución única? *(1.5 puntos)*

2. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal determinada por

$$\begin{aligned} (0, 1, 0) &\to (-1, 0, 2) \\ (0, 0, 1) &\to (-2, 2, 1) \\ (2, 1, 1) &\to (3, 4, 1). \end{aligned}$$

Encuentre $f^{-1}(3, -1, 2)$. *(2 puntos)*

3. Se considera la función $f(x) = x - 3\sqrt[3]{x^2}$.

(a) Determine los intervalos de crecimiento y, sin hacer más cálculos, deduzca los máximos y mínimos relativos. *(1 punto)*

(b) Enuncie el teorema del valor medio (también llamado de los incrementos finitos o de Lagrange).

¿Es aplicable el teorema anterior a la función f en el intervalo $[0, 1]$? ¿Es cierta la conclusión (o tesis)? En caso afirmativo, encuentre un punto en el que se verifica. *(1 punto)*

4. Sea la función

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + 2x + 2y.$$

(a) Obtenga y clasifique sus extremos relativos en $\mathbb{R}^2$ (sin restricciones). *(1 punto)*

(b) Determine los extremos absolutos de f sobre la recta

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ y = x - 1\}$$

y sobre el segmento

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ y = x - 1, \ \ -2 \leq x \leq 2\}.$$

(1 punto)

5. Determine el volumen del sólido de revolución generado al girar alrededor del eje X la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$ sobre el intervalo $[0, 1]$. *(2 puntos)*

SOLUCIONES. FMTI. Segunda semana de Febrero de 2017.

1. (a) Para probar que están en posición de suma directa, es suficiente probar que el único vector en la intersección de U con V es $\bar{0}$. Sea $\bar{x} = (\alpha, \alpha, -2\alpha)$ un vector genérico de V e impongamos que también está en U, esto es, verifica la ecuación $2x - 3y + 2z = 0$ que define a U, por tanto, $2\alpha - 3\alpha + 2(-2\alpha) = 0$. Operando, resulta $-5\alpha = 0$, de donde $\alpha = 0$, por lo que $\bar{x} = (0, 0, 0)$. En consecuencia, $U \cap V = \{(0, 0, 0)\}$.

(b) Hay que hallar $\bar{a} \in U$ y $\bar{b} \in V$ tales que $\bar{w} = \bar{a} + \bar{b}$. Por tanto, $\bar{b}$ es de la forma $\bar{b} = (\alpha, \alpha, -2\alpha)$, con $\alpha \in \mathbb{R}$. Despejando de la anterior, resulta

$$\bar{a} = \bar{w} - \bar{b} = (-1, 0, 6) - (\alpha, \alpha, -2\alpha) = (-1 - \alpha, -\alpha, 6 + 2\alpha).$$

El hecho de que $\bar{a}$ sea un vector de U significa que sus componentes verifican la ecuación de U, por tanto

$$2(-1 - \alpha) - 3(-\alpha) + 2(6 + 2\alpha) = 0 \Rightarrow 5\alpha + 10 = 0 \Rightarrow \alpha = -2.$$

Sustituyendo, resulta $\bar{b} = (-2, -2, 4)$ y $\bar{a} = (1, 2, 2)$, y es claro que hay solución única.

2. Consideremos la base canónica de $\mathbb{R}^3$: $\bar{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\bar{e}_2 = (0, 1, 0)$ y $\bar{e}_3 = (0, 0, 1)$. Según el enunciado del ejercicio, se conocen $f(\bar{e}_2)$, $f(\bar{e}_3)$ y $f(2, 1, 1) = f(2\bar{e}_1 + \bar{e}_2 + \bar{e}_3) = (3, 4, 1)$. Usando la linealidad de f se tiene $2f(\bar{e}_1) + f(\bar{e}_2) + f(\bar{e}_3) = (3, 4, 1)$, y despejando $2f(\bar{e}_1)$:

$$\begin{aligned} 2f(\bar{e}_1) &= (3, 4, 1) - f(\bar{e}_2) - f(\bar{e}_3) \\ &= (3, 4, 1) - (-1, 0, 2) - (-2, 2, 1) = (6, 2, -2). \end{aligned}$$

Por consiguiente $f(\bar{e}_1) = (3, 1, -1)$. Así pues, la matriz de f en las bases canónicas es

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Por definición, $f^{-1}(3, -1, 2) = \{(x, y, z) : \ f(x, y, z) = (3, -1, 2)\}$. Usando la expresión matricial de f, se tiene

$$f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x - y - 2z \\ x + 2z \\ -x + 2y + z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Igualando, se obtiene el sistema

$$\left\{ \begin{array}{r} 3x - y - 2z = 3 \\ x \quad + 2z = -1 \\ -x + 2y + z = 2 \end{array} \right.$$

que tiene solución única: $x = 1, y = 2, z = -1$, y por consiguiente $f^{-1}(3, -1, 2) = \{(1, 2, -1)\}$.

3. (a) Como $f(x) = x - 3x^{2/3}$, su derivada es $f'(x) = 1 - 3\frac{2}{3}x^{-1/3} = 1 - \frac{2}{\sqrt[3]{x}} = \frac{\sqrt[3]{x} - 2}{\sqrt[3]{x}}$. Esta función es discontinua en $x = 0$ y sus raíces se obtienen resolviendo la ecuación $\sqrt[3]{x} - 2 = 0$, de donde resulta $x = 8$. Con lo anterior, se estudia el signo de $f'(x)$ y se deduce el crecimiento de f, lo cual se resume en la siguiente tabla:

	$(-\infty,0)$	$(0,8)$	$(8,+\infty)$
f' es	$+$	$-$	$+$
f es	crec. $\nearrow$	decrec. $\searrow$	crec. $\nearrow$

Como f es continua en $\mathbb{R}$ (en particular, en $x=0$ y en $x=8$), se deduce que f tiene un máximo relativo en $x=0$ y un mínimo relativo en $x=8$.

(b) El enunciado del teorema del valor medio (punto teórico 4.52 del libro de ejercicios resueltos) dice que si f es una función continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b), entonces existe un $c\in(a,b)$ tal que

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c). \qquad (1)$$

Es claro que la función f cumple la hipótesis en $[0,1]$, pues es continua en $\mathbb{R}$ y derivable en $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Por tanto, es cierta la tesis. Para hallar c que cumple (1), se hacen los cálculos a continuación (téngase en cuenta que $f'(x)=1-\frac{2}{\sqrt[3]{x}}$):

$$\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=f'(c)\ \Rightarrow\ \frac{-2-0}{1}=1-\frac{2}{\sqrt[3]{c}}\ \Rightarrow\ \frac{2}{\sqrt[3]{c}}=3\ \Rightarrow\ c=\frac{8}{27}.$$

4. (a) Como f es diferenciable en $\mathbb{R}^2$, los extremos relativos son en particular puntos críticos, es decir, han de verificar las ecuaciones $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0$. Las derivadas parciales son

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=2x+2,\qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=2y+2.$$

Hay que resolver el sistema

$$\left\{\begin{array}{l}2x+2=0\\2y+2=0\end{array}\right.\rightarrow\left\{\begin{array}{l}x=-1\\y=-1\end{array}\right.$$

El único punto crítico es $P=(-1,-1)$. Para clasificarlo, se necesita el Hessiano:

$$Hf(x,y)=\begin{pmatrix}D_{11}f(x,y) & D_{12}f(x,y)\\ D_{21}f(x,y) & D_{22}f(x,y)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}$$

(es constante en cualquier punto (x,y)) y hay que utilizar la cuestión teórica 5.50 del libro de ejercicios. Recordemos que $\Delta_1=D_{11}f(-1,-1)=2$ y $\Delta_2=\det(Hf(-1,-1))=4$. Comos son ambos positivos, se deduce que P es un mínimo relativo.

(b) Basta sustituir y por $x-1$ en la expresión de f y resulta la siguiente función $g(x)$ de una variable:

$$g(x)=f(x,x-1)=x^2+(x-1)^2+2x+2(x-1)=2x^2+2x-1.$$

La gráfica de esta función es una parábola que tiene un mínimo absoluto en el vértice y no tiene máximo cuando x recorre $\mathbb{R}$ (sobre la recta R). Se tiene: $g'(x)=4x+2$ y es cero si $4x+2=0\Rightarrow x=-1/2$, con lo que $y=-1/2-1=-3/2$, el punto $(-1/2,-3/2)$ es el mínimo absoluto.

Si nos restringimos al segmento S, por tratarse de un conjunto cerrado y acotado, es compacto, y por el teorema de Weierstras, el mínimo y máximo absolutos de f sobre S se alcanzan. Teniendo en cuenta la construcción anterior de g, el mínimo absoluto se alcanza en el punto $x = -1/2$ pues es un punto de S y el máximo se alcanza en los extremos del intervalo $[-2, 2]$. Evaluando g en estos puntos: $g(-2)) = 8 - 4 - 1 = 3$ y $g(2) = 8 + 4 - 1 = 11$ (máximo), a este valor $x = 2$ le corresponde un $y = 1$. Por consiguiente el máximo absoluto de f sobre S se alcanza en $(2, 1)$.

5. El volumen de revolución viene dado por $V = \pi \int_a^b f(x)^2 dx$. En nuestro caso:

$$V = \pi \int_0^1 \left(\frac{x}{x+1}\right)^2 dx = \pi \int_0^1 \frac{x^2}{(x+1)^2} dx.$$

Hallemos primero una primitiva. Haciendo la división de x^2 entre $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$ resulta 1 de cociente y $-2x - 1$ de resto, y como $\frac{D}{d} = c + \frac{r}{d}$, se sigue $\frac{x^2}{(x+1)^2} = 1 + \frac{-2x-1}{(x+1)^2}$. La descomposición en fracciones simples de esta última fracción es:

$$\frac{-2x-1}{(x+1)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} = \frac{A(x+1)+B}{(x+1)^2} = \frac{Ax+A+B}{(x+1)^2}.$$

Igualando coeficientes, $A = -2$ y $A + B = -1$, de donde $B = 1$ y por lo tanto

$$\begin{aligned}\int \frac{-2x-1}{(x+1)^2} dx &= \int \frac{-2}{x+1} dx + \int \frac{1}{(x+1)^2} dx = -2\ln(x+1) + \int (x+1)^{-2} dx \\ &= -2\ln(x+1) - \frac{1}{x+1}.\end{aligned}$$

En consecuencia, una primitiva de $\frac{x^2}{(x+1)^2}$ es $G(x) = x - 2\ln(x+1) - \frac{1}{x+1}$. Por último, aplicando la regla de Barrow se obtiene el volumen:

$$V = \pi(G(1) - G(0)) = \pi\left(1 - 2\ln 2 - \frac{1}{2} - (-1)\right) = \pi\left(\frac{3}{2} - 2\ln 2\right) \simeq 0{,}3572.$$