FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS DE LAS TECNOLOGÍAS DE LA INFORMACIÓN

TEMA 1
Introducción al Álgebra Lineal

Equipo docente: Lidia Huerga y Vicente Novo

Matriz escalonada

- Las filas nulas, si las hay, están al final
- Cada fila no nula comienza con al menos un cero más que la anterior

Ejemplos:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & -2 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} -2 & 8 & 5 & 0 & 3 \\ 0 & 9 & 2 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

El rango de una matriz escalonada es igual al número de filas no nulas:

$$rang(A) = 3, \qquad rang(B) = 2, \qquad rang(C) = 4.$$

Transformaciones elementales sobre matrices

(1) Intercambiar de posición dos filas entre sí: $F_i \longleftrightarrow F_j$
(2) Multiplicar una fila por un número distinto de cero: $F_i \to \alpha F_i$, $\alpha \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$
(3) Sumar a una fila un múltiplo de otra: $F_i \to F_i + \alpha F_j$, $\alpha \in \mathbb{R}$

Las transformaciones elementales sobre una matriz A dan lugar a otra matriz que tiene el mismo rango que A.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -5 & -1 & 1 \end{pmatrix} \stackrel{(1)}{\to} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ -5 & -1 & 1 \end{pmatrix} \stackrel{(2)}{\to} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -5 \\ 0 & 9 & 16 \end{pmatrix}$$

$$\stackrel{(3)}{\to} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & 19/4 \end{pmatrix}$$

$(1) : F_1 \longleftrightarrow F_2, (2) : F_2 \to F_2 - 2F_1, F_3 \to F_3 + 5F_1, (3) F_3 \to F_3 + \frac{9}{4} F_2.$

Sistemas lineales

Sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas:

$$(S)\quad \left\{\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right.$$

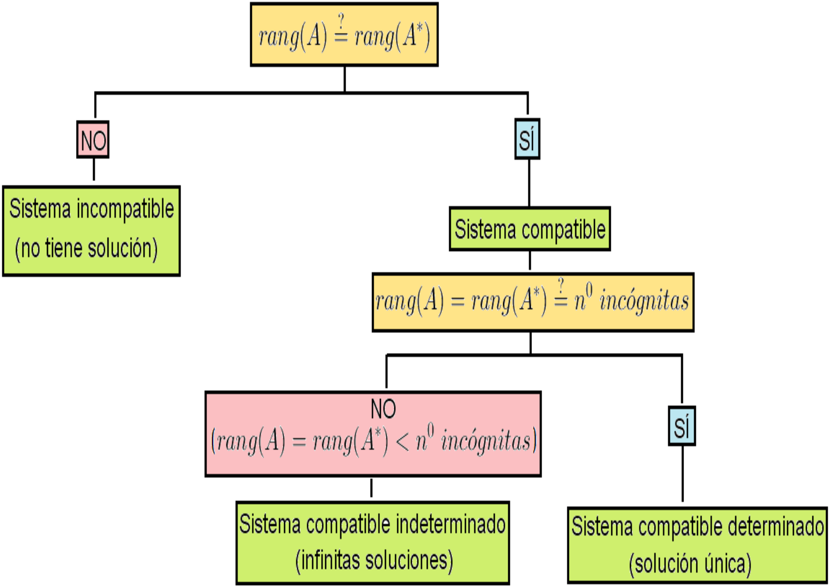
Matricialmente: $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix},\ \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

$$A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

Clasificación de sistemas lineales

Teorema de Rouché-Fröbenius



Ejercicio 1

Estudie y resuelva el siguiente sistema según los valores del parámetro k.

$$\left\{\begin{array}{rcl} kx + y + z & = & k \\ x + ky + z & = & k \\ x + y + kz & = & k. \end{array}\right.$$

Solución. La matriz ampliada asociada al sistema lineal es

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} k & 1 & 1 & k \\ 1 & k & 1 & k \\ 1 & 1 & k & k \end{array}\right).$$

Realizando transformaciones elementales por filas obtenemos la siguiente matriz escalonada

$$\left(\begin{array}{ccc|c} k & 1 & 1 & k \\ 1 & k & 1 & k \\ 1 & 1 & k & k \end{array}\right) \overset{(1)}{\to} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & k \\ 1 & k & 1 & k \\ k & 1 & 1 & k \end{array}\right) \overset{(2)}{\to} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & k \\ 0 & k-1 & 1-k & 0 \\ 0 & 1-k & 1-k^2 & k-k^2 \end{array}\right)$$

$$\overset{(3)}{\to} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & k \\ 0 & k-1 & 1-k & 0 \\ 0 & 0 & 2-k-k^2 & k-k^2 \end{array}\right)$$

(1) $F_1 \leftrightarrow F_3$ (2) $F_2 \to F_2 - F_1,\ F_3 \to F_3 - kF_1$ (3) $F_3 \to F_3 + F_2$

Ejercicio 1

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & k \\ 0 & k-1 & 1-k & 0 \\ 0 & 0 & 2-k-k^2 & k-k^2 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow \mathrm{rang}(A) = \mathrm{rang}(A^*) = 3 =$ nº de incógnitas si y sólo si $k-1 \neq 0$ y $2-k-k^2 \neq 0$, es decir, si y sólo si $k \neq 1$ y $k \neq -2$.

1. Si $k \neq 1$ y $k \neq -2$, el sistema es compatible determinado, y es equivalente a

$$\left\{\begin{array}{rcl} x + y + kz & = & k \\ (k-1)y + (1-k)z & = & 0 \\ (2-k-k^2)z & = & k-k^2 \end{array}\right. ,$$

que tiene como solución

$$z = \frac{k-k^2}{2-k-k^2} = \frac{k(1-k)}{(1-k)(2+k)} = \frac{k}{2+k},$$
$$y = \frac{(k-1)z}{k-1} = z = \frac{k}{2+k},$$
$$x = k - y - kz = k - \frac{k}{2+k} - \frac{k^2}{2+k} = \frac{k}{2+k}.$$

Ejercicio 1

2. Si $k = 1$, la matriz escalonada es

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

   y $\mathrm{rang}(A) = \mathrm{rang}(A^*) = 1 <$ nº de incógnitas, por lo que es un sistema compatible indeterminado.
   Sus soluciones se expresan en función de $3 - 1 = 2$ parámetros.

$$x + y + z \quad = \quad 1,$$

   Soluciones: $\{(1 - y - z, y, z) : y, z \in \mathbb{R}\}$.
3. Si $k = -2$, se obtiene la matriz

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{array}\right)$$

   de donde se deduce que $\mathrm{rang}(A) = 2 \neq 3 = \mathrm{rang}(A^*)$, por lo que en este caso el sistema es incompatible.

Ejercicio 2

Estudie y resuelva el siguiente sistema según los valores del parámetro k.

$$\left\{\begin{array}{rcl} kx + k^2y + k^3z & = & k \\ x + ky + k^2z & = & k^2 \\ x + y + kz & = & k^3 \\ x + y + z & = & k^4. \end{array}\right.$$

Solución. La matriz ampliada asociada al sistema lineal es

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} k & k^2 & k^3 & k \\ 1 & k & k^2 & k^2 \\ 1 & 1 & k & k^3 \\ 1 & 1 & 1 & k^4 \end{array}\right).$$

Realizando transformaciones elementales por filas se obtiene la siguiente matriz escalonada:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} k & k^2 & k^3 & k \\ 1 & k & k^2 & k^2 \\ 1 & 1 & k & k^3 \\ 1 & 1 & 1 & k^4 \end{array}\right) \overset{(1)}{\to} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & k^4 \\ 1 & k & k^2 & k^2 \\ 1 & 1 & k & k^3 \\ k & k^2 & k^3 & k \end{array}\right) \overset{(2)}{\to} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & k^4 \\ 0 & k-1 & k^2-1 & k^2-k^4 \\ 0 & 0 & k-1 & k^3-k^4 \\ 0 & k^2-k & k^3-k & k-k^5 \end{array}\right)$$

$$\overset{(3)}{\to} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & k^4 \\ 0 & k-1 & k^2-1 & k^2-k^4 \\ 0 & 0 & k-1 & k^3-k^4 \\ 0 & 0 & 0 & k-k^3 \end{array}\right).$$

(1) $F_1 \leftrightarrow F_4$ (2) $F_2 \to F_2 - F_1,\ F_3 \to F_3 - F_1,\ F_4 \to F_4 - kF_1$ (3) $F_4 \to F_4 - kF_2$

Ejercicio 2

$\Rightarrow \mathrm{rang}(A^*) = 4$ si y sólo si $k - 1 \neq 0$ y $k - k^3 \neq 0$, si y sólo si $k \neq 1$, $k \neq 0$ y $k \neq -1$.

1. Si $k \neq 1$, $k \neq 0$ y $k \neq -1$, el sistema es incompatible.
2. Si $k = 1$, la matriz escalonada es equivalente a

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

   luego $\mathrm{rang}(A) = \mathrm{rang}(A^*) = 1 <$ nº de incógnitas, y el sistema es compatible indeterminado.
   Sus soluciones se expresan en función de $3 - 1 = 2$ parámetros. El sistema es equivalente a

$$x + y + z = 1.$$

   Soluciones: $\{(1 - y - z, y, z) : y, z \in \mathbb{R}\}$.

Ejercicio 2

3. Si $k = 0$, la matriz escalonada es

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

y se tiene que $\mathrm{rang}(A) = \mathrm{rang}(A^*) = 3 =$ nº de incógnitas, por lo que el sistema es compatible determinado y equivalente a

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x + y + z & = & 0 \\ -y - z & = & 0 \\ -z & = & 0 \end{array} \right. ,$$

que tiene como solución $x = y = z = 0$.

Ejercicio 2

4. Si $k = -1$, se obtiene la matriz escalonada

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

por tanto, es un sistema compatible determinado, ya que $\mathrm{rang}(A) = \mathrm{rang}(A^*) = 3 =$ nº de incógnitas. En este caso, el sistema equivalente es

$$\left\{\begin{array}{rcl} x + y + z & = & 1 \\ -2y & = & 0 \\ -2z & = & -2 \end{array}\right.,$$

que tiene como solución $z = 1$, $y = 0$ y $x = 0$.