2. ESPACIOS VECTORIALES. EJERCICIOS

1 Cómo ver si un sistema de vectores es dependiente o independiente:

Podemos utilizar como herramienta el rango de un sistema de vectores.

EJERCICIO 2.1. Se trata de ver con MAXIMA si el sistema de vectores (1,2,0), (0,0,0), (4,5,6) es libre o ligado.

SOLUCIÓN. Hay que recordar que:
-Las matrices son una buena herramienta para hallar el rango del conjunto de vectores que forman sus líneas (filas o columnas).
-Si el rango es igual al número de vectores, éstos son independientes y si es menor son dependientes.

```
(%i1) rank(matrix( [1,2,0],  [0,0,0],  [4,5,6]));
(%o1) 2
```

En este caso no era necesario hacer nada para ver que era un sistema ligado por estar (0,0,0) en el conjunto dado.

2 Cómo determinar si un vector es combinación lineal de otros vectores:

En este caso, podemos utilizar:
1. El rango del sistema de vectores.
2. El sistema de ecuaciones lineales que determinan.
3. El determinante de la matriz de los vectores fila o columna, siempre que sea cuadrada.

EJERCICIO 2.2
a) ¿Es el vector (0,3,2) combinación lineal de (1,0,0) y (0,1,0)?
b) ¿Es el vector (0,3,2) combinación lineal de (0,1,0) y (0,0,1)?
c) ¿Es el vector (0,3,2) combinación lineal de (1,0,0) y (0,0,1)?

SOLUCIÓN. Para ser sistemáticos, demos un nombre a los vectores:

```
(%i2) e1:[1,0,0];
      e2:[0,1,0];
      e3:[0,0,1];
      v:[0,3,2];
(%o2) [1,0,0]
(%o3) [0,1,0]
(%o4) [0,0,1]
(%o5) [0,3,2]
```

```
(%i6) is(rank(matrix(v,e1,e2))=rank(matrix(e1,e2)));
(%o6) false
```

La respuesta a a) es no.

```
(%i7) is(rank(matrix(v,e2,e3))=rank(matrix(e2,e3)));
(%o7) true
```

La respuesta a b) es sí.

```
(%i8) is(rank(matrix(v,e1,e3))=rank(matrix(e1,e3)));
(%o8) false
```

La respuesta a c) es no.

EJERCICIO 2.3.
a) Determine si el vector v=(-3,2,1) es combinación lineal de (1,2,-1) y (-3,-2,2).
b) Determine si el vector w=(4,1,2) es combinación lineal de (1,2,-1) y (-3,0,2).

SOLUCIÓN. Ahora, lo haremos usando la definición. Para ello, planteamos el sistema de incógnitas x,y
x e1+y e2=v y depués (con copia y pega) utilizamos el operador "linsolve" para resolverlo.

```
(%i9) kill(x,y);
      e1:[1,2,-1];
      e2:[-3,-2,2];
      x*e1+y*e2;
(%o9) done
(%o10) [1,2,-1]
(%o11) [-3,-2,2]
(%o12) [x-3 y,2 x-2 y,2 y-x]
```

Ahora este vector lo igualamos a (-3,2,1) y resolvemos el sistema:

```
(%i13) linsolve([x-3*y=-3,2*x-2*y=2,2*y-x=1],[x,y]);
solve: dependent equations eliminated: (3)
(%o13) [x=3,y=2]
```

Lo que nos indica que hay solución, esto es v es c.l. de e1 y e2 con los coeficientes 3 y 2.
Para contestar el apartado b), igualamos a w y resolvemos el sistema:

```
(%i14) linsolve([x-3*y=4,2*x-2*y=1,2*y-x=2],[x,y]);
(%o14) []
```

Vemos que no hay solución, por tanto w no es c.l. de e1 y e2.

A la misma conclusión se llegaría utilizando el operador "determinant".

```
(%i15) v:[-3,2,1];
       determinant(matrix(v,e1,e2));
(%o15) [-3,2,1]
(%o16) 0
```

Como el determiante es 0, el sistema {v,e1,e2} es linealmente dependiente.

```
(%i17) w:[4,1,2]$
       determinant(matrix(w,e1,e2));
(%o18) 17
```

Como el determiante es no nulo, el sistema {w,e1,e2} es linealmente independiente. El determinante sólo se puede usar si tenemos n vectores de un espacio vectorial de dimensión n.

NOTA: Para que sea más sencilla la operacion de "copia y pega" y luego aplicar linsolve, se puede proceder como sigue: en vez de considerar el sistema x e1 + y e2=v, se considera el sistema equivalente x e1 + y e2 - v=(0,0,0), y entonces podemos resolver de una sóla vez con linsolve ya que la parte izquierda de los sistemas es x e1 + y e2 - v y la parte derecha es "=0" que no hace falta ponerla, así:

```
(%i19) linsolve(x*e1+y*e2-v,[x,y]);
solve: dependent equations eliminated: (3)
(%o19) [x=3,y=2]
```

EJERCICIO 2.4. Determine para qué valores del parámetro k el vector (k,-2,3) pertenece al subespacio generado por (4,-2,-1) y (3,2,0).

SOLUCIÓN. Asignación de nombre a los vectores (etiquetas):

```
(%i20) kill(v,e1,e2,k);
       v:[k,-2,3];
       e1:[4,-2,-1];
       e2:[3,2,0];
(%o20) done
(%o21) [k,-2,3]
(%o22) [4,-2,-1]
(%o23) [3,2,0]
```

```
(%i24) v=x*e1+y*e2;
(%o24) [k,-2,3]=[3 y+4 x,2 y-2 x,-x]
```

Al tratarse de un sistema con un parámetro k, hemos de proceder con cautela. Teniendo en cuenta que el parámetro k sólo está en la primera componente, se resuelve el sistema formado por las dos últimas ecuaciones:

```
(%i25) linsolve([2*y-2*x=-2,-x=3] , [x,y]);
(%o25) [x=-3,y=-4]
```

Se sustituyen los valores obtenidos en la primera ecuación:

(%i26) k:3*y+4*x;

(%o26) $3\,y+4\,x$

(%i27) subst(-3,x,%);

(%o27) $3\,y-12$

(%i28) subst(-4,y,%);

(%o28) -24

Sólo cuando k=-24, el vector v está en el subespacio generado por a y b.

Podemos resolverlo de una forma más general usando la siguiente obervación:
el vector v pertenece al subespacio generado por e1 y e2 si y sólo si el rango de la matriz cuyas filas son los vectores e1, e2 y v es igual al rango de la matriz de filas e1 y e2.
En este caso, como rango{e1,e2}=2, el rango{e1,e2,v}=2 si y sólo si det(e1,e2,v)=0. Hagámoslo:

```
(%i29) kill(k);
       e1:[4,-2,-1]; e2:[3,2,0];v:[k,-2,3];
       M:matrix(e1,e2,v);
       determinant(M);
       solve(%,k);
```

(%o29) $done$

(%o30) $[4,-2,-1]$

(%o31) $[3,2,0]$

(%o32) $[k,-2,3]$

(%o33) $\begin{bmatrix} 4 & -2 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \\ k & -2 & 3 \end{bmatrix}$

(%o34) $2\,k+48$

(%o35) $[k=-24]$

EJERCICIO 2.5.
Hallar los valores de los parámentros a y b para los que el vector (1,0,a,b) pertenece al subespacio generado por los vectores x=(1,4,-5,2) e y=(1,2,3,-1).

SOLUCIÓN. Definición de los vectores que intervienen:

```
(%i36) kill(a,b,x,y,v);
       x:[-2,3,-3,2];
       y:[4,-1,4,-3];
       v:[a,b,-2,3];
```

(%o36) $done$

(%o37) $[-2,3,-3,2]$

(%o38) $[4,-1,4,-3]$

(%o39) $[a,b,-2,3]$

Condición para que (a,b,-2,3) sea combinación lineal de x e y (usamos de coeficientes z,t):

```
(%i40) kill(z,t);
       [a,b,-2,-3]=z*x+t*y;
(%o40) done
(%o41) [a,b,-2,-3]=[4 t-2 z,3 z-t,4 t-3 z,2 z-3 t]
```

Resolvemos el sistema formado utilizando las dos últimas ecuaciones

```
(%i42) linsolve([4*t-3*z=-2,2*z-3*t=3],[z,t]);
(%o42) [z=-6,t=-5]
```

Sustituyendo obtenemos a y b:

```
(%i43) z:-6$
       t:-5$
       a:4*t-2*z;
       b:3*z-t;
(%o45) -8
(%o46) -13
```

Por tanto, los únicos valores para los que hay solución son a=-8, b=-13.

3 Cómo comprobar si un sistema es base.

Antes de aplicar MAXIMA hay que observar que:
 El rango de una base en un espacio V de dimensión n es n.
 Todas las bases tienen el mismo número de vectores.
 Si un sistema de n vectores de un espacio V de dimensión n es lin. indep., entonces es base.

EJERCICIO 2.6. Decida si los siguientes vectores de R^4 son base:
v1=(0,1,0,0), v2=(1,-1,0,1), v3=(2,1,1,0), v4=(-1,1,1,-1).

SOLUCIÓN. El rango de la matriz formada por los vectores v1, v2, v3 y v4 ha de ser 4:

```
(%i47) v1:[0,1,0,0]; v2:[1,-1,0,1]; v3:[2,1,1,0]; v4:[-1,1,1,-1];
       rank(matrix(v1,v2,v3,v4));
(%o47) [0,1,0,0]
(%o48) [1,-1,0,1]
(%o49) [2,1,1,0]
(%o50) [-1,1,1,-1]
(%o51) 4
```

Por tanto, sí forman una base de R^4. También se puede hallar el rango escalonando la matriz:

```
(%i52) A:matrix(v1,v2,v3,v4);
       triangularize(A);
```

(%o52) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

(%o53) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

EJERCICIO 2.7. Encontrar los coeficientes de la combinación lineal que expresa (3,2,1) en función de (como combinación lineal de) (1,1,1), (1,1,0) y (1,0,0). (Ejercicio 33 del libro de problemas)

SOLUCIÓN. Si llamamos x1, x2 y x3 a dichos escalares podemos escribir:

```
(%i54) x1*[1,1,1]+x2*[1,1,0]+x3*[1,0,0];
```

(%o54) $[x3+x2+x1, x2+x1, x1]$

```
(%i55) linsolve([3=x3+x2+x1, 2=x2+x1, 1=x1], [x1,x2,x3]);
```

(%o55) $[x1=1, x2=1, x3=1]$

Por tanto, los coeficientes son (1,1,1). Obsérvese que se puede hacer con una única instrucción:

```
(%i56) linsolve(x1*[1,1,1]+x2*[1,1,0]+x3*[1,0,0]-[3,2,1], [x1,x2,x3]);
```

(%o56) $[x1=1, x2=1, x3=1]$

4 Cómo hallar las coordenadas de un vector si cambia la base

EJERCICIO 2.8. En R^2, se considera la base canónica y la base B={u1=(2,1), u2=(5,3)}.
a) Si las coordenadas de un vector v respecto de la base canónica son (-4,-3), ¿cuáles son las coordenadas de v respecto de la base B?
b) Si las coordenadas del vector w respecto de la base B son (6,-2), ¿cuáles son las coordenadas de w respecto de la base canónica?
c) Obtenga una expresión general en el caso a), es decir, si u=(a,b) en la base canónica, halle las coordanadas de u en la base B.
d) Exprese la base canónica {e1, e2} en función de la base B.

SOLUCIÓN. a) Hay que expresar v como combinación lineal de u1 y u2, esto es, hallar los números x e y que cumplan la ecuación vectorial:

x u1+y u2 = v,

que equivale a

x u1+y u2 - v = (0,0).

```
(%i57) kill(x,y)$
       u1:[2,1]; u2:[5,3]; v:[-4,-3];
       linsolve(x*u1+y*u2-v,[x,y]);
```
(%o58) $[2,1]$
(%o59) $[5,3]$
(%o60) $[-4,-3]$
(%o61) $[x=3,y=-2]$

Por tanto, las coordenadas de v en la base B son (3,-2).

b) Basta calcular 6 u1 - 2 u2:

```
(%i62) 6*u1-2*u2;
```
(%o62) $[2,0]$

Por tanto, las coordenadas de w en la base canónica son (2,0).

c) Al igual que en el apartado a), hay que resolver el sistema en x, y:
x u1+y u2 - u = (0,0).

```
(%i63) kill(a,b)$
       u:[a,b];
       linsolve(x*u1+y*u2-u,[x,y]);
```
(%o64) $[a,b]$
(%o65) $[x=3\,a-5\,b,y=2\,b-a]$

Por tanto, las coordenadas de u=(a,b) en la base B son (3a-5b,-a+2b).

d) Basta aplicar la fórmula anterior a los vectores e1=(1,0) y e2=(0,1), obteniéndose:
e1=(3,-1)_B y e2=(-5,2)_B, esto significa que: e1 = 3 u1 - u2, e2 = -5 u1 + 2 u2.

Podríamos haberlo obtenido con matrices. Si P es la matriz del cambio de la base canónica a B, entonces la inversa P^(-1) es la matriz del cambio de B a la base conónica.

```
(%i66) P:transpose(matrix(u1,u2));
       P^^(-1);
```
(%o66) $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

(%o67) $\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

5 Cómo hallar las ecuaciones cartesianas de un subespacio a partir de las paramétricas

EJERCICIO 2.9. Halle las ecuaciones cartesianas del subespacio de R^3
a) generado por (-2,1,1) y (3,-1,3);
b) generado por (-1,4,3).

SOLUCIÓN. a) La ecuación vectorial del subespacio es (x,y,z)=alpha (-2,1,1) +beta (3,-1,3), lo cual nos dice que v=(x,y,z) es c.l. de a=(-2,1,1) y b=(3,-1,3). Esto equivale a decir que el rango de {v, a, b} es 2 ya que el rango de {a, b} es 2, y esto equivale a que el determinane de (v,a,b) es 0, esto es,
det(v,a,b)=0, (1)
con lo cual hemos eliminado los parámetros alpha y beta y (1) es la ec. cartesiana.

```
(%i68) v:[x,y,z]; a:[-2,1,1]; b:[3,-1,3];
       determinant(matrix(v,a,b))=0;
```

(%o68) $[x, y, -6]$
(%o69) $[-2, 1, 1]$
(%o70) $[3, -1, 3]$
(%o71) $9\ y+4\ x+6=0$

Luego, la ec. cartesiana es 4x+9y-z=0.

b) Ahora, si llamamos c=(-1,4,3), el rango de {v, c} es 1. Por tanto, en la matriz de filas v y c, los orlados de orden 2 del elemento -1 han de ser cero:

```
(%i72) c:[-1,4,3]$
       M:matrix(v,c);
       determinant(submatrix(M,3))=0;
       determinant(submatrix(M,2))=0;
```

(%o73) $\begin{bmatrix} x & y & -6 \\ -1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$
(%o74) $y+4\ x=0$
(%o75) $3\ x-6=0$

Luego las ecuaciones cartesianas del subespacio (que es una recta) son 4x+y=0, 3x+z=0.

6 Cómo obtener las ecuaciones paramétricas de un subespacio

EJERCICIO 2.10. Obtenga las ecuaciones paramétricas de los subespacios siguientes:
a) U1={(x,y,z) de R^3: 2x+y-3z=0}.
b) U2={(x1,x2,x3,x4) de R^4: x2=-x4}
c) U3={(x1,x2,x3,x4) de R^4: x1+x2-x3=0, 2x1-x2+2x3-x4=0}

SOLUCIÓN. Para hallar las ecuaciones paramétricas basta con resolver los sistemas lineales (y homogéneos) que definene el subespacio.
a) Como hay una ecuación y 3 incógnitas, tendremos dos parámetros (2 grados de libertad).

(%i76) kill(x,y,z)$
linsolve([2*x+y-3*z=0],[x,y,z]);

(%o77) $[x=\frac{3\ \%r1-\%r2}{2}, y=\%r2, z=\%r1]$

Vemos que Maxima utiliza de parámetros (%r1 y %r2) las incógnitas z e y. Si lo hicieramos "a mano" hubiéramos despejado y en función de x, z y nos queda:
y=-2x+3z, x, z libres.
Con lo que las ecs. paramétricas son:
x=alpha, y=-2 alplha + 3 beta, z=beta.

b) Como sólo hay una ecuación y está despejada x2 en función de x4, las ecs paramétricas son:
x1=alpha, x2=-gamma, x3=beta, x4=gamma. (hay 3 parámetros).

c) Resolvemos:

(%i78) linsolve([x1+x2-x3=0, 2*x1-x2+2*x3-x4=0],[x1,x2,x3,x4]);

(%o78) $[x1=\frac{\%r3-\%r4}{3}, x2=-\frac{\%r3-4\ \%r4}{3}, x3=\%r4, x4=\%r3]$

Vemos que Maxima deja como parámetros x3 y x4. Si queremos evitar los denominadores, formamos la matriz de los coeficientes del sistema:

(%i79) N:coefmatrix([x1+x2-x3=0, 2*x1-x2+2*x3-x4=0],[x1,x2,x3,x4]);

(%o79) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

Si hay un menor de orden 2 que valga 1, usamos las dos columnas (incógnitas) que entran en el menor como incógnitas y las que no están en el menor como parámetros. En este ejemplo, nos servirían como parámentros (x1,x2) y también (x2,x3) (y hay más). Entonces forzamos a Maxima a que despeje en función de x1, x2 en el primer caso (incógnitas x3,x4):

(%i80) linsolve([x1+x2-x3=0, 2*x1-x2+2*x3-x4=0],[x3,x4]);

(%o80) $[x3=x2+x1, x4=x2+4\ x1]$

y a que despeje en función de x2, x3 en el primer caso (incógnitas x1,x4):

(%i81) linsolve([x1+x2-x3=0, 2*x1-x2+2*x3-x4=0],[x1,x4]);

(%o81) $[x1=x3-x2, x4=4\ x3-3\ x2]$

Hemos obtenido pues las ecuaciones paramétricas siguientes:
-primer caso: x1=alpha, x2=beta, x3=alpha+beta, x4=4 alpha +beta;
-segundo caso: x1=-alpha+beta, x2=alpha, x3=beta, x4=-3 alpha+4 beta.
Nótese que una base del subespacio en el primer caso serían los coeficientes de alpha y beta, respectivamente: (1,0,1,4), (0,1,1,1),
y en el segundo caso (-1,1,0,-3), (1,0,1,4).

7 Cómo hallar la intersección y la suma de dos subespacios.

EJERCICIO 2.11. Seas U1 y U2 los subespacios de R^3 generados, respectivamente por G1={(2,-1,1), (2,0,-1)} y G2={(3,1,0),(1,-1,2)}. Hallar una base y la dimensión de los subespacios U1 intersección U2 y U1+U2, e indique si esta última es una suma directa..

SOLUCIÓN: Pongamos nombre a los vectores:

```
(%i82) a:[2,-1,1]; b:[2,0,-1]; c:[3,1,0]; d:[1,-1,2];
(%o82) [2,-1,1]
(%o83) [2,0,-1]
(%o84) [3,1,0]
(%o85) [1,-1,2]
```

Es claro que dim U1=2 y dim U2=2.
Sabemos que el subespacio U1+U2 está generado por a, b, c y d. Hallemos su dimensión=rango:

```
(%i86) M:matrix(a,b,c,d)$
       rank(M);
(%o87) 3
```

```
(%i88) rank(matrix(a,b,c));
(%o88) 3
```

Por tanto, la dimensión es 3 y una base es a, b, c. El subespacion U1+U2 coincide con R^3. Por el teorema de Grasmann:
dim(U1+U2)=dim U1 +dim U2 - dim(U1 intersección U2),
se deduce que dim(U1 intersección U2) = 1. Para hallar una base, resolvamos el sistema:

```
(%i89) x1*a+x2*b=y1*c+y2*d;
```

(%o89) $[2\,x2+2\,x1,-x1,x1-x2]=[y2+3\,y1,y1-y2,2\,y2]$

Es decir:

```
(%i90) linsolve(x1*a+x2*b-y1*c-y2*d,[x1,x2,y1,y2]);
```

(%o90) $[x1=\frac{8\,\%r5}{7},x2=-\frac{6\,\%r5}{7},y1=-\frac{\%r5}{7},y2=\%r5]$

Que tiene infinitas soluciones de parámetro la incógnita y2. Dando el valor y2=7, se obtiene: x1=8, x2=-6, y1=-1, y2=7. Con lo que una base de U1 intersección U2 es el vector

```
(%i91) 8*a-6*b;
(%o91) [4,-8,14]
```

que coincide con

```
(%i92) -c+7*d;
(%o92) [4,-8,14]
```