FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS DE LAS TTII. Cód. 71021023
Grado en Ingeniería de las Tecnologías de la Información
Septiembre de 2014. Tiempo: 2 horas

INSTRUCCIONES. Cada una de las preguntas tiene un valor máximo de 2 puntos. No está permitido ningún tipo de material.

1. Sean $B_1 = \{\overline{u}_1, \overline{u}_2, \overline{u}_3\}$ y $B_2 = \{\overline{w}_1, \overline{w}_2, \overline{w}_3\}$ dos bases de $\mathbb{R}^3$ tales que $\overline{u}_1 = \overline{w}_1 - \overline{w}_2$, $\overline{u}_2 = 2\overline{w}_2 - \overline{w}_3$ y $\overline{u}_3 = \overline{w}_3 - \overline{w}_1$.

(a) Determine la matriz de cambio de coordenadas de la base B_1 a la base B_2 y la matriz de cambio de coordenadas de la base B_2 a la base B_1. *(1.5 puntos)*

(b) Calcule las coordenadas del vector $\bar{v} \in \mathbb{R}^3$ en la base B_1 sabiendo que $\bar{v}$ tiene coordenadas $(1, 2, 3)$ en la base B_2. *(0.5 puntos)*

2. Estudie si la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

es diagonalizable y, en caso afirmativo, obtenga una matriz P tal que $P^{-1}AP$ es diagonal. *(2 puntos)*

3. (a) Determine, si existe, la asíntota oblicua cuando $x \to +\infty$ de la función $f(x) = \frac{xe^x}{e^x+1}$. *(1 punto)*

(b) Obtenga el polinomio de Mac Laurin de orden 2 de la función $f(x) = x2^x$. *(1 punto)*

4. (a) Estudie la existencia del límite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 - 2xy}{y^3 + 2x^2}.$$

(1 punto)

(b) Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función dada por

$$f(x, y) = e^{-x} \operatorname{sen}(xy).$$

Calcule el plano tangente a la gráfica de f en el punto $(1, 0)$. *(1 punto)*

5. Calcule la integral

$$\int\int_D (x + y)dA,$$

donde D es el triángulo de vértices $(0, 0)$, $(1, 2)$ y $(3, 0)$. *(2 puntos)*

SOLUCIONES. FMTI. Modelo de examen. Septiembre de 2014.

1. (a) La columna i, $i = 1, 2, 3$ de la matriz de cambio de coordenadas de la base B_1 a la base B_2 viene dada por las coordenadas del vector $\bar{u}_i$, $i = 1, 2, 3$ con respecto a la base B_2. En la base B_2, el vector $\bar{u}_1$ tiene coordenadas $(1, -1, 0)$, el vector $\bar{u}_2$ es $(0, 2, -1)$ y el vector $\bar{u}_3$ se corresponde con $(-1, 0, 1)$. Por tanto, la matriz de cambio de coordenadas de la base B_1 a la base B_2 es

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matriz inversa de P, P^{-1}, es la matriz de cambio de coordenadas de la base B_2 a la base B_1. Dicha inversa se calcula por cualquiera de los métodos conocidos (Gauss o la fórmula de la inversa: $P^{-1} = \frac{1}{|P|}(\mathrm{Adj}\, P)^t$) y se obtiene

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(b) Las coordenadas de $\bar{v}$ respecto de la base B_1 vienen dadas por $P^{-1} \cdot (1, 2, 3)^t$. Se tiene que

$$P^{-1}\bar{v} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Luego, las coordenadas de $\bar{v}$ en la base B_2 son $(10, 6, 9)$. También se pueden hallar resolviendo el sistema de incógnitas $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ que resulta de igualar coeficientes tras operar en la siguiente expresión:

$$\bar{w}_1 + 2\bar{w}_2 + 3\bar{w}_3 = \alpha_1\bar{u}_1 + \alpha_2\bar{u}_2 + \alpha_3\bar{u}_3 = \alpha_1(\overline{w}_1 - \overline{w}_2) + \alpha_2(2\overline{w}_2 - \overline{w}_3) + \alpha_3(\overline{w}_3 - \overline{w}_1).$$

2. La ecuación característica de A es $|A - \lambda I| = 0$, donde I es la matriz identidad de dimensión 2. Calculando,

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(4-\lambda) + 2 = \lambda^2 - 5\lambda + 6.$$

Por tanto, la ecuación característica de A es $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$. Resolviendo esta ecuación, se obtienen los autovalores $\lambda_1 = 2$ y $\lambda_2 = 3$, ambos con multiplicidad algebraica 1: $m_1 = m_2 = 1$. Por consiguiente, por el Teorema 2.7 de la página 101 del libro de texto, se deduce que A es diagonalizable. Para hallar la matriz P hay que determinar una base del subespacio propio L_1 asociado a λ_1 y otra del subespacio propio L_2 asociado a λ_2. El subespacio L_1 se determina a través del sistema $(A - 2I)X = \bar{0}$:

$$\begin{pmatrix} 1-2 & -1 \\ 2 & 4-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{r} -x_1 - x_2 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 = 0 \end{array} \right. \Longleftrightarrow x_1 = -x_2.$$

Así pues, cada punto $(x_1, x_2) \in L_1$ se puede expresar del siguiente modo:

$$(x_1, x_2) = (-x_2, x_2) = x_2(-1, 1),$$

y una base de L_1 es $B = \{(-1,1)\}$. Para determinar el subespacio L_2 se resuelve el sistema $(A-3I)X = \bar{0}$:

$$\begin{pmatrix} 1-3 & -1 \\ 2 & 4-3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{r} -2x_1 - x_2 = 0 \\ 2x_1 + x_2 = 0 \end{array} \right. \Longleftrightarrow x_2 = -2x_1.$$

Luego cada punto $(x_1, x_2) \in L_2$ se puede expresar como:

$$(x_1, x_2) = (x_1, -2x_1) = x_1(1, -2),$$

y una base de L_2 es $B = \{(1,-2)\}$. La matriz P cuyas columnas son los vectores base de L_1 y L_2, respectivamente, es decir,

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

satisface que

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

es una matriz diagonal.

3. (a) Hay que comprobar si $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ es finito. Se tiene que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{e^x+1} = \frac{\infty}{\infty},$$

una indeterminación. Para determinar el límite anterior se puede dividir numerador y denominador entre e^x o bien aplicar la regla de L'Hôpital ya que las funciones del numerador y del denominador son derivables en $\mathbb{R}$, la derivada del denominador no se anula y resulta un cociente que tiene límite. Procedemos de la segunda forma:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{e^x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{e^x} = 1.$$

Este límite indica que si existe una asíntota oblicua, dicha asíntota tiene pendiente $m = 1$. Para garantizar la existencia de la misma hay que comprobar si el límite $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}(f(x) - m\cdot x)$ es finito. En efecto, aplicando de nuevo la regla de L'Hôpital

$$n = \lim_{x\to+\infty}(f(x) - 1\cdot x) = \lim_{x\to+\infty} -\frac{x}{e^x+1} = \lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{e^x} = 0.$$

Por consiguiente, la recta $y = mx + n = x$ es una asíntota oblicua de f por la derecha.

(b) El polinomio de Mac Laurin de orden 2 de f es

$$p_2(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2.$$

Se tiene que

$$\begin{array}{lcl} f(x) = x2^x & \Longrightarrow & f(0) = 0 \\ f'(x) = 2^x(x\ln 2 + 1) & \Longrightarrow & f'(0) = 1 \\ f''(x) = 2^x \ln 2(x\ln 2 + 2) & \Longrightarrow & f''(0) = 2\ln 2. \end{array}$$

Luego $p_2(x) = x + (\ln 2)x^2$.

4. (a) Los límites reiterados en $(0,0)$ son

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{x^2-2xy}{y^3+2x^2}\right)=\lim_{y\to 0}\frac{0}{y^3}=0,\qquad \lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{x^2-2xy}{y^3+2x^2}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{2x^2}=\frac{1}{2}.$$

Como los límites reiterados no coinciden, no existe el límite en $(0,0)$.

(b) La ecuación del plano tangente en el punto $(1,0)$ viene dada por

$$z=f(1,0)+\nabla f(1,0)\cdot(x-1,y).$$

El gradiente de f en un punto $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ es

$$\nabla f(x,y)=\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y),\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right).$$

Se tiene que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=-e^{-x}\cdot\operatorname{sen}(xy)+ye^{-x}\cdot\cos(xy),$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=xe^{-x}\cdot\cos(xy).$$

Por consiguiente,

$$\nabla f(x,y)=\left(-e^{-x}\cdot\operatorname{sen}(xy)+ye^{-x}\cdot\cos(xy),xe^{-x}\cdot\cos(xy)\right),$$

y $\nabla f(1,0)=\left(0,\frac{1}{e}\right)$. Luego la ecuación del plano tangente a la gráfica de f en el punto $(1,0)$ es

$$z=0+\left(0,\frac{1}{e}\right)\cdot(x-1,y)\Longleftrightarrow z=\frac{1}{e}y.$$

5. El dominio de integración es el representado en la Figura 1. La ecuación de la recta que pasa por los puntos $(0,0)$ y $(1,2)$ es $y=2x$ y la ecuación de la recta que pasa por $(1,2)$ y $(3,0)$ es $y=-x+3$. Observando la figura, es más cómodo interpretar el dominio de integración como una región de tipo II (véanse las páginas 301 y 302 del libro de texto). Entonces, se despeja la varible x en la ecuación de cada una de las rectas. Despejando en la primera recta se tiene $x=\frac{y}{2}$ y despejando en la segunda $x=3-y$. Así pues, en el dominio de integración D la variable y varía entre 0 y 2, y para un valor de y fijado, la variable x varía entre $y/2$ y $3-y$. Luego la integral es

$$\begin{aligned}\int\!\!\int_D(x+y)dA&=\int_0^2\int_{\frac{y}{2}}^{3-y}(x+y)dx\,dy=\int_0^2\left(\frac{x^2}{2}+yx\right)\Bigg]_{\frac{y}{2}}^{3-y}dy\\&=\int_0^2\left(\frac{(3-y)^2}{2}+y(3-y)-\frac{y^2}{8}-\frac{y^2}{2}\right)dy\\&=\int_0^2\frac{36-9y^2}{8}dy=\frac{1}{8}\int_0^2(36-9y^2)dy\\&=\frac{1}{8}\left(36y-9\frac{y^3}{3}\right)\Bigg]_0^2=\frac{1}{8}\cdot(36\cdot 2-3\cdot 2^3)=6.\end{aligned}$$

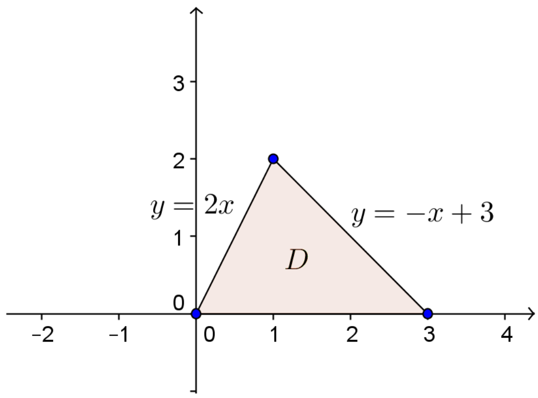

Figura 1: Dominio de integración

Naturalmente, el dominio de integración puede verse como una región tipo I (véanse las páginas 301 y 302 del libro de texto). En este caso habría que descomponer dicho dominio en dos partes: la primera definida por $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 2x$ y la segunda por $1 \leq x \leq 3$, $0 \leq y \leq -x+3$. Con lo cual la integral a calcular se descompone del siguiente modo:

$$\int\int_D (x+y)dA = \int_0^1 \int_0^{2x} (x+y)dy\,dx + \int_1^3 \int_0^{-x+3} (x+y)dy\,dx,$$

y a partir de aquí ya es fácil continuar.