FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS DE LAS TTII. Cód. 71021023
Grado en Ingeniería de las Tecnologías de la Información
Prueba de evaluación continua núm. 1 (**PEC-1**), Álgebra. 20 al 22 de Noviembre, 2013.

INSTRUCCIONES.
• Antes de enviar sus respuestas lea el documento "NormasdeRealizaciondelaPEC-1.pdf", que está en la carpeta PEC dentro de Documentos.
• Antes de acceder al envío de soluciones escriba en papel sus respuestas.

1. Se considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales de parámetro a:

$$\left\{\begin{array}{c} 3x - ay + 3z = 4 \\ ax + y - z = 2 \\ x - y + z = 1 \\ ax + 4y - z = 5 \end{array}\right.$$

Indique la opción correcta:
(a) Si $a = 2$, el sistema es compatible determinado, y en cualquier otro caso es incompatible.
(b) Si $a = -1$, es compatible indeterminado, si $a = 2$ es compatible determinado, y si $a \neq -1$ y $a \neq 2$, es incompatible.
(c) Es incompatible para todo valor de a.
(d) Ninguna de las anteriores.

2. Sea U el subespacio de $\mathbb{R}^3$ generado por los vectores $(2, -1, 1)$, $(4, -3, -1)$ y $(-2, 3, 5)$. Indique la opción correcta:
(a) La ecuación cartesiana o implícita de U es $x_1 + x_2 - x_3 = 0$.
(b) La dimensión de U es 1.
(c) Una base de U es $\{(2, 1, 7),\ (1, 2, -3)\}$.
(d) Ninguna de las anteriores.

3. Sea S el subconjunto de $M_{2\times2}$ (matrices 2×2) de todas las matrices de la forma $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & c \end{pmatrix}$ con $a, b, c \in \mathbb{R}$. Indique la opción correcta:
(a) S no es un subespacio.
(b) S es un subespacio de dimensión 2.
(c) S es un subsespacio y una base está formada por las matrices $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ y $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.
(d) Ninguna de las anteriores.

4. Se consideran los vectores de $\mathbb{R}^3$, $\bar{a} = (1, 1, 2)$, $\bar{b} = (2, 0, -1)$ y $\bar{c} = (-6, -1, 0)$ y la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $f(\bar{a}) = (3, -1, 0)$, $f(\bar{b}) = (-1, 1, 1)$ y $f(\bar{c}) = (-2, -1, -1)$. Indique la opción correcta:
(a) $f(2\bar{a} + \bar{b} - \bar{c}) = (6, 1, 1)$.
(b) Las ecuaciones de f en la base canónica son: $y_1 = x_1 - 4x_2 - x_3$, $y_2 = x_2 - x_3$, $y_3 = -x_1 - x_2$.
(c) $f(3, -1, -2) = (1, 1, -4)$.
(d) Ninguna de las anteriores.

5. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 & -3 \\ 0 & -5 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. Indique la opción correcta:

(a) A es semejante a la matriz $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

(b) $(1,1,1,1)$ es un autovector de A.

(c) 1 es un autovalor de A y el subespacio propio asociado es de dimensión 1.

(d) Ninguna de las anteriores.

NOTAS: (A) Si por error alguna pregunta tuviera dos opciones correctas, se deberá responder con la primera que sea correcta en el orden alfabético. Por ejemplo, si en una pregunta fueran ciertas (b) y (c), en la aplicación se deberá responder (b), y sólo se considerará como válida esta respuesta.

(B) Se puede usar Maxima, y se recomienda usarlo especialmente en los ejercicios que tienen mucho cálculo.

SOLUCIONES. Prueba de evaluación continua núm. 1 (**PEC-1**). Noviembre-2013.

RESUMEN: Las soluciones del test son: 1 (a), 2 (d), 3 (c), 4 (c) y 5 (a).

A continuación se hace la resolución detallada.

1. La matriz de coeficientes y la ampliada, respectivamente, son:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -a & 3 \\ a & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ a & 4 & -1 \end{pmatrix}, \quad A^* = \begin{pmatrix} 3 & -a & 3 & 4 \\ a & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ a & 4 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Como A tiene 3 columnas, $\operatorname{rang}(A) < 4$. Hallemos el rango de A^* con determinantes.

$$\begin{vmatrix} 3 & -a & 3 & 4 \\ a & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ a & 4 & -1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -a+3 & 3 & 1 \\ a+1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ a+1 & 3 & -1 & 6 \end{vmatrix} = (a+1) \begin{vmatrix} 0 & -a+3 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 3(a+1)(a-2)$$

En el primer igual se han usado las transformaciones: $C_1 - C_3$, $C_2 + C_3$, $C_4 - C_3$, después hemos desarrollado por la tercera fila y luego hemos sacado factor a $(a+1)$.

El determinante de A^* es 0 precisamente si $a = 2$ o $a = -1$. Por tanto, si $a \neq 2$ y $a \neq -1$, $\operatorname{rang}(A^*) = 4$, y en consecuencia, el sistema es incompatible.

Estudiemos los casos $a = 2$ y $a = -1$.

<u>Caso $a = 2$.</u> Se sustituye a por 2 en A y en A^*, y resulta (sólo escribimos A^*, pues es suficiente):

$$A^* = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

Llevando esta matriz a la forma escalonada, se obtiene que $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(A^*) = 3$. Por tanto, el sistema es compatible determinado.

<u>Caso $a = -1$.</u> Se sustituye a por -1 en A y en A^*, y resulta (sólo escribimos A^*):

$$A^* = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

Llevando esta matriz a la forma escalonada, se obtiene que $\operatorname{rang}(A) = 2$ y $\operatorname{rang}(A^*) = 3$. Por tanto, el sistema es incompatible.

En resumen: si $a = 2$ el sistema es compatible determinado, en el resto de casos es incompatible. Por tanto, sólo es cierta (a).

2. Sean $\bar{a} = (2, -1, 1)$, $\bar{b} = (4, -3, -1)$ y $\bar{c} = (-2, 3, 5)$ los vectores generadores de U. Es obvio que $\bar{a}$ y $\bar{b}$ son lin. independientes. Para estudiar si son lin. independientes los tres, planteamos la ecuación

$$\alpha\bar{a} + \beta\bar{b} + \gamma\bar{c} = \bar{0}.$$

Se resuelve el sistema resultante y tiene infinitas soluciones: $\alpha = -3\gamma$, $\beta = 2\gamma$, γ libre. Por lo tanto, $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ son lin. dependientes. Como $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ son generadores de U y $\bar{c}$ es combinación lineal de $\bar{a}$ y $\bar{b}$ ($\bar{c} = 3\bar{a} - 2\bar{b}$), por el teorema 1.1 se deduce que $\bar{a}$, $\bar{b}$ son generadores de U, y en consecuencia son base de U. Luego la dimensión de U es 2 y (b) es falsa.

La ecuación cartesiana de U es claro que no es la del apartado (a) porque los vectores $\bar{b}$ y $\bar{c}$ no la verifican. La ecuación cartesiana de U es

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & -3 & -1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix} = 0 \;\Leftrightarrow\; 4x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 0 \;\Leftrightarrow\; 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0.$$

Con esto es fácil comprobar que el vector $(1, 2, -3)$ del apartado (c) no es un elemento de U, por lo tanto, (c) es falsa. La única verdadera es (d).

3. Veamos que S es un subespacio vectorial. Usaremos la caracterización de la pág. 24 del libro de texto en su forma reducida: ($\bar{u} + \alpha\bar{v} \in U$ para todo $\bar{u}, \bar{v} \in U$, $\alpha \in \mathbb{R}$). Sean las matrices de S, $A_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & c_1 \end{pmatrix}$ y $A_2 = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ -b_2 & c_2 \end{pmatrix}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces $A_1 + \alpha A_2 = \begin{pmatrix} a_1 + \alpha a_2 & b_1 + \alpha b_2 \\ -b_1 - \alpha b_2 & c_1 + \alpha c_2 \end{pmatrix}$ que es claramente una matriz de S, y por consiguiente, S es un subespacio. Luego (a) es falsa.

Es claro que una matriz genérica A de S se puede escribir de la forma:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & c \end{pmatrix} = aU_1 + bU_2 + cU_3,$$

siendo

$$U_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad U_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad U_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

También es claro que las matrices U_1, U_2, U_3 son lin. indep., por tanto, como son generadores son una base de S, y este subespacio es de dimensión 3. Así pues, (b) es falsa.

Para probar que A_1, A_2, A_3 es base, nótese que $A_1 = U_1$, $A_2 = U_2$ y $A_3 = U_1 + U_2 + U_3$. Entonces por el teorema 1.2 se puede sustituir en la base $\{U_1, U_2, U_3\}$ U_3 por A_3 y se obtiene un sistema de generadores $\{U_1, U_2, A_3\} = \{A_1, A_2, A_3\}$. Como la dimensión de S es 3 se concluye que $\{A_1, A_2, A_3\}$ es base. Luego, (c) es cierta.

También se podría haber probado que $A_1, A_2, A_3 \in S$ y que son lin. indep., con lo cual sería base de S.

4. Por ser f lineal, se tiene:

$$f(2\bar{a} + \bar{b} - \bar{c}) = 2f(\bar{a}) + f(\bar{b}) - f(\bar{c}) = 2(3, -1, 0) + (-1, 1, 1) - (-2, -1, -1) = (7, 0, 2).$$

Por tanto, (a) es falsa.

Veamos (b) y (c). Se tiene que $B' = \{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$ porque el rango de la matriz cuyas filas son dichos vectores es 3. Para (c), hallemos las coordenadas de $\bar{w} = (3, -1, -2)$ en la base B'. Resolviendo el sistema

$$x_1(1, 1, 2) + x_2(2, 0, -1) + x_3(-6, -1, 0) = (3, -1, -2),$$

resulta $x_1 = -5$, $x_2 = -8$, $x_3 = -4$. Luego,

$$\begin{aligned} f(\bar{w}) &= f(-5\bar{a} - 8\bar{b} - 4\bar{c}) = -5f(\bar{a}) - 8f(\bar{b}) - 4f(\bar{c}) \\ &= -5(3,-1,0) - 8(-1,1,1) - 4(-2,-1,-1) = (1,1,-4). \end{aligned}$$

Por consiguiente (c) es cierta.

Para asegurarnos que (b) es falsa, basta con observar que al sustituir en las ecuaciones el vector $\bar{a}$, es decir $(x_1, x_2, x_3) = (1,1,2)$, no se obtiene el vector $f(\bar{a}) = (3,-1,0)$. No obstante, para que el ejercicio esté más completo, vamos a encontrar la matriz de f en la base canónica $B = \{\bar{e}_1 = (1,0,0), \bar{e}_2 = (0,1,0), \bar{e}_3 = (0,0,1)\}$. Se tiene que la matriz de f en las bases B' (inicial) y B final es:

$$A' = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

La matriz del cambio de coordenadas respecto de B' a coordenadas respecto de B es

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -6 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por tanto, si la matriz de f en la base B (inicial y final B) es A, se sabe que $A' = AP$ (pág. 86 del libro de texto) y en consecuencia

$$A = A'.P^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 6 & -2 \\ -2 & 12 & -5 \\ -1 & 5 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 7 & -3 \end{pmatrix}.$$

Por consiguiente, las ecuaciones de f en la base canónica se obtienen haciendo $y = Ax$, esto es:

$$y_1 = x_1 - 4x_2 + 3x_3,\ y_2 = x_2 - x_3,\ y_3 = -x_1 + 7x_2 - 3x_3.$$

Se deja que el lector compruebe con estas ecuaciones que, por ejemplo, $f(3,-1,-2) = (1,1,-4)$, que es el apartado (c).

5. Verificar la opción (a) intentando encontrar una matriz P invertible 4×4 que cumpla $B = P^{-1}AP$, o equivalentemente $PB = AP$, es bastante laborioso, pues deberíamos emplear 16 incógnitas. Empecemos con (b). Sea $\bar{u} = (1,1,1,1)$, entonces $A\bar{u}^T = (-2,1,-2,1)^T \neq k\bar{u}^T$, y por tanto, $\bar{u}$ no es un autovector de A. Para que (c) sea cierta, el subespacio solución de la ecuación $(A - I)X = \bar{0}$, con $X = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$, debería ser de dimensión 1. Resolviendo el sistema

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 & -3 \\ 0 & -6 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{r} 3x_2 - 3x_3 - 3x_4 = 0 \\ -6x_2 + 6x_4 = 0 \\ -3x_3 = 0 \\ -3x_2 + 3x_4 = 0 \end{array} \right.$$

resulta la solución $x_3 = 0$, $x_4 = x_2$, x_1 y x_2 libres. Esto nos permite expresar la solución en la forma:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1, x_2, 0, x_2) = x_1(1,0,0,0) + x_2(0,1,0,1).$$

Por tanto, $\bar{a} = (1, 0, 0, 0)$ y $\bar{b} = (0, 1, 0, 1)$ son base del subespacio propio asociado a 1. Luego es de dimensión 2 y (c) es falso.

Si A es semejante a la matriz diagonal B, debería ser diagonalizable con autovalores 1 y -2. Hallemos el subespacio propio asociado a -2 resolviendo el sistema $(A + 2I)X = 0$:

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & -3 & -3 \\ 0 & -3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{c} 3x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 3x_4 = 0 \\ -3x_2 + 6x_4 = 0 \\ 0 = 0 \\ -3x_2 + 6x_4 = 0 \end{array} \right.$$

Su solución es $x_1 = x_3 - x_4$, $x_2 = 2x_4$, x_3 y x_4 libres y se puede expresar en la forma:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_3 - x_4, 2x_4, x_3, x_4) = x_3(1, 0, 1, 0) + x_4(-1, 2, 0, 1).$$

Por tanto, $\bar{c} = (1, 0, 1, 0)$ y $\bar{d} = (-1, 2, 0, 1)$ son base del subespacio propio asociado a -2. Luego es de dimensión 2. Como los subespacios propios asociados a valores propios distintos están en posición de suma directa y ambos son de dimensión 2, su suma es la dimensión del espacio, y por tanto A diagonaliza, y en consecuencia, A es semejante a B. La opción (a) es cierta. Una matriz de paso es la matriz de columnas $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d}$.