FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS DE LAS TI. Cód. 71021023
Grado en Ingeniería de las Tecnologías de la Información
Prueba de evaluación continua núm. 1 (**PEC-1**), Álgebra. 16 al 18 de Noviembre, 2012.

INSTRUCCIONES.
• Antes de enviar sus respuestas lea detenidamente el documento "NORMAS PARA LA REALIZACIÓN DE LAS PECs FMTI.pdf", que está en la carpeta PEC dentro de Documentos.
• Antes de acceder al envío de soluciones escriba en papel sus respuestas.
• Cuando acceda al envío de respuestas de la PEC-1 tenga en cuenta que dispone de 15 minutos y sólo tiene 1 intento para Enviar sus respuestas.
• Si la respuesta es correcta suma 1 punto, si es incorrecta resta 0,33 puntos y si está en blanco ni suma ni resta. Para más detalles consúltese la sección 3 de la *Guía de estudio de la asignatura, parte 2.*

1. Sean U_1 y U_2 los subespacios de $\mathbb{R}^4$ definidos por

$$U_1 = \langle (1,-2,2,1),\ (1,0,6,2),\ (1,-6,-6,-1) \rangle \quad \text{y}$$

$U_2 = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 :\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0,\ x_2 - 2x_3 + x_4 = 0,\ 4x_1 + x_2 - x_4 = 0\}$.
Indique la opción correcta:
(a) $\dim U_1 = 3$ y $\dim U_2 = 1$.
(b) $U_1 + U_2 = \mathbb{R}^4$.
(c) $U_1 \cap U_2 = \langle (-1,4,2,0) \rangle$.
(d) Ninguna de las anteriores.

2. Se consideran en $\mathbb{R}^3$ la base canónica $\{\bar{e}_1,\ \bar{e}_2,\ \bar{e}_3\}$, la base $B = \{\bar{u}_1 = (1,1,1),\ \bar{u}_2 = (1,1,0),\ \bar{u}_3 = (1,0,0)\}$ y los vectores $\bar{v} = (4,-3,2)$ y $\bar{w} = 3\bar{u}_1 - \bar{u}_2 - 2\bar{u}_3$. Indique la opción correcta:
(a) Las coordenadas de $\bar{e}_1$ en la base B son $(1,0,0)$.
(b) Las coordenadas de $\bar{v}$ en la base B son $(2,-5,7)$.
(c) Las coordenadas de $\bar{w}$ en la base canónica son $(0,1,2)$.
(d) Ninguna de las anteriores.

3. Sean $\mathcal{P}_2$ y $\mathcal{P}_3$ los espacios vectoriales de los polinomios de grado menor o igual que 2 y de grado menor o igual que 3, respectivamente. Se define la aplicación $f : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_3$ por la expresión

$$f(p(x)) = p(x)(-2x+3) + p'(x),$$

donde $p'(x)$ designa la derivada de $p(x)$. Indique la opción correcta:
(a) f no es lineal.
(b) $f(3+4x-x^2) = 13 + 8x - 11x^2 + 2x^3$.
(c) f es lineal y la matriz asociada respecto de las bases canónicas es $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.
(d) Ninguna de las anteriores.

4. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y los vectores de $\mathbb{R}^4$ $\bar{u} = (0,1,1,1)$ y $\bar{v} = (1,1,1,-3)$.
Indique la opción correcta:

(a) $\bar{u}$ y $\bar{v}$ son vectores propios de A.
(b) El polinomio característico de A es $\lambda^4 + 6\lambda^2 + 4\lambda - 3$.
(c) Una diagonalización de A es $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.
(d) Ninguna de las anteriores.

5. Se desea obtener con Maxima la matriz asociada a f respecto de las bases canónicas, siendo $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la aplicación lineal dada por $f(x, y) = (2x - y, x + 3y)$. Para ello se dan las siguientes instrucciones:

`f(x,y):=[2*x-y,x+3*y];`	(1)
`v1:f(1,0);`	(2)
`v2:f(0,1);`	(3)
`A:matrix(v1,v2);`	(4)

Indique la opción correcta:
(a) A es la matriz de f.
(b) Las líneas (2) y (3) dan error al evaluarlas con Maxima.
(c) La línea (1) da error al evaluarla con Maxima.
(d) Ninguna de las anteriores.

NOTAS: (A) Si por error alguna pregunta tuviera dos opciones correctas, se deberá responder con la primera que sea correcta en el orden alfabético. Por ejemplo, si en una pregunta fueran ciertas (b) y (c), en la aplicación se deberá responder (b), y sólo se considerará como válida esta respuesta.
(B) Se puede usar Maxima, y se recomienda usarlo especialmente en los ejercicios que tienen mucho cálculo.

SOLUCIONES. Prueba de evaluación continua núm. 1 (**PEC-1**). Noviembre-2012.

RESUMEN: Las soluciones del test son: 1 (c), 2 (b), 3 (c), 4 (d) y 5 (d).

A continuación se hace la resolución detallada. En el fichero "PEC1-algebra-curso 2012-2013 SolucionesconMaxima.wxm" (dentro de la carpeta PEC) encontrará la resolución con Maxima.

1. Empezando por el subespacio U_2, llevamos las ecuaciones que lo definen a la forma escalonada:

$$\left\{\begin{array}{r} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ 4x_1 + x_2 \qquad\quad - x_4 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{r} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_2 - 6x_3 + 3x_4 = 0 \end{array}\right.$$

Como la tercera ecuación es igual a la segunda multiplicada por 3, se puede suprimir, y queda

$$\left\{\begin{array}{r} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_2 - 2x_3 + x_4 = 0. \end{array}\right. \tag{1}$$

Despejando x_2 y x_4 en función de x_1 y x_3 se obtiene $x_2 = -2x_1 + x_3$, $x_4 = 2x_1 + x_3$. Por consiguiente, los elementos de U_2 se expresan así:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1, -2x_1 + x_3, x_3, 2x_1 + x_3) = x_1(1, -2, 0, 2) + x_3(0, 1, 1, 1).$$

Es pues claro que los vectores $\bar{a} = (1, -2, 0, 2)$ y $\bar{b} = (0, 1, 1, 1)$ forman una base de U_2 (ya que son generadores y linealmente independientes), y por tanto, $\dim U_2 = 2$. Así pues, (a) es falsa.

Por otro lado, los vectores

$$\bar{c} = (1, -2, 2, 1),\ \bar{d} = (1, 0, 6, 2) \text{ y } \bar{e} = (1, -6, -6, -1)$$

son generadores de U_1, y su rango es 2 como puede verse fácilmente llevando la matriz con sus coordenadas a la forma escalonada. También puede observarse que $\bar{e} = 3\bar{c} - 2\bar{d}$. Una base de U_1 está formada por $\bar{c}$ y $\bar{d}$. Por tanto, la dimensión de U_1 es 2.

Para decidir sobre (b), se sabe que los vectores $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ y $\bar{d}$ forman un sistema de generadores de $U_1 + U_2$. Hallando el rango de la matriz con sus coordenadas, se obtiene que es 3 y en consecuencia, $U_1 + U_2$ no puede ser $\mathbb{R}^4$. Por consiguiente, (b) es falsa. Además, por la fórmula de Grassman:

$$3 = \dim(U_1 + U_2) = \dim U_1 + \dim U_2 - \dim(U_1 \cap U_2) = 4 - \dim(U_1 \cap U_2),$$

se deduce que $\dim(U_1 \cap U_2) = 1$.

Para hallar un vector generador del subespacio $U_1 \cap U_2$ hemos de encontrar un vector que esté en los dos subespacios. Usamos las ecuaciones paramétricas de U_1 tomando como base $\bar{c}$ y $\bar{d}$:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = \alpha(1, -2, 2, 1) + \beta(1, 0, 6, 2) = (\alpha + \beta, -2\alpha, 2\alpha + 6\beta, \alpha + 2\beta).$$

Se sustituyen x_1, x_2, x_3, x_4 en las ecuaciones implícitas de U_2 (sistema (**??**)), resultando

$$\left\{\begin{array}{r} 2(\alpha + \beta) - (-2\alpha) + 3(2\alpha + 6\beta) - 2(\alpha + 2\beta) = 0 \\ (-2\alpha) - 2(2\alpha + 6\beta) + (\alpha + 2\beta) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{r} 8\alpha + 16\beta = 0 \\ -5\alpha - 10\beta = 0, \end{array}\right.$$

que se simplifica en la ecuación única $\alpha = -2\beta$, β libre. Tomando, por ejemplo, $\beta = 1$, resulta $\alpha = -2$ y un generador es $-2\bar{c} + \bar{d} = (-1, 4, 2, 0)$. Por tanto, la única opción cierta es (c).

2. (a) es falso, ya que el vector de coordenadas $(1,0,0)$ en la base B es $\bar{u}_1 = (1,1,1) = \bar{e}_1 + \bar{e}_2 + \bar{e}_3$ que es distinto de $\bar{e}_1$.

Para hallar las coordenadas de $\bar{v} = (4,-3,2)$ en la base B basta resolver la ecuación

$$(4,-3,2) = \alpha(1,1,1) + \beta(1,1,0) + \gamma(1,0,0),$$

cuya solución única es $\alpha = 2$, $\beta = -5$, $\gamma = 7$. Por tanto, (b) es cierta.

Las coordenadas de $\bar{w}$ se obtienen operando:

$$\bar{w} = 3\bar{u}_1 - \bar{u}_2 - 2\bar{u}_3 = 3(1,1,1) - (1,1,0) - 2(1,0,0) = (0,2,3).$$

Luego, las coordenadas de $\bar{w}$ en la base canónica son $(0,2,3)$ y por consiguiente, (c) es falsa.

3. Empezamos con (b). Por definición,

$$f(3+4x-x^2) = (3+4x-x^2)(-2x+3) + (3+4x-x^2)'.$$

Haciendo el producto y la derivada resulta:

$$f(3+4x-x^2) = (9+6x-11x^2+2x^3) + (4-2x) = 13+4x-11x^2+2x^3.$$

Por tanto, (b) es falsa. Veamos (a) y (c).

La linealidad de f, en este caso, se puede comprobar observando que $f = g + h$, siendo g y h las aplicaciones lineales dadas por $g(p(x)) = p(x)a(x)$, con $a(x) = -2x+3$, y $h(p(x)) = p'(x)$. Que h es lineal lo sabemos porque la derivada es lineal y que g es lineal se comprueba como sigue (es válido para cualquier polinomio $a(x)$):

$$\begin{aligned} g(p(x) + \lambda q(x)) &= (p(x) + \lambda q(x))a(x) = p(x)a(x) + \lambda q(x)a(x) \\ &= g(p(x)) + \lambda g(q(x)). \end{aligned}$$

Se necesita que $a(x)$ sea de grado 1 sólo para que g valore en $\mathcal{P}_3$.

Para hallar la matriz asociada a f hallamos las imágenes de los elementos de la base canónica $\{1,\ x,\ x^2\}$, resultando:

$$\begin{aligned} &f(1) = 1\cdot(3-2x) + 1' = 3-2x, \\ &f(x) = x\cdot(3-2x) + x' = 3x-2x^2+1 = 1+3x-2x^2, \\ &f(x^2) = x^2\cdot(3-2x) + (x^2)' = 3x^2-2x^3+2x = 2x+3x^2-2x^3. \end{aligned}$$

En consecuencia, la matriz asociada a f en las bases canónicas es la del apartado (c). Así pues, la única que es cierta es (c).

4. Para contestar a (a), basta hallar los productos $A[\bar{u}]$ y $A[\bar{v}]$, donde $[\bar{u}]$ y $[\bar{v}]$ son, respectivamente, las matrices columna cuyas coordenadas son las de los vectores $\bar{u}$ y $\bar{v}$. Haciendo las operaciones se obtiene:

$$A[\bar{u}] = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad A[\bar{v}] = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = (-1)\cdot[\bar{v}].$$

Por consiguiente, $\bar{u}$ no es vector propio y $\bar{v}$ sí es vector propio de valor propio -1 y por lo tanto, (a) es falsa.

El polinomio característico es

$$
\begin{aligned}
|A-\lambda I| &= \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 3-\lambda & -\lambda & 1 & 1 \\ 3-\lambda & 1 & -\lambda & 1 \\ 3-\lambda & 2 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} \\
&= (3-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -\lambda-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda-1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -\lambda-1 \end{vmatrix} \\
&= (\lambda-3)(\lambda+1)^3 = \lambda^4 - 6\lambda^2 - 8\lambda - 3
\end{aligned}
$$

(la segunda igualdad resulta de sumar a la primera columna las otras 3 y la cuarta, de restarle la primera fila a las otras 3). Por tanto, (b) es falsa.

De acuerdo con la expresión anterior del polinomio característico factorizado, los valores propios son $\lambda_1 = 3$ y $\lambda_2 = -1$ con multiplicidades algebraicas 1 y 3, respectivamente. Para saber si diagonaliza, hallamos el subespacio propio asociado al valor propio $\lambda_2 = -1$. Para ello, resolvemos el sistema $(A+I)X = 0$, esto es:

$$
\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} x+y+z+t=0 \\ x+y+z+t=0 \\ x+y+z+t=0 \\ x+2y \quad +t=0 \end{array} \right.
$$

$$
\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{cl} x+y+z+t & = 0 \\ y-z & = 0 \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} z = y \\ t = -x-2y, \end{array} \right.
$$

Por consiguiente, el conjunto de soluciones viene dado por:

$$
\begin{aligned}
(x,y,z,t) &= (x,y,y,-x-2y) = x(1,0,0,-1) + y(0,1,1,-2) \\
&= \alpha(1,0,0,-1) + \beta(0,1,1,-2),
\end{aligned}
$$

que nos indica que una base del espacio propio son los vectores $(1,0,0,-1)$ y $(0,1,1,-2)$, ya que son generadores y linealmente independientes. Por tanto, el subespacio propio es de dimensión 2, y en consecuencia, como la multiplicidad algebraica es 3, A no diagonaliza. (c) es falsa y la única verdadera es (d).

5. Todas las instrucciones del enunciado son correctas, en el sentido de que no producen error en Maxima. Sin embargo, la matriz A que se obtiene no es la matriz asociada, sino su traspuesta. Para obtener la matriz asociada la última instrucción debería ser

```
A:transpose(matrix(v1,v2));
```

Por tanto, la única opción correcta es (d).