**FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS DE LAS TTII. Cód. 71021023**
Grado en Ingeniería de las Tecnologías de la Información
Febrero de 2014. Tiempo: 2 horas

INSTRUCCIONES. Cada una de las preguntas tiene un valor máximo de 2 puntos. No está permitido ningún tipo de material.

**1.** Sean $U_1$ el subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$ dado por

$$U_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0\}$$

y $U_2$ el subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$ generado por los vectores $(1, 1, -1)$ y $(1, 0, 1)$.

(a) Determine la o las ecuaciones implícitas de $U_2$ e indique su dimensión. *(0.5 puntos)*

(b) Obtenga una base de $U_1 \cap U_2$ e indique su dimensión. *(1.5 puntos)*

**2.** Sean $B = \{(1, 2), (-3, 1)\}$ una base de $\mathbb{R}^2$ y $B' = \{(1, 0, -1), (0, -1, 2), (0, 0, 1)\}$ una base de $\mathbb{R}^3$. Considérese la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida como

$$f(x_1, x_2) \;=\; (x_1 - x_2, x_2, 2x_1 + x_2),$$

y sea $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal cuya matriz con respecto a la base inicial $B'$ y base final la canónica es

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Obtenga la matriz de $f$ respecto de las bases $B$ y $B'$. *(1.5 puntos)*

(b) Determine la matriz de $g \circ f$ respecto de la base $B$ y la base canónica. *(0.5 puntos)*

**3.** (a) Calcule el límite

$$\lim_{x \to +\infty} (x^2 + 1)^{\frac{1}{x^2}}.$$

*(1 punto)*

(b) Obtenga la expresión del polinomio $p$ de grado 3 tal que $p(0) = 2$, $p'(0) = 3$, $p''(0) = 8$ y $p'''(0) = -12$. *(1 punto)*

**4.** (a) Estudie la existencia del límite

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{x^2 - 2xy}{y^3 + 2x^2}.$$

*(1 punto)*

(b) Sea la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida como

$$f(x, y) = y \ln(x^2 + 1) + a(x - y),$$

con $a \in \mathbb{R}$. Determine el valor de $a$ para que $D_{(3,1)} f(0, 0) = 6$. *(1 punto)*

**5.** Calcule la integral

$$\int\int_D x e^y dA,$$

donde $D$ es la región del plano delimitada por la parábola $y = x^2$ y la recta $y = 2$, con $x \geq 0$. *(2 puntos)*

**SOLUCIONES.** FMTI. Modelo de examen. Febrero de 2014.

**1.** (a) Claramente, los vectores $(1,1,-1)$ y $(1,0,1)$ son linealmente independientes, por lo que generan un subespacio de dimensión 2. Por consiguiente, cualquier vector $(x_1,x_2,x_3)$ de $U_2$ es combinación lineal de $(1,1,-1)$ y $(1,0,1)$ o lo que es lo mismo, los vectores $(x_1,x_2,x_3)$, $(1,1,-1)$ y $(1,0,1)$ son linealmente dependientes, lo cual equivale a que

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Longleftrightarrow x_1 - 2x_2 - x_3 = 0.$$

Luego $U_2 = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 - 2x_2 - x_3 = 0\}$.

(b) El subespacio $U_1 \cap U_2$ viene dado por el conjunto de los vectores $(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3$ que satisfacen el sistema de ecuaciones

$$\left\{ \begin{array}{r} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = 0 \end{array} \right.$$

Sumando las dos ecuaciones del sistema anterior se deduce que $3x_1 - 5x_2 = 0$. Así pues, $x_1 = \frac{5}{3}x_2$ y despejando $x_3$ en la segunda ecuación resulta

$$x_3 = x_1 - 2x_2 = \frac{5}{3}x_2 - 2x_2 = -\frac{1}{3}x_2,$$

por lo que todo vector $(x_1,x_2,x_3) \in U_1 \cap U_2$ se puede expresar como

$$(x_1,x_2,x_3) = \left(\frac{5}{3}x_2, x_2, -\frac{1}{3}x_2\right) = x_2\left(\frac{5}{3}, 1, -\frac{1}{3}\right),$$

y una base de $U_1 \cap U_2$ viene dada por $\left\{\left(\frac{5}{3}, 1, -\frac{1}{3}\right)\right\}$, siendo 1 la dimensión de $U_1 \cap U_2$. Si se quiere evitar fracciones en el vector de la base se puede multiplicar éste por 3, obteniendo la base $\{(5,3,-1)\}$.

**2.** (a) Hay que determinar las coordenadas de $f(1,2) = (-1,2,4)$ y $f(-3,1) = (-4,1,-5)$ en la base $B'$. Para el primer vector, hay que encontrar $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tales que

$$(-1,2,4) = \alpha(1,0,-1) + \beta(0,-1,2) + \gamma(0,0,1),$$

por lo que se trata de resolver el sistema

$$\left\{ \begin{array}{rl} \alpha & = -1 \\ -\beta & = 2 \\ -\alpha + 2\beta + \gamma & = 4 \end{array} \right.$$

Se tiene que $\alpha = -1$ y $\beta = -2$, así pues, despejando $\gamma$ en la tercera ecuación se deduce que $\gamma = 7$. Por tanto, $f(1,2)$ se corresponde con el vector $(-1,-2,7)$ en la base $B'$. Procediendo de forma análoga, se obtiene que las coordenadas de $f(-3,1)$ en la base $B'$ son $(-4,-1,-7)$. Luego la matriz de $f$ respecto de las bases $B$ y $B'$ es

$$A_f = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ -2 & -1 \\ 7 & -7 \end{pmatrix}.$$

(b) Denótese por $A_g$ la matriz de $g$ respecto de la base inicial $B'$ y base final la canónica. Teniendo en cuenta el apartado (a), la matriz de $g \circ f$ respecto de la base $B$ y la base canónica es $A_g \cdot A_f$:

$$A_g \cdot A_f = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ -2 & -1 \\ 7 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 3 & -9 \\ 10 & -9 \end{pmatrix}.$$

**3.** (a) Al calcular el límite, resulta una indeterminación del tipo $(+\infty)^0$. En este caso, se procede como sigue. Supóngase que $\lim_{x\to+\infty}(x^2+1)^{\frac{1}{x^2}} = l$. Entonces, tomando logaritmos a ambos lados de la igualdad se tiene que

$$\lim_{x\to+\infty} \ln\left((x^2+1)^{\frac{1}{x^2}}\right) = \ln l,$$

o equivalentemente

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{x^2} = \ln l.$$

En el cálculo de $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{x^2}$ se obtiene una indeterminación del tipo $\frac{+\infty}{+\infty}$. Como las funciones $f_1(x) = \ln(x^2+1)$ y $f_2(x) = x^2$ son derivables en $\mathbb{R}$ y $f_2'(x) = 2x \neq 0$, para todo $x > 0$, se satisfacen las condiciones de la regla de L'Hôpital, deduciéndose que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{2x}{x^2+1}}{2x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2+1} = 0.$$

Por tanto, $\ln l = 0$, concluyéndose que el valor del límite es $l = 1$.

(b) Puesto que $p$ es un polinomio, éste coincide con su polinomio de Taylor de orden 3 en el punto $x = 0$, es decir, coincide con el polinomio de Mac Laurin de orden 3 de $p$. Por tanto,

$$p(x) = p(0) + \frac{p'(0)}{1!}x + \frac{p''(0)}{2!}x^2 + \frac{p'''(0)}{3!}x^3 = 2 + 3x + 4x^2 - 2x^3.$$

**4.** (a) Los límites reiterados en $(0,0)$ son

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} \frac{x^2-2xy}{y^3+2x^2}\right) = \lim_{y\to 0} \frac{0}{y^3} = 0, \qquad \lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} \frac{x^2-2xy}{y^3+2x^2}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}.$$

Como los límites reiterados no coinciden, se deduce que no existe $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-2xy}{y^3+2x^2}$.

(b) La función $f$ es diferenciable en $\mathbb{R}^2$ por ser suma y producto de funciones diferenciables en $\mathbb{R}^2$ (polinómicas y logaritmo neperiano). Así pues, se tiene que

$$D_{(3,1)}f(0,0) = \nabla f(0,0) \cdot (3,1).$$

Las derivadas parciales de $f$ son

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2xy}{x^2+1} + a, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \ln(x^2+1) - a.$$

Luego $\nabla f(0,0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,0), \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\right) = (a,-a)$ y $D_{(3,1)}f(0,0) = (a,-a)\cdot(3,1) = 2a$. Por consiguiente, el valor buscado es $a = 3$.

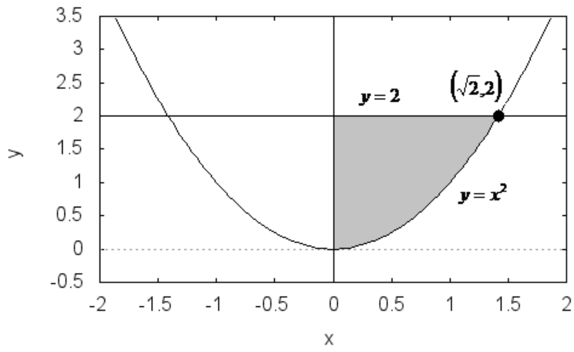


Figura 1: Dominio de integración $D$.

**5.** El dominio de integración viene representado en la Figura 1.

Para obtener los puntos de corte de la parábola $y = x^2$ con la recta $y = 2$ se resuelve la ecuación $x^2 = 2$, resultando $x = \pm\sqrt{2}$. Como los puntos de $D$ tienen coordenada $x$ mayor o igual que 0, el único punto de intersección que se tiene en cuenta es el punto $(\sqrt{2}, 2)$. Por tanto, los puntos $(x, y) \in D$ satisfacen que $0 \leq x \leq \sqrt{2}$ y $x^2 \leq y \leq 2$. Luego se tiene que

$$\int\int_D xe^y dA = \int_0^{\sqrt{2}} \int_{x^2}^{2} xe^y dydx = \int_0^{\sqrt{2}} xe^y\Big]_{x^2}^{2} dx = \int_0^{\sqrt{2}} (xe^2 - xe^{x^2})dx$$
$$= e^2 \int_0^{\sqrt{2}} xdx - \int_0^{\sqrt{2}} xe^{x^2} dx.$$

En la última igualdad, la integral $\int_0^{\sqrt{2}} xdx$ es inmediata:

$$\int_0^{\sqrt{2}} xdx = \frac{x^2}{2}\Big]_0^{\sqrt{2}} = 1,$$

y la integral $\int_0^{\sqrt{2}} xe^{x^2} dx$ se calcula aplicando el cambio de variable $z = x^2$, de donde $dz = 2xdx$ y $xdx = \frac{dz}{2}$. Considerando este cambio de variable, los límites de integración pasan a ser: $z = 0^2 = 0$ y $z = (\sqrt{2})^2 = 2$ y se obtiene que

$$\int_0^{\sqrt{2}} xe^{x^2} dx = \int_0^{2} \frac{e^z}{2} dz = \frac{e^z}{2}\Big]_0^{2} = \frac{e^2 - e^0}{2} = \frac{e^2 - 1}{2}.$$

Así pues, se deduce que

$$\int\int_D xe^y dA = e^2 \cdot 1 - \frac{e^2 - 1}{2} = \frac{e^2 + 1}{2}.$$