FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS DE LAS TTII. Cód. 71021023
Grado en Ingeniería de las Tecnologías de la Información
Prueba de evaluación continua (**PEC**). Temas 1, 2, 3 y 4. Días 30 Nov. y 1 Dic., 2016.

INSTRUCCIONES.

- Antes de enviar sus respuestas lea el documento "NormasdeRealizaciondelaPEC.pdf", que está en la carpeta PEC dentro de Documentos.
- Antes de acceder al envío de soluciones escriba en papel sus respuestas.

1. Se considera el siguiente sistema de parámetro real k:

$$\begin{cases} x+y+kz=6 \\ x+ky+z=0 \\ kx+y+z=-6 \end{cases}$$

Indique la opción correcta:
(a) Es compatible determinado para todo valor de k.
(b) Para $k=1$ es incompatible y para $k\neq 1$ es compatible determinado.
(c) Para $k=1$ es incompatible, para $k=-2$ es compatible indeterminado y para el resto de valores es compatible determinado.
(d) Ninguna de las anteriores.

2. Se consideran los siguientes conjuntos de vectores de $\mathbb{R}^3$:

$$A=\{(1,-2,3),\ (2,1,-4),\ (-3,5,-2)\} \text{ y } B=\{(1,-2,3),\ (2,1,-4),\ (4,-3,2)\}.$$

Indique la opción correcta:
(a) A es linealmente dependiente y B linealmente independiente.
(b) Ambos son linealmente independientes.
(c) Ambos son linealmente dependientes.
(d) Ninguna de las anteriores.

3. Sean $A=\{\bar{u}_1,\ \bar{u}_2,\ \bar{u}_3\}$ y $B=\{\bar{e}_1,\ \bar{e}_2,\ \bar{e}_3\}$ dos bases de $\mathbb{R}^3$ relacionadas por las expresiones

$$\bar{e}_1=\bar{u}_1+3\bar{u}_2,\ \bar{e}_2=-2\bar{u}_1+4\bar{u}_3,\ \bar{e}_3=\bar{u}_1+4\bar{u}_2+\bar{u}_3,$$

y sean los vectores $\bar{v}=3\bar{e}_1-\bar{e}_2-2\bar{e}_3$ y $\bar{w}=\bar{u}_1+2\bar{u}_2-\bar{u}_3$. Indique la opción correcta:
(a) Las coordenadas de $\bar{v}$ en la base A son $(0,-4,14)$.
(b) Las coordenadas de $\bar{w}$ en la base B son $(2,0,-1)$.
(c) Las coordenadas de $\bar{w}$ en la base B son $(3,1,1)$.
(d) Ninguna de las anteriores.

4. Sea $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ la aplicación lineal determinada por

$$\begin{aligned}(0,1,0)&\to(-1,0,2)\\(0,0,1)&\to(-2,2,1)\\(2,1,1)&\to(3,4,1).\end{aligned}$$

Indique la opción correcta:
(a) $f(-1,2,-2)=(-1,-5,5)$.
(b) El conjunto de vectores $\bar{x}$ tales que $f(\bar{x})=\bar{0}$ viene dado por $\bar{x}=\alpha(1,1,1)$ con $\alpha\in\mathbb{R}$.
(c) $f^{-1}(3,-1,2)=\{(1,2,-1)\}$.
(d) Ninguna de las anteriores.

5. Se considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 5 \\ 2 & -2 & -2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Indique la opción correcta:
(a) $\bar{u} = (1, 0, 1)$ y $\bar{v} = (-2, 1, -1)$ son vectores propios de A.
(b) $\lambda = -4$ es un valor propio de A.
(c) $\lambda = 2$ es un valor propio de A.
(d) Ninguna de las anteriores.

6. Dada la sucesión real cuyo término general viene dado por

$$x_n = (-1)^n \sqrt[n]{5}, \quad n \in \mathbb{N},$$

indique la opción correcta:
(a) $\{x_n\}$ tiene un mínimo y un máximo.
(b) $\{x_n\}$ no tiene mínimo o máximo, pero sí tiene ínfimo y supremo.
(c) $\{x_n\}$ converge a 0.
(d) Ninguna de las anteriores.

7. Indique el valor del límite

$$\lim_{x \to 0} (\cos x)^{1/x}.$$

(a) 1.
(b) 0.
(c) No existe.
(d) Ninguna de las anteriores.

8. Considere un número $\alpha \in \mathbb{R}$ y la función $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 2\alpha - \dfrac{1}{x} \operatorname{sen} x, & x \neq 0, \\ \alpha^2, & x = 0. \end{cases}$$

Señale la afirmación correcta:
(a) f no es continua en el origen para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.
(b) f es derivable en el origen para $\alpha = 1$.
(c) Se verifican las condiciones del Teorema de Rolle en el intervalo $[-\pi, \pi]$ para $\alpha = 0$.
(d) Ninguna de las anteriores..

NOTAS: (A) Si por error alguna pregunta tuviera dos opciones correctas, se deberá responder con la primera que sea correcta en el orden alfabético. Por ejemplo, si en una pregunta fueran ciertas (b) y (c), en la aplicación se deberá responder (b), y sólo se considerará como válida esta respuesta.
(B) Se puede usar Maxima, y se recomienda usarlo especialmente en los ejercicios que tienen mucho cálculo.

SOLUCIONES. Prueba de evaluación continua (**PEC**). Diciembre-2016.

RESUMEN: Las soluciones del test son: 1 (c), 2 (d), 3 (b), 4 (c), 5 (b), 6 (a), 7 (a) y 8 (b).

A continuación se hace la resolución detallada.

1. El determinante de la matriz de los coeficientes vale $-k^3+3k-2$. Se factoriza y resulta $-(k-1)^2(k+2)$, con lo que resulta que es cero precisamente si $k=-2$ o si $k=1$. Por tanto, para $k\neq -2$ y $k\neq 1$, los rangos de la matriz de los coeficientes y de la ampliada valen 3 y el sistema es compatible determinado.

Para $k=1$, se sustituye en el sistema y resulta claramente un sistema incompatible.

Para $k=-2$, se sustituye en el sistema, se resuelve por Gauss y resulta un sistema compatible indeterminado. Por consiguiente, es cierta (c).

2. Se puede resolver, por ejemplo, hallando el rango de las matrices cuyas filas son los vectores de A y B.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -4 \\ -3 & 5 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & -10 \\ 0 & -1 & 7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -4 \\ 4 & -3 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & -10 \\ 0 & 5 & -10 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Se concluye que el rango de A es 3 y el de B es 2, por lo que A es linealmente independiente y B linealmente dependiente. Por tanto, es cierta (d).

3. (a) Basta operar:

$$\bar{v} = 3\bar{e}_1 - \bar{e}_2 - 2\bar{e}_3 = 3(\bar{u}_1 + 3\bar{u}_2) - (-2\bar{u}_1 + 4\bar{u}_3) - 2(\bar{u}_1 + 4\bar{u}_2 + \bar{u}_3) = 3\bar{u}_1 + \bar{u}_2 - 6\bar{u}_3.$$

Por lo que las coordenadas de $\bar{v}$ en la base A son $(3,1,-6)$ y en consecuencia (a) es falsa.

(b)-(c) Ahora hay que hallar los números $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tales que

$$\bar{w} = \bar{u}_1 + 2\bar{u}_2 - \bar{u}_3 = \lambda_1\bar{e}_1 + \lambda_2\bar{e}_2 + \lambda_3\bar{e}_3.$$

Se sustituyen los valores de $\bar{e}_i$ en función de los $\bar{u}_j$, se opera y resulta:

$$\begin{aligned} \bar{w} = \bar{u}_1 + 2\bar{u}_2 - \bar{u}_3 &= \lambda_1(\bar{u}_1 + 3\bar{u}_2) + \lambda_2(-2\bar{u}_1 + 4\bar{u}_3) + \lambda_3(\bar{u}_1 + 4\bar{u}_2 + \bar{u}_3) \\ &= (\lambda_1 - 2\lambda_2 + \lambda_3)\bar{u}_3 + (3\lambda_1 + 4\lambda_3)\bar{u}_2 + (4\lambda_2 + \lambda_3)\bar{u}_3. \end{aligned}$$

Igualando coeficientes se obtiene el siguiente sistema que se resuelve y resulta:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 - 2\lambda_2 + \lambda_3 = 1 \\ 3\lambda_1 \qquad + 4\lambda_3 = 2 \\ \qquad 4\lambda_2 + \lambda_3 = -1 \end{array} \right. \to \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = -1 \end{array} \right.$$

Por tanto, las coordenadas de $\bar{w}$ en la base B son $(2,0,-1)$ y es cierta la opción (b).

4. Consideremos la base canónica de $\mathbb{R}^3$: $\bar{e}_1 = (1,0,0)$, $\bar{e}_2 = (0,1,0)$ y $\bar{e}_3 = (0,0,1)$. Según el enunciado del ejercicio, se conocen $f(\bar{e}_2)$, $f(\bar{e}_3)$ y $f(2,1,1) = f(2\bar{e}_1 + \bar{e}_2 + \bar{e}_3) = (3,4,1)$. Usando la linealidad de f se tiene $2f(\bar{e}_1) + f(\bar{e}_2) + f(\bar{e}_3) = (3,4,1)$, y despejando $2f(\bar{e}_1)$:

$$\begin{aligned} 2f(\bar{e}_1) &= (3,4,1) - f(\bar{e}_2) - f(\bar{e}_3) \\ &= (3,4,1) - (-1,0,2) - (-2,2,1) = (6,2,-2), \end{aligned}$$

y por consiguiente $f(\bar{e}_1) = (3,1,-1)$. Usando la expresión matricial de f en las bases canónicas, $f(-1,2,-2)$ viene dado por

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Así pues, (a) es falsa.

(b) Sea $\bar{x} = (x,y,z)$. Se tiene

$$f(\bar{x}) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x - y - 2z \\ x + 2z \\ -x + 2y + z \end{pmatrix}$$

Resolviendo el sistema

$$\begin{cases} 3x - y - 2z = 0 \\ x \quad\quad + 2z = 0 \\ -x + 2y + z = 0 \end{cases}$$

resulta $x = 0, y = 0, z = 0$, por lo que (b) es falsa.

(c) Si $f^{-1}(3,-1,2) = \{(x,y,z)\}$, entonces $f(x,y,z) = (3,-1,2)$ y ahora hay que resolver el sistema

$$\begin{cases} 3x - y - 2z = 3 \\ x \quad\quad + 2z = -1 \\ -x + 2y + z = 2 \end{cases}$$

De aquí, resulta que tiene solución única y es $x = 1, y = 2, z = -1$, por lo que (c) es cierta.

5. (a) Se tiene:

$$A.\bar{u} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 5 \\ 2 & -2 & -2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} = 6 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 6\bar{u},$$

$$A.\bar{v} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 5 \\ 2 & -2 & -2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

Por consiguiente, $\bar{u}$ sí es un vector propio pero $\bar{v}$ no lo es, por lo que (a) es falsa.

(b) Si $\lambda = -4$ fuese valor propio, entonces la matriz $A + 4I$, sería singular (de determinanate nulo). Se tiene

$$|A + 4I| = \left| \begin{pmatrix} 1 & 5 & 5 \\ 2 & -2 & -2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 \\ 2 & 2 & -2 \\ 3 & 3 & 7 \end{vmatrix} = 0,$$

y por tanto, $\lambda = -4$ es un valor propio de A. Así pues, (b) es cierta.

(c) Se opera de manera similar con $\lambda = 2$, pero en este caso resulta que $|A-2I| = 48 \neq 0$ por lo que 2 no es un valor propio, y (c) es falso.

Nótese que el polinomio característico de A viene dado por

$$|A - tI| = -t^3 + 2t^2 + 24t$$

y que 2 no es una raíz, pero -4 sí.

6. Observamos que:

- Los elementos de índice impar $k = 2n-1$, $x_k = -\sqrt[k]{5}$, forman una subsucesión de números negativos creciente que converge a -1. Por ello, su mínimo se alcanza en $x_1 = -\sqrt{5}$.
- Los elementos de índice par $k = 2n$, $x_k = \sqrt[k]{5}$, forman una subsucesión de números positivos decreciente que converge a 1. Por ello, su máximo se alcanza en $x_2 = \sqrt{5}$.

En consecuencia,

- x_1 es el mínimo de $\{x_n\}$.
- x_2 es el máximo de $\{x_n\}$.
- $\{x_n\}$ no converge, puesto que tiene dos subsucesiones convergentes a puntos distintos y su límite, en caso de existir, debe ser único.

Por tanto, es cierta (a). Puede comprobarse con Maxima que este límite no existe mediante las instrucciones

```
x(n):=(-1)^n*5^(1/n);
limit(x(n),n,infinity);
```

las cuales devuelven el valor *ind*, de indeterminado. Para inspeccionar el comportamiento de la sucesión, puede ser de utilidad hacer una tabla de valores:

```
makelist(float(x(n)), n, 1, 20);
```

esta instrucción nos devuelve los 20 primeros valores aproximados.

7. Como se tiene una indeterminación del tipo $1^{\pm\infty}$, emplearemos la fórmula del número e. Es decir, si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$, entonces

$$\lim_{x\to x_0}\left(1 + \frac{1}{f(x)}\right)^{f(x)} = e,$$

donde f es una función real y x_0 un punto de la clausura de su dominio. En nuestro caso particular,

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{1/x} = \lim_{x\to 0}(1 + (\cos x - 1))^{1/x} = \lim_{x\to 0}\left(1 + \frac{1}{\frac{1}{\cos x - 1}}\right)^{1/x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\left(1 + \frac{1}{\frac{1}{\cos x-1}}\right)^{\frac{1}{\cos x - 1}}\right)^{\frac{\cos x - 1}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{x}},$$

siempre y cuando exista este último límite. Como es una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$, aplicaremos la Regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{-\operatorname{sen} x}{1} = 0.$$

Por tanto, $\lim_{x\to 0} (\cos x)^{1/x} = e^0 = 1$, y por consiguiente, es cierta (a).

Este límite se puede calcular con Maxima mediante la instrucción

```
limit((cos(x))^(1/x),x,0);
```

la cual devuelve el valor 1.

8. Veamos para que valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ se tiene que f es continua en $x = 0$:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \left(2\alpha - \frac{\operatorname{sen} x}{x}\right) = 2\alpha - \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}.$$

Aplicando L'Hôpital,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = 1,$$

luego $\lim_{x\to 0} f(x) = 2\alpha - 1$. Se tiene que f es continua si $f(0) = \lim_{x\to 0} f(x)$, es decir, si

$$\alpha^2 = 2\alpha - 1 \longleftrightarrow (\alpha - 1)^2 = 0 \longleftrightarrow \alpha = 1.$$

Por tanto, para $\alpha = 0$, f no es continua y no verifica las condiciones del Teorema de Rolle en $[-\pi, \pi]$. Veamos si f es derivable en $x = 0$ para $\alpha = 1$:

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2 - \frac{\operatorname{sen} h}{h} - 1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h - \operatorname{sen} h}{h^2}.$$

Aplicando L'Hôpital dos veces, se tiene

$$\lim_{h\to 0} \frac{h - \operatorname{sen} h}{h^2} = \lim_{h\to 0} \frac{1 - \cos h}{2h} = \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen} h}{2} = 0,$$

por lo que f es derivable en $x = 0$ para $\alpha = 1$. Luego es cierta (b).