FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS DE LAS TTII. Cód. 71021023

Grado en Ingeniería de las Tecnologías de la Información

Septiembre de 2015. Tiempo: 2 horas

INSTRUCCIONES. Cada una de las preguntas tiene un valor máximo de 2 puntos. Como material auxiliar solamente está permitido el uso de una calculadora no programable.

1. Se consideran en $\mathbb{R}^3$ los vectores $\bar{a} = (1, 0, 0)$, $\bar{b} = (0, 1, 1)$ y $\bar{c} = (0, 0, m)$.

(a) Estudie la dependencia lineal de estos vectores según los valores de m. *(1 punto)*

(b) Considere la matriz

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & m \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2m \end{pmatrix}.$$

Analice para qué valores de $m \in \mathbb{R}$ la matriz M es inversible. *(1 punto)*

2. Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} -4 & 8 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

(a) Demuestre que A es diagonalizable. *(1 punto)*

(b) Encuentre una diagonalización y una matriz de paso. *(1 punto)*

3. (a) Demuestre que la ecuación $2x = \operatorname{tg}^2 x$ tiene al menos una solución en el intervalo abierto $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right)$. En el caso de apoyarse en algún resultado teórico, debe enunciarlo correctamente. *(1 punto)*

(b) Obtenga la expresión del polinomio p de grado 3 tal que $p(0) = 0$, $p'(0) = 1$, $p''(0) = 2$ y $p'''(0) = 3!$. *(1 punto)*

4. Sea $f\colon D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida como

$$f(x, y) = \begin{cases} \ln(1 - y + x^2)\cos\left(\pi \cdot \dfrac{y^2 - x^2}{y^2 + x^2}\right), & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

cuyo dominio es el conjunto abierto $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, y < x^2 + 1\}$.

(a) Estudie la continuidad de f en el origen. *(1 punto)*

(b) Calcule mediante su definición la derivada parcial $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$. *(1 punto)*

5. Calcule la integral

$$\iint_D xe^y dA,$$

donde D es el triángulo de vértices $(0, 0)$, $(2, 1)$ y $(2, 2)$. *(2 puntos)*

SOLUCIONES. FMTI. Modelo de examen. Septiembre de 2015.

1. (a) Consideramos la matriz A cuyas filas están formadas por los vectores $\bar{a}$, $\bar{b}$ y $\bar{c}$ y calculamos su determinante

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & m \end{vmatrix} = m.$$

Es conocido que $\bar{a}$, $\bar{b}$ y $\bar{c}$ son linealmente independientes si, y sólo si, $\det(A) \neq 0$; o equivalentemente, si $m \neq 0$. Para $m = 0$, son linealmente dependientes.

(b) Una matriz M es inversible si, y sólo si, $\det(M) \neq 0$. Se puede obtener su determinante de diferentes formas, por ejemplo, mediante la Regla de Sarrus, $\det(M) = 2m + 0 + 0 - m - 0 - 0 = m$. Se concluye que M es inversible si, y sólo si, $m \neq 0$.

2. (a) El polinomio característico es

$$|A - tI| = \begin{vmatrix} -4-t & 8 \\ 1 & -2-t \end{vmatrix} = (-4-t)(-2-t) - 8 = t^2 + 6t.$$

Los valores propios de A son las raíces de este polinomio, es decir, $t_1 = 0$ y $t_2 = -6$. Puesto que A es 2×2 y tiene dos valores propios distintos, es diagonalizable.

(b) Una matriz diagonal es $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$. Para obtener una matriz de paso P desde A hasta D hay que determinar una base en cada uno de los espacios propios.

Para hallar una base del subespacio propio $E(0)$ hay que resolver el sistema homogéneo $(A - 0 \cdot I)X = \bar{0}$, es decir, el sistema de ecuaciones

$$\left\{ \begin{array}{l} -4x + 8y = 0 \\ x - 2y = 0 \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \; x - 2y = 0 \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 2\alpha \\ y = \alpha \end{array} \right.$$

Así, cada vector (x, y) de $E(0)$ puede expresarse del siguiente modo:

$$(x, y) = (2\alpha, \alpha) = \alpha(2, 1).$$

Entonces, una base de $E(0)$ es $B_1 = \{(2, 1)\}$. Para hallar una base del subespacio propio $E(-6)$ hay que resolver el sistema homogéneo $(A + 6 \cdot I)X = \bar{0}$, es decir, el sistema de ecuaciones

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x + 8y = 0 \\ x + 4y = 0 \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \; x + 4y = 0 \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -4\alpha \\ y = \alpha \end{array} \right.$$

Así, cada vector (x, y) de $E(-6)$ puede expresarse del siguiente modo:

$$(x, y) = (-4\alpha, \alpha) = \alpha(-4, 1).$$

Entonces, una base de $E(-6)$ es $B_2 = \{(-4, 1)\}$. Por tanto, la matriz de paso es

$$P = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Para hacer una comprobación, se puede calcular que $P^{-1}AP = D$.

3. (a) Para resolver este apartado, haremos uso del siguiente resultado teórico:

Teorema de Bolzano: Si $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función continua en el intervalo cerrado $[a, b] \subset \mathbb{R}$ y $f(a) \cdot f(b) < 0$ (o equivalemente, si $f(a)$ y $f(b)$ tienen distinto signo), entonces existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.

Consideremos la función $f(x) = 2x - \operatorname{tg}^2 x$, cuya gráfica puede observarse en la Figura 1. Se tiene que $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2} - 1 > 0$ y que $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2\frac{\pi}{3} - 3 < 2\frac{4}{3} - 3 = -\frac{1}{3} < 0$. Como f es continua en el intervalo $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right]$, por el Teorema de Bolzano existe $c \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right)$ tal que $f(c) = 2c - \operatorname{tg}^2 c = 0$. Por tanto, hemos encontrado un punto c en el intervalo $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right)$ que verifica que $2c = \operatorname{tg}^2(c)$.

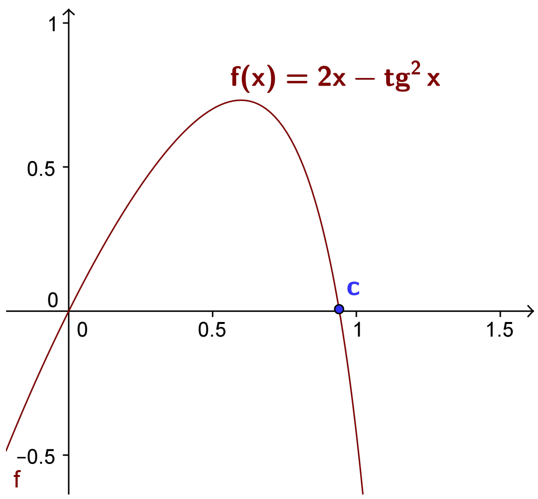

Figura 1: Gráfica de la función f

(b) Aplicamos la fórmula de Mac Laurin a p y obtenemos el polinomio pedido:

$$p(x) = p(0) + \frac{p'(0)}{1!}x + \frac{p''(0)}{2!}x^2 + \frac{p'''(0)}{3!}x^3 = x + x^2 + x^3.$$

4. (a) Se tiene que $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \ln(1-y+x^2) = \ln(1) = 0$ y que $\left|\cos\left(\pi \cdot \dfrac{y^2-x^2}{y^2+x^2}\right)\right| \leq 1$. Por tanto, $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \ln(1-y+x^2)\cos\left(\pi \cdot \frac{y^2-x^2}{y^2+x^2}\right) = 0$ ya que es el producto de una función acotada por otra que tiene límite cero. Luego f es continua en el origen ya que $f(0,0) = 0$.

Nótese que la función $g(x,y) = \cos\left(\pi \cdot \dfrac{y^2-x^2}{y^2+x^2}\right)$ no es continua en $(0,0)$ porque el límite a lo largo de rectas de la forma $y = mx$, $\displaystyle\lim_{x\to 0} \cos\left(\pi \cdot \frac{y^2-x^2}{y^2+x^2}\right) = \cos\left(\pi \frac{m^2-1}{m^2+1}\right)$ depende de m.

(b) Para realizar este apartado, calcularemos el límite de la definición de derivada parcial de f con respecto de y.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(1-h+0^2)\cos\left(\pi \cdot \frac{h^2-0}{h^2+0}\right) - 0}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-\ln(1-h)}{h} \underset{\text{L'Hôp.}}{=} \lim_{h\to 0} \frac{-\frac{-1}{1-h}}{1} = 1.
\end{aligned}$$

En la penúltima igualdad se aplicó la Regla de L'Hôpital.

5. El dominio de integración es el representado en la Figura 2. La ecuación de la recta que pasa por los puntos $(0,0)$ y $(2,1)$ es $y = \dfrac{x}{2}$ y la ecuación de la recta que pasa por $(0,0)$ y $(2,2)$ es $y = x$. Observando la figura, se puede interpretar el dominio de integración como una región de tipo I (véanse las páginas 301 y 302 del libro de texto). En el dominio de integración D la variable x varía entre 0 y 2 y para un valor de x fijado, la variable y varía entre $\dfrac{x}{2}$ y x. Luego la integral es

$$I = \iint_D xe^y dA = \int_0^2 \int_{x/2}^x xe^y dy\, dx = \int_0^2 x\left(e^x - e^{x/2}\right) dx.$$

Esta última integral se puede resolver mediante la fórmula de integración por partes. Elegimos $u = x$ y $dv = \left(e^x - e^{x/2}\right) dx$ y se obtiene que $du = dx$ y que $v = e^x - 2e^{x/2}$. Por tanto,

$$\begin{aligned}
I &= \left[x\left(e^x - 2e^{x/2}\right)\right]_0^2 - \int_0^2 \left(e^x - 2e^{x/2}\right) dx = 2(e^2-2e) - \left[e^x - 4e^{x/2}\right]_0^2 \\
&= 2(e^2-2e) - (e^2 - 4e - 1 + 4) = e^2 - 3.
\end{aligned}$$

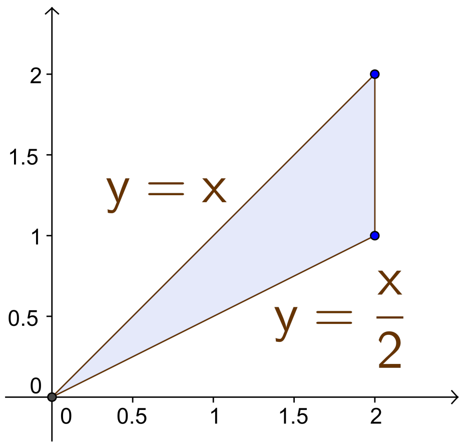

Figura 2: Dominio de integración