Determinantes.

1 Cómo hallar el determinante de una matriz cuadrada:

Dada una matriz M, cuadrada de cualquier orden, su determinante se calcula mediante la instrucción

determinant(M)

También puede calcularse desde el desplegable: Álgebra>Determinante.
La matriz debe haber sido introducida previamente.

Para calcular el determinante de la matriz cuadrada genérica de orden 3 cuyos elementos son m[11],m[12],m[13],m[21],m[22],m[23],m[31],m[32],m[33]:

```
(%i1) M:matrix( [m[11],m[12],m[13]],  [m[21],m[22],m[23]],  [m[31],m[32],m[33]]);
      determinant(M);
```

(%o1) $\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix}$

(%o2) $m_{11}\,(m_{22}\,m_{33}-m_{23}\,m_{32})-m_{12}\,(m_{21}\,m_{33}-m_{23}\,m_{31})+m_{13}\,(m_{21}\,m_{32}-m_{22}\,m_{31})$

```
(%i3) A: matrix( [1,2,2],  [3,6,3],  [1,0,3]);
```

(%o3) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 6 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

```
(%i4) determinant(A);
```

(%o4) -6

Si intenta ejecutar determinant(A) sin haber ejecutado A: matrix([1,2,2], [3,6,3], [1,0,3]), obtendrá determinant(A), no el valor del determinante, porque MAXIMA no sabe de que matriz tiene que calcular el determinante.

Obsérvese que:
*El determinante de una matriz se puede calcular de diferentes modos.
*Si los elementos de la matriz no son numéricos, MAXIMA calcula el determinante desarrollando por los elementos de la primera fila.
*Si los elementos que forman la matriz son números, reales o complejos, MAXIMA da como resultado del determinante el número correspondiente.
*Es necesario que MAXIMA sepa a que matriz corresponde el determinante que debe hacer, si no saldrá un mensaje de error.

2 MAXIMA NO calcula directamente el menor de un elemento:

Al evaluar o ejecutar la instrucción "minor(A,i,j)" se obtiene la submatriz de la matriz A, una vez eliminadas la fila i y la columna j.
Recordemos que un menor de una matriz es el determiante de una submatriz cuadrada de dicha matriz (véase el Curso cero).
Por tanto para calcular un menor debemos realizar dos pasos: 1º hallar la submatriz con la instrucción minor(matriz,i,j) y 2º hallar el determinante con determinant %, o bien sólo con determinant(minor(matriz,i,j)).
Ejemplo:

```
(%i5) minor(M,1,3);
      determinant(%);
```

(%o5) $\begin{bmatrix} m_{21} & m_{22} \\ m_{31} & m_{32} \end{bmatrix}$

(%o6) $m_{21}\, m_{32} - m_{22}\, m_{31}$

```
(%i7) determinant (minor(M,1,3));
```

(%o7) $m_{21}\, m_{32} - m_{22}\, m_{31}$

Al evaluar o ejecutar la instrucción siguiente se obtiene el menor del elemento fila 2, columna 1 en la matriz A.

```
(%i8) minor(A,2,1);
```

(%o8) $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

```
(%i9) determinant(minor(A,2,1));
```

(%o9) 6

3 MAXIMA NO calcula directamente la matriz adjunta de una matriz

Recordemos que la matriz adjunta de una matriz es la matriz que resulta al sustituir cada elemento por su adjunto (véase el Curso cero).
La instrucción "adjoint (matriz)" devuelve la traspuesta de la adjunta de la matriz, es decir, que la que en matemáticas se llama MATRIZ ADJUNTA de la matriz A se obtiene con la instrucción
transpose(adjoint(A)).

Como ejemplo calcularemos la traspuesta de la adjunta de una matriz B mediante "adjoint (B)":

```
(%i10) B:matrix([3,1],[-2,-4]);
       adjoint (B);
```

(%o10) $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$

(%o11) $\begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

Si queremos calcular la matriz adjunta de A tenemos que calcular la traspuesta del resultado anterior.

(%i12) transpose(adjoint (B));

(%o12) $\begin{bmatrix} -4 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

Resolución con MAXIMA de los ejercicios propuestos en el Curso Cero.

1 Ejercicio 5. (Página 21)

Dadas las matrices A y B, hay que calcular sus inversas.

Con MAXIMA es muy fácil: 1º definimos las matrices y después hay que ejecutar o evaluar la instrucción "invert(A)" o "A^^(-1)":

(%i13) A: matrix([1,4,3], [2,1,3],[2,2,3]);

(%o13) $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

(%i14) invert(A);

(%o14) $\begin{bmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ \frac{2}{3} & 2 & -\frac{7}{3} \end{bmatrix}$

(%i15) A^^(-1);

(%o15) $\begin{bmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ \frac{2}{3} & 2 & -\frac{7}{3} \end{bmatrix}$

(%i16) B: matrix([3,3,2], [1,2,2],[0,3,4]);

(%o16) $\begin{bmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

(%i17) invert(B);

expt: undefined: 0 to a negative exponent.
 -- an error. To debug this try: debugmode(true);

Nótese que la matriz B no tiene inversa. En efecto,
 MAXIMA detecta que NO es posible calcular la inversa de B porque su determinante es 0.

Con MAXIMA se puede recorrer el camino que se sigue al hacer "a mano" las inversas de las matrices dadas, aunque hacerlo supone un gran desperdicio de recursos:

Etapas para calcular la inversa de la matriz dada, A:

1. Calcular el determinante de A.
2. Calcular la traspuesta de la matriz adjunta de A.
3. Calcular el producto de la traspuesta de la adjunta por el inverso del determinante de A.

Esta es la vía utilizada en el ejercicio 5, pág. 22:

(%i18) determinant(A);

(%o18) 3

(%i19) (determinant(A))^(-1);

(%o19) $\frac{1}{3}$

(%i20) AdjuntTraspuesta: adjoint(A);

(%o20) $\begin{bmatrix} -3 & -6 & 9 \\ 0 & -3 & 3 \\ 2 & 6 & -7 \end{bmatrix}$

La última etapa es hacer el producto:

(%i21) B:(1/3)*AdjuntTraspuesta;

(%o21) $\begin{bmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ \frac{2}{3} & 2 & -\frac{7}{3} \end{bmatrix}$

Podemos hacer la comprobación de que esta última matriz es la inversa de A mediante la propiedad de la inversa: A A^(-1)=I:

(%i22) A . B;

(%o22) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

También se puede hacer directamente sin etiquetas:

(%i23) (determinant(A))^(-1)*adjoint(A);

(%o23) $\begin{bmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ \frac{2}{3} & 2 & -\frac{7}{3} \end{bmatrix}$

2 Ejercicio 6. (Página 21)

Se trata de calcular el determinante de la matriz A.

(%i24) A:matrix([3,3,2,0], [0,2,2,1], [0,2,6,2],[1,2,2,3]);

(%o24) $\begin{bmatrix} 3 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

(%i25) determinant(A);

(%o25) 58

3 Ejercicio 7. (Página 22).

Se trata de calcular el rango de una matriz A.

(%i26) A: matrix([1,0,1,2], [1,0,1,2], [0,1,-2,-1], [1,3,-5,-1]);

(%o26) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & -5 & -1 \end{bmatrix}$

(%i27) rank(A);

(%o27) 2

4 Ejercicio 8. (Página 22).

Dada una matriz, A, triangular superior, de orden 3 y con diagonal principal no nula,
debemos afirmar o negar que tiene inversa, independientemente del valor de sus elementos.

(%i28) A:matrix([a[11],a[12],a[13]], [0,a[22],a[23]], [0,0,a[33]]);

(%o28) $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}$

(%i29) determinant(A);

(%o29) $a_{11}\,a_{22}\,a_{33}$

Existe A^(-1) porque el determinante es distinto de 0 ya que los tres números a[11], a[22] y a[33] son distintos de 0.

La inversa es:

(%i30) invert(A);

(%o30) $$\begin{bmatrix} \frac{1}{a_{11}} & -\frac{a_{12}}{a_{11}\,a_{22}} & \frac{\frac{a_{12}\,a_{23}}{a_{22}\,a_{33}}-\frac{a_{13}}{a_{33}}}{a_{11}} \\ 0 & \frac{1}{a_{22}} & -\frac{a_{23}}{a_{22}\,a_{33}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{a_{33}} \end{bmatrix}$$

5 Solución con MAXIMA del ejercicio 100 de "Ejercios resueltos de MATEMÁTICAS I".

La solución de la ecuación cuyo primer miembro es el determinante de la matriz cuyas filas son los vectores (x,2,x), (1,1,1) y (0,0,x) y el segundo miembro -4 es:
a) x=1;   b) x=+-1; c) No es real;   d) Ninguna de las anteriores.

SOLUCIÓN.

(%i31) A:matrix([x,2,x], [1,1,1], [0,0,x]);

(%o31) $$\begin{bmatrix} x & 2 & x \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & x \end{bmatrix}$$

(%i32) b:determinant(A);

(%o32) $x^2-2\,x$

(%i33) solve(b=-4,x);

(%o33) $[x=1-\sqrt{3}\,\%i, x=\sqrt{3}\,\%i+1]$

Por tanto, como son números complejos, la respuesta correcta es c).

Es conveniente realizar distintos ejercicios propuestos en el libro de la bibliografía relaciona dos con determinantes.

6 Comprobación de propiedades.

Usando Maxima y las matrices

```
(%i34) A:matrix([1,2,-3],[0,4,-1],[-2,1,3]);
       B:matrix([2,0,-2],[-1,3,1],[4,2,1]);
```

(%o34) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 4 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

(%o35) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

decida si las siguientes propiedades son ciertas: a) det(A+B)=det(A)+det(B),
b) det(2A)=2det(A), c) det(AB)=det(A)det(B).

SOLUCIÓN:

```
(%i36) determinant(A);
       determinant(B);
       determinant(A+B);
       determinant(2*A);
       determinant(A.B);
```

(%o36) -7
(%o37) 30
(%o38) 177
(%o39) -56
(%o40) -210

Con lo cual es claro que a) y b) son falsas y c) es cierta.
Nota: Es conocido que la propiedad c) es cierta para todo par de matrices A y B. Aquí, simplemente se trataba de comprobarlo en un caso concreto.
Obsérvese también que det(2A)=2^3 det(A).

7 No olvide seguir completando su fichero de instrucciones con las utilizadas en esta sesión:

determinant(matriz): determinante de una matriz.
minor(matriz, i,j): submatriz de la matriz obtenida al eliminar su fila i y su columna j.
determinant(minor(matriz,i,j)): menor de la sumbatriz obtenida al eliminar su fila i y su columna j.
invert(matriz): inversa de la matriz.
rank(matriz): rango de la matriz.
transpose(adjoint(matriz)): adjunta de una matriz.