FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS DE LAS TTII. Cód. 71021023
Grado en Ingeniería de las Tecnologías de la Información
Reserva especial. Curso 2015-2016. Tiempo: 2 horas

INSTRUCCIONES. Cada una de las preguntas tiene un valor máximo de 2 puntos. Sólo está permitido una calculadora no programable. No entregue esta hoja con los enunciados.

1. Sea $M_{2\times 2}$ el espacio vectorial de las matrices 2×2. Se considera el subconjunto

$$S = \{X \in M_{2\times 2} : \; XN = \bar{0}\},$$

siendo $N = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ y $\bar{0}$ la matriz nula 2×2.

(a) Compruebe que la matriz $C = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$ es un elemento de S. *(0.5 puntos)*

(b) Pruebe que S es un subespacio vectorial. *(0.75 puntos)*

(c) Encuentre una base de S e indique su dimensión. *(0.75 puntos)*

2. La matriz de la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ en la base canónica es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & k & 1 \end{pmatrix}$$

donde k es un número real.

(a) Para $k = 0$, determine los vectores $\bar{x} \in \mathbb{R}^3$ tales que $f(\bar{x}) = \bar{x}$. *(1 punto)*

(b) Halle k si $f(3, 1, -1)$ está en el subespacio U de ecuaciones $x + z = 0$, $-y + z = 0$. *(1 punto)*

3. (a) Enuncie el teorema de Bolzano. *(0.5 puntos)*

(b) Pruebe que la ecuación $\operatorname{sen} x = 1 - 2x$ tiene una única raíz real. *(0.75 puntos)*

(c) Calcule el límite

$$\lim_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{1 - e^x} + \frac{1}{x} \right).$$

(0.75 puntos)

4. (a) Se considera la siguiente función

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y - x y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Pasando a polares, halle el límite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ y deduzca si f es continua en $(0, 0)$. *(1 punto)*

(b) Considere la función

$$f(x, y) = (y - 1)(x - y)^2.$$

Compruebe que el punto $(1, 1)$ verifica las condiciones necesarias de extremo pero no es ni máximo ni mínimo. *(1 punto)*

5. Sea D el recinto del plano definido por

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 \leq x \leq 1,\ 2\sqrt{x} \leq y \leq 2\}.$$

(a) Exprese la integral doble $I = \int\int_D f(x, y)dxdy$ mediante integrales reiteradas de dos formas distintas. *(0.5 puntos)*

(b) Determine la integral anterior si $f(x, y) = e^y$. *(1.5 puntos)*

SOLUCIONES. FMTI. Reserva especial del curso 2015-16.

1. (a) Hay que comprobar que el producto CN es la matriz nula. En efecto:

$$CN = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -6 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \cdot 1 - 2 \cdot 2 & 4 \cdot (-1) - 2 \cdot (-2) \\ -6 \cdot 1 + 3 \cdot 2 & -6 \cdot (-1) + 3 \cdot (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Se usa el punto teórico 2.4 del libro de ejercicios resueltos.

(b_1) Si $A, B \in S$, entonces $AN = \bar{0}$ y $BN = \bar{0}$. Sumando miembro a miembro, $AN+BN = \bar{0}$; y sacando factor a N, se tiene $(A + B)N = \bar{0}$, lo que nos dice que $A + B \in S$.

(b_2) Si $A \in S$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces $AN = \bar{0}$. Multiplicando a ambos miembros por α se tiene $\alpha(AN) = \alpha\bar{0}$. Metiendo el escalar dentro del primer factor del producto de matrices: $(\alpha A)N = \bar{0}$, lo que nos dice que $\alpha A \in S$.

En consecuencia, S es un subespacio.

(c) Sea $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ una matriz cualquiera de S. Entonces $XN = \bar{0}$, esto es

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y & -x - 2y \\ z + 2t & -z - 2t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} x + 2y &= 0 \\ -x - 2y &= 0 \\ z + 2t &= 0 \\ -z - 2t &= 0 \end{aligned} \right.$$

$$\to \left\{ \begin{aligned} x &= -2y \\ z &= -2t \end{aligned} \right. \quad \left\{ \begin{aligned} x &= -2\alpha \\ y &= \alpha \\ z &= \quad -2\beta \\ t &= \quad \beta \end{aligned} \right.$$

En consecuencia, S es el conjunto de todas las matrices de la forma

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\alpha & \alpha \\ -2\beta & \beta \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix},$$

y por consiguiente, una base de S son las matrices $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ y su dimensión es 2.

2. Véase el ejercicio resuelto 3.10 del libro de ejercicios.

3. (a) Véase la cuestión teórica 4.39 del libro de ejercicios.

(b) La ecuación dada es equivalente a la ecuación

$$\operatorname{sen} x + 2x - 1 = 0.$$

Sea la función $f(x) = \operatorname{sen} x + 2x - 1$ y consideremos el intervalo $[0, \pi]$. Es claro que f es continua en $[0, \pi]$ (de hecho lo es en $\mathbb{R}$). En los extremos del intervalo, f toma los valores $f(0) = -1 < 0$ y $f(\pi) = \operatorname{sen} \pi + 2\pi - 1 = 2\pi - 1 > 0$. Como cambia de signo, por el teorema de Bolzano existe un $c \in (0, \pi)$ tal que $f(c) = 0$. Este c es una solución de la ecuación.

Para probar que es única, estudiemos el crecimiento de f. La derivada es $f'(x) = \cos x + 2$. Como $-1 \leq \cos x \leq 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$, se sigue que $f'(x) > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$. Luego f es estrictamente creciente en $\mathbb{R}$ y, por consiguiente, no puede haber dos raíces distintas de la ecuación $f(x) = 0$.

(b) El límite es una indeterminación de la forma $-\infty + (+\infty)$ si $x \to 0^+$, y de la forma $+\infty + (-\infty)$ si $x \to 0^-$. Operando y aplicando la regla de L'Hôpital (obsérvese que se cumplen las hipótesis para poder aplicarla), resulta

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{1-e^x}+\frac{1}{x}\right) &= \lim_{x\to 0}\frac{x+1-e^x}{x(1-e^x)} = \lim_{x\to 0}\frac{1-e^x}{1-e^x+x(-e^x)} = \lim_{x\to 0}\frac{1-e^x}{1-(1+x)e^x} \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{-e^x}{-e^x-(1+x)e^x} = \frac{-1}{-1-1} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

(en la antepenúltima igualdad se ha aplicado por segunda vez la regla de L'Hôpital).

4. (a) Haciendo el cambio a coordenadas polares, $x = r\cos\alpha$, $y = r\operatorname{sen}\alpha$, se tiene:

$$\begin{aligned} h(r,\alpha) = f(r\cos\alpha, r\operatorname{sen}\alpha) &= \frac{(r^2\cos^2\alpha)(r\operatorname{sen}\alpha)-(r\cos\alpha)(r^2\operatorname{sen}^2\alpha)}{r^2} \\ &= r\cos\alpha\operatorname{sen}\alpha(\cos\alpha-\operatorname{sen}\alpha). \end{aligned}$$

Esta función, en valor absoluto, está acotada uniformemente en $\alpha \in [0, 2\pi]$ por $2r$ ya que

$$|r\cos\alpha\operatorname{sen}\alpha(\cos\alpha-\operatorname{sen}\alpha)| \le r\cdot 1\cdot 1\cdot 2 = 2r.$$

Y como $\lim_{r\to 0^+} 2r = 0$, se deduce que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$. A su vez, como $f(0,0) = 0$, se sigue que f es continua en $(0,0)$.

(b) El punto $(1,1)$ ha de verificar las ecuaciones $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$. Las derivadas parciales de f son:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = (y-1)\cdot 2(x-y), \\ &\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 1\cdot(x-y)^2+(y-1)\cdot 2(x-y)\cdot(-1) = (x-y)^2-2(y-1)(x-y). \end{aligned}$$

Es claro que evaluadas en $(1,1)$ ambas toman el valor 0, por lo que se verifican las condiciones necesarias de extremo.

Veamos que $(1,1)$ no es un extremo. $f(1,1) = 0$, $f(x,y) = (y-1)(x-y)^2$, como $(x-y)^2 > 0$ para todo $x \neq y$, $y-1 > 0$ si $y > 1$ y $y-1 < 0$ si $y < 1$, se sigue que

$$f(x,y) > 0 \text{ si } y > 1 \quad \text{y} \quad f(x,y) < 0 \text{ si } y < 1$$

siempre que $x \neq y$. Por consiguiente, como en todo entorno de $(1,1)$ hay puntos (x,y) con $y > 1$ y otros con $y < 1$ (siempre con $x \neq y$), para los primeros sería $f(x,y) > f(1,1)$ y para los segundos $f(x,y) < f(1,1)$, por lo que $(1,1)$ no es ni máximo ni mínimo.

5. (a) El recinto D se ha representado en la figura 1.

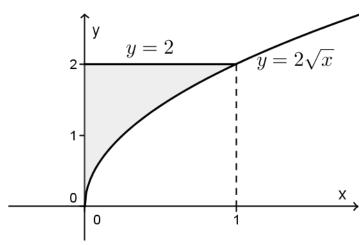

Fig. 1. Recinto de integración D.

En la forma en que está definido D, es claro que una de las integrales reiteradas es

$$I = \int_0^1 \int_{2\sqrt{x}}^2 f(x,y)dydx. \quad (1)$$

Para expresar la otra integral reiterada (en el orden inverso de integración), se despeja x de la ecuación $y = 2\sqrt{x}$ y resulta $x = y^2/4$. Teniendo esto en cuenta y el dibujo del recinto D, se tiene

$$I = \int_0^2 \int_0^{y^2/4} f(x,y)dxdy.$$

(b) Usaremos la expresión (1) para calcular I siendo $f(x,y) = e^y$ (la otra expresión tiene una dificultad similar y habría que aplicar dos veces el método de integración por partes):

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \int_{2\sqrt{x}}^2 e^y dydx = \int_0^1 [e^y]_{2\sqrt{x}}^2 \, dx = \int_0^1 \left(e^2 - e^{2\sqrt{x}}\right) dx = e^2 \int_0^1 dx - \int_0^1 e^{2\sqrt{x}}dx \\ &= e^2 - I_2, \end{aligned}$$

donde $I_2 = \int_0^1 e^{2\sqrt{x}}dx$. Para hallar una primitiva, hacemos el cambio $\sqrt{x} = t$, con lo cual $x = t^2$ y $dx = 2tdt$, y resulta:

$$F(x) = \int e^{2\sqrt{x}}dx = \int e^{2t}2tdt.$$

Se aplica el método de integración por partes con $du = 2e^{2t}dt$ y $v = t$, con lo que $u = e^{2t}$, $dv = dt$ y resulta:

$$F(x) = te^{2t} - \int e^{2t}dt = te^{2t} - \tfrac{1}{2}e^{2t} = \tfrac{(2t-1)e^{2t}}{2} = \tfrac{(2\sqrt{x}-1)e^{2\sqrt{x}}}{2}.$$

En consecuencia, $I_2 = [F(x)]_0^1 = F(1) - F(0) = \frac{e^2+1}{2}$. Y por último,

$$I = e^2 - I_2 = e^2 - \frac{e^2+1}{2} = \frac{e^2-1}{2}.$$