FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS DE LAS TTII. Cód. 71021023
Grado en Ingeniería de las Tecnologías de la Información
Primera semana de Febrero de 2018. Tiempo: 2 horas

INSTRUCCIONES. Cada una de las preguntas tiene un valor máximo de 2 puntos. Sólo está permitido una calculadora no programable. No entregue esta hoja con los enunciados.

1. En el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ se considera el subespacio vectorial

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ 2x - y + z = 0, \ x - y - z = 0\}.$$

(a) Encuentre una base de S e indique su dimensión. *(1.5 puntos)*

(b) Halle dos elementos de S no nulos y determine sus coordenadas en la base anterior. *(0.5 puntos)*

2. Sea $B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^3$ y $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la aplicación lineal tal que

$$\begin{aligned} &f(\bar{e}_1) = (-2, 3), \\ &f(\bar{e}_1 + 2\bar{e}_2) = (2, -2), \\ &f(\bar{e}_2 - \bar{e}_3) = (1, 1). \end{aligned}$$

Determine $f(\bar{e}_1 - \bar{e}_2 - \bar{e}_3)$. *(2 puntos)*

3. Se considera la función $f(x) = \dfrac{x^3}{1 - x^2}$.

Determine los intervalos de crecimiento y, sin hacer más cálculos, deduzca los máximos y mínimos relativos. *(2 puntos)*

4. Se considera la función

$$f(x, y, z) = ze^{x-y},$$

y el punto $\bar{x} = (1{,}1{,}2)$.

(a) Determine la derivada direccional de f en $\bar{x}$ en la dirección $\bar{u} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, -1)$. *(1 punto)*

(b) Utilizando la regla de la cadena, obtenga el gradiente de $g \circ f$ en el punto $\bar{x}$, siendo $g(x) = \operatorname{sen}(\pi x)$. *(1 punto)*

5. Se considera la siguiente integral doble:

$$I = \iint_D \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} dxdy,$$

donde D viene dado por

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \geq 0, \ y \geq 0, \ 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}.$$

(a) Dibuje el dominio de integración D. *(0.5 puntos)*

(b) Calcule el valor de I. *(1.5 puntos)*

SOLUCIONES. FMTI. Primera semana de Febrero de 2018.

1. (a) Basta resolver el sistema formado por ambas ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{r} 2x-y+z=0 \\ x-y-z=0 \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{l} 2x-y+z=0 \\ 3x-2y=0 \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{l} z=-2x+\frac{3}{2}x \\ y=\frac{3}{2}x \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=\lambda \\ y=\frac{3}{2}\lambda \\ z=\frac{-1}{2}\lambda \end{array}\right.$$

Luego, $(x,y,z)=\left(\lambda,\frac{3}{2}\lambda,\frac{-1}{2}\lambda\right)=\lambda\left(1,\frac{3}{2},\frac{-1}{2}\right)$. Una base de S es $\left\{\left(1,\frac{3}{2},\frac{-1}{2}\right)\right\}$. También $\{\bar{u}=(2,3,-1)\}$.

(b) Dos elementos de S son:

$\bar{v}=(4,6,-2)=2\bar{u}$, de coordenadas (2) en la base B.

$\bar{w}=(-6,-9,3)=-3\bar{u}$, de coordenadas (-3) en la base B.

2. Se consideran los vectores

$$\left\{\begin{array}{l} \bar{u}_1=\bar{e}_1 \\ \bar{u}_2=\bar{e}_1+2\bar{e}_2 \\ \bar{u}_3=\qquad\bar{e}_2-\bar{e}_3 \end{array}\right.$$

El vector $\bar{e}=\bar{e}_1-\bar{e}_2-\bar{e}_3$ se expresa como combinación lineal (c.l.) de $\bar{u}_1,\bar{u}_2,\bar{u}_3$:

$$\begin{aligned} \bar{e}_1-\bar{e}_2-\bar{e}_3 &= \lambda_1\bar{u}_1+\lambda_2\bar{u}_2+\lambda_3\bar{u}_3=\lambda_1\bar{e}_1+\lambda_2(\bar{e}_1+2\bar{e}_2)+\lambda_3(\bar{e}_2-\bar{e}_3) \\ &= (\lambda_1+\lambda_2)\bar{e}_1+(2\lambda_2+\lambda_3)\bar{e}_2-\lambda_3\bar{e}_3. \end{aligned}$$

Puesto que $\{e_i\}$ es una base, los coeficientes tienen que ser iguales:

$$\left\{\begin{array}{rcr} \lambda_1+\lambda_2 \qquad & = & 1 \\ 2\lambda_2+\lambda_3 & = & -1 \\ -\lambda_3 & = & -1 \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{l} \lambda_1=2 \\ \lambda_2=-1 \\ \lambda_3=1 \end{array}\right.$$

Usamos estos coeficientes para hallar $f(\bar{e})$:

$f(\bar{e})=f(2\bar{u}_1-\bar{u}_2+\bar{u}_3)=2f(\bar{u}_1)-f(\bar{u}_2)+f(\bar{u}_3)=2(-2,3)-(2,-2)+(1,1)=(-5,9).$

3. Estudiaremos el crecimiento con el signo de la derivada. La derivada de f es

$$f'(x)=\frac{3x^2(1-x^2)-x^3(-2x)}{(1-x^2)^2}=\frac{3x^2-x^4}{(1-x^2)^2}.$$

Las raíces de f' son: $3x^2-x^4=0\Rightarrow x^2(3-x^2)=0\Rightarrow x^2=0$ o $3-x^2=0$, luego $x=0$, $x=\pm\sqrt{3}$.

Las discontinuidades de f' son $(1-x^2)^2=0\Rightarrow 1-x^2=0$, luego $x=\pm 1$. Teniendo esto en cuenta, hacemos la siguiente tabla para el estudio del crecimiento:

	$(-\infty,-\sqrt{3})$	$(-\sqrt{3},-1)$	$(-1,0)$	$(0,1)$	$(1,\sqrt{3})$	$(\sqrt{3},+\infty)$
f' es	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$	$-$
f es	decrec. $\searrow$	crec. $\nearrow$	crec. $\nearrow$	crec. $\nearrow$	crec. $\nearrow$	decrec. $\searrow$

Como f es continua en $-\sqrt{3}$ y en $\sqrt{3}$, se deduce que f tiene un mínimo relativo en $-\sqrt{3}$ y un máximo relativo en $\sqrt{3}$.

4. (a) Las derivadas parciales de f son

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = ze^{x-y}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = -ze^{x-y}, \quad \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = e^{x-y}.$$

Evaluadas en $\bar{x} = (1,1,2)$, se obtiene el gradiente de f en $\bar{x}$: $\nabla f(\bar{x}) = (2,-2,1)$.

La derivada direccional, de acuerdo con la cuestión teórica 5.39 del libro de ejercicios resueltos, es:

$$D_{\bar{u}} f(\bar{x}) = \nabla f(\bar{x}) \cdot \bar{u} \Rightarrow D_{\bar{u}} f(\bar{x}) = (2,-2,1) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,-1) = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}.$$

(b) La regla de la cadena establece que

$$\nabla(g \circ f)(\bar{x}) = \nabla g(f(\bar{x})) \cdot \nabla f(\bar{x}).$$

$\nabla g(x) = g'(x) = \pi \cos(\pi x)$. Como $f(\bar{x}) = 2$, se sigue que $\nabla g(f(\bar{x})) = g'(2) = \pi\cos(2\pi) = \pi$. Luego

$$\nabla(g \circ f)(\bar{x}) = \pi(2,-2,1) = (2\pi, -2\pi, \pi).$$

5. (a) El dominio de integración se ha representado en la figura 1.

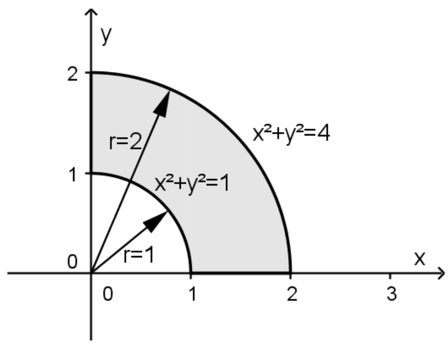

Fig. 1. Dominio de integración D.

Al tratarse de un cuadrante del sector circular de radios 1 y 2 centrado en el origen, vamos a integrar pasando a polares:

$$x = r\cos t, \quad y = r \operatorname{sen} t, \quad dxdy = rdrdt,$$

con lo que la integral a calcular es

$$I = \int_0^{\pi/2} \int_1^2 \frac{(r\cos t)(r \operatorname{sen} t)}{r} rdrdt = \int_0^{\pi/2} \cos t \operatorname{sen} t \left[\frac{r^3}{3}\right]_1^2 dt = \frac{7}{3}\int_0^{\pi/2} \cos t \operatorname{sen} t dt.$$

Una primitiva de $\cos t \operatorname{sen} t$ se puede obtener o bien usando la fórmula del ángulo doble:

$$\int \cos t \operatorname{sen} t dt = \frac{1}{2}\int \operatorname{sen}(2t) dt = \frac{1}{2}\frac{1}{2}(-\cos(2t)) = \frac{-1}{4}\cos 2t \quad (1)$$

o bien como una casi-inmediata de tipo potencial $(\operatorname{sen} t)^n \cos t = u^n u'$. Con este punto de vista:

$$\int \cos t \operatorname{sen} t dt = \int (\operatorname{sen} t)^1 (\operatorname{sen} t)' dt = \frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 t.$$

($\frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 t$ y $\frac{-1}{4}\cos 2t$ difieren en una constante, hállese).

Usando (1), se concluye del siguiente modo:

$$I = \frac{7}{3}\left[\frac{-1}{4}\cos 2t\right]_0^{\pi/2} = \frac{7}{3}\cdot\frac{1}{4}(\cos 0 - \cos(\pi)) = \frac{7}{6}.$$