# TURBORREACTOR PLANO VERTICAL:

* Sin viento. Ascenso rectilíneo estacionario. Ángulo $\varepsilon$ → 1
* Viento horizontal CTE. Ascenso rectilíneo estacionario. Descenso rectilíneo estacionario → 2
* Viento horizontal CTE. Ascenso rectilíneo estacionario. $\gamma \ll 1$. Vuelo horizontal rectilíneo no estacionario. Uso de $\delta e$. Flaps recogidos/desplegados → 3
* Viento horizontal CTE. Vuelo horizontal rectilíneo no estacionario. Ascenso rectilíneo estacionario. → 4
* Viento $f(z)$. Ascenso rectilíneo no estacionario. Ejes $\vec{x}$-$\vec{z}$. Uso de $\delta e$ → 5
  Ejes $\vec{t}, \vec{n}$ → 6
* Viento horizontal CTE Ascenso rectilíneo estacionario. $\gamma \ll 1$. Ángulos peq. $\hat{V} = 1$. Ecs. adimensionales
  $\frac{dW}{dt} = CT$ = Ec. Motor → 7
* Viento horizontal CTE Ascenso vertical estacionario. Descenso en picado estacionario. Vuelo horizontal rectilíneo estacionario. Vuelo invertido estacionario → 8
* Sin viento. Vuelo horizontal rectilíneo estacionario. Ley de $\rho$. Alcance específico $\frac{dx}{dW}$ → 9
* Viraje simétrico en ascensión. Hélice. Ecs. ejes intrínsecos. $R_{MAX}$. $\mu_{MAX}$. $\theta$ → 10 $\boxed{7.2}$
* Vuelo circunferencial. Ángulo $\varepsilon = \alpha$. q. T. $\delta e$ → 11
* Vuelo circunferencial. $R_{MIN}$. $\alpha$. T. $\delta e$ → 12
* Viento horizontal $f(t)$ Vuelo circunferencial. Ángulo $\varepsilon = \alpha$. $\frac{dv}{dt} \neq 0$ → 13
* Sin viento. Ascenso rectilíneo. Ve. SEPT. 2011 → 14

C-112

10/08

**PROBLEMA 6** (libro)

Planeador

La figura representa un planeador, con polar parabólica y cuyas características aerodinámicas, geométricas y másicas se consideran conocidas, unido al suelo por su centro de gravedad mediante el cable AB, de longitud *r*, sin peso y de resistencia aerodinámica despreciable. El centro de gravedad del planeador describe una trayectoria situada en un plano vertical con un viento de cara uniforme de velocidad $V_w$.

Suponiendo que el movimiento tiene lugar a $C_L$ constante y conocido, se pide:

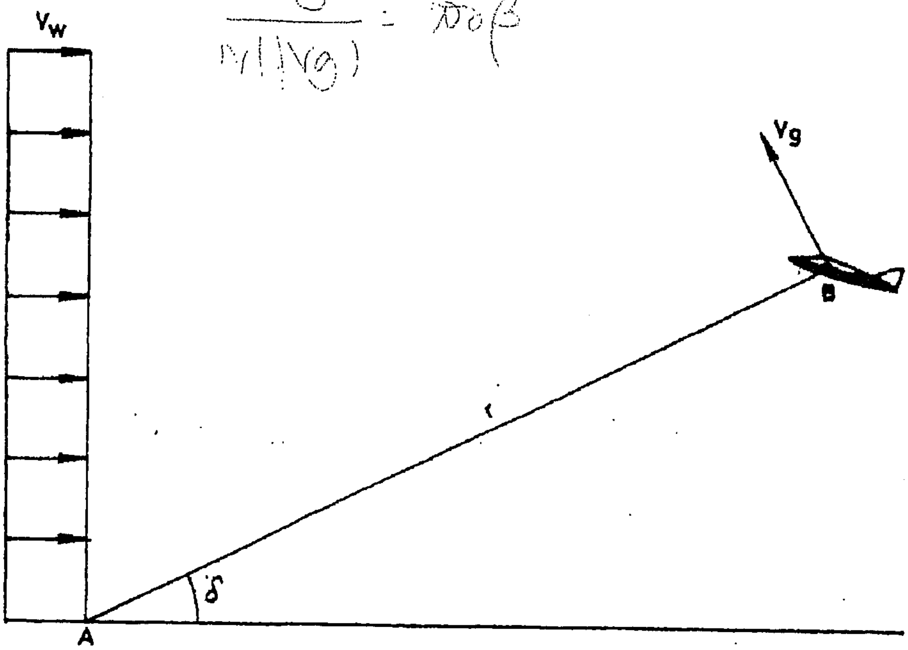
1º)Plantear las ecuaciones del movimiento del centro de gravedad del avión en el sistema de ejes intrínsecos y determinar el número de grados de libertad matemáticos del sistema.

2º)Determinar el ángulo polar, $\delta$, de equilibrio.

3º)Determinar el valor de $C_L$ que maximiza el ángulo $\delta$ de equilibrio obtenido en el apartado anterior y determinar su límite cuando

$$\frac{W}{\frac{1}{2}\rho V_w^2 S} \rightarrow 0$$

$$\frac{\bar{V}\cdot\bar{V_g}}{|\bar{V}||\bar{V_g}|} = \cos\beta$$



Subida simétrica
rectilínea y estac.

## PROBLEMA 5

Se considera un avión de peso $W$ y de superficie alar $S$, conocidos, provisto de motores con empuje orientable que está realizando una subida simétrica rectilínea estacionaria.

Suponiendo que todos los ángulos que intervienen en el problema no son pequeños, se pide:

1°) Plantear las ecuaciones del sistema y determinar el número de grados de libertad matemáticos del mismo.

2°) Determinar el ángulo de asiento de velocidad, $\gamma$, en función de $E$, $T/W$ y $\varepsilon$ (ángulo de ataque del empuje).

3°) Determinar el ángulo de ataque del empuje que maximiza el ángulo de asiento de velocidad. Interpretar geométricamente la solución obtenida.

# PROBLEMA 5 CLASE

Avión de peso $W$ y sup. alar $S$ conocidos.

Motor con empuje orientable y realiza SUBIDA SIMÉTRICA RECTILÍNEA ESTACIONARIA

## 1° PLANTEAR ECS. del SISTEMA y determ. Nº de GRADOS de LIBERTAD

**VSPV**
Vuelo simétrico en plano vertical

(PV) $\dot{y}_e = 0 \rightarrow y_e = cte \rightarrow \dot{y}_e = 0 = \dot{V}\cos\gamma \,\text{sen}\, \chi$ $\begin{cases} \gamma \neq 0 \\ \boxed{\chi = 0} \end{cases}$

SIMÉTRICO $\boxed{\nu = \beta = 0} \longrightarrow \underline{a = 0}$

$Q = 0 + \chi = 0$

EC. DINÁMICA en $y_w$: $mg\,\text{sen}\,\mu\cos\gamma + mV(-\dot{\gamma}\,\text{sen}\,\mu) = 0 \Rightarrow (g\cos\gamma - V\dot{\gamma})\, m\,\text{sen}\,\mu = 0$

$\boxed{\mu = 0}$ ALAS A NIVEL

$g\cos\gamma - V\dot{\gamma} = 0$

Rectilíneo $\longrightarrow \dot{\gamma} = 0 \longrightarrow g\cos\gamma \neq 0 \rightarrow \mu = 0$

Estacionario $\longrightarrow \dot{V} = 0$

**VSPV + ESTAC + RECT.**

Ecs. cinemáticas: $\begin{cases} \dot{x}_e = V\cos\gamma \\ \dot{h} = V\,\text{sen}\,\gamma \end{cases}$

Ecs. dinámicas $\begin{cases} T\cos\varepsilon - D - m(g\,\text{sen}\,\gamma + \cancel{\dot{V}}) = 0 \\ -T\,\text{sen}\,\varepsilon - L + m(g\cos\gamma + \cancel{V\dot{\gamma}}) = 0 \end{cases}$ ESTAC. RECTILÍNEO

Másica: $\dot{m} + \varphi = 0$

$$\begin{cases} T = T(\pi, \varepsilon \dots) \\ D = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_D \\ C_D = C_{D0} + K C_L^2 \\ C_L = C_L(\alpha) \\ L = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_L \end{cases}$$

• INCÓGNITAS: $x_e, h, V, \gamma, T, D, m, \varepsilon, L, C_D, C_L, \pi, \alpha = 13$

• ECS $= 10$

3 grados de libertad

O se puede hacer esto $\begin{cases} D = D(h, V, \alpha) \\ L = L(h, V, \alpha) \\ T = T(h, V, \pi) \\ \varphi = \varphi(h, V, \pi) \end{cases}$

Incógnitas $x_e, h, V, \gamma, \alpha, m, \pi, \varepsilon \rightarrow 8$

Quitamos $D, L, T$ y no aparece $C_L$ ni $C_D$

Y ahora sólo tenemos las 5 ecs

$\boxed{8 - 5 = 3 \text{ gdl}}$

## 2 DETERMINAR $\gamma$ como $f(E, T/W, \varepsilon)$ $\quad mg = W$

$$E = \frac{L}{D} = \frac{mg\cos\gamma - T\,\text{sen}\,\varepsilon}{T\cos\varepsilon - mg\,\text{sen}\,\gamma} = \frac{\cos\gamma - \frac{T}{W}\text{sen}\,\varepsilon}{\frac{T}{W}\cos\varepsilon - \text{sen}\,\gamma}$$

Ya tenemos en una ecuación todas las variables → hay que despejar $\gamma$

$\hookrightarrow \underline{E\,\text{sen}\,\gamma + \cos\gamma = E \cdot \frac{T}{W}\cos\varepsilon + \text{sen}\,\varepsilon \frac{T}{W}}$

$\hookrightarrow K = \frac{1}{E}\text{sen}\,\varepsilon \frac{T}{W} + \frac{T}{W}\cos\varepsilon$

Usamos el truco: $\text{sen}\,\gamma = \frac{tg\,\gamma}{\sqrt{1 + tg^2\alpha}}$, $\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + tg^2\gamma}}$

$K \cdot E\sqrt{1 + tg^2\alpha} = E\,tg\alpha + 1$;

$K^2E^2(1 + tg^2\alpha) = E^2 tg^2\alpha + 1 + 2E\,tg\alpha$

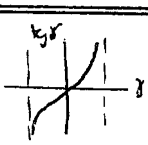
$E^2(1 - K^2)\,tg^2\alpha + 2E\,tg\alpha + (1 - K^2E^2) = 0$

$$tg\alpha = \frac{-2E \pm \sqrt{4E^2 - 4E^2(1-K^2)(1-K^2E^2)}}{2E^2(1-K^2)}$$

Así $$\boxed{tg\,\gamma = \frac{-1 \pm K\sqrt{1 + E^2 - E^2K^2}}{E(1-K^2)}}$$

## 3 DETERMINAR $\varepsilon$ que MAXIMIZA el $\gamma$. INTERPRET. GEOMÉT.

$\frac{\partial\gamma}{\partial\varepsilon} = 0 \longrightarrow \gamma_{max} \rightsquigarrow$ la $tg\,\gamma$



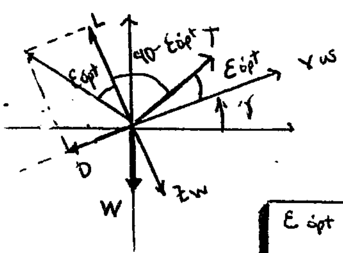

Por lo que nos ahorramos la arcotg. $\gamma_{max} \rightarrow (tg\,\gamma)_{max}$

$$\frac{\partial\, tg\,\gamma}{\partial\varepsilon} = \frac{\partial\, tg\,\gamma}{\partial K} \cdot \frac{\partial K}{\partial\varepsilon} = 0;$$

$$\frac{\partial K}{\partial\varepsilon} = 0 = \frac{T}{W}\left(\frac{1}{E}\cos\varepsilon - \text{sen}\,\varepsilon\right) = 0$$

$\hookrightarrow \frac{1}{E}\cos\varepsilon - \text{sen}\,\varepsilon = 0 \rightarrow tg\,\varepsilon_{ópt} = \frac{1}{E} = \frac{1}{L/D} = \frac{D}{L}$

$F_a$
Fuerza aerodinámica



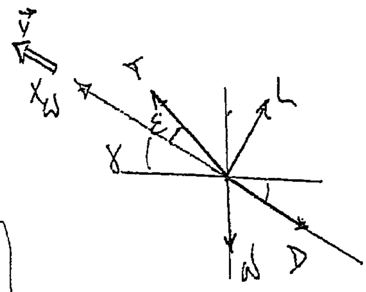

$\boxed{\begin{matrix} \varepsilon_{ópt} = \text{arctg}\, D/L \\ T \perp F_a \end{matrix}}$

$\boxed{\text{PROBLEMA 5}}$

$W, S$

Subida simétrica rectilínea estacionaria

$\left\{ \begin{array}{l} y_e = cte. = y_0 \\ \nu = \beta = 0 \end{array} \right.$




$\boxed{1}$ Ecs. del sistema, nº gdl

4.7.3
$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_e = V\cos\gamma \\ \dot{h} = V \operatorname{sen}\gamma \\ T\cos\varepsilon - D - m(g\operatorname{sen}\gamma + \dot{V}) = 0 \\ -T\operatorname{sen}\varepsilon - L + m(g\cos\gamma + V\dot{\gamma}) = 0 \\ \dot{m} + \varphi = 0 \end{array} \right.$$

$\dot{V} \to 0$ (Estac.)

$\dot{\gamma} \to 0$ (Estac., rectilíneo)

⇦ Ec.nes en ejes viento

Siempre se ponen !!

$$\boxed{\left\{ \begin{array}{ll} L = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_L \; ; & C_L = C_L(\alpha, \cancel{M}) \text{ (Damos por sentado que } \mu = 0) \\ D = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_D \; ; & C_D = C_{D0} + kC_L^2 \text{ (polar parabólica de coef. ctes)} \\ T = T(\pi, h, V) \; ; & \varphi = \varphi(\pi, h, V) \end{array} \right.}$$

11 ecs

$x_e, h, V, \gamma, T, \varepsilon, D, L, m, \varphi, C_L, C_D, \alpha, \pi \Rightarrow$ 14 incogs $\Big\} \Rightarrow$ 3 gdl $(\alpha, \pi, \varepsilon)$

---

$\boxed{2}$ $\gamma = f\left(E, \frac{T}{W}, \varepsilon\right)$

$$\boxed{E = \frac{L}{D}} = \frac{-T\operatorname{sen}\varepsilon + W\cos\gamma}{T\cos\varepsilon - W\operatorname{sen}\gamma} = \frac{-\frac{T}{W}\operatorname{sen}\varepsilon + \cos\gamma}{\frac{T}{W}\cos\varepsilon - \operatorname{sen}\gamma}$$

$$E\frac{T}{W}\cos\varepsilon - E\operatorname{sen}\gamma = -\frac{T}{W}\operatorname{sen}\varepsilon + \cos\gamma$$

$$\underbrace{\frac{T}{W}\operatorname{sen}\varepsilon + E\frac{T}{W}\cos\varepsilon}_{kE} = \cos\gamma + E\operatorname{sen}\gamma = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2\gamma}} + E\frac{tg\gamma}{\sqrt{1+tg^2\gamma}} = \frac{1+E\,tg\gamma}{\sqrt{1+tg^2\gamma}}$$

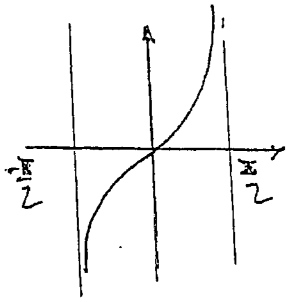
$$k^2E^2 = \left(\frac{1+E\,tg\gamma}{\sqrt{1+tg^2\gamma}}\right)^2 \Rightarrow k^2E^2 = \frac{1+2E\,tg\gamma + E^2tg^2\gamma}{1+tg^2\gamma} \; ; \; (1+tg^2\gamma)k^2E^2 = 1 + 2E\,tg + E^2tg^2\gamma$$

$$(k^2E^2 - E^2)tg^2\gamma - 2E\,tg\gamma + kE^2 - 1 = 0$$

$$tg\gamma = \frac{-1 \pm k\sqrt{E^2+1-k^2E^2}}{E(1-k^2)}$$

$\left(k = 0 \Rightarrow T = 0 \Rightarrow tg\gamma = -\frac{1}{E}\right. \Rightarrow$ descenso óptimo planeo

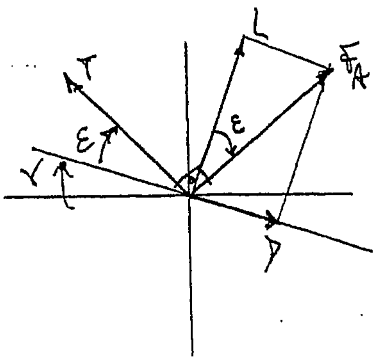
3 $\varepsilon$ para $\gamma_{max}$




$$\gamma_{max} \Rightarrow tg\,\gamma_{max}$$

$$\frac{d(tg\,\gamma)}{d\varepsilon} = \left[ -\frac{1}{\varepsilon}(1-k^2)^{-2}\cdot(-1)(-2k) \pm \frac{\pm\left(\sqrt{\varepsilon^2+1-k^2}\,(-2k) + k\frac{-2k}{2\sqrt{\varepsilon^2+1-k^2}}\right)\varepsilon(1-k^2) - k\sqrt{\varepsilon^2+1-k^2}\cdot(\varepsilon\,2k)}{\varepsilon^2(1-k^2)^2}\right]\frac{dk}{d\varepsilon} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dk}{d\varepsilon} = 0 \Rightarrow \cos\varepsilon - \varepsilon\,\mathrm{sen}\,\varepsilon = 0 \Rightarrow tg\,\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} = \frac{D}{L} \Rightarrow \boxed{\varepsilon = \mathrm{arctg}\,\frac{D}{L}}$$




$F_A \perp T$ (interpretación geométrica)

**ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS AERONÁUTICOS**

UNIDAD DOCENTE DE MECÁNICA DEL VUELO — 24.06.08

E. Final Junio *"Mecánica del Vuelo I"*

## PROBLEMA 1º

Un avión describe la trayectoria esquematizada en la figura adjunta, descompuesta en dos tramos AB y BC, en presencia de un viento horizontal de módulo $V_w$ constante y conocido. Tanto en el tramo AB como en el BC el avión vuela rectilínea, simétricamente, con las alas a nivel y con velocidad respecto de tierra $V_g$ constante y conocida ($V_g > V_w$).

Suponiendo además que:

a) Se conocen todas las características geométricas, aerodinámicas y másicas del avión necesarias para la resolución del problema (en particular, el peso $W$ es constante, la polar es parabólica de coeficientes constantes, etc.).

b) El empuje de los motores está dirigido según el eje $x_w$.

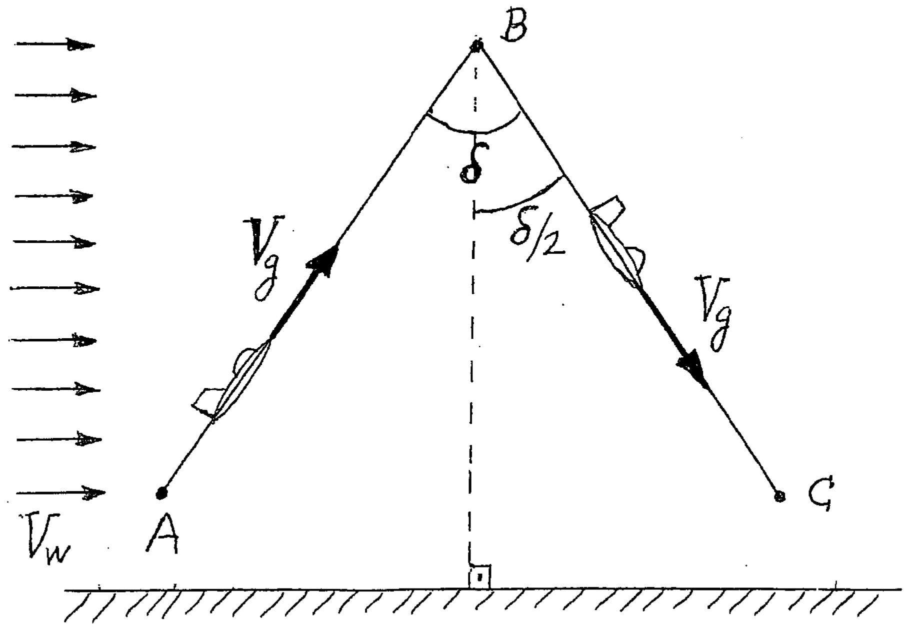
c) $\rho$ es una constante conocida en el margen de alturas considerado.

Se pide:

1º) Para el tramo AB, determinar el empuje del avión, $T$, y su coeficiente de sustentación, $C_L$, en función del ángulo $\delta$ ($0 \leq \delta \leq \pi$), de los demás datos del problema y, en su caso, del resto de grados de libertad matemáticos del sistema.

2º) Para el tramo AB, determinar los valores del ángulo $\delta$ para los que el coeficiente de sustentación del avión es máximo, mínimo y nulo, así como los valores correspondientes de $C_{L\max}$ y $C_{L\min}$.

3º) Para el tramo BC, repetir los apartados 1º) y 2º).




TIEMPO CONCEDIDO: $1^h$

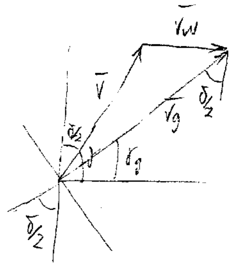
(2)

1) $T - D - W \operatorname{sen}\gamma = 0$

$-L + W\cos\gamma = 0$

$L = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_L \rightsquigarrow C_L = \dfrac{2W\cos\gamma}{\rho S V^2}$ (I)

$D = \frac{1}{2}\rho S V^2 (C_{D0} + K C_L^2)$




$\vec{V_g} = \vec{V_W} + \vec{V_W}$

$$\begin{cases} V_g \operatorname{sen}\gamma_g = V\operatorname{sen}\gamma = V_g\cos\frac{\delta}{2} \\ V_g\cos\gamma_g = V\cos\gamma + V_W = V_g\operatorname{sen}\frac{\delta}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} V_g\operatorname{sen}\frac{\delta}{2} = V_g\cos\gamma_g \rightsquigarrow \cos\gamma = \dfrac{V_g\operatorname{sen}\frac{\delta}{2} - V_W}{V} \\ V_g\cos\frac{\delta}{2} = V_g\operatorname{sen}\gamma_g \rightsquigarrow \operatorname{sen}\gamma = \dfrac{V_g\cos\frac{\delta}{2}}{V} \end{cases}$$

$$V^2 = V_g^2\operatorname{sen}^2\gamma_g + V_g^2\cos^2\gamma_g - 2V_gV_W\cos\gamma_g + V_W^2 = V_g^2 - 2V_gV_W\operatorname{sen}\frac{\delta}{2} + V_W^2$$

$$\boxed{C_L = \frac{2W}{\rho S}\cdot\frac{V_g\operatorname{sen}\frac{\delta}{2} - V_W}{\left(V_g^2 - 2V_gV_W\operatorname{sen}\frac{\delta}{2} + V_W^2\right)^{3/2}}}$$

$$\boxed{T = \frac{WV_g\cos\frac{\delta}{2}}{\sqrt{V_g^2 - 2V_gV_W\operatorname{sen}\frac{\delta}{2} + V_W^2}} + \frac{1}{2}\rho S\left(V_g^2 - 2V_gV_W\operatorname{sen}\frac{\delta}{2} + V_W^2\right)\left[C_{D0} + \frac{4W^2K}{\rho^2S^2}\cdot\frac{\left(V_g\operatorname{sen}\frac{\delta}{2} - V_W\right)^2}{\left(V_g^2 - 2V_gV_W\operatorname{sen}\frac{\delta}{2} + V_W^2\right)^3}\right]}$$

2) $$\frac{dC_L}{d\delta} = 0 = \frac{V_g\cos\frac{\delta}{2}\left(V_g^2 - 2V_gV_W\operatorname{sen}\frac{\delta}{2} + V_W^2\right)^{3/2} - \left(V_g\operatorname{sen}\frac{\delta}{2} - V_W\right)\left(-2V_gV_W\operatorname{sen}\frac{\delta}{2}\right)}{\left(V_g^2 - 2V_gV_W\operatorname{sen}\frac{\delta}{2} + V_W^2\right)^3} = 0$$

$$\left[V_g^3\cos\frac{\delta}{2} - 2V_g^2V_W\operatorname{sen}\frac{\delta}{2}\cos\frac{\delta}{2} + V_W^2V_g\cos\frac{\delta}{2}\right]^{\frac{3}{2}} = 2V_g^2V_W\operatorname{sen}^2\frac{\delta}{2} - 2V_gV_W^2\operatorname{sen}\frac{\delta}{2}$$

$$\delta = 0 \Rightarrow C_L = \frac{2W}{\rho S}\cdot\frac{-V_W}{(V_g^2 + V_W^2)^{3/2}} = C_{L\,min}$$

$$\delta = \pi \Rightarrow C_L = \frac{2W}{\rho S}\cdot\frac{V_g - V_W}{(V_g^2 + V_W^2)^{3/2}} = C_{L\,MAX}$$

$$\delta = 2\operatorname{arc\,sen}\left(\frac{V_W}{V_g}\right) \Rightarrow C_L = 0$$

3) El problema es análogo sólo que $-\gamma = \gamma_d \Rightarrow \begin{cases} \boxed{C_L = \dfrac{2W}{\rho S}\cdot\dfrac{V_g\operatorname{sen}\frac{\delta}{2} - V_W}{\left(V_g^2 - 2V_gV_W\operatorname{sen}\frac{\delta}{2} + V_W^2\right)^{3/2}}} \\ T = D - W\operatorname{sen}\gamma_d \end{cases}$

$$\boxed{T = \frac{1}{2}\rho S\left(V_g^2 - 2V_gV_W\operatorname{sen}\frac{\delta}{2} + V_W^2\right)\left[C_{D0} + \frac{4W^2K}{\rho^2S^2}\cdot\frac{\left(V_g\operatorname{sen}\frac{\delta}{2} - V_W\right)^2}{\left(V_g^2 - 2V_gV_W\operatorname{sen}\frac{\delta}{2} + V_W^2\right)^3}\right] - \frac{WV_g\cos\frac{\delta}{2}}{\sqrt{V_g^2 - 2V_gV_W\operatorname{sen}\frac{\delta}{2} + V_W^2}}}$$

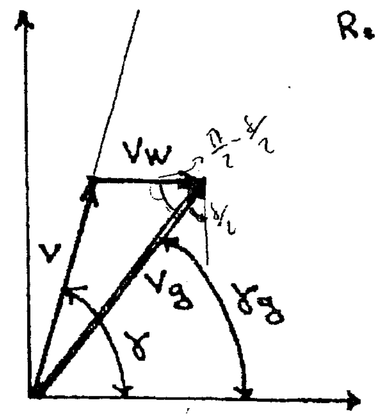
Examen Final Junio, "Mecánica del Vuelo I", 24/06/2008

PROBLEMA 1°

1/2

SOLUCIÓN:

1°) Tramo AB




Relaciones cinemáticas:

$$\begin{cases} \dot{h} = V_g \cdot \operatorname{sen}\gamma_g = V_g \cdot \cos\left(\frac{\delta}{2}\right) = V \operatorname{sen}\gamma \\ \dot{x} = V_g \cdot \cos\gamma_g = V_g \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\delta}{2}\right) = V\cos\gamma + V_w \end{cases}$$

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{\cos\left(\frac{\delta}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\delta}{2}\right) - \frac{V_w}{V_g}} \quad ;; \quad \cos\gamma = \frac{V_g \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\delta}{2}\right) - V_w}{V}$$

$$V^2 = V_g^2 + V_w^2 - 2V_gV_w \underbrace{\operatorname{sen}\left(\frac{\delta}{2}\right)}_{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\delta}{2}\right)}$$

Relaciones dinámicas:
$$\begin{cases} T - D - W\operatorname{sen}\gamma = 0 \\ L - W\cos\gamma = 0 \end{cases} \quad ;; \quad \operatorname{sen}\gamma = \frac{V_g}{V}\cos\left(\frac{\delta}{2}\right)$$

$$D = \frac{1}{2}\rho V^2 S\left(c_{D_0} + k c_L^2\right) \quad ;; \quad c_L = \frac{2W}{\rho S}\cdot\frac{\cos\gamma}{V^2}$$

$$c_L = \frac{2W}{\rho S}\cdot\frac{V_g \operatorname{sen}\left(\frac{\delta}{2}\right) - V_w}{V^3} = \frac{2W}{\rho S}\cdot\frac{V_g \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\delta}{2}\right) - V_w}{\left(V_g^2 + V_w^2 - 2V_gV_w\operatorname{sen}\left(\frac{\delta}{2}\right)\right)^{3/2}}$$

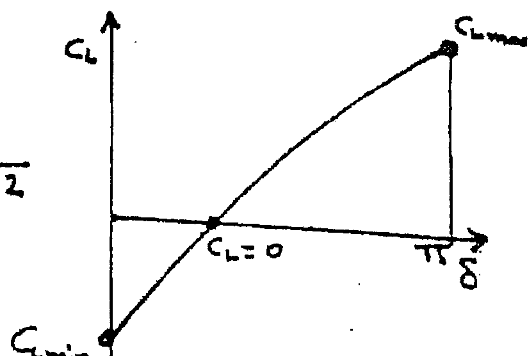
$$T = \frac{\rho S c_{D_0}}{2}\left(V_g^2 + V_w^2 - 2V_gV_w\operatorname{sen}\left(\frac{\delta}{2}\right)\right) + \frac{2kW^2}{\rho S}\cdot\frac{\left(V_g \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\delta}{2}\right) - V_w\right)^2}{\left(V_g^2 + V_w^2 - 2V_gV_w\operatorname{sen}\left(\frac{\delta}{2}\right)\right)^2} + \underbrace{\frac{W \cdot V_g \cos\left(\frac{\delta}{2}\right)}{\sqrt{V_g^2 + V_w^2 - 2V_gV_w\operatorname{sen}\left(\frac{\delta}{2}\right)}}}_{W\operatorname{sen}\gamma}$$

2°) $c_L$: función monótona creciente con $\delta$

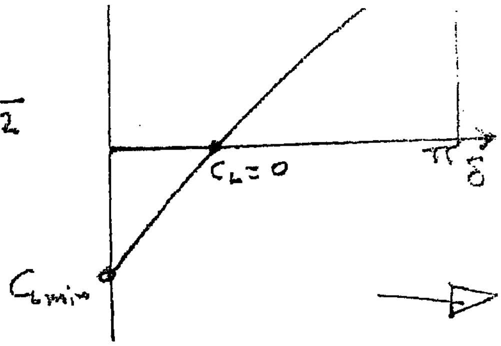
- $\delta = 0 \rightarrow c_{L_{min}} = -\frac{2W}{\rho S}\cdot\frac{V_w}{\left(V_g^2 + V_w^2\right)^{3/2}} \quad ;; \quad c_{L_{min}} < 0$

- $\delta = 2\operatorname{arcsen}\left(\frac{V_w}{V_g}\right) \rightarrow c_L = 0$

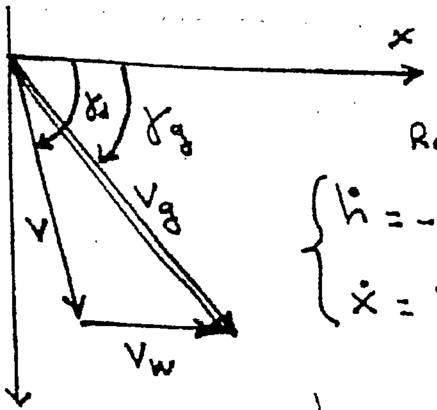
- $\delta = \pi \rightarrow c_{L_{max}} = \frac{2W}{\rho S}\cdot\frac{1}{(V_g - V_w)^2}$



- $\delta = \pi \quad \longrightarrow \quad C_{L_{max}} = \dfrac{2W}{\rho S} \cdot \dfrac{1}{(V_g - V_w)^2}$




3°)




Tramo BC

Relaciones cinemáticas:

$$\begin{cases} \dot{h} = -V_g \cdot \operatorname{sen}\gamma_g = -V_g \cdot \cos\left(\frac{\delta}{2}\right) = -V \operatorname{sen}\gamma_d \\ \dot{x} = V_g \cdot \cos\gamma_g = V_g \operatorname{sen}\left(\frac{\delta}{2}\right) = V\cos\gamma_d + V_w \end{cases}$$

$$\operatorname{tg}\gamma_d = \frac{\cos(\delta/2)}{\operatorname{sen}(\delta/2) - \frac{V_w}{V_g}} \quad ;; \quad \cos\gamma_d = \frac{V_g \operatorname{sen}(\delta/2) - V_w}{V}$$

$$V^2 = V_g^2 + V_w^2 - 2V_g V_w \operatorname{sen}\left(\frac{\delta}{2}\right)$$

Relaciones dinámicas:

$$\begin{cases} T - D + W\operatorname{sen}\gamma_d = 0 \\ L - W\cos\gamma_d = 0 \end{cases}$$

$$C_L = \frac{2W}{S} \cdot \frac{V_g \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\delta}{2}\right) - V_w}{\left(V_g^2 + V_w^2 - 2V_g V_w \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\delta}{2}\right)\right)^{3/2}}$$

$$T = \rho \frac{S C_{D0}}{2}\left(V_g^2 + V_w^2 - 2V_g V_w \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\delta}{2}\right)\right) + \frac{2kW^2}{\rho S} \cdot \frac{\left(V_g \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\delta}{2}\right) - V_w\right)^2}{\left(V_g^2 + V_w^2 - 2V_g V_w \operatorname{sen}\left(\frac{\delta}{2}\right)\right)^2} - \frac{W \cdot \cos(\delta/2)}{\sqrt{V_g^2 + V_w^2 - 2V_g V_w \operatorname{sen}(\frac{\delta}{2})}}$$

$C_L$ IGUAL QUE EN EL APARTADO 2°

Mecánica del Vuelo – E. Final Junio – 24.06.08

PROBLEMA 2° (SOLUCIÓN)

1° $\begin{cases} M_{Ag} - T d_T = 0 \\ T = D \end{cases}$

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS AERONÁUTICOS

UNIDAD DOCENTE DE MECÁNICA DEL VUELO 11.06.07

E. Final Junio *"Mecánica del Vuelo I"*

## PROBLEMA 1º

Un avión despega en presencia de un viento de cara horizontal de módulo $V_w$ constante y conocido. Cuando el avión está en el aire, efectúa un vuelo simétrico con las alas a nivel descompuesto en los siguientes tramos (ver figura):

- Tramo 1-2: Subida rectilínea estacionaria, con los flaps deflectados y con velocidad aerodinámica $V_2$ constante y conocida.
- Tramo 2-3: Vuelo horizontal rectilíneo, con los flaps recogidos, desde la velocidad aerodinámica $V_2$ hasta la velocidad aerodinámica $V_3$ constante y conocida.
- Tramo 3-4: Subida rectilínea estacionaria, con los flaps recogidos y con velocidad aerodinámica $V_3$ constante y conocida.

Suponiendo además que:

a) Se conocen todas las características geométricas, aerodinámicas y másicas del avión necesarias para la resolución del problema (en particular, el peso $W$ es constante, las características aerodinámicas se conocen en unos ejes cuerpo genéricos, tanto para el avión con flaps deflectados como con flaps recogidos, la polar es parabólica de coeficientes constantes, la contribución de la deflexión del timón de profundidad al coeficiente de sustentación del avión completo es despreciable, etc.).

b) El empuje de los motores $T$ es constante y conocido, pasa por el centro de gravedad del avión y está dirigido según el eje $x_w$.

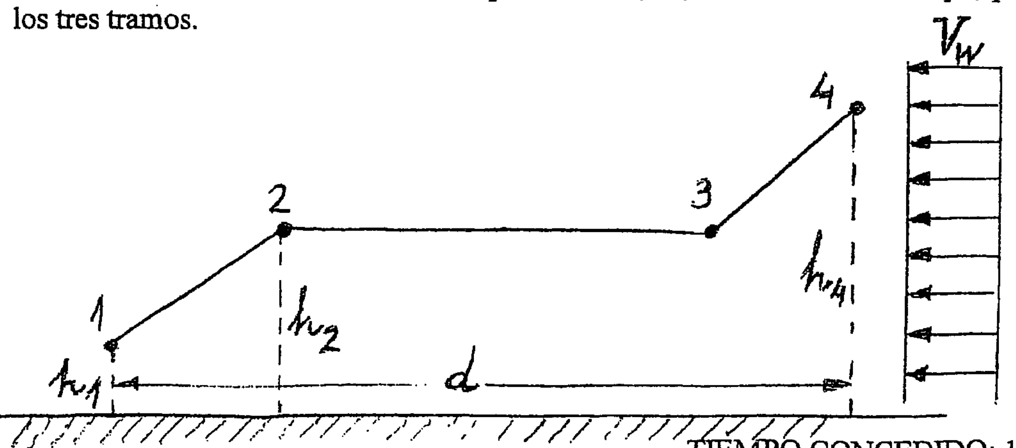
c) Los ángulos de inclinación de la trayectoria en los tramos 1-2 y 3-4 son pequeños; las alturas $h_1$, $h_2$ y $h_4$ son conocidas.

d) $\rho$ y $g$ son constantes conocidas en el margen de alturas considerado.

Se pide:

1º) Determinar la distancia horizontal total recorrida, $d$, respecto del suelo y el tiempo total empleado, $t$, en volar estos tres tramos.

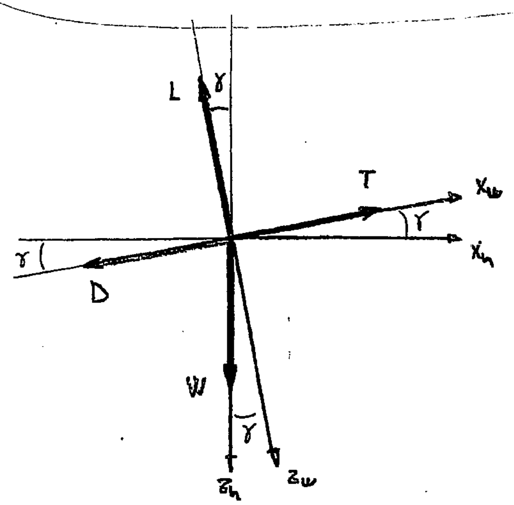
2º) Determinar la deflexión del timón de profundidad, $\delta_e$, en función del tiempo, para los tres tramos.

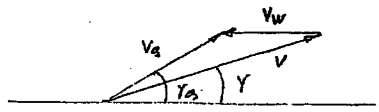



TIEMPO CONCEDIDO: $1^h$

Tramo 1-2 → Subida rectilínea estacionaria con flaps desplegados

Flaps desplegados $\begin{cases} C_L = C_{L01} + C_{L\alpha 1}\,\alpha \\ C_D = C_{D01} + k_1 C_L^2 \end{cases}$




$$\left.\begin{aligned} V_g \operatorname{sen}\gamma_g &= V \operatorname{sen}\gamma \\ V_g \cos\gamma_g &= V\cos\gamma - V_W \end{aligned}\right\} \xRightarrow[\text{pequeños}]{\text{ángulos}} \boxed{\gamma_g = \frac{V\gamma}{V - V_W}}$$

$$\left.\begin{aligned} L &= W\cos\gamma \\ T &= D + W\operatorname{sen}\gamma \end{aligned}\right\} \xRightarrow[\text{pequeños}]{\text{ángulos}} \begin{aligned} L &= W \\ T &= D + W\gamma \end{aligned}$$

$$\gamma = \frac{T - \overbrace{\tfrac{1}{2}\rho V^2 S \left(C_{D01} + k_1 C_L^2\right)}^{D}}{W}$$

$$C_L = \frac{2W}{\rho V^2 S} \Rightarrow \gamma = \frac{T - \frac{1}{2}\rho V^2 S \left(C_{D01} + \frac{4W^2 k_1}{\rho^2 S^2 V^4}\right)}{W}$$

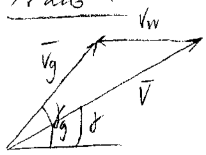
$$\operatorname{tg}\gamma_g \simeq \boxed{\gamma_g = \frac{h_{1-2}}{d_{1-2}}} = \frac{V\gamma}{V - V_W} \quad ; \quad V = V_2$$

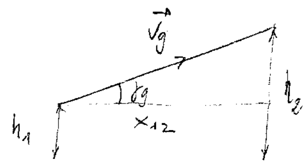
$$\boxed{d_{1-2} = \frac{h_{1-2}\,(V_2 - V_W)}{V_2} \; \frac{W}{T - \frac{1}{2}\rho V_2^2 S \left(C_{D01} + \frac{4W^2 k_1}{\rho^2 S^2 V_2^4}\right)}}$$

$$\boxed{t_{1-2} = \frac{d_{1-2}}{V_g\cos\gamma_g}} \Rightarrow \boxed{t_{1-2} = \frac{h_{1-2}}{V_2} \; \frac{W}{T - \frac{1}{2}\rho V_2^2 S \left(C_{D01} + \frac{4W^2 k_1}{\rho^2 S^2 V_2^4}\right)}}$$

③

1) Tramo 1-2




$$tg\,\gamma_g = \frac{h_2-h_1}{x_{12}} \; ; \; \gamma_g = \frac{h_2-h_1}{x_{12}}$$

$$x_{12} = \frac{h_2-h_1}{\gamma_g}$$

$$\left.\begin{array}{l} V_g \operatorname{sen}\gamma_g = V \operatorname{sen}\gamma \\ V_g \cos\gamma_g + V_W = V\cos\gamma \end{array}\right| \rightarrow tg\,\gamma_g = \frac{V\operatorname{sen}\gamma}{V\cos\gamma - V_W} \; ; \; \gamma_g = \frac{V\cdot\gamma}{V-V_W}$$

$$T - D - W\gamma = 0 \longrightarrow \gamma = \frac{T}{W} - \frac{\rho V^2 S}{2W}\left(C_{D0} + \frac{4KW^2}{\rho^2 S^2 V^4}\right)$$

$$-L + W = 0$$

$$L = \frac{1}{2}\rho S V^2 C_L \rightarrow C_L = \frac{2W}{\rho S V^2}$$

$$D = \frac{1}{2}\rho S V^2\left(C_{D0_d} + K C_L^2\right) = \frac{1}{2}\rho V^2 S\left(C_{D0_d} + \frac{4KW^2}{\rho^2 S^2 V^4}\right)$$

$$\boxed{x_{12} = \frac{(h_2-h_1)\cdot(V_2-V_W)}{\frac{TV_2}{W} - \frac{\rho V_2^3 S}{2W}\left(C_{D0} + \frac{4KW^2}{\rho^2 S^2 V_2^4}\right)}}$$

$$\dot{x}_e = V_g\cos\gamma_g \; , \; \int_0^{x_{12}} dx_e = V_g\cos\gamma_g \int_0^{t_{12}} dt \; ; \; x_{12} = (V_2 \overset{1}{\cancel{\cos\gamma}} - V_W)\,t_{12} \rightarrow t_{12} = \frac{x_{12}}{(V_2-V_W)}$$

$$\boxed{t_{12} = \frac{(h_2-h_1)}{\frac{TV_2}{W} - \frac{\rho V_2^2 S}{2W}\left(C_{D0} + \frac{4KW^2}{\rho^2 S^2 V_2^4}\right)}}$$

Tramo 2-3:

$$T - D = \frac{W}{g}\cdot\frac{dV}{dt} \longrightarrow T - D = \frac{W}{g}\cdot\frac{dV}{dx_e}\overset{V}{\frac{dx_e}{dt}} \; ; \; T - D = \frac{W}{g}V\cdot\frac{dV}{dx_e}$$

$$L = W \rightarrow C_L = \frac{2W}{\rho S V^2}$$

$$\frac{dx_e}{dt} = V$$

$$D = \frac{1}{2}\rho V^2 S\left(C_{D0_r} + \frac{4KW^2}{\rho^2 S^2 V^4}\right)$$

$$\boxed{\int_0^{x_{23}} dx_e = \int_{V_2}^{V_3} \frac{W\cdot V}{g\left[T - \frac{1}{2}\rho V^2 S\left(C_{D0_r} + \frac{4KW^2}{\rho^2 S^2 V^4}\right)\right]}\,dV = x_{23}}$$

$$\boxed{\int_0^{t_{23}} dt = \int_{V_2}^{V_3} \frac{W}{g\left[T - \frac{1}{2}\rho V^2 S\left(C_{D0_r} + \frac{4KW^2}{\rho^2 S^2 V^4}\right)\right]}\,dV = t_{23}}$$

Análogamente al tramo 1-2:

$$\boxed{X_{34} = \frac{(h_4 - h_2)(V_3 - V_w)}{\frac{TV_3}{W} - \frac{\rho V_3^3 S}{W}\left(C_{D0_r} + \frac{4KW^2}{\rho^2 S^2 V_3^4}\right)}}$$

$$\boxed{t_{34} = \frac{(h_4 - h_2)}{\frac{TV_3}{W} - \frac{\rho V_3^2 S}{W}\left(C_{D0_r} + \frac{4KW^2}{\rho^2 S^2 V_3^4}\right)}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} d &= X_{12} + X_{23} + X_{34} \\ t &= t_{12} + t_{23} + t_{34} \end{aligned}}$$

2) Tramo 1-2

$$C_L = C_{L0_d} + C_{L\alpha_d}\alpha = \frac{2W}{\rho S V^2} \rightarrow \alpha = \frac{-C_{L0d}}{C_{L\alpha d}} + \frac{2W}{\rho C_{L\alpha_d} S V^2} = \alpha_{0d} + \frac{2W}{\rho S C_{L\alpha_d} V^2}$$

$$C_{m_A} = 0 = C_{m0_d} + C_{m\alpha_d}\alpha + C_{m\delta e_d}\delta e \rightarrow \boxed{\delta e_{12} = \frac{-1}{C_{m\delta e_d}}\left[C_{m0d} + C_{m\alpha d}\left(\alpha_{0d} + \frac{2W}{\rho S C_{L\alpha_d} V_2^2}\right)\right]}$$

Tramo 2-3:

$$C_L = C_{L0_r} + C_{L\alpha_r}\alpha = \frac{2W}{\rho S V^2} \rightarrow \alpha = \frac{-C_{L0r}}{C_{L\alpha r}} + \frac{2W}{\rho S C_{L\alpha_r} V^2} = \alpha_{0r} + \frac{2W}{\rho S C_{L\alpha_r} V^2}$$

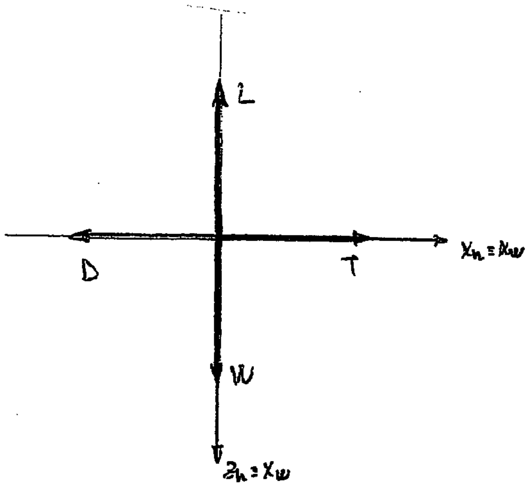
$$C_{m_A} = 0 = C_{m0_r} + C_{m\alpha_r}\alpha + C_{m\delta e_r}\delta e \rightarrow \boxed{\delta e_{23} = \frac{-1}{C_{m\delta e_r}}\left[C_{m0r} + C_{m\alpha_r}\left(\alpha_{0r} + \frac{2W}{\rho S C_{L\alpha_r} V^2}\right)\right]}$$

Tramo 3-4:

$$\boxed{\delta e_{34} = \frac{-1}{C_{m\delta e_r}}\left[C_{m0_r} + C_{m\alpha_r}\left(\alpha_{0_r} + \frac{2W}{\rho S C_{L\alpha_r} V_3^2}\right)\right]}$$

Tramo 2-3 → Vuelo horizontal rectilíneo, con flaps recogidos

Flaps recogidos $\begin{cases} C_L = C_{L02} + C_{L\alpha 2}\,\alpha \\ C_D = C_{D02} + K_2 C_L^2 \end{cases}$




$\vec{V_g} = (V - V_w)\,\vec{i_h}$

$$C_L = \frac{2W}{\rho S V^2}$$

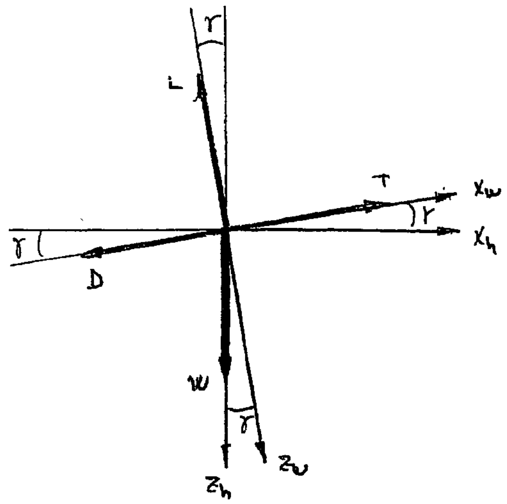
$$T - D = \frac{W}{g}\frac{d(V-V_w)}{dt} = \frac{W}{g}\frac{dV}{dt}$$

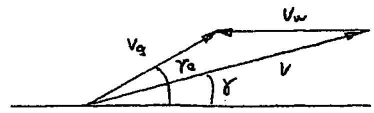
$$T - \frac{1}{2}\rho V^2 S\left(C_{D02} + K_2 \frac{4W^2}{\rho^2 S^2 V^4}\right) = \frac{W}{g} V \frac{dV}{dx}$$

$$\boxed{d_{2-3} = \int_{V_2}^{V_3} \frac{\frac{W}{g} V\, dV}{T - \frac{1}{2}\rho V^2 S\left(C_{D02} + K_2 \frac{4W^2}{\rho^2 S^2 V^4}\right)}}$$

$$\boxed{t_{2-3} = \int_{V_2}^{V_3} \frac{\frac{W}{g}\, dV}{T - \frac{1}{2}\rho V^2 S\left(C_{D02} + K_2 \frac{4W^2}{\rho^2 S^2 V^4}\right)}}$$

Tramo 3-4 → Subida rectilínea estacionaria con flaps recogidos




$$\gamma_g = \frac{V\gamma}{V - V_w} \quad ; \quad \gamma = \frac{T - \frac{1}{2}\rho V^2 S\left(C_{D02} + K_2 \frac{4W^2}{\rho^2 S^2 V^4}\right)}{W}$$

$$V = V_3 \Longrightarrow \gamma_g = \frac{V_3}{V_3 - V_w} \, \frac{T - \frac{1}{2}\rho V_3^2 S\left(C_{D02} + K_2 \frac{4W^2}{\rho^2 S^2 V_3^4}\right)}{W}$$

$$\boxed{d_{3-4} = \frac{h_{3-4}\,(V_3 - V_w)}{V_3} \, \frac{W}{T - \frac{1}{2}\rho V_3^2 S\left(C_{D02} + K_2 \frac{4W^2}{\rho^2 S^2 V_3^4}\right)}}$$

$$\boxed{t_{3-4} = \frac{h_{3-4}}{V_3} \, \frac{W}{T - \frac{1}{2}\rho V_3^2 S\left(C_{D02} + K_2 \frac{4W^2}{\rho^2 S^2 V_3^4}\right)}}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} d = d_{1-2} + d_{2-3} + d_{3-4} \\ t = t_{1-2} + t_{2-3} + t_{3-4} \end{array}}$$

Tramo 1-2 $\rightarrow$ $0 < t < t_{1-2}$

$$C_{L01} + C_{L\alpha 1}\,\alpha_{12} = \frac{2W}{\rho V_2^2 S} \Rightarrow \alpha_{12} = \frac{2W}{\rho V_2^2 S\, C_{L\alpha 1}} - \frac{C_{L01}}{C_{L\alpha 1}}$$

$$C_{mcg} = 0 = C_{m01} + C_{m\alpha 1}\,\alpha_{12} + C_{m\delta e1}\,\delta e_{1-2}$$

$$\delta e_{1-2} = -\frac{C_{m01}}{C_{m\delta e1}} - \frac{C_{m\alpha 1}}{C_{m\delta e1}}\left(\frac{2W}{\rho V_2^2 S\, C_{L\alpha 1}} - \frac{C_{L01}}{C_{L\alpha 1}}\right) \leftarrow \text{Constante en este tramo}$$

Tramo 2-3 $\rightarrow$ $t_{1-2} < t < t_{2-3}$

$$\alpha_{2-3} = \frac{2W}{\rho V^2 S\, C_{L\alpha 2}} - \frac{C_{L02}}{C_{L\alpha 2}} \leftarrow V = V(t) \Rightarrow \alpha_{2-3} = \alpha_{2-3}(t)$$

$$\delta e_{2-3} = -\frac{C_{m02}}{C_{m\delta e2}} - \frac{C_{m\alpha 2}}{C_{m\delta e2}}\left(\frac{2W}{\rho V^2 S\, C_{L\alpha 2}} - \frac{C_{L02}}{C_{L\alpha 2}}\right) \leftarrow \delta e_{2-3} = \delta e_{2-3}(t)$$

Tramo 3-4 $\rightarrow$ $t_{2-3} < t < t_{3-4}$

$$\alpha_{3-4} = \frac{2W}{\rho V_3^2 S\, C_{L\alpha 2}} - \frac{C_{L02}}{C_{L\alpha 2}}$$

$$\delta e_{3-4} = -\frac{C_{m02}}{C_{m\delta e2}} - \frac{C_{m\alpha 2}}{C_{m\delta e2}}\left(\frac{2W}{\rho V_3^2 S\, C_{L\alpha 2}} - \frac{C_{L02}}{C_{L\alpha 2}}\right) \leftarrow \text{Constante en este tramo}$$

$$\boxed{\delta e(t) = \begin{cases} -\dfrac{C_{m01}}{C_{m\delta e1}} - \dfrac{C_{m\alpha 1}}{C_{m\delta e1}}\left(\dfrac{2W}{\rho V_2^2 S\, C_{L\alpha 1}} - \dfrac{C_{L01}}{C_{L\alpha 1}}\right) & ;\ 0 < t < t_{1-2} \\[2ex] -\dfrac{C_{m02}}{C_{m\delta e2}} - \dfrac{C_{m\alpha 2}}{C_{m\delta e2}}\left(\dfrac{2W}{\rho V^2 S\, C_{L\alpha 2}} - \dfrac{C_{L02}}{C_{L\alpha 2}}\right) & ;\ t_{1-2} < t < t_{2-3} \\[2ex] -\dfrac{C_{m02}}{C_{m\delta e2}} - \dfrac{C_{m\alpha 2}}{C_{m\delta e2}}\left(\dfrac{2W}{\rho V_3^2 S\, C_{L\alpha 2}} - \dfrac{C_{L02}}{C_{L\alpha 2}}\right) & ;\ t_{2-3} < t < t_{3-4} \end{cases}}$$

Flaps desplegados $\rightarrow$ $C_{mcg} = C_{m01} + C_{m\alpha 1}\, \alpha + C_{m\delta e1}\, \delta_{e}$

Flaps recogidos $\rightarrow$ $C_{mcg} = C_{m02} + C_{m\alpha 2}\, \alpha + C_{m\delta e2}\, \delta_e$

ESCUELA TECNICA SUPERIOR DE INGENIEROS AERONAUTICOS

CATEDRA DE MECANICA DEL VUELO - 1^er^ E. Parcial - A+B+CD 23.11.92

## PROBLEMA 1º

Un avión de peso $W$ y superficie alar $S$, cuya polar es de la forma $C_D = C_{D_0} + KC_L^2$ está provisto de un turborreactor que proporciona un empuje $T$ constante e independiente de la velocidad.

Este avión efectúa la maniobra que se describe a continuación en presencia de un viento de cara de magnitud $V_W$ (medida respecto a tierra) constante e independiente de la altura. Inicialmente el avión se acelera horizontalmente desde una velocidad aerodinámica $V_A$ hasta una velocidad aerodinámica $V_B$, efectuando a continuación una subida a velocidad constante hasta situarse a una altura $\Delta H$ por encima de la inicial.

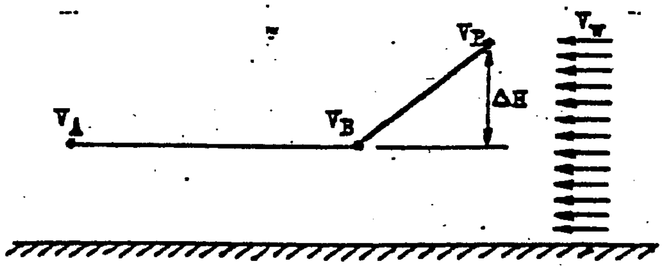
Suponiendo además que es despreciable la transición entre el tramo horizontal y el tramo de subida y que asimismo es despreciable el ángulo de ataque del empuje, se pide:

1º) Plantear las relaciones dinámicas en ejes viento y las relaciones cinemáticas para los dos tramos, suponiendo que en la subida se verifica $(T-D)/W \ll 1$.

2º) Plantear expresiones que permitan calcular la distancia recorrida por el avión (con respecto al suelo) desde el instante inicial en que vuela a $V_A$ hasta que consigue incrementar su altitud en $\Delta H$.

3º) Plantear expresiones que permitan calcular el tiempo invertido en realizar la maniobra.

4º) Determinar el ángulo de asiento del avión durante el tramo de subida sabiendo que en este régimen de vuelo la curva de sustentación viene dada por $C_L = C_{L_\alpha}\alpha$, siendo $C_{L_\alpha}$ una constante conocida, tomando como eje $x_b$ el correspondiente a la dirección de sustentación nula del avión.




TIEMPO CONCEDIDO: 1^h^

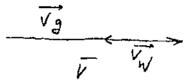
4

1) 1er tramo:

$$T - D = \frac{W}{g}\cdot\frac{dV}{dt}$$

$$-L + W = 0$$

$$\frac{dx_e}{dt} = V_g$$




$$V_g = V - V_W$$

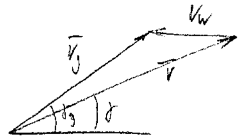
2º tramo:

$$T - D - W\,\text{sen}\,\gamma = 0 \;;\; \underbrace{\frac{T-D}{W}}_{\neq 0} - \text{sen}\,\gamma = 0 \Rightarrow \gamma \ll 1$$

$$-L + W\cos\gamma = 0 \;;\; L = W$$

$$\frac{dx_e}{dt} = V_g\cos\gamma_g$$

$$\frac{dh}{dt} = V_g\,\text{sen}\,\gamma_g$$




$$V_g\,\text{sen}\,\gamma_g = V\,\text{sen}\,\gamma$$

$$V_g\cos\gamma_g + V_W = V\cos\gamma$$

$$\text{tg}\,\gamma_g = \frac{V\cdot\gamma}{V - V_W}$$

$$V_g^2 = V^2 - 2VV_W\underbrace{\cos\gamma}_{1} + V_W^2$$

2) 1er tramo:

$$T - D = \frac{W}{g}\cdot\frac{dV}{dx_e}\cdot\underbrace{\frac{dx_e}{dt}}_{V_g} \;;\; T - D = \frac{W}{g}\cdot V_g\frac{dV}{dx_e}$$

$$D = \frac{1}{2}\rho S V^2\left(C_{D0} + \frac{4KW^2}{\rho^2S^2V^4}\right)$$

$$C_L = \frac{2W}{\rho S V^2}$$

$$\int_0^{X_1} dx_e = \int_{V_A}^{V_B}\frac{W\cdot V_g}{g\left[T - \frac{1}{2}\rho S V^2\left(C_{D0} + \frac{4KW^2}{\rho^2S^2V^4}\right)\right]}dV = \boxed{X_1 = \int_{V_A}^{V_B}\frac{W(V-V_W)}{g\left[T - \frac{1}{2}\rho S V^2\left(C_{D0} + \frac{4KW^2}{\rho^2S^2V^4}\right)\right]}dV}$$

2º tramo:

$$\frac{dx_e}{dt} = V_g\cos\gamma_g \quad (1) \;;\; \frac{dx_e}{dh}\cdot\frac{dh}{dt} = V_g\cos\gamma_g \Rightarrow \frac{dx_e}{dh} = \frac{1}{\text{tg}\,\gamma_g}$$

$$\frac{dh}{dt} = V_g\,\text{sen}\,\gamma_g \quad (2)$$

$$\int_0^{X_2} dx_e = \int_0^{\Delta H}\frac{1}{\text{tg}\,\gamma_g}\cdot dh \Rightarrow X_2 = \Delta H\cdot\frac{1}{\frac{V\cdot\gamma}{V-V_W}} = \Delta H\,\frac{V-V_W}{V\cdot\gamma} \Rightarrow \boxed{X_2 = \frac{\Delta H\,(V_B - V_W)}{\frac{TV_B}{W} - \frac{\rho S V_B^3}{2W}\left(C_{D0} + \frac{4KW^2}{\rho^2S^2V_B^4}\right)}}$$

$$\gamma = \frac{T-D}{W} = \frac{T}{W} - \frac{\rho S V^2}{2W}\left(C_{D0} + \frac{4KW^2}{\rho^2S^2V^4}\right)$$

$$C_L = \frac{2W}{\rho S V^2}$$

$$\boxed{d = X_1 + X_2}$$

3) 1er tramo:

$$\boxed{\int_0^{t_1} dt = \int_{V_A}^{V_B} \frac{W}{g\left[T-\frac{1}{2}\rho V^2 S\left(C_{D_0}+\frac{4KW^2}{\rho^2 S^2 V^4}\right)\right]}\,dV = t_1}$$

2º tramo:

$$\frac{dx_e}{dt} = V_g \cos\gamma_g \;; \quad \int_0^{x_2} dx_e = V_g \cos\gamma_g \int_0^{t_2} dt \;; \quad x_2 = (V_B \cos\gamma - V_W)\, t_2 \rightsquigarrow t_2 = \frac{x_2}{(V_e - V_W)}$$

$$\boxed{t_2 = \frac{\Delta H}{\frac{TV_e}{W} - \frac{\rho S V_e^3}{2W}\left(C_{D_0}+\frac{4KW^2}{\rho^2 S^2 V_e^4}\right)}}$$

$$\boxed{t = t_1 + t_2}$$

4) $$C_L = C_{L\alpha}\cdot\alpha = \frac{2W}{\rho S V^2} \rightsquigarrow \alpha = \frac{2W}{\rho S C_{L\alpha} V^2}$$

$$\theta = \gamma + \alpha$$

$$\gamma = \frac{T}{W} - \frac{\rho S V^2}{W}\left(C_{D_0}+\frac{4KW^2}{\rho^2 S^2 V^4}\right)$$

$$\boxed{\theta = \frac{T}{W} - \frac{\rho S V_B^2}{2W}\left(C_{D_0}+\frac{4KW^2}{\rho^2 S^2 V_e^4}\right) + \frac{2W}{\rho S C_{L\alpha} V_B^2}}$$

**PROBLEMA 23-11-1992** (PROBLEMA 1 / 1er PARCIAL A+B+CD)

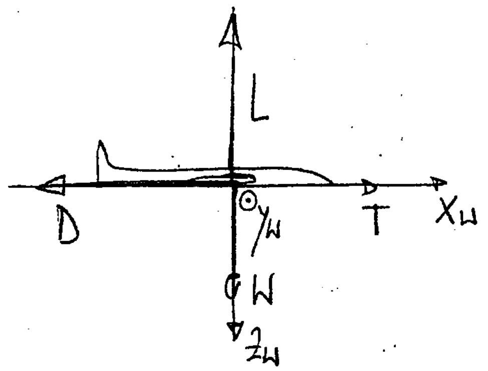
AVIÓN CON TURBORREACTOR: $W, S$

$C_D = C_{D_0} + K C_L^2$

$T = cte$

VIENTO DE CARA ; $V_W = cte$ $\quad \boxed{\vec{V_g} = \vec{V} + \vec{V_W}}$

1) a) TRAMO HORIZONTAL (ACELERADO)




• Relaciones dinámicas: $\frac{dV_g}{dt} = \frac{dV}{dt}$

$L - W = 0$

$T - D = \frac{W}{g}\frac{dV_g}{dt}$

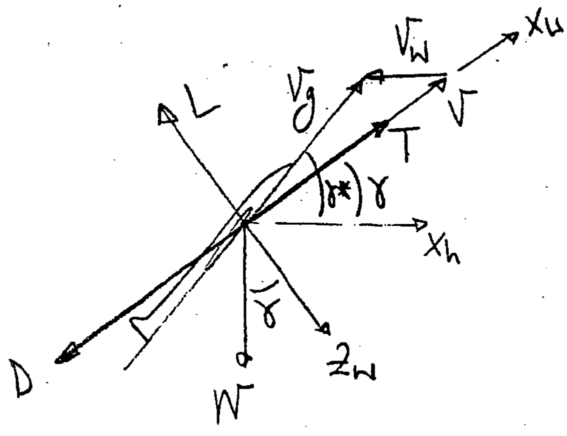
Donde $\vec{V_g} = (V - V_W)\vec{i_W}$

• Relaciones cinemáticas

$h = cte, \quad \dot{h} = 0$

$\dot{x} = V_g = V - V_W$

b) TRAMO DE SUBIDA (a velocidad constante)




• Relaciones dinámicas:

$T - D - W \operatorname{sen}\gamma = 0$

$L - W\cos\gamma = 0$

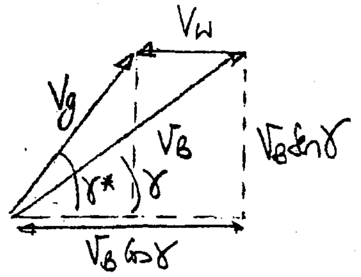
• Relaciones cinemáticas

$\dot{x} = V_g \cos\gamma^*$

$\dot{h} = V_g \operatorname{sen}\gamma^*$

• Ecuaciones para determinar $V_g$ y $\gamma^*$

En la subida $V = cte = V_B$




$$V_W^2 = V_g^2 + V_B^2 - 2 V_g V_B \cos(\gamma^* - \gamma)$$

$$\operatorname{Tg}\gamma^* = \frac{V_B \operatorname{sen}\gamma}{V_B\cos\gamma - V_W}$$

$\vec{V_B} = V_B\cos\gamma\,\vec{i} + V_B \operatorname{sen}\gamma\,\vec{k}$

$tg\,\gamma^* = \frac{V_B \operatorname{sen}\gamma}{V_B\cos\gamma - V_W}$

HORIZONTAL

2) a) $T-D=\frac{W}{g}\frac{dV_g}{dt}=\frac{W}{g}\frac{d(V-V_W)}{dt}=\frac{W}{g}\frac{dV}{dt} \longrightarrow T-\frac{1}{2}\rho V^2 S C_D=\frac{W}{g}\frac{dV}{dt}$ (*)

$D=\frac{1}{2}\rho V^2 S C_D=\frac{1}{2}\rho V^2 S(C_{D0}+KC_L^2)$

$L=W=\frac{1}{2}\rho V^2 S C_L \longrightarrow C_L=\frac{2W}{\rho V^2 S}$

Si sustituimos $C_L$ en (*) : $T-\frac{1}{2}\rho V^2 S\left(C_{D0}+K\left(\frac{2W}{\rho V^2 S}\right)^2\right)=\frac{W}{g}\frac{dV}{dt} \rightarrow V(t)$

Como $\frac{dV_g}{dt}=\frac{dV}{dt}=\frac{dV}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}=\frac{dV}{dx}V_g=\frac{dV}{dx}\cdot(V-V_W)$ $V_g$

Tenemos $T-\frac{1}{2}\rho V^2 S C_{D0}-K\frac{2W^2}{\rho V^2 S}=\frac{W}{g}\frac{dV}{dt}=\frac{W}{g}\frac{dV}{dx}(V-V_W)$ (**)

$$\int_A^B dx=\frac{1}{g}\int_{V_A}^{V_B}\frac{(V-V_W)}{\left(\frac{T}{W}-\frac{\rho S C_{D0}}{2W}V^2-\frac{K2W}{\rho S}\frac{1}{V^2}\right)}\cdot dV \longrightarrow L_{AB}$$

SUBIDA

b) $T-D-W\sin\gamma=0 \longrightarrow \frac{T-D}{W}=\sin\gamma \ll 1$ (DATO ENUNCIADO)

$\begin{cases}\sin\gamma\sim\gamma\\ \cos\gamma\sim 1\end{cases}$

Por tanto $L-W\cos\gamma\simeq L-W=0 \longrightarrow L=W=\frac{1}{2}\rho V_B^2 S C_L \rightarrow C_L=\frac{2W}{\rho V_B^2 S}$

$$\frac{T-D}{W}=\sin\gamma\simeq\gamma=\frac{T}{W}-\frac{1}{W}\left(\frac{1}{2}\rho V_B^2 S C_D\right)=\frac{T}{W}-\frac{\rho S C_{D0}}{2W}V_B^2-\frac{2WK}{\rho S}\frac{1}{V_B^2}=\gamma$$

$$Tg\gamma^*=\frac{V_B\sin\gamma}{V_B\cos\gamma-V_W}\simeq\frac{V_B\gamma}{V_B-V_W}=\gamma\frac{1}{(1-V_W/V_B)} \longrightarrow \gamma^*$$

$\left.\begin{aligned}\dot{x}&=V_g\cos\gamma^*\\ \dot{h}&=V_g\sin\gamma^*\end{aligned}\right\}$ $\frac{dh/dt}{dx/dt}=\frac{\cancel{V_g}\sin\gamma^*}{\cancel{V_g}\cos\gamma^*}=Tg\gamma^*=\underset{\text{cte}}{K} \rightarrow \int_B^P dx=\int_h^{h+\Delta H}\frac{1}{K}dh$

$$L_{BP} = \int_B^P dx = \frac{1}{K}\Delta H = \frac{\Delta H}{Tg\gamma^*} = \left(1-\frac{V_W}{V_B}\right)\cdot\frac{\Delta H}{\gamma} = \left(1-\frac{V_W}{V_B}\right)\frac{\Delta H}{\left(\frac{T}{W}-\frac{\rho S C_{D0}}{2W}V_B^2-\frac{2WK}{\rho S V_B^2}\right)} \to L_{BP}$$

$$L_{TOTAL} = L_{AB} + L_{BP}$$

3) HORIZONTAL

De la expresión (**) : $\frac{T}{W} - \frac{\rho V^2 S C_{D0}}{2W} - \frac{2KW}{\rho V^2 S} = \frac{1}{g}\frac{dV}{dt}$

$$t_{AB} = \int_A^B dt = \frac{1}{g}\int_{V_A}^{V_B} \frac{dV}{\left(\frac{T}{W}-\frac{\rho V^2 S C_{D0}}{2W}-\frac{2KW}{\rho V^2 S}\right)} \longrightarrow t_{AB}$$

SUBIDA

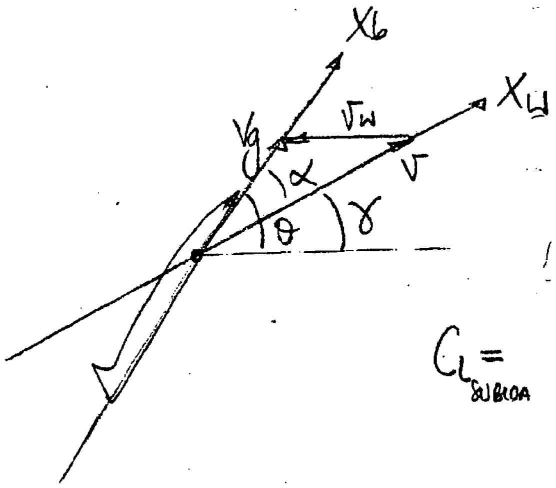
$V_g = cte = \frac{d}{t}$ donde $\begin{cases} d = \sqrt{L_{BP}^2+\Delta H^2} \\ t = t_{BP}\ ;\ V_g = V_B - V_W \end{cases}$

$$t_{BP} = \frac{d}{V_g} = \frac{\sqrt{L_{BP}^2+\Delta H^2}}{V_B-V_W} = \frac{1}{V_B-V_W}\cdot\Delta H\sqrt{1+\left(\frac{(1-V_W/V_B)}{\frac{T}{W}-\frac{\rho S C_{D0}}{2W}V_B^2-\frac{2WK}{\rho S V_B^2}}\right)^2}$$

$$T_{TOTAL} = t_{AB} + t_{BP}$$

4) * ÁNGULO DE ASIENTO : $\theta$ (Ángulo entre el eje $X_b$ y su proyección sobre el plano horizontal)

* $\alpha$ (Ángulo entre la proyección del vector velocidad aerodinámica sobre el plano de simetría del avión y el eje $X_b$.)




$\theta = \alpha + \gamma$ Calculado en 2b)

Donde $\theta = \gamma^*$

$$C_{L_{SUBIDA}} = \frac{2W}{\rho V_B^2 S} = C_{L\alpha}\alpha \rightarrow \alpha = \frac{2W}{\rho V_B^2 S C_{L\alpha}}$$

$$\theta = \frac{T}{W} - \frac{\rho S C_{D0}}{2W} V_B^2 - \frac{2WK}{\rho S} \cdot \frac{1}{V_B^2} + \frac{2W}{\rho S C_{L\alpha} V_B^2}$$

AINARA ZIARRUSTA ATUTXA

**ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS AERONÁUTICOS**

UNIDAD DOCENTE DE MECÁNICA DEL VUELO 17.09.10
E. Final Septiembre *"Mecánica del Vuelo I"*

**PROBLEMA 1º**

La figura adjunta representa un avión efectuando una subida simétrica con las alas a nivel en un plano vertical, contra un viento horizontal asimismo contenido en el plano vertical cuyo perfil de velocidades viene dado por $V_w = k_w z^2$ ($k_w$ es una constante positiva conocida). El vuelo se realiza con velocidad aerodinámica $V$ y con ángulo de asiento de velocidad aerodinámica $\gamma$, ambas constantes positivas conocidas.

Suponiendo además que:

a) Se conocen las características geométricas, aerodinámicas y másicas del avión necesarias para la resolución del problema (en concreto, su peso es constante, la polar es parabólica de coeficientes constantes, $C_{L\max}$ y $C_{L\min}$ son conocidos, $C_{L\delta e} = C_{Lq} = 0$, etc.).
b) El empuje del motor es independiente de la altura y la velocidad, es paralelo al eje $x_w$ y pasa por el centro de masas del avión.
c) El efecto suelo es despreciable y $\rho$ y $g$ son constantes conocidas.

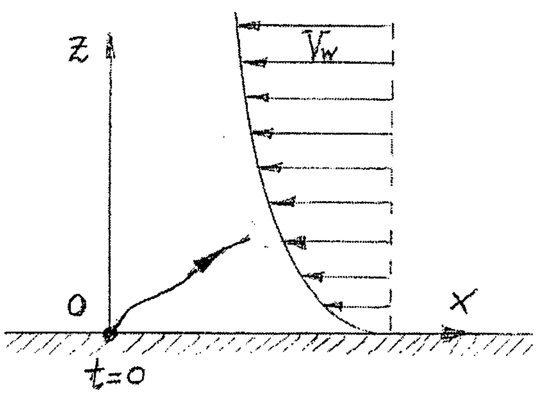
Se pide:

1º) Plantear el sistema general de ecuaciones dinámicas de fuerzas y momentos (en ejes viento) y ecuaciones cinemáticas (en los ejes x-z ligados a tierra de la figura) que permitirían resolver el problema. Determinar el número de grados de libertad matemáticos del sistema.

2º) Determinar la trayectoria del avión respecto a tierra.

3º) Determinar el ángulo de ataque, el empuje y la deflexión del timón de profundidad en función del tiempo y, si procede, de los grados de libertad matemáticos del problema.

4º) Suponiendo que sólo aparezcan limitaciones de tipo aerodinámico (por pérdida), ¿existe algún instante a partir del cual no es posible realizar este vuelo?

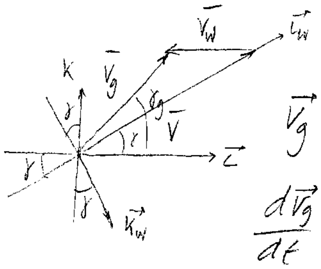



TIEMPO CONCEDIDO: $1^h$

5

1) $T - D - W \operatorname{sen}\gamma = \frac{W}{g} \cdot \frac{dV}{dt}$ (1)

$-L + W\cos\gamma = 0$ (2)




$\vec{V_g} = \vec{V} - \vec{V_W} = (V\cos\gamma - V_W)\,\vec{i} + V\operatorname{sen}\gamma\,\vec{k}$

$\frac{d\vec{V_g}}{dt} = -\frac{d\vec{V_W}}{dt} = -2K_W \cdot z \cdot \frac{dz}{dt}\,\vec{i}$

$\vec{i} = \cos\gamma\,\vec{i_W} + \operatorname{sen}\gamma\,\vec{K_W}$

$\frac{d\vec{V_g}}{dt} = -2K_W z \cdot \frac{dz}{dt}\cos\gamma\,\vec{i_W} - 2K_W z \frac{dz}{dt}\operatorname{sen}\gamma$

$\frac{dx_e}{dt} = V_g\cos\gamma_g = V\cos\gamma - V_W$ (3)

$\frac{dh}{dt} = V_g \operatorname{sen}\gamma_g = V\operatorname{sen}\gamma$ (4)

(1) $\rightarrow$ $T - D - W\operatorname{sen}\gamma = \frac{-W}{g} 2K_W z \frac{dz}{dt}\cos\gamma$

(2) $\rightarrow$ $-L + W\cos\gamma = \frac{-W}{g} 2K_W z \cdot \frac{dz}{dt}\operatorname{sen}\gamma$

$M_A = I_y \cdot \dot{q} = \frac{1}{2}\rho V^2 S c\, C_{MA}$ (5) $\qquad T = T(\pi)$ (10)

$L = \frac{1}{2}\rho V^2 S\, C_L$ (6) $\qquad C_L = C_{L0} + C_{L\alpha}\alpha$ (8)

$D = \frac{1}{2}\rho V^2 S(C_{D0} + K C_L^2)$ (7) $\qquad C_{MA} = C_{m0} + C_{m\alpha}\alpha + C_{m\delta e}\delta e + C_{m\hat{q}}\hat{q}$ (9)

Incógnitas: $T, D, z, L, x_e, C_{MA}, C_L, \alpha, \delta e, \hat{q}$, = 10

Nº eds: 10 $\rightarrow$ $\boxed{NGDL = 0}$

2) (4) $\rightarrow$ $\frac{dz}{dt} = V\operatorname{sen}\gamma$ ; $\int_0^z dz = V\operatorname{sen}\gamma\int_0^t dt \Rightarrow \boxed{z = V\operatorname{sen}\gamma\, t}$

(3) $\rightarrow$ $\frac{dx_e}{dt} = V\cos\gamma - K_W z^2 = V\cos\gamma - K_W V^2\operatorname{sen}^2\gamma\, t^2$

$\int_0^{x_e} dx_e = \int_0^t (V\cos\gamma - K_W V^2\operatorname{sen}^2\gamma\, t^2)\,dt \Rightarrow \boxed{x_e = V\cos\gamma \cdot t - K_W V^2\operatorname{sen}^2\gamma \cdot \frac{t^3}{3}}$

3) (1) $\rightarrow$ $\boxed{T = \frac{1}{2}\rho S V^2 (C_{D0} + K C_L^2) + W\operatorname{sen}\gamma - \frac{2W}{g} \cdot K_W \cdot V^2 \operatorname{sen}^2\gamma\, t\cos\gamma}$

(2) $\rightarrow$ $L = \frac{1}{2}\rho S V^2 C_L = \frac{2W}{g} K_W V^2 \operatorname{sen}^3\gamma\, t + W\cos\gamma \sim C_L = \frac{2W\cos\gamma}{\rho S V^2} + \frac{4W K_W \operatorname{sen}^3\gamma\, t}{\rho S g}$

$\boxed{\alpha = \frac{-C_{L0}}{C_{L\alpha}} + \frac{2W\cos\gamma}{\rho S C_{L\alpha} V^2} + \frac{4W K_W \operatorname{sen}^3\gamma\, t}{\rho S C_{L\alpha} g}}$

$$\boxed{\delta_e = \frac{-1}{C_{m\delta_e}}\left[C_{m0} + C_{m\alpha}\cdot\alpha + C_{m\hat{q}}\,\hat{q}\right]}$$

4) $$C_L = C_{L MAX} = \frac{2WC_0\delta}{\rho S v^2} + \frac{2WK_w\delta_m^3\gamma t}{\rho S g} \;;\; C_{L MAX} - \frac{2WC_0\delta}{\rho S v^2} = \frac{4WK_w\delta_m^3\gamma t}{\rho S g}$$

$$\boxed{t = \frac{\rho S g C_{L MAX}}{4WK_w\delta_m^3\gamma} - \frac{2Wg C_0\delta}{4WK_w\delta_m^3\gamma} = \frac{g}{4K_w W\delta_m^3\gamma}\left[\rho S C_{L MAX} - 2WC_0\gamma\right]}$$

ACADEMIA NEWTON
Hilarión Eslava 12, 2ºA - 91 543 45 12

## H7: 15-09-97

La figura adjunta representa un avión efectuando una subida simétrica con las alas a nivel en un plano vertical, contra un viento horizontal asímismo contenido en el plano vertical cuyo perfil de velocidades viene dado por $V_w = k_w z^2$ ($k_w$ es una constante positiva conocida). El vuelo se realiza con velocidad aerodinámica $V$ y con ángulo de asiento de velocidad aerodinámica $\gamma$, ambas constantes positivas conocidas.

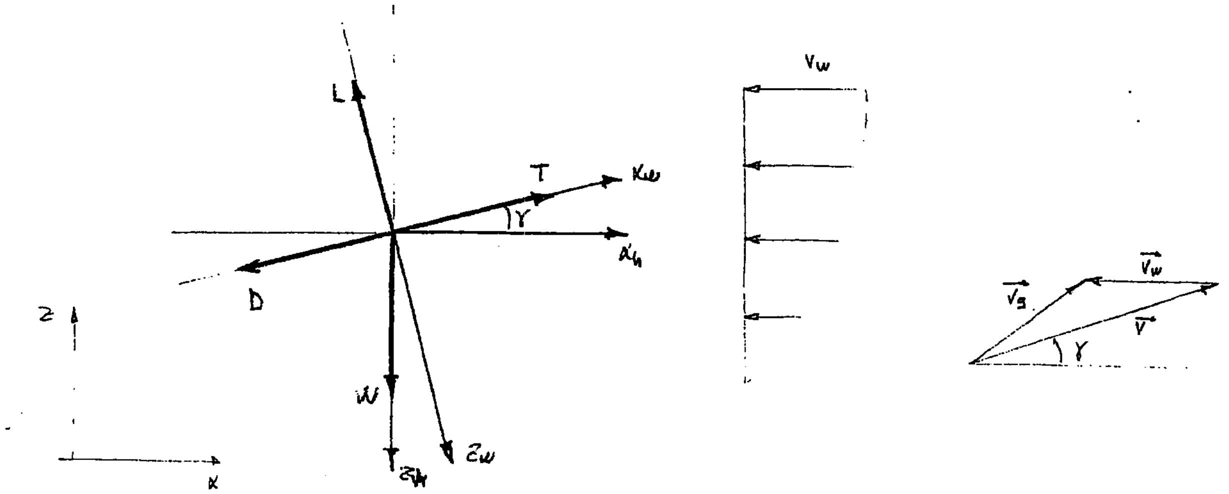
Suponiendo además que:

- Se conocen las características geométricas, aerodinámicas y másicas del avión necesarias para la resolución del problema (en concreto, su peso es constante, $C_{Lmax}$ y $C_{Lmin}$ son conocidos, $C_{L\delta_e} = C_{Lq} = 0$, etc).
- El empuje del motor es independiente de la altura y la velocidad, es paralelo al eje $x_w$ y pasa por el centro de masas del avión.
- El efecto suelo es despreciable y $\rho$ y $g$ son constantes conocidas.

Se pide:

1. Plantear el sistema general de ecuaciones dinámicas de fuerzas y momentos (en ejes viento) y ecuaciones cinemáticas (en los ejes $x - z$ ligados a tierra de la figura) que permitirían resolver el problema. Determinar el número de grados de libertad matemáticos del sistema.
2. Determinar la trayectoria del avión respecto a tierra.
3. Determinar el ángulo de ataque, el empuje y la deflexión del timón de profundidad en función del tiempo y, si procede, de los grados de libertad matemáticos del problema.
4. Suponiendo que sólo aparezcan limitaciones de tipo aerodinámico (por pérdida), ¿existe algún instante a partir del cual no es posible realizar este vuelo?

1)




$$\vec{V_g} = (V\cos\gamma - V_w)\,\vec{i_o} + V\,\text{sen}\,\gamma\,\vec{k_o}$$

$$\frac{d\vec{V_g}}{dt} = -\frac{dV_w}{dt}\,\vec{i_o} = -K_w\,2z\dot{z}\,\vec{i_o}$$

$$\vec{i_o} = \cos\gamma\,\vec{i} + \text{sen}\,\gamma\,\vec{k} \Rightarrow \frac{d\vec{V_g}}{dt} = -2K_w z\dot{z}\cos\gamma\,\vec{i} - 2K_w z\dot{z}\,\text{sen}\,\gamma\,\vec{k}$$

$$\boxed{\begin{aligned} T - D - W\,\text{sen}\,\gamma &= -\frac{W}{g}\,2K_w z\dot{z}\cos\gamma \\ W\cos\gamma - L &= -\frac{W}{g}\,2K_w z\dot{z}\,\text{sen}\,\gamma \\ I_y\,\dot{q} &= \frac{1}{2}\rho V^2 S\cdot c\cdot C_m \\ \frac{dx_e}{dt} &= V\cos\gamma - V_w \\ \frac{dz_e}{dt} &= V\,\text{sen}\,\gamma \end{aligned}}$$

T
D
Z
L
q
x

T (π)
L, D (M, γ, α)
Z → ($V$, γ)
~~$V_w$ → Z~~

$$\left.\begin{aligned} \gamma, V &\rightarrow \text{Conocidas} \\ L, D &\rightarrow \alpha \\ T &\rightarrow \pi \\ Z &\rightarrow V, \gamma \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad NGL = 2 - 2 = 0$$

2)

$$\boxed{\begin{aligned} z_e &= V \operatorname{sen}\gamma \; t \\ x_e &= V\cos\gamma \cdot t - K_w V^2 \operatorname{sen}^2\gamma \, \frac{t^3}{3} \end{aligned}}$$

3)

$$L = \frac{1}{2}\rho V^2 S \left( C_{L_0} + C_{L\alpha}\,\alpha \right) = W\cos\gamma + \frac{W}{g}\, 2K_w\, z \dot{z} \operatorname{sen}\gamma$$

$$C_{L_0} + C_{L\alpha}\,\alpha = \frac{2W}{\rho V^2 S}\left( \cos\gamma + \frac{2K_w}{g} V^2 \operatorname{sen}^3\gamma \, t \right)$$

$$\boxed{\alpha(t) = \frac{1}{C_{L\alpha}}\left[ \frac{2W}{\rho V^2 S}\left( \cos\gamma + \frac{2K_w}{g} V^2 \operatorname{sen}^3\gamma \, t \right) - C_{L_0} \right]}$$

$$T - D - W\operatorname{sen}\gamma = -\frac{W}{g}\, 2K_w\, V^2 \operatorname{sen}^2\gamma \cos\gamma \, t$$

$$\boxed{T = \frac{1}{2}\rho V^2 S \left( C_{D_0} + K\left( C_{L_0} + C_{L\alpha}\,\alpha \right)^2 \right) + W\operatorname{sen}\gamma - \frac{W}{g}\, 2K_w V^2 \operatorname{sen}^2\gamma \cos\gamma \, t}$$

$$\dot{q} = \underbrace{\cancel{\ddot{\alpha}}}_{=0} + \underbrace{\cancel{\ddot{\gamma}}}_{=0} \quad ; \quad \alpha \rightarrow \text{lineal en } t \;, \quad \gamma \rightarrow \text{cte}$$

$$I_y \dot{q} = 0 \Rightarrow \quad C_m = C_{m_0} + C_{m\alpha}\cdot\alpha + C_{m\delta}\,\delta_e + C_{m\bar{q}}\,\bar{q} = 0$$

$$\delta_e = -\frac{C_{m_0}}{C_{m\delta}} - \frac{C_{m\alpha}}{C_{m\delta}}\,\alpha - \frac{C_{m\bar{q}}}{C_{m\delta}}\,\bar{q}$$

$$\bar{q} = \dot{\alpha} = \frac{1}{C_{L\alpha}} \frac{2W}{\rho V^2 S} \frac{2K_w}{g} V^2 \operatorname{sen}^3\gamma$$

$$\boxed{\delta_e = -\frac{C_{m_0}}{C_{m\delta}} - \frac{C_{m\alpha}}{C_{m\delta} C_{L\alpha}}\left[ \frac{2W}{\rho V^2 S}\left( \cos\gamma + \frac{2K_w}{g} V^2 \operatorname{sen}^3\gamma \, t \right) - C_{L_0} \right] - \frac{C_{m\bar{q}}}{C_{m\delta}} \frac{4 W K_w \operatorname{sen}^3\gamma}{C_{L\alpha}\rho S g}}$$

4)

$$C_{L_{min}} < C_{L_0} + C_{L\alpha}\,\alpha < C_{L_{max}}$$

$$\frac{C_{L_{min}}}{C_{L\alpha}} - \frac{C_{L_0}}{C_{L\alpha}} < \alpha < \frac{C_{L_{max}}}{C_{L\alpha}} - \frac{C_{L_0}}{C_{L\alpha}}$$

$$\alpha(t) = \frac{2W\cos\gamma}{\rho V^2 S C_{L\alpha}} + \frac{4WK_W}{\rho V^2 S g C_{L\alpha}} V^2 \operatorname{sen}^3\gamma \cdot t - \frac{C_{L_0}}{C_{L\alpha}}$$

Instante a partir del cual no es posible el vuelo

$$\frac{2W\cos\gamma}{\rho V^2 S} + \frac{4WK_W}{\rho V^2 S g} V^2 \operatorname{sen}^3\gamma \cdot t = C_{L_{max}}$$

$$t = \frac{\rho \cancel{V^2} S \cdot g}{4WK_W \cancel{V^2} \operatorname{sen}^3\gamma}\left(C_{L_{max}} - \frac{2W\cos\gamma}{\rho V^2 S}\right)$$

$$\boxed{t = \frac{\rho g S C_{L_{max}}}{4WK_W \operatorname{sen}^3\gamma} - \frac{g\cos\gamma}{2K_W \operatorname{sen}^3\gamma}}$$

TR.
vuelo simétrico
en plano vertical

ACADEMIA NEWTON
Hilarión Eslava 12, 2ºA - 91 543 45 12

**H7: 15-09-97** $V_w$ variable con $t$

La figura adjunta representa un avión efetuando una subida simétrica con las alas a nivel en un plano vertical, contra un viento horizontal asímismo contenido en el plano vertical cuyo perfil de velocidades viene dado por $V_w = k_w z^2$ ($k_w$ es una constante positiva conocida). El vuelo se realiza con velocidad aerodinámica $V$ y con ángulo de asiento de velocidad aerodinámica $\gamma$, ambas constantes positivas conocidas.

Suponiendo además que:

- Se conocen las características geométricas, aerodinámicas y másicas del avión necesarias para la resolución del problema (en concreto, su peso es constante, $C_{Lmax}$ y $C_{Lmin}$ son conocidos, $C_{L\delta_e} = CL_q = 0$, etc).
- El empuje del motor es independiente de la altura y la velocidad, es paralelo al eje $x_w$ y pasa por el centro de masas del avión.
- El efecto suelo es despreciable y $\rho$ y $g$ son constantes conocidas.

Se pide:

1. Plantear el sistema general de ecuaciones dinámicas de fuerzas y momentos (en ejes viento) y ecuaciones cinemáticas (en los ejes $x - z$ ligados a tierra de la figura) que permitirían resolver el problema. Determinar el número de grados de libertad matemáticos del sistema.
2. Determinar la trayectoria del avión respecto a tierra.
3. Determinar el ángulo de ataque, el empuje y la deflexión del timón de profundidad en función del tiempo y, si procede, de los grados de libertad matemáticos del problema.
4. Suponiendo que sólo aparezcan limitaciones de tipo aerodinámico (por pérdida), ¿existe algún instante a partir del cual no es posible realizar este vuelo?

ACADEMIA NEWTON
Hilarión Eslava 12, 2ºA - 91 543 45 12

**15-09-97**

La figura adjunta representa un avión efetuando una subida simétrica con las alas a nivel en un plano vertical, contra un viento horizontal asímismo contenido en el plano vertical cuyo perfil de velocidades viene dado por $V_w = k_w z^2$ ($k_w$ es una constante positiva conocida). El vuelo se realiza con velocidad aerodinámica $V$ y con ángulo de asiento de velocidad aerodinámica $\gamma$, ambas constantes positivas conocidas.

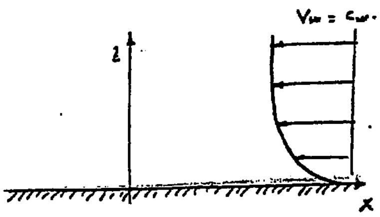
Suponiendo además que:

- Se conocen las características geométricas, aerodinámicas y másicas del avión necesarias para la resolución del problema (en concreto, su peso es constante, $C_{Lmax}$ y $C_{Lmin}$ son conocidos, $C_{L\delta_e} = CL_q = 0$, etc).
- El empuje del motor es independiente de la altura y la velocidad, es paralelo al eje $x_w$ y pasa por el centro de masas del avión.
- El efecto suelo es despreciable y $\rho$ y $g$ son constantes conocidas.

Se pide:

1. Plantear el sistema general de ecuaciones dinámicas de fuerzas y momentos (en ejes viento) y ecuaciones cinemáticas (en los ejes $x - z$ ligados a tierra de la figura) que permitirían resolver el problema. Determinar el número de grados de libertad matemáticos del sistema.
2. Determinar la trayectoria del avión respecto a tierra.
3. Determinar el ángulo de ataque, el empuje y la deflexión del timón de profundidad en función del tiempo y, si procede, de los grados de libertad matemáticos del problema.
4. Suponiendo que sólo aparezcan limitaciones de tipo aerodinámico (por pérdida), ¿existe algún instante a partir del cual no es posible realizar este vuelo?

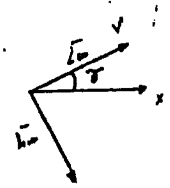
**Problema nº: 15-09-97**




- $C_{L\,max}$, $C_{L\,min}$, $C_{L_q} = 0$ $C_{L_{\dot\delta}} = 0$
- $T \parallel x_w$
- VSPV $\mu = \beta = \dot{\alpha} = \nu = 0$ ¿$V$, $\gamma$ ctes?

Ala a nivel → $\phi = 0$

1) Plantear el sistema general de ecuaciones dinámicas de fuerzas y momentos (en ejes viento) y ecuaciones cinemáticas (en los ejes x-z ligados a tierra de la figura) que permitirían resolver el problema. Determinar el nº de grados de libertad matemáticos del sistema.




$\bar{I} = \cos\gamma \cdot \bar{i}_w + \sin\gamma \cdot \bar{k}_w \Rightarrow \bar{V}_g = V \cdot \bar{i}_w + V_w(-\bar{I}) = V \cdot \bar{i}_w + V_w(-\cos\gamma \cdot \bar{i}_w - \sin\gamma \cdot \bar{k}_w)$

$$\Rightarrow \boxed{\bar{V}_g = (V - V_w \cos\gamma)\,\bar{i}_w - V_w \sin\gamma \cdot \bar{k}_w}$$

En el anterior problema hemos visto las 2 maneras de calcular "m.a". Conocida $\bar{V}_g$ en ejes viento, sólo resta derivar con la precaución de no olvidar: $\frac{\partial \bar{V}_g|_w}{\partial t} + \bar{\omega}_{we} \wedge \bar{V}_g|_w$ (de la otra manera al final del problema)

Como $\gamma = cte \Rightarrow \bar{\omega}_{we} = 0$

$$\dot{\bar{V}}_g|_w = \frac{\partial \bar{V}_g|_w}{\partial t} + \cancel{\bar{\omega}_{we} \wedge \bar{V}_g|_w} = \frac{\partial \bar{V}_g|_w}{\partial t} = -2 \cdot z \cdot \dot{z} \cdot C_w \cos\gamma \cdot \bar{i}_w - 2 \cdot z \cdot \dot{z} \cdot C_w \sin\gamma \cdot \bar{k}_w$$

Finalmente:

$$-D + T - W \sin\gamma = \frac{-W}{g} 2 z \dot{z} C_w \cos\gamma$$
$$-L + W \cos\gamma = \frac{-W}{g} 2 z \dot{z} C_w \sin\gamma$$

$\bar{\omega}_{bh} = \{p, q, r\}$

$\omega_{bh_y} = q$

$\widehat{x_b, x_h} = \theta = \underbrace{\widehat{x_b, x_w}}_{\alpha} + \underbrace{\widehat{x_w, x_h}}_{\gamma} =$

$L = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_L$ $C_L = C_{L_0} + C_{L_\alpha} \cdot \alpha$

$D = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_D$ $C_D = C_{D_0} + k \cdot C_L^2$

$M_A + \cancel{M_T} + \cancel{M_{fus}} = I_y \cdot \dot{q} = q \cdot S \cdot c \cdot C_{m_{cg}}$

$C_{m_{cg}} = C_{m_0} + C_{m_\alpha} \cdot \alpha + C_{m_{\delta e}} \cdot \delta_e + C_{m_q} \cdot \bar{q}$

$\bar{q} = \dot{\alpha} + \cancel{\dot{\gamma}}$ (válida aunque haya viento)

$\dot{\bar{q}} = \dot{\theta} = \dot{\alpha} + \dot{\gamma}$

- Ecs cinemáticas:

$\dot{x} = V\cos\gamma - C_w \cdot z^2$

$\dot{z} = V \sin\gamma$

11 ecs.

Incógnitas: $D, T, z, L, C_L, C_D, \alpha, \bar{q}, C_{m_{cg}}, \delta_e, x$ → 11 incógnitas

$\boxed{N = 11 - 11 = \text{No existe ningún grado de libertad}}$

2º) <u>Determinar la trayectoria del avión respecto a tierra.</u>

$$\dot{x} = V\cdot\cos\gamma - C_w\cdot z^2$$

$$\dot{z} = V\cdot\sin\gamma \rightarrow \boxed{z = V\cdot\sin\gamma\cdot t \rightarrow x = V\cdot\cos\gamma\cdot t - C_w\cdot V^2\cdot\sin^2\gamma\cdot\frac{t^3}{3}}$$

3º) <u>Determinar el ángulo de ataque, el empuje y la deflexión del timón de profundidad en función del tiempo y, si puede, de los grados de libertad matemáticos del problema.</u>

- $$\left.\begin{array}{l} L = \frac{1}{2}\rho S V^2 C_L \\ C_L = C_{L0} + C_{L\alpha}\cdot\alpha \end{array}\right\} L = \frac{1}{2}\rho S V^2 (C_{L0} + C_{L\alpha}\cdot\alpha)$$

$$\frac{1}{2}\rho V^2 S\,(C_{L0} + C_{L\alpha}\cdot\alpha) = W\cdot\cos\gamma + 2\,\frac{W}{g}\cdot C_w\cdot\sin\gamma\cdot\underbrace{V\sin\gamma}_{\dot{z}}\cdot\underbrace{V\sin\gamma\cdot t}_{z} \rightarrow$$

$$\rightarrow \boxed{\alpha = 2\cdot\frac{W\cdot\cos\gamma + \frac{2W}{g}\cdot C_w\cdot V^2\cdot\sin^2\gamma\cdot t}{\rho V^2\cdot S\cdot C_{L\alpha}} - \frac{C_{L0}}{C_{L\alpha}}}$$

- $$\boxed{T = D + W\cdot\sin\gamma - \frac{2W}{g}\,C_w\cdot\cos\gamma\cdot\underbrace{V\cdot\sin\gamma}_{\dot{z}}\cdot\underbrace{V\cdot\sin\gamma\cdot t}_{z} \quad ; \quad D = \frac{1}{2}\rho S V^2\left(C_{D0} + k\,(C_{L0} + C_{L\alpha}\cdot\alpha)^2\right)}$$

- $$I_y\cdot\dot{\bar{q}} = I_y\,(\ddot{\alpha} + \ddot{\gamma}) = q\cdot S\cdot c\cdot(C_{m0} + C_{m\alpha}\cdot\alpha + C_{m\delta}\cdot\delta_e + C_{m\bar{q}}\cdot\bar{q})$$

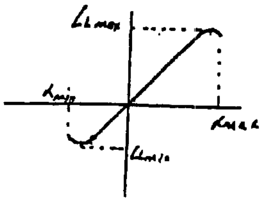
$$\alpha = \alpha(t)\ .\ \bar{q} = \dot{\alpha} + \cancel{\dot{\gamma}}^{0}\ ;\ \dot{\bar{q}} = \ddot{\alpha} + \cancel{\ddot{\gamma}}^{0}$$

$\hookrightarrow$ vemos que $\alpha = \alpha(t)$ es lineal con $t \rightarrow \dot{\alpha} = cte \rightarrow \ddot{\alpha} = 0 \rightarrow$

$$\rightarrow C_{m0} + C_{m\alpha}\cdot\alpha + C_{m\delta}\cdot\delta_e + C_{m\bar{q}}\,\dot{\alpha} = 0\ . \rightarrow \boxed{\delta_e = -\frac{\alpha}{C_{m\delta}}\left\{C_{m\alpha}\ .+ C_{m\bar{q}}\right\}}$$

4º) <u>Suponiendo que sólo aparecen limitaciones de tipo aerodinámico (por pérdidas), ¿existe algún instante a partir del cual no es posible realizar este vuelo?</u>

$$C_L = C_{L0} + C_{L\alpha}\cdot\alpha$$



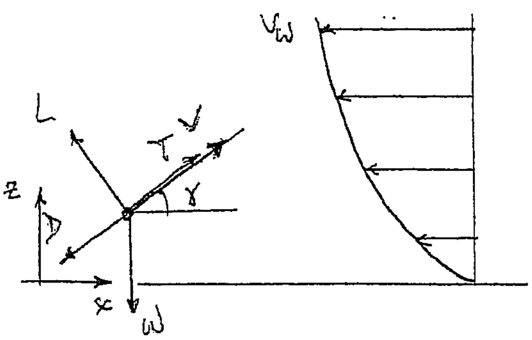

$$C_{Lmin} < C_L = C_{L0} + C_{L\alpha}\cdot\alpha < C_{Lmax}$$

$$\boxed{\frac{C_{Lmin}}{C_{L\alpha}} - \frac{C_{L0}}{C_{L\alpha}} < \alpha < \frac{C_{Lmax}}{C_{L\alpha}} - \frac{C_{L0}}{C_{L\alpha}}}$$

Como calcular la $\dot{\bar{V}}_g$ de la otra manera: $\bar{V}_g\big|_e = (V\cdot\cos\gamma - C_w\cdot z^2)\cdot\bar{i}_e + V\cdot\sin\gamma\cdot\bar{k}_e$ $\xrightarrow[\text{como son ejes absolutos}]{\text{derivando}}$

$$\longrightarrow \dot{\bar{V}}_g\big|_e = -2\cdot z\cdot\dot{z}\cdot C_w\cdot\vec{i}_e \xrightarrow[\text{a ejes viento}]{\text{proyecto}} (\bar{i}_e = \cos\gamma\cdot\bar{i}_w + \sin\gamma\cdot\bar{k}_w) \rightarrow \boxed{\dot{\bar{V}}_g\big|_w = -2\cdot z\cdot\dot{z}\,C_w\cdot\cos\gamma\,\bar{i}_w - 2\cdot z\cdot\dot{z}\cdot C_w\cdot\sin\gamma\cdot\bar{k}_w}$$

$\boxed{\text{H7 (15-09-97)}}$




<u>Datos</u>: $V, \gamma$ = ctes

$T \parallel i_w$

$V_w = C_w z^2$

$\boxed{1}$ <u>Est. ecs</u> y <u>nº gdl</u>

$$\vec{V}_w = -V_w \vec{i} = -V_w \left(\cos\gamma\, \vec{i}_w + \operatorname{sen}\gamma\, \vec{k}_w\right) \quad ; \quad V_w = C_w z^2$$

$$\vec{V}_g = \vec{V} + \vec{V}_w = \left(V - V_w \cos\gamma\right)\vec{i}_w - V_w \operatorname{sen}\gamma\, \vec{k}_w$$

$\vec{\omega}_{wh} = \vec{0}$ ($\gamma$=cte) ⇒ mejor derivar en ejes móviles !!

$$\left.\frac{d\vec{V}_g}{dt}\right|_h = \left.\frac{\partial \vec{V}_g}{\partial t}\right|_w + \cancel{\vec{\omega}_{wh} \wedge \vec{V}_g}\Big|_w = -2C_w z\dot{z}\cos\gamma\, \vec{i}_w - 2C_w z\dot{z}\operatorname{sen}\gamma\, \vec{k}_w$$

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow \begin{cases} T - D - W\operatorname{sen}\gamma = -2C_w z\dot{z}\cos\gamma \cdot \frac{W}{g} & (1) \\ -L + W\cos\gamma = -\frac{W}{g} 2C_w z\dot{z}\operatorname{sen}\gamma & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = V\cos\gamma - V_w & (3) \\ \dot{z} = V\operatorname{sen}\gamma & (4) \end{cases}$$

$$L = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_L \quad ; \quad C_L = C_{L0} + C_{L\alpha}\alpha \qquad (5), (6)$$

$$D = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_D \quad ; \quad C_D = C_{D0} + kC_L^2 \qquad (7), (8)$$

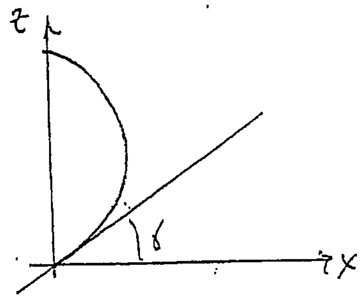
<u>Ec momento</u>: $M_A = \frac{1}{2}\rho V^2 S c\, C_m = I_y \dot{\bar{q}}$ ; $\bar{q} = \cancel{\dot{\alpha}} + \cancel{\dot{\gamma}}$ (9), (10)

$$C_m = C_{m0} + C_{m\alpha}\alpha + C_{m\delta_e}\delta_e + C_{mq}\bar{q} \qquad (11)$$

11 ecs.

11 incognitas: $T, D, L, X, z, C_L, C_D, \alpha, C_m, \bar{q}, \delta_e$ } ⇒ 0 gdl

2 Trayectoria respecto a tierra




$$\begin{cases} \dot{x} = V\cos\gamma - C_\omega z^2 \Rightarrow \boxed{x = V\cos\gamma\, t - C_\omega V^2 \operatorname{sen}^2\gamma \cdot \frac{t^3}{3}} \\ \dot{z} = V\operatorname{sen}\gamma \Rightarrow \boxed{z = V\operatorname{sen}\gamma \cdot t} \end{cases}$$

---

3 $\alpha, T, \delta_e = f(t,$ gdl cinemáticos$)$

$$L = W\cos\gamma + \frac{W}{g} 2C_\omega z\dot{z}\operatorname{sen}\gamma = W\cos\gamma + \frac{W}{g}2C_\omega (V\operatorname{sen}\gamma \cdot t)(V\operatorname{sen}\gamma)\operatorname{sen}\gamma \Rightarrow$$

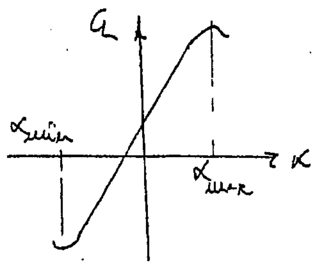
$$\Rightarrow \frac{1}{2}\rho V^2 S (C_{L0} + C_{L\alpha}\alpha) = W\cos\gamma + \frac{2W}{g}C_\omega V^2\operatorname{sen}^3\gamma \cdot t \Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{2WC_\omega}{qSC_{L\alpha}g}V^2\operatorname{sen}^3\gamma\cdot t + \frac{W}{qSC_{L\alpha}}\cos\gamma - \frac{C_{L0}}{C_{L\alpha}}}$$

$$\alpha \to C_L \to C_D \xrightarrow{(1)} T = D + W\operatorname{sen}\gamma - \frac{W}{g}2C_\omega z\dot{z}\cos\gamma = \dots$$

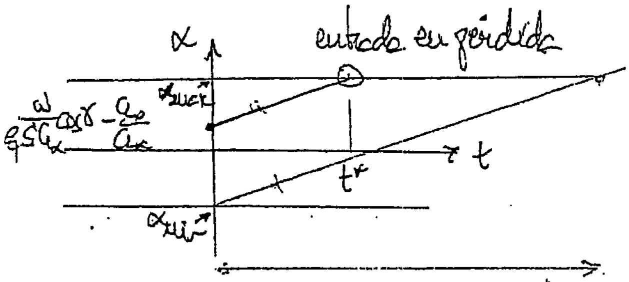
$$\alpha \to C_m \xrightarrow[(9)]{} \delta_e = \dots$$

---

4




$$\boxed{\begin{aligned} \alpha_{max} &= \frac{C_{Lmax} - C_{L0}}{C_{L\alpha}} \\ \alpha_{min} &= \frac{C_{Lmin} - C_{L0}}{C_{L\alpha}} \end{aligned}}$$



CATEDRA DE MECANICA DEL VUELO – 1^er E. Parcial – B+CD 26.11.91

PROBLEMA 1º

Un avión provisto de turborreactor, cuyas características geométricas, aerodinámicas y másicas son conocidas, efectúa una subida simétrica en el plano vertical con velocidad aerodinámica $V$ y ángulo de asiento de velocidad aerodinámica $\gamma$ constantes y conocidos. La subida se realiza contra un viento horizontal, contenido en el plano vertical, cuyo perfil de velocidades viene dado por:

$$\frac{V_W(z)}{V_{W_1}} = \left(\frac{z}{z_1}\right)^{\tau}, \quad 0 \le z \le z_1$$

$$V_W(z) = V_{W_1}, \quad z_1 \le z$$

donde $V_{W_1}$, $z_1$, $\tau > 1$ son constantes conocidas.

Suponiendo además que:

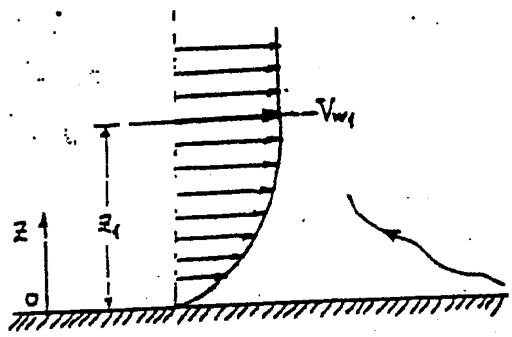
a) El peso del avión $W$, la densidad atmosférica $\rho$ y la constante de la gravedad $g$, son constantes conocidas.

b) El empuje de los motores $T$ es función únicamente del parámetro de control $\pi$ y tiene un ángulo de ataque $\varepsilon \simeq 0$.

Se pide:

1º) Plantear el sistema de ecuaciones dinámicas (en ejes viento) y cinemáticas que permitirían resolver el problema y determinar el número de grados de libertad matemáticos del mismo.

2º) Suponiendo que $\gamma \ll 1$ y que $V_{W_1} \ll V$, determinar el ángulo de ataque, $\alpha$, y el empuje, $T$, en función de los grados de libertad del problema y del tiempo.



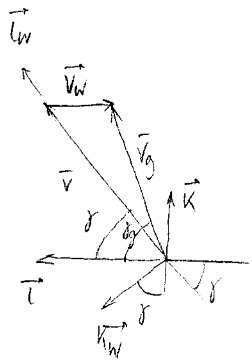

TIEMPO CONCEDIDO: $1^h$

(6)

1)

$$T - D - W \operatorname{sen}\gamma = \frac{W}{g}\cdot\frac{dV}{dt} \quad (1)$$

$$-L + W\cos\gamma = 0 \quad (2)$$




$$V_g \operatorname{sen}\gamma_g = V\operatorname{sen}\gamma$$

$$V_g \cos\gamma_g + V_W = V\cos\gamma$$

$$\operatorname{tg}\gamma_g = \frac{V\operatorname{sen}\gamma}{V\cos\gamma - V_W}$$

$0 \le z \le z_1$:

$$V_W(z) = V_{W1}\left(\frac{z}{z_1}\right)^r$$

$$\vec{V_g} = \vec{V} - \vec{V_W} = (V\cos\gamma - V_W)\,\vec{i} + V\operatorname{sen}\gamma\,\vec{K} \qquad \vec{i} = \cos\gamma\,\vec{i_W} + \operatorname{sen}\gamma\,\vec{K_W}$$

$$V_g^2 = V^2 - 2VV_W\cos\gamma + V_W^2$$

$$\frac{d\vec{V_g}}{dt} = -\frac{d\vec{V_W}}{dt} = -r\,\frac{V_{W1}}{z_1^{\,r}}\cdot z^{r-1}\cdot\frac{dz}{dt}$$

$$(1) \rightarrow T - D - W\operatorname{sen}\gamma = -\frac{W r V_{W1}}{g z_1^{\,r}}\cdot z^{r-1}\cdot\frac{dz}{dt}\cos\gamma$$

$$(2) \rightarrow L = W\cos\gamma - \frac{W r V_{W1}}{g z_1^{\,r}}\cdot z^{r-1}\cdot\frac{dz}{dt}\operatorname{sen}\gamma$$

$$\frac{dx_e}{dt} = V_g\cos\gamma_g = V\cos\gamma - V_W \quad (3)$$

$$\frac{dh}{dt} = V_g\operatorname{sen}\gamma_g = V\operatorname{sen}\gamma \quad (4)$$

$$L = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_L \quad (5) \qquad ; \quad C_L = C_{L0} + C_{L\alpha}\,\alpha \quad (7)$$

$$D = \frac{1}{2}\rho S V^2 (C_{D0} + K C_L^2) \quad (6) \quad ; \quad T = T(\pi) \quad (8)$$

Incógnitas: $T, D, z, L, x_e, C_L, \alpha, \pi = 8$

Ecs: $8$

$\rightarrow \boxed{NGDL = 0}$

$z_1 \le z$:

$$T - D - W\operatorname{sen}\gamma = 0 \quad (1)$$

$$-L + W\cos\gamma = 0 \quad (2)$$

$$\frac{dx_e}{dt} = V_g\cos\gamma_g = V\cos\gamma - V_{W1} \quad (3)$$

$$\frac{dh}{dt} = V_g\operatorname{sen}\gamma_g = V\operatorname{sen}\gamma \quad (4)$$

$$L = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_L \quad (5) \qquad C_L = C_{L0} + C_{L\alpha}\,\alpha \quad (7)$$

$\boxed{NGDL = 0}$

$$D = \frac{1}{2}\rho V^2 S (C_{D0} + K C_L^2) \quad (6) \qquad T = T(\pi) \quad (8)$$

a) $\underline{0 \leq z \leq z_1}$ :

$$(4) \longrightarrow \int_0^z dh = \int_0^t V \operatorname{sen}\gamma \, dt \rightsquigarrow z = V \operatorname{sen}\gamma \, t$$

$$(2) \longrightarrow L = W\cos\gamma - \frac{W r V_{W1}}{g z_1^r} (V \operatorname{sen}\gamma \, t)^{r-1} \cdot V \operatorname{sen}\gamma \, \operatorname{sen}\gamma = W\cos\gamma - \frac{W r V_{W1}}{g z_1^r} (V \operatorname{sen}\gamma)^r \operatorname{sen}\gamma \cdot t^{r-1}$$

$$C_L = \frac{2W \cancelto{1}{\cos\gamma}}{\rho V^2 S} - \frac{2 W r V_{W1}}{g z_1^r \rho S} V^{r-2} \cdot \operatorname{sen}\gamma^{r+1} \cdot t^{r-1} = \frac{2W}{\rho S V^2} - \frac{2 W r V_{W1}}{g z_1^r \rho S} \cdot V^{r-2} \cdot \gamma^{r+1} \cdot t^{r-1}$$

$$(1) \longrightarrow T = W \operatorname{sen}\gamma + \frac{1}{2}\rho S V^2 (C_{D0} + K C_L^2) - \frac{W r V_{W1}}{g z_1^r} \cdot (V \operatorname{sen}\gamma)^r \cancelto{1}{\cos\gamma} \, t^{r-1}$$

$$\boxed{T = W\gamma + \frac{1}{2}\rho S V^2 (C_{D0} + K C_L^2) - \frac{W r V_{W1}}{g z_1^r} \cdot (V\gamma)^r t^{r-1}}$$

$$(7) \longrightarrow \boxed{\alpha = \frac{-C_0}{C_{L\alpha}} + \frac{2W}{\rho S C_{L\alpha} V^2} - \frac{2 W r V_{W1}}{g z_1^r \rho S C_{L\alpha}} V^{r-2} \cdot \gamma^{r+1} \cdot t^{r-1}}$$

$\underline{z_1 < z}$ :

$$C_L = \frac{2W}{\rho S V^2}$$

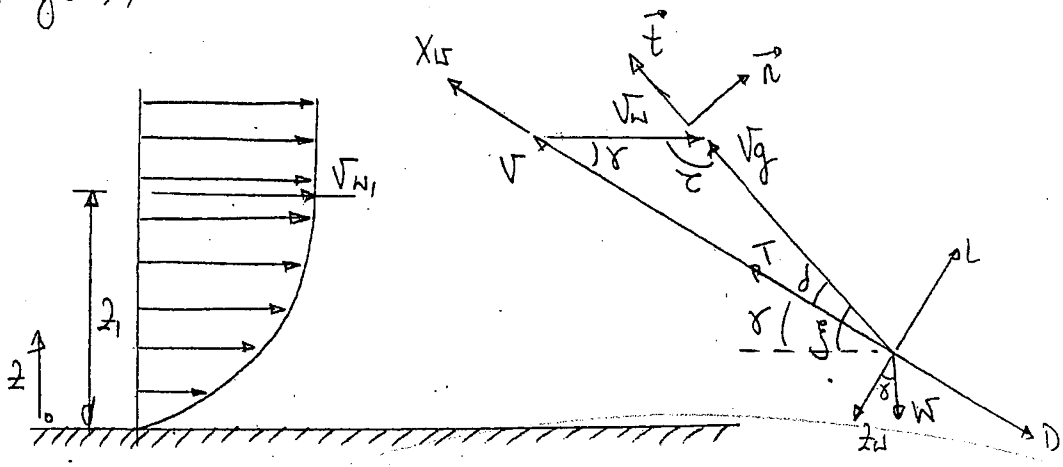
$$\boxed{T = W\gamma + \frac{1}{2}\rho S V^2 \left(C_{D0} + \frac{4KW^2}{\rho^2 S^2 V^4}\right)}$$

$$\boxed{\alpha = \frac{-C_0}{C_{L\alpha}} + \frac{2W}{\rho S C_{L\alpha} V^2}}$$

26-11-1991 (PROBLEMA 1 / 1º PARCIAL B+CD)

- Velocidad del viento: $\begin{cases} \dfrac{V_W(z)}{V_{W_1}} = \left(\dfrac{z}{z_1}\right)^{\gamma} ; & 0 \le z \le z_1 \\ V_W(z) = V_{W_1} ; & z_1 \le z \end{cases}$  $V_W, z_1, \gamma > 1$ son constantes conocidas.

- $W, \rho, g$ constantes conocidas,
- $T = f(\pi)$ ; $\varepsilon \simeq 0$




$\vec{V_g} = \vec{V} + \vec{V_W}$ ; TEOREMA DEL COSENO: $\boxed{V_g^2 = V^2 + V_W^2 - 2VV_W\cos\gamma}$

TEOREMA DEL SENO: $\dfrac{\operatorname{sen}\tau}{V} = \dfrac{\operatorname{sen}\delta}{V_W}$ Donde $\tau = \pi - \gamma - \delta$

$\operatorname{sen}\tau = \operatorname{sen}(\pi - (\gamma+\delta)) = \underbrace{\operatorname{sen}\pi}_{0}\cos(\gamma+\delta) - \underbrace{\cos\pi}_{-1}\operatorname{sen}(\gamma+\delta) = \operatorname{sen}(\gamma+\delta)$

$\operatorname{sen}\tau = \operatorname{sen}(\gamma+\delta) = \operatorname{sen}\gamma\cos\delta + \cos\gamma\operatorname{sen}\delta$

Por tanto, $\operatorname{sen}\delta = \dfrac{V_W}{V}\operatorname{sen}\tau = \dfrac{V_W}{V}(\operatorname{sen}\gamma\cos\delta + \cos\gamma\operatorname{sen}\delta)$

$1 = \dfrac{V_W}{V}\left(\operatorname{sen}\gamma \cdot \dfrac{1}{\operatorname{Tg}\delta} + \cos\gamma\right) \rightarrow \boxed{\operatorname{Tg}\delta = \dfrac{\operatorname{sen}\gamma}{\dfrac{V}{V_W} - \cos\gamma}}$

- ECUACIONES CINEMÁTICAS: $\begin{cases} \dot{x} = V_g\cos\xi = \dfrac{dx}{dt} \\ \dot{z} = V_g\operatorname{sen}\xi = \dfrac{dz}{dt} \end{cases}$ $(\xi = \gamma + \delta)$

ACELERACIÓN

- $\dfrac{W}{g}\cdot\vec{\gamma} = \dfrac{W}{g}\left(\boxed{\dfrac{dV_g}{dt}\vec{t} + V_g\dfrac{d\xi}{dt}\vec{n}}\right) = \dfrac{W}{g}\left(\left(\dfrac{dV_g}{dt}\cos\delta - V_g\dfrac{d\xi}{dt}\operatorname{sen}\delta\right)\vec{i_W} - \left(\dfrac{dV_g}{dt}\operatorname{sen}\delta + V_g\dfrac{d\xi}{dt}\cos\delta\right)\vec{K_W}\right)$

$\begin{cases} \vec{t} = \cos\delta\,\vec{i_W} - \operatorname{sen}\delta\,\vec{K_W} \\ \vec{n} = -\operatorname{sen}\delta\,\vec{i_W} - \cos\delta\,\vec{K_W} \end{cases}$

## Ecuaciones DINÁMICAS:

$$\bar{k}_h)\quad -L + W\cos\gamma = -\frac{W}{g}\left(\frac{dV_g}{dt}\operatorname{sen}\delta + V_g\frac{d\xi}{dt}\cos\delta\right)$$

$$\bar{i}_h)\quad T - D - W\operatorname{sen}\gamma = \frac{W}{g}\left(\frac{dV_g}{dt}\cos\delta - V_g\frac{d\xi}{dt}\operatorname{sen}\delta\right)$$

Necesitamos calcular: $\frac{dV_g}{dt}$; $\frac{d\xi}{dt}$

viene de derivar
$V_g^2 = V^2 + V_w^2 - 2V_w V\cos\gamma$

$$* \quad \cancel{2}V_g\frac{dV_g}{dt} = \cancel{2}V_w\frac{dV_w}{dt} - \cancel{2}V\frac{dV_w}{dt}\cos\gamma\ ; \qquad \frac{dV_g}{dt} = \frac{1}{V_g}\cdot\frac{dV_w}{dt}(V_w - V\cos\gamma)$$

$$\frac{dV_w}{dt} = \frac{dV_w}{dz}\cdot\underbrace{\frac{dz}{dt}}_{V_g\operatorname{sen}\xi \text{ (Ecuación cinemática)}} = \frac{dV_w}{dz}\cdot V_g\operatorname{sen}\xi$$

Por tanto: $$\frac{dV_g}{dt} = \frac{1}{\cancel{V_g}}\frac{dV_w}{dz}\cdot\cancel{V_g}\operatorname{sen}\xi\cdot(V_w - V\cos\gamma) = \frac{dV_w}{dz}\operatorname{sen}\xi(V_w - V\cos\gamma)$$

$$* \quad \xi = \gamma + \delta\ ; \qquad \frac{d\xi}{dt} = \underbrace{\cancel{\frac{d\gamma}{dt}}}_{0} + \frac{d\delta}{dt} = \frac{d\delta}{dt} = \frac{d\delta}{d(V_w/V)}\cdot\frac{d(V_w/V)}{dz}\cdot\underbrace{\frac{dz}{dt}}_{V_g\operatorname{sen}\xi}$$

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{d\delta}{dV_w}\cdot\frac{dV_w}{dz}\cdot V_g\operatorname{sen}\xi$$

De esta forma conseguimos que: $\left|\begin{array}{l} T - D - W\operatorname{sen}\gamma = f(V_w, z) = f(z) \\ L + W\cos\gamma = g(V_w, z) = g(z)\end{array}\right.$

Si además tenemos la polar parabólica: $C_D = C_{D0} + KC_L^2$

Tenemos cuatro incógnitas: $L, W, D$ y $z$ con tres ecuaciones, es decir, solo tenemos un grado de libertad.

2) Si $\gamma \ll 1 \rightarrow \begin{cases} \sin\gamma \sim \gamma \\ \cos\gamma \sim 1 \end{cases}$

Despreciamos los términos de orden superior a $V_W/V$

$$* \quad V_g^2 = V^2 + V_W^2 - 2 V V_W \cos\gamma$$

$$\frac{V_g^2}{V^2} = 1 + \cancel{\left(\frac{V_W}{V}\right)^2} - 2\frac{V_W}{V}\cos\gamma \sim 1 - 2\frac{V_W}{V} \longrightarrow \frac{V_g}{V} = \sqrt{1 - 2\frac{V_W}{V}}$$

$$* \quad \operatorname{Tg}\delta = \frac{\sin\gamma}{\frac{V}{V_W} - \cos\gamma} \sim \frac{\gamma}{\frac{V}{V_W} - 1} \sim \underbrace{\gamma\frac{V_W}{V}}_{\text{Término de 2º orden } (\gamma \ll;\ \frac{V_W}{V} \ll 1)} \sim 0 \longrightarrow \delta = 0$$

$$* \quad \frac{dV_g}{dt} = \frac{dV_W}{dz}\sin\xi\,(V_W - V\cos\gamma) \qquad \frac{dV_g}{dt} \sim \frac{dV_W}{dz}\gamma\,(V_W - V) = V\frac{dV_W}{dz}\left(\underbrace{\gamma\frac{V_W}{V}}_{\text{Término de 2º orden}} - \gamma\right)$$

$$\xi = \gamma + \delta \sim \gamma$$

$$\frac{dV_g}{dt} \sim -V\frac{dV_W}{dz}\gamma$$

$$* \quad \frac{d\xi}{dt} = \frac{d\delta}{dV_W}\cdot\frac{dV_W}{dz}\cdot V_g \sin\xi \sim \frac{d\delta}{dV_W}\cdot\frac{dV_W}{dz} V_g \cdot\gamma \sim 0$$

$$\xi = \gamma + \delta \sim \gamma$$

Por tanto las ecuaciones dinámicas quedan:

$$\begin{cases} -L + W = +\frac{W}{g}V\frac{dV_W}{dz}\gamma\cdot\delta \sim 0 \quad (1); \quad L = W = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_L = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_{L\alpha}\alpha \\ T - D - W\gamma = -\frac{W}{g}V\frac{dV_W}{dz}\gamma \quad (2) \qquad \hookrightarrow \boxed{\alpha = \frac{2W}{\rho V^2 S C_{L\alpha}}} \end{cases}$$

$$* \quad D = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_D = \frac{1}{2}\rho V^2 S (C_{D0} + K C_L^2) = \frac{1}{2}\rho V^2 S \left(C_{D0} + K\left(\frac{2W}{\rho S V^2}\right)^2\right) = \frac{1}{2}\rho V^2 C_{D0} S + K\frac{2W^2}{\rho S V^2}$$

$$\begin{cases} \frac{dV_W}{dz} = V_{W1}\cdot r\left(\frac{z^{r-1}}{z_1 r}\right) = \frac{V_{W1}}{z_1} r\cdot\left(\frac{z}{z_1}\right)^{r-1} & 0 \leq z \leq z_1 \\ \frac{dV_W}{dz} = 0 & z_1 \leq z \end{cases}$$

Por tanto, sustituyendo en (2):

$$T = D + W\gamma - \frac{W}{g} v \frac{dV_W}{dz}\gamma \qquad \boxed{\begin{cases} T = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_{D_0} + K\left(\frac{2W^2}{\rho S V^2}\right) + W\gamma - \frac{W}{g} v \left(\frac{V_{W1}}{z_1}\right) r \left(\frac{z}{z_1}\right)^{r-1} \gamma ; & \underline{\underline{0 \leq z \leq z_1}} \\ T = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_{D_0} + K\left(\frac{2W^2}{\rho S V^2}\right) + W\gamma & \underline{\underline{z_1 \leq z}} \end{cases}}$$

C-98

**PROBLEMA 15 (24-11-87)**

Se considera un avión provisto de turborreactor cuya polar viene definida por la relación $C_D = C_{D_0} + kC_L^2$ siendo $C_{D_0}$ y $k$ constantes dentro del intervalo de $C_L$ considerado .

A partir de su base de operaciones pretende realizar una misión militar contra un objetivo situado a cierta distancia , para lo cual el piloto efectúa una subida rectilínea hasta la vertical del objetivo , sin cambiar de sentido , con ángulo de asiento de velocidad aerodinámica $\gamma_s$ , constante y no conocido , para despues volver planeando hacia su base , asimismo rectilíneamente y sin cambiar de sentido .

Se supone además que :

a) La carga adimensional de combustible es mucho menor que uno : $\zeta = W_F/W_i < 1$ .

b) Todos los ángulos que intervienen en el problema son pequeños.

c) Toda la misión se realiza a velocidad aerodinámica adimensional igual a uno , $\hat{v} = 1$ .

d) La densidad atmosférica es constante en el margen de variación de alturas considerado .

e) La distancia recorrida por el avión en la transición de las condiciones de subida a las de planeo es despreciable .

f) Son conocidos los datos geométricos y aerodinámicos del avión , además de su peso en el instante inicial , $W_i$ , y del consumo específico del motor , $c$ .

Si existe un viento moderado , cuya velocidad adimensionalizada usualmente ($\hat{v}_w$) se supone constante , en la dirección base-objetivo y en cualquiera de los dos sentidos posibles del viento , se pide :

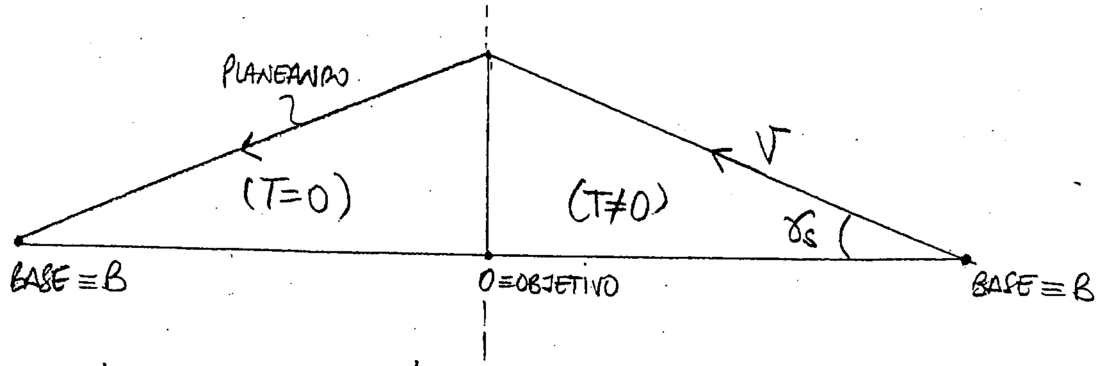
1°) Plantear la expresión que proporciona la distancia total recorrida (subida hasta el objetivo y vuelta planeando ) en función de los datos conocidos , de $\hat{v}_w$ , de $\gamma_s$ y de $\zeta$ para los dos sentidos posibles del viento . Representar dichas distancias en función de $\gamma_s$.

2ª) Calcular los valores de $\gamma_s$ y de $\zeta$ que garantizan la vuelta del avión a su base, situada a una distancia D del objetivo, para los dos sentidos posibles del viento. Representar estas dos misiones en el diagrama del apartado anterior.

3ª) Demostrar que si el viento sopla la mitad de los días del mes en un sentido y la otra mitad en sentido contrario pero con igual $v_w$, y el piloto realiza una misión diaria siempre con el mismo $\gamma_s$ y el mismo $\zeta$, la suma de las distancias recorridas al cabo del mes es independiente de $v_w$ y de $\gamma_s$.

# PROBLEMA 15 (24-11-1987)

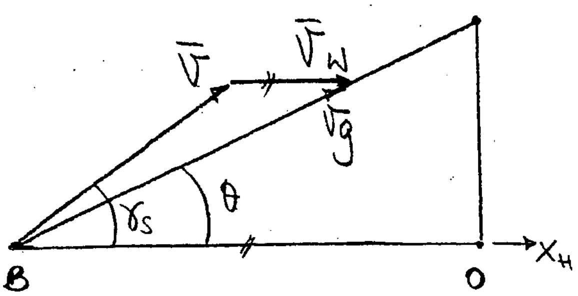
- POLAR DEL AVIÓN : $C_D = C_{D0} + K C_L^2$



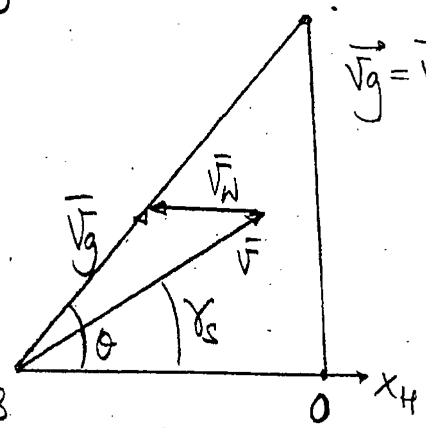

- $\gamma_s \equiv cte$, pero <u>no</u> es dato.
- $\zeta = W_F / W_i \ll 1$
- Toda la misión se realiza con $\hat{V}=1$ ; $\frac{V}{V_B} = \hat{V} \longrightarrow V = \hat{V} V_B = 1 \cdot \sqrt{\frac{2W}{\rho S}} \sqrt[4]{\frac{K}{C_{D0}}} = cte.$
- $\rho$ es constante
- $W_i$ y $C$ son conocidos
- $V_W = cte.$ $(\hat{V}_W = V_W / V_B)$

## 1) SUBIDA HASTA EL OBJETIVO : $\vec{V_g} = \vec{V} + \vec{V_W}$

$\vec{V_g} = \vec{V} + V_W \vec{i_H}$ ;




$\vec{V_g} = \vec{V} - V_W \vec{i_H}$




$V_{gx} = V\cos\gamma_s + V_W$

$V_{gy} = V\sin\gamma_s$

$V_{gx} = V\cos\gamma_s - V_W$

$V_{gy} = V\sin\gamma_s$

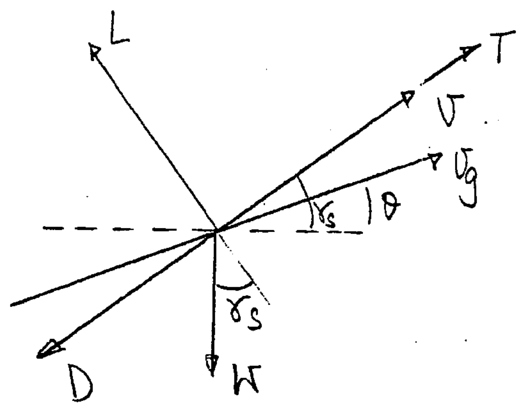
$$\mathrm{Tg}\,\theta = \frac{V_{gy}}{V_{gx}} = \frac{V\sin\gamma_s}{V\cos\gamma_s + V_W} = \frac{\sin\gamma_s}{\cos\gamma_s + \frac{V_W}{V}}$$

$\hookrightarrow \mathrm{Tg}\,\gamma_g$

$$\mathrm{Tg}\,\theta = \frac{V_{gy}}{V_{gx}} = \frac{V\sin\gamma_s}{V\cos\gamma_s - V_W} = \frac{\sin\gamma_s}{\cos\gamma_s - \frac{V_W}{V}}$$

$\hookrightarrow \mathrm{Tg}\,\gamma_g$

- ECUACIONES




ECUACIONES CINEMÁTICAS

$$\begin{cases} \dot{x} = V_g \cos\theta = V\cos\gamma_s \pm V_W \\ \dot{h} = V_g \operatorname{sen}\theta = V \operatorname{sen}\gamma_s \end{cases}$$

ECUACIONES DINÁMICAS

$$\begin{cases} L - W\cos\gamma_s = 0 \\ T - D - W\operatorname{sen}\gamma_s = 0 \end{cases}$$

ECUACIÓN DEL MOTOR

$$\dot{m} + \varphi = 0 \qquad \dot{W} + cT = 0$$

Sabemos que $\begin{cases} L = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_L \\ D = \frac{1}{2}\rho V^2 S (C_{D0} + K C_L^2) \end{cases}$

- Como nos dicen que los ángulos son pequeños:

$$V_g = |\bar{V}_g| = \sqrt{(V\cos\gamma \pm V_W)^2 + (V\operatorname{sen}\gamma)^2} = \sqrt{V^2 \pm 2VV_W\cos\gamma + V_W^2} \simeq \sqrt{V^2 \pm 2VV_W + V_W^2}$$

$$\hat{V}_g = \frac{V_g}{V_B} = \sqrt{\frac{V^2}{V_B^2} \pm 2\frac{V}{V_B}\frac{V_W}{V_B} + \frac{V_W^2}{V_B^2}} = \sqrt{\hat{V}^2 \pm 2\hat{V}\hat{V}_W + \hat{V}_W^2} = \sqrt{\hat{V}_W^2 \pm 2\hat{V}_W + 1} =$$

Como en el problema $\hat{V} = 1$

$$= \sqrt{(1 \pm \hat{V}_W)^2} = (1 \pm \hat{V}_W) \longrightarrow \hat{V}_g = 1 \pm \hat{V}_W$$

- $$\operatorname{Tg}\theta \sim \theta = \frac{\operatorname{sen}\gamma_s}{\cos\gamma_s \pm \frac{V_W}{V}} = \frac{\operatorname{sen}\gamma_s}{\cos\gamma_s \pm \frac{V_W/V_B}{V/V_B}} \sim \frac{\gamma_s}{1 \pm \hat{V}_W}$$

• Ahora vamos a adimensionalizar el resto de ecuaciones: $(\gamma_s \ll 1, \theta \ll 1)$

- EQUACIONES CINEMÁTICAS

$$\left(\frac{\dot{x}}{V_B}\right) = \hat{V}_g \cos\theta \simeq \hat{V}_g$$

$$\left(\frac{\dot{h}}{V_B}\right) = \hat{V}_g \sin\theta \simeq \hat{V}_g\theta$$

- ECUACIONES DINÁMICAS

$$\frac{L}{W} - \cos\gamma_s = 0 \;;\quad n - \cos\gamma_s = 0 \;;\quad \boxed{n \simeq 1}$$

$$\underbrace{\frac{T}{T_B}}_{\hat{T}} - \underbrace{\frac{D E_m}{W}}_{\hat{D}} - E_m \sin\gamma_s = 0 \;;\quad \boxed{\hat{T} - \hat{D} - E_m\gamma_s = 0}$$

$$C_D = C_{D0} + KC_L^2 \longrightarrow \hat{D} = \frac{1}{2}\left(\hat{V}^2 + \frac{n^2}{\hat{V}^2}\right) \overset{\hat{V}=1;\, n\simeq 1}{=} \frac{1}{2}(1+1) = 1$$

$$n = \hat{V}^2 \frac{C_L}{C_{L\,opT}}$$

- ECUACIÓN DEL MOTOR: $\dot{W} + CT = 0$

• Vamos a seleccionar la variable peso como variable independiente:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dW}\cdot\frac{dW}{dt} \simeq V_g \longrightarrow \frac{dx}{dW} = \frac{-V_g}{CT} = -\frac{\hat{V}_g V_B}{C T_B \hat{T}}$$

$$\frac{dW}{dt} = -CT \longrightarrow \frac{dt}{dW} = -\frac{1}{CT} = -\frac{1}{C T_B \hat{T}}$$

donde $T_B = \dfrac{W}{E_m}$, $V_B = \sqrt{\dfrac{2W}{\rho S}}\sqrt[4]{\dfrac{K}{C_{D0}}}$

Por tanto:

$$\frac{dx}{dW} = -\frac{E_m}{CW}\cdot\frac{V_B\cdot\hat{V}_g}{(1+E_m\gamma_s)}$$

$$\frac{dt}{dW} = -\frac{E_m}{CW}\cdot\frac{1}{(1+E_m\gamma_s)}$$

Si adimensionalizamos:

$\hat{x} = x/x^*$ con $x^* = V_{B_i} E_m/C$ ; $V_{B_i} = \sqrt{\dfrac{2W_i}{\rho S}}\sqrt[4]{\dfrac{K}{C_{D0}}}$

$\hat{t} = t/t^*$ con $t^* = E_m/C$ ; $V_{B_i} = V_B/\sqrt{\hat{W}}$

$\hat{W} = W/W_i$

$$\frac{d\hat{x}}{d\hat{W}}\cdot\frac{V_{B_i}\cancel{E_m}}{\cancel{C}\cancel{W_i}} = -\frac{\cancel{E_m}}{\cancel{C}\hat{W}\cancel{W_i}}\cdot\frac{V_B\hat{V}_g}{(1+E_m\gamma_s)} \longrightarrow \boxed{\frac{d\hat{x}}{d\hat{W}} = -\frac{1}{\sqrt{\hat{W}}}\cdot\frac{(1\pm\hat{V}_W)}{(1+E_m\gamma_s)}}$$

$$\frac{d\hat{t}}{d\hat{W}}\cdot\frac{\cancel{E_m}}{\cancel{C}\cancel{W_i}} = -\frac{\cancel{E_m}}{\cancel{C}\hat{W}\cancel{W_i}}\cdot\frac{1}{(1+E_m\gamma_s)} \longrightarrow \boxed{\frac{d\hat{t}}{d\hat{W}} = -\frac{1}{\hat{W}}\cdot\frac{1}{(1+E_m\gamma_s)}}$$

Integrando la primera ecuación : $\left( W_f/W_i = \zeta \ll 1 \,;\ \hat{W}_f = \frac{W_i - W_F}{W_i} = 1-\zeta \right)$

$$\int_0^{\hat{x}_f} d\hat{x} = \hat{x}_f = \int_1^{1-\zeta} -\frac{(1\pm\hat{V}_W)}{(1+E_m\gamma_s)}\cdot\frac{1}{\sqrt{\hat{W}}}d\hat{W} = -2\frac{(1\pm\hat{V}_W)}{(1+E_m\gamma_s)}\cdot\left(\sqrt{1-\zeta}-1\right)$$

$$\boxed{\hat{X}_f = 2\,\frac{(1\pm\hat{V}_W)}{(1+E_m\gamma_s)}\left(1-\sqrt{1-\zeta}\right)}$$

$$\hat{X}_F = \frac{X_f}{X^*} \longrightarrow X_f = \hat{X}_f\cdot X^* = \hat{X}_f\cdot\frac{V_{B_i}E_m}{C}$$

$$X_f = 2\,\frac{(1\pm\hat{V}_W)}{(1+E_m\gamma_s)}\left(1-\sqrt{1-\zeta}\right)\cdot\frac{E_m}{C}\sqrt{\frac{2W_i}{\rho S}}\sqrt[4]{\frac{K}{C_{D_0}}}$$

Como $\zeta \ll 1 \longrightarrow \sqrt{1-\zeta} \sim 1-\frac{1}{2}\zeta$

Por tanto :

$$\boxed{X_f = \sqrt{\frac{2W_i}{\rho S}}\sqrt[4]{\frac{K}{C_{D_0}}}\cdot\frac{E_m}{C}\cdot\frac{(1\pm\hat{V}_W)}{(1+E_m\gamma_s)}\zeta}$$

$\oplus$ Viento $B\rightarrow 0$
$\ominus$ Viento $0\rightarrow B$

Si dividimos las ecuaciones cinemáticas y adimensionalizamos $\hat{h} = \frac{h}{\sqrt{B_i E_m}/C}$

$$\frac{dx}{dh} = \frac{1}{\theta} \longrightarrow \frac{d\hat{x}}{d\hat{h}} = \frac{1}{\theta}; \quad d\hat{h} = \theta\, d\hat{x}\ ; \quad \hat{h}_F = \theta \cdot \hat{x}_F$$

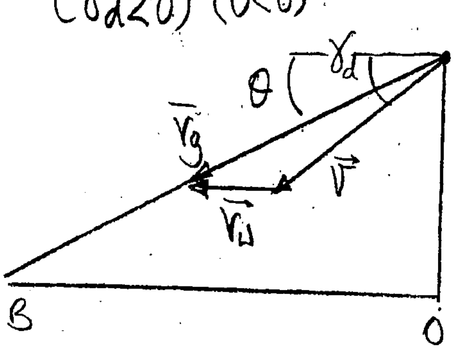
Por tanto:

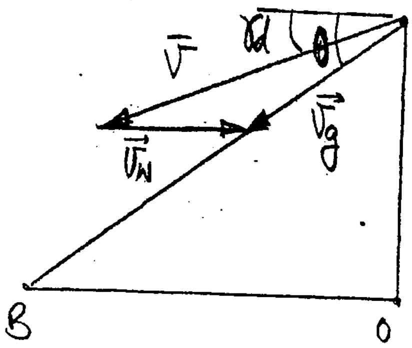
$$h_F = \sqrt{\frac{2W_i}{\rho S}}\sqrt[4]{\frac{K}{C_{D0}}}\,\frac{E_m}{C}\,\frac{\cancel{(1\pm\hat{V}_W)}}{(1+E_m\gamma_s)}\,\xi\,\frac{\gamma_s}{\cancel{(1\pm\hat{V}_W)}}$$

$$\boxed{h_F = \sqrt{\frac{2W_i}{\rho S}}\sqrt[4]{\frac{K}{C_{D0}}}\,\frac{E_m}{C}\cdot\frac{\gamma_s}{(1+E_m\gamma_s)}\,\xi}$$

## PLANEO HASTA LA BASE (DESCENSO)

$(\gamma_d<0)$ $(\theta<0)$




$V_{g_x} = V\cos\gamma_d + V_W$

$V_{g_y} = V\,\mathrm{sen}\,\gamma_d$ (El signo va con el $\gamma_d$)

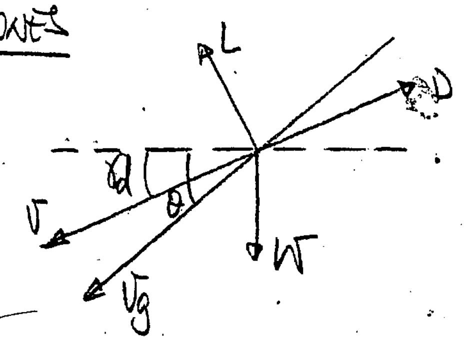
$$Tg\theta = \frac{V\,\mathrm{sen}\,\gamma_d}{V\cos\gamma_d + V_W} = \frac{\mathrm{sen}\,\gamma_d}{\cos\gamma_d + V_W/V} \sim \frac{\gamma_d}{1+\hat{V}_W}$$

$V_{g_x} = V\cos\gamma_d - V_W$

$V_{g_y} = V\,\mathrm{sen}\,\gamma_d$

$$Tg\theta \sim \frac{\gamma_d}{1-\hat{V}_W} \sim \theta$$

• ECUACIONES




ECUACIONES CINEMÁTICAS

$$\begin{cases} \dot{x} = V_g\cos\theta \\ \dot{h} = V_g\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}$$ (signo incluido en $\theta$)

$$\begin{cases} \dot{x} = V_g \\ \dot{h} = V_g\,\theta \end{cases}$$ (Para $\theta \ll 1$)

ECUACIONES DINÁMICAS

$$L - W\cos\gamma_d = 0 \quad ; \quad L - W = 0$$
$$-D - W\,\mathrm{sen}\,\gamma_d = 0 \quad ; \quad -D - W\gamma_d = 0$$

ECUACIÓN DEL MOTOR

$$\dot m + \varphi = 0 \longrightarrow \dot W + \cancel{\sigma}_{0} = 0$$
$$m = cte.$$

Adimensionalizando como en el apartado anterior tenemos:

$$\frac{d\hat x}{d\hat h} = \frac{1}{\theta} \longrightarrow d\hat x = \frac{1}{\theta} d\hat h; \quad \hat x_{F_2} = \frac{1}{\underbrace{\theta}_{<0}}(-\hat h_F) = \frac{1}{|\theta|}\hat h_F > 0$$

La altura $\hat h_F$ es la misma que para el caso de subida

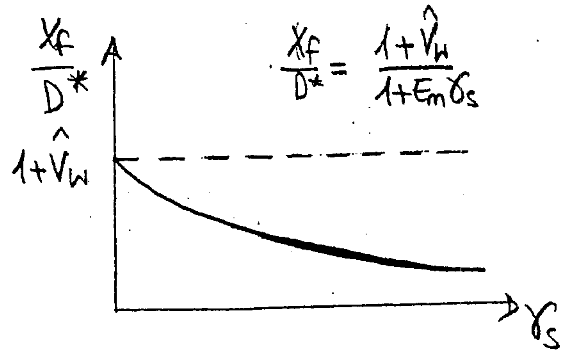
$$\boxed{X_{F_2} = \sqrt{\frac{2W_i}{\rho_S}}\sqrt[4]{\frac{K}{C_{D_0}}}\cdot\frac{E_m}{C}\,\frac{\gamma_s}{(1+E_m\gamma_s)}\cdot\frac{1\mp\hat V_W}{|\gamma_d|}\,\rho}$$

$\oplus$ Viento $O \to B$
$\ominus$ Viento $B \to O$

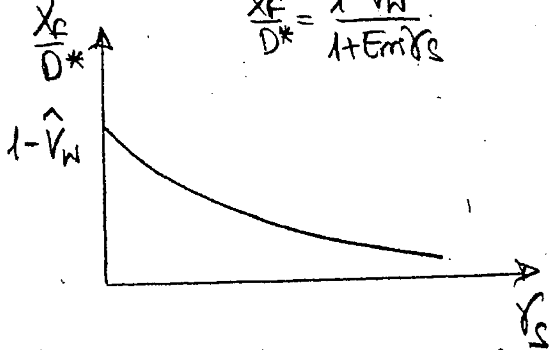
donde $\gamma_d = -\frac{D}{W} = -\frac{\hat D \cancel{W}}{\cancel{W}E_m} = -\frac{1}{E_m} \longrightarrow |\gamma_d| = \frac{1}{E_m}$

- Viento en sentido base-objetivo
- Viento en sentido objetivo base

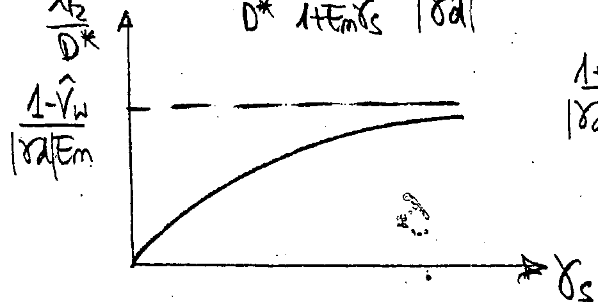
$$\frac{X_F}{D^*} = \frac{1+\hat V_W}{1+E_m\gamma_s}$$



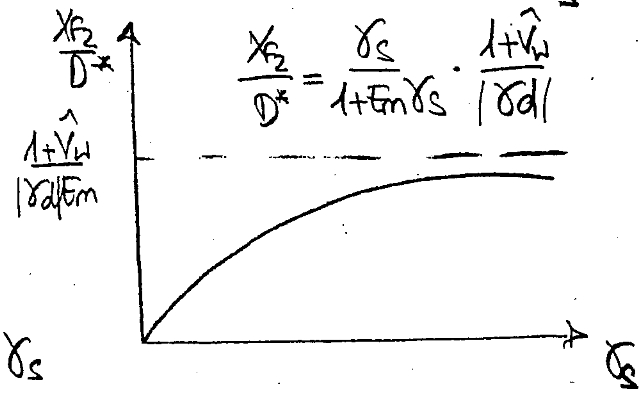

$$\frac{X_F}{D^*} = \frac{1-\hat V_W}{1+E_m\gamma_s}$$




$$\frac{X_{F_2}}{D^*} = \frac{\gamma_s}{1+E_m\gamma_s}\cdot\frac{1-\hat V_W}{|\gamma_d|}$$




$$\frac{X_{F_2}}{D^*} = \frac{\gamma_s}{1+E_m\gamma_s}\cdot\frac{1+\hat V_W}{|\gamma_d|}$$




$$D^* = \sqrt{\frac{2W_i}{\rho_S}}\sqrt[4]{\frac{K}{C_{D_0}}}\,\frac{E_m}{C}\,\rho$$

2) Para garantizar la vuelta del avión a la base, situada a una distancia D del objetivo se debe de cumplir:

$$X_F = D$$

$$X_f - X_{f_2} = 0 \longrightarrow \sqrt{\frac{2W_i}{\rho S}}\sqrt[4]{\frac{K}{C_{D0}}}\frac{E_m}{c}\frac{1\pm\hat{V}_W}{1+\gamma_S E_m}\zeta\left(1-\frac{1\mp\hat{V}_W}{1\pm\hat{V}_W}\gamma_S E_m\right)=0$$

$$1-\frac{1\mp\hat{V}_W}{1\pm\hat{V}_W}\gamma_S E_m = 0$$

* Viento base-objetivo : $1-\dfrac{1-\hat{V}_W}{1+\hat{V}_W}\gamma_S E_m = 0 \longrightarrow \boxed{\gamma_S = \dfrac{1+\hat{V}_W}{1-\hat{V}_W}\cdot\dfrac{1}{E_m}}$

* Viento Objetivo-base : $\boxed{\gamma_S = \dfrac{1-\hat{V}_W}{1+\hat{V}_W}\cdot\dfrac{1}{E_m}}$

Sustituyendo $\gamma_S$ en $X_F = D$

* Viento base objetivo : $D = \sqrt{\dfrac{2W_i}{\rho S}}\cdot\sqrt[4]{\dfrac{K}{C_{D0}}}\cdot\dfrac{E_m}{c}\dfrac{(1-\hat{V}_W^2)}{2}\zeta$

$$\boxed{\zeta = \frac{2D}{(1-\hat{V}_W^2)}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{2W_i}{\rho S}}\sqrt[4]{\frac{K}{C_{D0}}}\frac{E_m}{c}}}$$

* Viento Objetivo base: $D = \sqrt{\dfrac{2W_i}{\rho S}}\sqrt[4]{\dfrac{K}{C_{D0}}}\dfrac{E_m}{c}\dfrac{(1-\hat{V}_W^2)}{2}\zeta$

$$\boxed{\zeta = \frac{2D}{(1-\hat{V}_W^2)}\frac{1}{\sqrt{\frac{2W_i}{\rho S}}\sqrt[4]{\frac{K}{C_{D0}}}\frac{E_m}{c}}}$$

Se observa que el gasto de combustible es el mismo independientemente de $V_W$.

3) Suponemos que el mes consta de 30 días

$$X_{VIENTO\ B\to O} = 15\left(X_f + X_{f_2}\right) = 15\cdot\sqrt{\frac{2W_i}{\rho S}\sqrt[4]{\frac{K}{C_{D0}}}\frac{E_m}{C}\frac{\varphi}{1+E_m\gamma_s}\left(1+\hat{V}_W+\gamma_s E_m\left(1-\hat{V}_W\right)\right)}$$

$$X_{VIENTO\ O\to B} = 15\left(X_f + X_{f_2}\right) = 15\sqrt{\frac{2W_i}{\rho S}\sqrt[4]{\frac{K}{C_{D0}}}\frac{E_m}{C}\frac{\varphi}{1+E_m\gamma_s}\left(1-\hat{V}_W+\gamma_s E_m\left(1+\hat{V}_W\right)\right)}$$

$$X_{TOTAL} = X_{\substack{VIENTO\\ B\to O}} + X_{\substack{VIENTO\\ O\to B}} = 15\sqrt{\frac{2W_i}{\rho S}\sqrt[4]{\frac{K}{C_{D0}}}\frac{E_m}{C}\frac{\varphi}{1+E_m\gamma_s}\left(2+2\gamma_s E_m\right)}$$

$$\boxed{X_{TOTAL} = 30\sqrt{\frac{2W_i}{\rho S}\sqrt[4]{\frac{K}{C_{D0}}}\cdot\frac{E_m}{C}\varphi}} \neq f(V_W)$$

(No depende del $V_W$)

## ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS AERONÁUTICOS

UNIDAD DOCENTE DE MECÁNICA DEL VUELO 12.09.09
E. Final Septiembre *"Mecánica del Vuelo I"*

**PROBLEMA 1º**

La figura adjunta representa un avión efectuando respecto al suelo un vuelo simétrico en el plano vertical, descompuesto en los tramos siguientes:

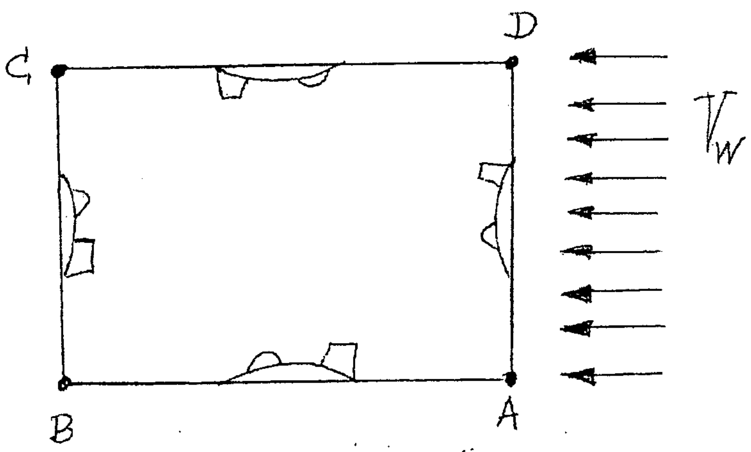
- AB y CD: Vuelo horizontal, rectilíneo y estacionario
- BC y DA: Vuelo vertical, rectilíneo y estacionario

Todo el vuelo se efectúa en presencia de un viento horizontal contenido en el plano vertical de módulo $V_w$ constante y conocido, y con una velocidad respecto de tierra $V_g$ asimismo constante y conocida, donde $V_w / V_g = \varepsilon << 1$. Suponiendo además que:

a) Se conocen todas las características geométricas, aerodinámicas y másicas del avión necesarias para la resolución del problema (en particular: el peso es constante e igual a $W$; la superficie alar es $S$; los coeficientes de la polar parabólica son constantes conocidas; la curva del coeficiente de sustentación en función del ángulo de ataque tiene la forma $C_L = C_{L0} + C_{L\alpha}\alpha$, puede extenderse hasta las pérdidas positiva y negativa, y los coeficientes $C_{L0}, C_{L\alpha}$, $C_{L\max} > 0$ y $C_{L\min} < 0$ son constantes conocidas; etc.).
b) El empuje de los motores pasa por el centro de masas del avión y está siempre dirigido según el eje $x_w$.
c) Son despreciables las transiciones entre los distintos tramos.
d) $\rho$ y $g$ son constantes conocidas en el margen de alturas considerado.

Se pide:

1º) En los cuatro tramos, determinar los valores que tendría que imponer el piloto para $T$, $\alpha$, y $\delta_e$, en función de la velocidad respecto de tierra $V_g$, despreciando términos de orden superior a $\varepsilon$
2º) Determinar las velocidades mínimas respecto de tierra a las que es posible efectuar, por consideraciones de pérdida, los cuatro vuelos anteriores, despreciando términos de orden superior a $\varepsilon$, y compararlas entre sí.




TIEMPO CONCEDIDO: 1$^h$

**ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS AERONÁUTICOS**

UNIDAD DOCENTE DE MECÁNICA DEL VUELO 12.09.09

E. Final Septiembre *"Mecánica del Vuelo I"*

## PROBLEMA 1º

La figura adjunta representa un avión efectuando respecto al suelo un vuelo simétrico en el plano vertical, descompuesto en los tramos siguientes:

- AB y CD: Vuelo horizontal, rectilíneo y estacionario
- BC y DA: Vuelo vertical, rectilíneo y estacionario

Todo el vuelo se efectúa en presencia de un viento horizontal contenido en el plano vertical de módulo $V_w$ constante y conocido, y con una velocidad respecto de tierra $V_g$ asimismo constante y conocida, donde $V_w / V_g = \varepsilon << 1$. Suponiendo además que:

a) Se conocen todas las características geométricas, aerodinámicas y másicas del avión necesarias para la resolución del problema (en particular: el peso es constante e igual a $W$; la superficie alar es $S$; los coeficientes de la polar parabólica son constantes conocidas; la curva del coeficiente de sustentación en función del ángulo de ataque tiene la forma $C_L = C_{L0} + C_{L\alpha}\alpha$, puede extenderse hasta las pérdidas positiva y negativa, y los coeficientes $C_{L0}, C_{L\alpha}, C_{L\max} > 0$ y $C_{L\min} < 0$ son constantes conocidas; etc.).

b) El empuje de los motores pasa por el centro de masas del avión y está siempre dirigido según el eje $x_w$.

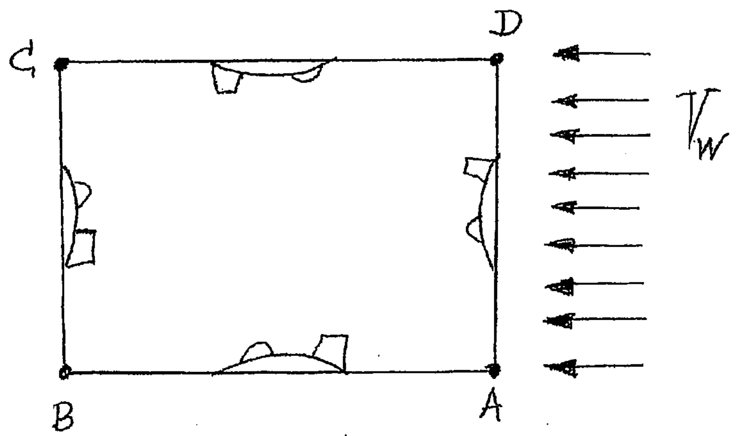
c) Son despreciables las transiciones entre los distintos tramos.

d) $\rho$ y $g$ son constantes conocidas en el margen de alturas considerado.

Se pide:

1º) En los cuatro tramos, determinar los valores que tendría que imponer el piloto para $T$, $\alpha$, y $\delta_e$, en función de la velocidad respecto de tierra $V_g$, despreciando términos de orden superior a $\varepsilon$

2º) Determinar las velocidades mínimas respecto de tierra a las que es posible efectuar, por consideraciones de pérdida, los cuatro vuelos anteriores, despreciando términos de orden superior a $\varepsilon$, y compararlas entre sí.



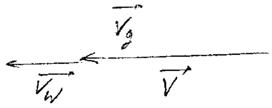

TIEMPO CONCEDIDO: $1^h$

(8)

## 1) AB:

$T - D = 0$

$-L + W = 0$




$\vec{V_g} = \vec{V} + \vec{V_W}$

$V_g = V + V_W \Rightarrow 1 = \frac{V}{V_g} + \varepsilon$

$V = (1-\varepsilon)V_g$

$L = \frac{1}{2}\rho S V^2 C_L \rightarrow C_L = \frac{2W}{\rho S V^2} = C_{L0} + C_{L\alpha}\alpha$

$$\boxed{\alpha = -\frac{C_{L0}}{C_{L\alpha}} + \frac{2W}{\rho S C_{L\alpha} V^2} = -\frac{C_{L0}}{C_{L\alpha}} + \frac{2W}{\rho S C_{L\alpha} V_g^2 \underbrace{(1-\varepsilon)^2}_{1+\varepsilon^2-2\varepsilon}} = -\frac{C_{L0}}{C_{L\alpha}} + \frac{2W}{\rho S C_{L\alpha} V_g^2 (1-2\varepsilon)}}$$

$$\boxed{T = \frac{1}{2}\rho S(1-2\varepsilon)\left[C_{D0} + \frac{4kW^2}{\rho^2 S^2 V_g^4 (1-2\varepsilon)^2}\right] = \frac{1}{2}\rho S(1-2\varepsilon)\left[C_{D0} + \frac{4kW^2}{\rho^2 S^2 V_g^4(1-4\varepsilon)}\right]}$$

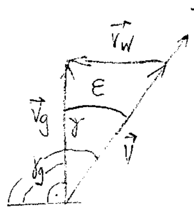
$C_{MA} = C_{m0} + C_{m\alpha}\alpha + C_{m\delta e}\delta e = 0$

$$\boxed{\delta e = \frac{-1}{C_{m\delta e}}\left[C_{m0} + C_{m\alpha}\left(\frac{-C_{L0}}{C_{L\alpha}} + \frac{2W}{\rho S C_{L\alpha} V_g^2 (1-2\varepsilon)}\right)\right]}$$

## BC: Subida $\gamma_g = \frac{\pi}{2}$

$T - D - W\sin\gamma = 0 \;;\; T - D - W\cos\varepsilon = 0$

$-L + W\cos\gamma = 0 \;;\; -L + W\sin\varepsilon = 0$




$\vec{V_g} = \vec{V} - \vec{V_W}$

Pitágoras: $V_g^2 + V_W^2 = V^2$

$tg\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right) = \frac{V_W}{V_g} = tg\,\varepsilon = \varepsilon$

$sen\,\gamma = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right) = \cos\varepsilon$

$\cos\gamma = sen\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right) = sen\,\varepsilon$

$C_L = \frac{2W sen\,\varepsilon}{\rho S(V_g^2 + V_W^2)} = \frac{2W\varepsilon}{\rho S V_g^2}$

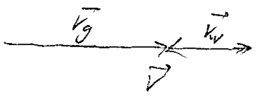
$$\boxed{\alpha = -\frac{C_{L0}}{C_{L\alpha}} + \frac{2W\varepsilon}{\rho S C_{L\alpha} V_g^2}}$$

$$\boxed{T = W\cancel{\cos\varepsilon}^{\,1} + \frac{1}{2}\rho S V^2 (C_{D0} + kC_L^2) = W + \frac{1}{2}\rho S V_g^2\left(C_{D0} + \frac{4W^2 k\varepsilon^2}{\rho^2 S^2 V_g^4}\right) = W + \frac{1}{2}\rho S V_g^2 C_{D0}}$$

$C_{MA} = C_{m0} + C_{m\alpha}\alpha + C_{m\delta e}\delta e = 0$

$$\boxed{\delta e = \frac{-1}{C_{m\delta e}}\left[C_{m0} + C_{m\alpha}\left(\frac{-C_{L0}}{C_{L\alpha}} + \frac{2W\varepsilon}{\rho S C_{L\alpha} V_g^2}\right)\right]}$$

## CD: Vuelo invertido




$\vec{V} = \vec{V_g} + \vec{V_W} \;;\; V = V_g + V_W \;;\; V = (1+\varepsilon)V_g$

$T - D = 0$

$L + W = 0$

$C_L = \frac{-2W}{\ldots} = \frac{-2W}{\ldots} \longrightarrow \boxed{\alpha = -\frac{C_{L0}}{C_{L\alpha}} - \frac{2W}{\rho S C_{L\alpha} V_g^2 (1+2\varepsilon)}}$

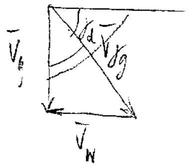
$$\boxed{T = \frac{1}{2}\rho S(1+2\varepsilon)\left[C_{D0} + \frac{4KW^2}{V_g^2\rho^2 S^2 C_{L\alpha}(1+4\varepsilon)}\right]}$$

$$\boxed{\delta_e = \frac{-1}{C_{m\delta e}}\left[C_{m0} + C_{m\alpha}\cdot\left(\frac{-C_{L0}}{C_{L\alpha}} - \frac{2W}{V_g^2\rho S C_{L\alpha}(1+2\varepsilon)}\right)\right]}$$

DA : Descenso $\gamma_g = \frac{\pi}{2}$

$$T - D - W\sin\gamma = 0$$

$$-L + W\cos\gamma = 0$$



$$V_g^2 + V_w^2 = V^2 \rightsquigarrow V^2 = V_g^2$$

$$tg\left(\frac{\pi}{2}-\gamma_d\right) = tg\,\varepsilon = \frac{V_W}{V_g} = \varepsilon$$

$$\sin\gamma_d = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\gamma_d\right) = \cos\varepsilon$$

$$\cos\gamma_d = \sin\left(\frac{\pi}{2}-\gamma_d\right) = \sin\varepsilon$$

$$T - D + W\sin\gamma_d = 0 \ ; \ T - D + W\cos\varepsilon = 0$$

$$-L + W\cos\gamma_d = 0 \ ; \ -L + W\sin\varepsilon = 0$$

$$C_L = \frac{2W\varepsilon}{\rho S V_g^2} \rightsquigarrow \boxed{\alpha = \frac{-C_{L0}}{C_{L\alpha}} + \frac{2W\varepsilon}{\rho S C_{L\alpha} V_g^2}}$$

$$\boxed{T = -W\cancel{\cos\varepsilon}^{\,1} + \frac{1}{2}\rho S V_g^2\left(C_{D0} + \frac{4KW^2\varepsilon^2}{\rho^2 S^2 V_g^4}\right) = -W + \frac{1}{2}\rho S V_g^2 C_{D0}}$$

$$\boxed{\delta_e = \frac{-1}{C_{m\delta e}}\left[C_{m0} + C_{m\alpha}\left(\frac{-C_{L0}}{C_{L\alpha}} + \frac{2W\varepsilon}{\rho S C_{L\alpha} V_g^2}\right)\right]}$$

2)

AB :

$$C_{L_{MAX}} = \frac{2W}{\rho S V_S^2} \rightsquigarrow V_S = \sqrt{\frac{2W}{\rho S C_{L_{MAX}}}} \longrightarrow V_{MIN} = (1-\varepsilon)^{-1}\cdot\sqrt{\frac{2W}{\rho S C_{L_{MAX}}}}$$

BC :

$$C_{L_{MIN}} = \frac{2W\varepsilon}{\rho S V_g^2} \longrightarrow V_{MIN} = \sqrt{\varepsilon}\cdot\sqrt{\frac{2W}{\rho S C_{L_{MIN}}}}$$

CD :

$$C_{L_{MIN}} \longrightarrow V_{MIN} = (1+\varepsilon)^{-1}\cdot\sqrt{\frac{2W}{\rho S C_{L_{MIN}}}}$$

DA :

$$C_{L_{MIN}} \longrightarrow V_{MIN} = \sqrt{\varepsilon}\cdot\sqrt{\frac{2W}{\rho S C_{L_{MIN}}}}$$

SEPTIEMBRE 2009 $\quad \boxed{\varepsilon = \frac{V_w}{V_g}}$

1) AB $\quad V = V_g - V_w = V_g(1-\varepsilon) \rightarrow V^2 = V_g^2(1-2\varepsilon)$

$$\begin{matrix} T = D \\ L = W \end{matrix} \rightarrow \begin{cases} T = \frac{1}{2}(1-2\varepsilon)\rho S V_g^2 C_{D_0} + \frac{2kW^2}{\rho S V_g^2}(1+2\varepsilon) \\ \alpha = \alpha_0 + \frac{2W}{\rho S V_g^2 C_{L\alpha}}(1+2\varepsilon) \end{cases}$$

$$M_A = 0 \rightarrow \delta_e = \delta_{e0} - \frac{C_{m\alpha}}{C_{m\delta}}\alpha = \delta_{e0} - \frac{C_{m\alpha}}{C_{m\delta}}\left(\alpha_0 + \frac{2W}{\rho S V_g^2 C_{L\alpha}}(1+2\varepsilon)\right)$$

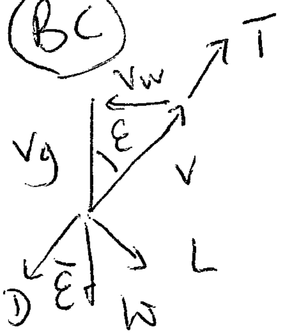
CD $\quad V = V_g + V_w = V_g(1+\varepsilon) \rightarrow V^2 = V_g^2(1+2\varepsilon)$

$$\begin{matrix} T = D \\ L = -W \end{matrix} \Big\} \longrightarrow T = \frac{1}{2}(1+2\varepsilon)\rho S V_g^2 C_{D_0} + \frac{2kW^2}{\rho S V_g^2}(1-2\varepsilon)$$

$$\alpha = \alpha_0 - \frac{2W}{\rho S V_g^2 C_{L\alpha}}(1-2\varepsilon)$$

$$M_A = 0 \longrightarrow \delta_e = \delta_{e0} - \frac{C_{m\alpha}}{C_{m\delta}}\alpha$$

BC



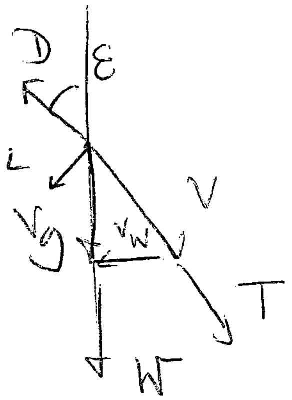

$$V^2 = V_g^2 + V_w^2 \Longrightarrow V^2 = V_g^2$$

$$\left.\begin{matrix} T = D + W\cos\varepsilon \\ L + W \operatorname{sen}\varepsilon = 0 \end{matrix}\right\}$$

$$\begin{cases} T = \frac{1}{2}\rho S V_g^2 C_{D_0} + \frac{2kW^2}{\rho S V_g^2}\varepsilon^2 + W \\ \alpha = \alpha_0 - \frac{2W\varepsilon}{\rho S V_g^2 C_{L\alpha}} \end{cases}$$

$$M_A = 0 \longrightarrow \delta_e = \delta_{e0} - \frac{C_{m\alpha}}{C_{m\delta}}\alpha$$

DA




$$T = D - W\cos\varepsilon$$

$$L + W \operatorname{sen}\varepsilon = 0$$

$$T = \frac{1}{2}\rho S V_g^2 C_{D_0} + \frac{2kW^2}{\rho S V_g^2}\varepsilon^2 - W$$

$$\alpha = \alpha_0 - \frac{2W\varepsilon}{\rho S V_g^2 C_{L\alpha}}$$

$$M_A = 0 \longrightarrow \delta_e = \delta_{e0} - \frac{C_{m\alpha}}{C_{m\delta}}\alpha$$

2)
$$V_{gAB\,min} = (1+\varepsilon)\sqrt{\frac{2W}{\rho S C_{L\,max}}}$$

$$V_{gBC\,min} = \sqrt{\varepsilon}\sqrt{\frac{2W}{\rho S C_{L\,min}}}$$

$$V_{gCD\,min} = (1-\varepsilon)\sqrt{\frac{2W}{\rho S C_{L\,min}}}$$

$$V_{gDA\,min} = \sqrt{\varepsilon}\sqrt{\frac{2W}{\rho S C_{L\,min}}}$$

$$\frac{1+\varepsilon}{C_{L\,max}^{1/2}} < \frac{1-\varepsilon}{|C_{L\,min}|^{1/2}} \rightarrow V_{gBC\,min} = V_{gDA\,min} < V_{gAB\,min} < V_{g\,CD\,min}$$

$$\frac{1+\varepsilon}{C_{L\,max}^{1/2}} > \frac{1-\varepsilon}{|C_{L\,min}|^{1/2}} \rightarrow V_{gBC\,min} = V_{gDA\,min} < V_{gCD\,min} < V_{gAB\,min}$$

(D) $V = V_g + V_w = V_g(1+\varepsilon) \rightarrow V^2 = V_g^2(1+2\varepsilon)$

$$\left\{\begin{array}{l} T = D \\ L = W \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} T = \frac{1}{2}(1+2\varepsilon)\rho S V_g^2 C_{D_0} + \frac{2KW^2}{\rho S V_g^2}(1-2\varepsilon) \\ \alpha = \alpha_0 - \frac{2W}{\rho S V_g^2 C_{L\alpha}}(1-2\varepsilon) \end{array}\right.$$

$$M_A = 0 \rightarrow \delta_e = \delta_{e_0} - \frac{C_{m\alpha}}{C_{m\delta}}\alpha$$

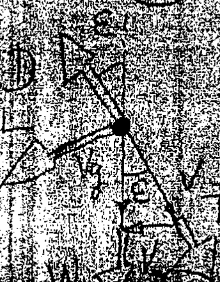
(BC)

$V^2 = V_g^2 + V_w^2 \rightarrow V^2 = V_g^2$

$$\left\{\begin{array}{l} T = D + W\cos\varepsilon \\ L + W\sin\varepsilon = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} T = \frac{1}{2}\rho S V_g^2 C_{D_0} + \frac{2K W^2 \ldots}{\rho S V_g^2} \ldots W \\ \alpha = \alpha_0 - \frac{2W\varepsilon}{\rho S V_g^2 C_{L\alpha}} \end{array}\right.$$

$$M_A = 0 \rightarrow \delta_e = \delta_{e_0} - \frac{C_{m\alpha}}{C_{m\delta}}\alpha$$

(DA)



$V^2 = V_g^2 + V_w^2 \rightarrow V^2 = V_g^2$

$$\left\{\begin{array}{l} T = D - W\cos\varepsilon \\ L + W\sin\varepsilon = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} T = \frac{1}{2}\rho S V_g^2 C_{D_0} + \ldots W \\ \alpha = \alpha_0 - \frac{2W\varepsilon}{\rho S V_g^2 \ldots} \end{array}\right.$$

$$M_A = 0 \rightarrow \delta_e = \delta_{e_0} - \frac{C_{m\alpha}}{C_{m\delta}}\alpha$$

ESCUELA TECNICA SUPERIOR DE INGENIEROS AERONAUTICOS

CATEDRA DE MECANICA DEL VUELO - E. Final Septiembre - A+B+CD 17.09.92

PROBLEMA 1º

Se pretende estudiar el vuelo simétrico, contenido en un plano vertical, con velocidad y ángulo de ataque constantes, y con $\dot{\gamma}$ despreciable, de un avión de transporte provisto de turborreactores.

Se supone además que:

a) Son conocidas las características geométricas, aerodinámicas y másicas del avión necesarias para la resolución del problema. En concreto, su polar es de la forma $C_D = C_{D0} + kC_L^2$, siendo $C_{D0} = (C_{D0})_w + \frac{f_1}{S}$, donde son constantes conocidas $k$, $(C_{D0})_w$ (coeficiente de resistencia parásita del ala) $f_1$ (área de la placa plana equivalente del fuselaje y los motores), y no es dato la superficie alar $S$.

b) El consumo específico de los motores, $c$, es constante y conocido.

Se pide:

1º) Determinar la ley de variación de $\rho$ con $W$.

2º) A la vista de la expresión obtenida, extraer conclusiones cualitativas respecto a la consistencia de la hipótesis de $\dot{\gamma}$ despreciable.

3º) Determinar el valor de $C_L$ que maximiza en cada instante el alcance específico, $dx/dW$, en función de $C_{D0}$ y de otros parámetros conocidos. Determinar asimismo el valor correspondiente de la velocidad de vuelo, suponiendo que el crucero se inicia a una altitud y un peso conocidos.

4º) Determinar el valor del alcance máximo en crucero, $x_{max}$ (volando en las condiciones del apartado anterior), en función de $C_{D0}$, $S$ y demás parámetros conocidos, suponiendo que el peso al final del mismo es $W_1$.

5º) Determinar la superficie alar $S$ que maximiza $x_{max}$ y el valor correspondiente de $(x_{max})_{max}$.

TIEMPO CONCEDIDO: $1^h 15^m$

$\boxed{17-9-1992}$ (PROBLEMA 1) E. FINAL SEPTIEMBRE A+B+CD)

- $V$ y $\alpha$ constantes, $\gamma$ despreciable.
- $C_D = C_{D0} + KC_L^2$; $C_{D0} = C_{D0})_H + \frac{f_1}{S}$; $S$ <u>NO</u> es dato.
- $c = cte$ y conocido.

1) Si $\gamma$ es despreciable $\rightarrow$ Vuelo es horizontal
suponiendo vuelo estacionario:

$$L = W = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_L \quad ; \quad C_L = C_{L0} + C_{L\alpha} \cdot \underbrace{\alpha}_{\rightarrow cte} = cte$$

ESTÁ MAL XQ $S$ ES INCÓGNITA

$$\hookrightarrow \boxed{\rho = \frac{2W}{V^2 S C_L}} \quad (\rho \text{ es lineal con } W)$$

$S$ es incognita

2) Adimensionalizamos la ecuación anterior y derivamos

$$d\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right) = \frac{2W_0}{\rho_0 S V^2 C_L} d\left(\frac{W}{W_0}\right) \rightarrow d\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right) \simeq 1 d\left(\frac{W}{W_0}\right)$$

$$\frac{\Delta\rho}{\rho_0} \simeq \frac{\Delta W}{W_0},$$

Sabemos que $\Delta W \sim cT\Delta t \sim cT \cdot \frac{\Delta l}{V}$

$$\left(\frac{dW}{dt} = -cT\right)$$

$$\frac{\Delta\rho}{\rho_0} \simeq c \frac{T}{W_0} \frac{\Delta l}{V}$$

Como $c \sim 10^{-5} s^{-1}$

$$\frac{T}{W_0} \sim \frac{1}{E_m} \sim \frac{1}{10}$$

$$\frac{\Delta l}{V} \sim \frac{\Delta l}{100 m/s}$$

$$\frac{\Delta\rho}{\rho_0} = 10^{-8} \Delta l$$

(En variaciones de distancia del orden de 1km ($10^3$m), la densidad ha cambiado del orden de $10^{-6}$ veces su valor. La variación de altitud es mínima. Es acertada la hipótesis.)

3)
$$\left| \begin{array}{l} \dfrac{dx}{dt} = V \\ h = cte \\ T - D = 0 \longrightarrow T = D = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_D = \frac{1}{2}\rho V^2 S (C_{D0} + K C_L^2) \\ \dot{W} + cT = 0 \longrightarrow \dfrac{dW}{dt} = -cT \longrightarrow \dfrac{dt}{dW} = -\dfrac{1}{cT} \end{array} \right.$$


$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dW} \cdot \frac{dW}{dt} = V \longrightarrow \frac{dx}{dW} = V \cdot \frac{dt}{dW} = -\frac{V}{cT}$$

Sustituyendo T en $\dfrac{dx}{dW}$:

$$\frac{dx}{dW} = -\frac{V}{c\frac{1}{2}\rho V^2 S (C_{D0} + K C_L^2)} = -\frac{C_L}{cW(C_{D0} + K C_L^2)} \cdot \sqrt{\frac{2W}{C_L \rho S}}$$

Además sabemos que $L = W = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_L \rightarrow \frac{1}{2}\rho V^2 S = \dfrac{W}{C_L}$

Si ahora hacemos:
$$\frac{d\left(\frac{dx}{dW}\right)}{dC_L} = \frac{d}{dC_L}\left(-\sqrt{\frac{2W}{\rho S}} \cdot \frac{1}{cW} \cdot \frac{\sqrt{C_L}}{(C_{D0} + K C_L^2)}\right) = 0$$

$$\frac{1}{2\sqrt{C_L}}(C_{D0} + K C_L^2) - \sqrt{C_L}\,(2K C_L) = 0$$

$$(C_{D0} + K C_L^2) - 2C_L(2K C_L) = 0; \quad C_{D0} + K C_L^2 - 4K C_L^2 = 0$$

$$C_{D0} - 3K C_L^2 = 0 \longrightarrow \boxed{C_L = \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{C_{D0}}{K}}}$$

$$W_i = \frac{1}{2}\rho_i V_i^2 S C_L = \frac{1}{2}\rho_i V^2 S \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{C_{D0}}{K}} \longrightarrow \boxed{V = \sqrt{\frac{2\sqrt{3}\,W}{\rho_i S}}\sqrt[4]{\frac{K}{C_{D0}}}}$$

4) $$\frac{dx}{dW} = -\frac{a}{CW(C_{D0}+Ka^2)}\sqrt{\frac{2W_i}{a\rho S}}$$

$$\int_0^{X_{MAX}} dx = X_{MAX} = \int_{W_i}^{W_1} -\frac{a}{C(C_{D0}+Ka^2)}\sqrt{\frac{2W_i}{a\rho S}}\frac{dW}{W} = \frac{a}{C(C_{D0}+Ka^2)}\sqrt{\frac{2W_i}{a\rho S}}\ln\frac{W_i}{W_1}$$

$$X_{MAX} = \frac{1}{\sqrt[4]{3}}\sqrt[4]{\frac{C_{D0}}{K}}\cdot\frac{1}{C(C_{D0}+C_{D0}/3)}\sqrt{\frac{2W_i}{\rho S}}\ln\frac{W_i}{W_1}$$

$$\boxed{X_{MAX} = \frac{1}{\sqrt[4]{3}}\sqrt[4]{\frac{C_{D0}}{K}}\cdot\frac{3}{4C\cdot C_{D0}}\sqrt{\frac{2W_i}{\rho S}}\ln\frac{W_i}{W_1}}$$

J) $$X_{MAX} = \underbrace{K}_{cte}\cdot\frac{\sqrt[4]{C_{D0}}}{C_{D0}}\cdot\frac{1}{\sqrt{S}} = K\cdot\sqrt[4]{C_{D0}^3}\,\frac{1}{\sqrt{S}}$$

Tenemos que $C_{D0} = C_{D0})_W + f_1/S$ ; $\frac{dC_{D0}}{dS} = -f_1/S^2$

$$\frac{dX_{MAX}}{dS} = K\,\frac{3}{4}\,C_{D0}^{-1/4}\,\frac{dC_{D0}}{dS}\,S^{-1/2} - \frac{1}{2}\,K\,C_{D0}^{3/4}\,S^{-3/2} =$$

$$= \frac{K}{2}\,C_{D0}^{3/4}\,S^{-3/2}\left[-\frac{3}{2}\frac{1}{C_{D0}}f_1\,S^{-1} + 1\right] = 0$$

$$-\frac{3}{2}\frac{f_1}{C_{D0}S} + 1 = 0;\quad C_{D0}S = \frac{3}{2}f_1;\quad \left(C_{D0})_S + \frac{f_1}{S}\right)S = \frac{3}{2}f_1$$

$$S\cdot C_{D0})_W + f_1 = \frac{3}{2}f_1 \longrightarrow \boxed{S = \frac{1}{2}\frac{f_1}{C_{D0})_W}}$$

Sustituyendo en $X_{MAX}$:   $\left( C_{B0} = C_{B0W} + \frac{f_1}{S} = C_{B0W} + \frac{f_1}{\frac{1}{2}\frac{f_1}{C_{B0}/W}} = C_{B0W} + 2C_{B0W} = 3C_{B0W} \right)$

$$X_{MAX}\Big)_{MAX} = K \sqrt[4]{27 (C_{B0})_W} \, \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}\frac{f_1}{C_{B0W}}}}$$

$$\boxed{X_{MAX}\Big)_{MAX} = \frac{1}{\sqrt[4]{3K}} \, \frac{3}{4C} \sqrt{\frac{2W_i}{\rho S}} \ln \frac{W_i}{W_1} \sqrt[4]{27 C_{B0W}} \cdot \sqrt{\frac{2C_{B0W}}{f_1}}}$$

## ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS AERONÁUTICOS

UNIDAD DOCENTE DE MECÁNICA DEL VUELO 21.06.06

E. Final Junio *"Mecánica del Vuelo I"*

**PROBLEMA 1°**

Un avión de alta maniobrabilidad, provisto de turborreactores, efectúa una subida con resbalamiento nulo según una trayectoria helicoidal descrita sobre un cilindro de radio, $R$, constante y conocido, con ángulo de asiento de velocidad, $\gamma$, constante, conocido y no necesariamente pequeño, y con empuje de los motores, $T_{max}$, asimismo constante y conocido.

Suponiendo además que:

a) Se conocen todas las características geométricas, aerodinámicas y másicas del avión necesarias para la resolución del problema (en particular, el peso $W$ es constante, las características aerodinámicas se conocen en unos ejes cuerpo genéricos, la polar es parabólica de coeficientes constantes, son despreciables las contribuciones de la deflexión del timón de profundidad y de la velocidad angular de cabeceo al coeficiente de sustentación, la fuerza aerodinámica lateral es despreciable, etc.).

b) El empuje de los motores está dirigido según el eje $x_w$ y es lo suficientemente elevado como para que el avión siempre suba con aceleración positiva.

c) Todos los ángulos que intervienen en el problema, excepto el ángulo de ataque, no tienen por qué ser pequeños.

d) $\rho$ y $g$ son constantes conocidas en el margen de alturas considerado.

Se pide:

1°) Plantear en ejes viento el sistema de ecuaciones dinámicas de fuerzas y determinar el número de grados de libertad matemáticos del sistema.

2°) Determinar una expresión que permita obtener la velocidad de vuelo en función del tiempo (y, en caso de que sea necesario, de los grados de libertad matemáticos del sistema), suponiendo que el vuelo comience a una velocidad $V_1$ dada.

3°) Determinar el valor máximo del factor de carga, $n_{max}$, el valor máximo del ángulo de balance de velocidad, $\mu_{max}$, y el valor mínimo del coeficiente de sustentación, $C_{Lmin}$, indicando claramente en qué puntos de la trayectoria helicoidal se producen.

4°) Determinar el ángulo de asiento, $\theta$, en función del tiempo (y, en caso de que sea necesario, de los grados de libertad matemáticos del sistema).

TIEMPO CONCEDIDO: $1^h$

18

1) $\gamma \equiv$ DATO $>>1$ $\qquad \beta = 0 \qquad \gamma \equiv CTE \Rightarrow \dot{\gamma} = 0$

$T = T_{MAX} \equiv$ DATO

$\varepsilon_{\delta_e} \cong 0$

$\varepsilon_{\hat{q}} \cong 0 \qquad\qquad \dot{\chi} = \frac{V}{R}\cos\gamma \quad (4)$

$Q \cong 0$

$\alpha << 1$

$$\left.\begin{array}{l} T_{MAX} - D - W\,\text{sen}\,\gamma = \frac{W}{g}\cdot\frac{dV}{dt} \quad (1) \\ W\,\text{sen}\,\mu\cos\gamma = \frac{W}{g}V\dot{\chi}\cos\mu\cos\gamma \quad (2) \\ -L + W\cos\mu\cos\gamma = -\frac{W}{g}V\dot{\chi}\,\text{sen}\,\mu\cos\gamma \quad (3) \end{array}\right\} \text{Ejes viento}$$

$L = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_L \quad (5)$

$D = \frac{1}{2}\rho V^2 S (C_{D0} + K C_L^2) \quad (6)$

$C_L = C_{L0} + C_{L\alpha}\alpha + \cancelto{0}{C_{L\delta_e}\delta_e} + \cancelto{0}{C_{L\hat{q}}\hat{q}} \quad (7)$

Nº incógnitas: $D, V, \mu, \dot{\chi}, L, C_L, \alpha = 7$

Nº ecs: $= 7$ $\longrightarrow \boxed{NGDL = 0}$

2) $\vec{b} = \cos\mu\,\vec{k_w} + \text{sen}\,\mu\,\vec{j_w}$

$\vec{n} = \cos\mu\,\vec{j_w} - \text{sen}\,\mu\,\vec{k_w}$

$\vec{i_w}$: $(1) \rightsquigarrow T_{MAX} - D - W\,\text{sen}\,\gamma = \frac{W}{g}\cdot\frac{dV}{dt} \longrightarrow T_{MAX} - W\,\text{sen}\,\gamma - \frac{1}{2}\rho S V^2 C_{D0} - \frac{2n^2W^2}{\rho V^2 S} = \frac{W}{g}\cdot\frac{dV}{dt} \quad (I)$

$\vec{b}$) $\left\{\begin{array}{l} W\cos\gamma\cos^2\mu - L\cos\mu = -\frac{W}{g}\cdot\frac{V^2}{R}\cos^2\gamma\,\text{sen}\,\mu\cos\mu \\ W\cos\gamma\,\text{sen}^2\mu = \frac{W}{g}\cdot\frac{V^2}{R}\cos^2\gamma\,\text{sen}\,\mu\cos\mu \end{array}\right. \longrightarrow L\cos\mu = W\cos\gamma \quad (II)$

$\vec{n}$) $\left\{\begin{array}{l} W\cos\gamma\,\text{sen}\,\mu\cos\mu = \frac{W}{g}\frac{V^2}{R}\cos^2\gamma\cos^2\mu \\ -W\cos\gamma\cos\mu\,\text{sen}\,\mu - L\,\text{sen}\,\mu = \frac{W}{g}\cdot\frac{V^2}{R}\cos^2\gamma\,\text{sen}^2\mu \end{array}\right. \longrightarrow L\,\text{sen}\,\mu = \frac{W}{g}\cdot\frac{V^2}{R}\cos^2\gamma \quad (III)$

$(II) \rightarrow \cos\mu = \frac{\cos\gamma}{n} \longrightarrow \sin^2\mu = 1 - \cos^2\mu = 1 - \frac{\cos^2\gamma}{n^2}$

$(III) \rightarrow L^2 \sin^2\mu = \frac{W^2}{g^2} \cdot \frac{V^4}{R^2} \cos^4\gamma \longrightarrow n^2 \sin^2\mu = \frac{1}{g^2} \cdot \frac{V^4}{R^2} \cos^4\gamma \,;\, n^2\left(1 - \frac{\cos^2\gamma}{n^2}\right) = \frac{1}{g^2} \cdot \frac{V^4}{R^2} \cos^4\gamma$

$$n^2 = \cos^2\gamma \left[1 + \left(\frac{V^2}{gR}\cos\gamma\right)^2\right]$$

$$\boxed{\int_{V_1}^{V_2} \frac{W \cdot dV}{g\left[T_{MAX} - W\sin\gamma - \frac{1}{2}\rho V^2 S C_{D0} - \frac{2\cos^2\gamma\left[1+\left(\frac{V^2}{gR}\cos\gamma\right)^2\right]W^2}{\rho V^2 S}\right]} = \int_{t_1}^{t_2} dt}$$

3) $n_{MAX} \Rightarrow V_{MAX}$ en $V_2$

$$\boxed{n_{MAX} = \sqrt{\cos^2\gamma\left[1 + \left(\frac{V_2^2}{gR}\cos\gamma\right)^2\right]}}$$

$n_{MAX} \Rightarrow \cos\mu_{MIN} \longrightarrow$ $\boxed{\mu_{MAX} = \mathrm{ArcCos}\left[\frac{\cos\gamma}{n_{MAX}}\right]}$

$$C_L = \frac{2nW}{\rho S V^2}$$

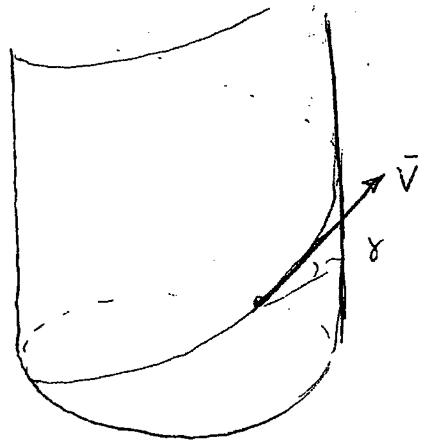
4) $\theta = \gamma + \alpha$

si $\theta \ll 1$, $\gamma \ll 1$; $\alpha \ll 1$

$-\sin\theta = -\sin\gamma - \alpha \cdot \cos\mu \cos\gamma$, $\sin\theta = \sin\gamma + \alpha \cdot \cos\mu\cos\gamma$

$$\mu = \mathrm{ArcCos}\left[\frac{\cos\gamma}{n}\right]$$

$$\sin\theta = \sin\gamma + \alpha \cdot \cos\left[\frac{\cos\gamma}{\sqrt{\cos^2\gamma\left[1+\left(\frac{V^2(t)}{gR}\cos\gamma\right)^2\right]}}\right]\cos\gamma \rightsquigarrow \theta = \theta(t$$




- $\beta=0$ (enunciado)
- $\varepsilon=\nu=0$ ($T // x_w$)
- $Q=0$ (consecuencia de $\beta=\varepsilon=\nu=0$)
- $\alpha \ll 1$
- $\gamma=cte \rightarrow \dot{\gamma}=0$
- $\dot{\chi}=\frac{V}{R}\cos\gamma$
- $T=cte$

1| Ecuaciones en ejes viento

$$\begin{array}{l} x_w \\ y_w \\ z_w \end{array} \left[\begin{array}{l} -W\operatorname{sen}\gamma+T-D=m\dot{V} \\ W\cos\gamma\operatorname{sen}\mu=\frac{W}{g}V(\dot{\chi}\cos\gamma\cos\mu) \\ W\cos\gamma\cos\mu-L=-\frac{W}{g}V(\dot{\chi}\cos\gamma\operatorname{sen}\mu) \end{array}\right.$$

$$D=\frac{1}{2}\rho V^2 S(C_{D0}+KC_L^2)$$

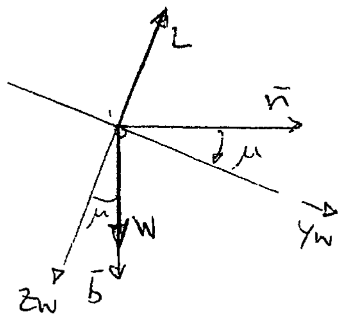
$$L=\frac{1}{2}\rho V^2 S\, C_L$$

$$\dot{\chi}=\frac{V}{R}\cos\gamma$$

- 6 ecuaciones
- $D, V, \mu, \chi, L, C_L$ 6 var. dep

$\rightarrow$ NGL $=0$

2| proyección de las ecs. según $y_w$ y $z_w$ sobre los ejes intrínsecos a la trayectoria




$$\left\{\begin{array}{l} \bar{b}=\cos\mu\,\bar{k}_w+\operatorname{sen}\mu\,\bar{j}_w \\ \bar{n}=\cos\mu\,\bar{j}_w-\operatorname{sen}\mu\,\bar{k}_w \end{array}\right.$$

$\bar{i}_w$ : $\boxed{-W\operatorname{sen}\gamma+T-D=m\dot{V}}$

$$\left.\begin{array}{ll} \bar{b}) & W\cos\gamma\cos^2\mu-L\cos\mu=-\frac{W}{g}\frac{V^2}{R}\cos^2\gamma\operatorname{sen}\mu\cos\mu \\ + & W\cos\gamma\operatorname{sen}^2\mu=\frac{W}{g}\frac{V^2}{R}\cos^2\gamma\operatorname{sen}\mu\cos\mu \end{array}\right\} \rightarrow \bar{b}) \quad \boxed{L\cos\mu=W\cos\gamma}$$

$$\left.\begin{array}{ll} \bar{n}) & W\cos\gamma\operatorname{sen}\mu\cos\mu=\frac{W}{g}\frac{V^2}{R}\cos^2\gamma\cos^2\mu \\ - & W\cos\gamma\cos\mu\operatorname{sen}\mu-L\operatorname{sen}\mu=-\frac{W}{g}\frac{V^2}{R}\cos^2\gamma\operatorname{sen}^2\mu \end{array}\right\} \rightarrow \bar{n}) \quad \boxed{L\operatorname{sen}\mu=\frac{W}{g}\frac{V^2}{R}\cos^2\gamma}$$

21-06-06

$$-W\operatorname{sen}\gamma + T - \frac{1}{2}\rho V^2 S C_{D0} - \frac{2n^2W^2}{\rho V^2 S} = \frac{W}{g}\frac{dV}{dt}$$

hay que buscar una relación $n=n(V)$

- $\cos\mu = \dfrac{\cos\gamma}{n} \rightarrow \operatorname{sen}^2\mu = 1-\cos^2\mu = 1-\dfrac{\cos^2\gamma}{n^2}$
- $L^2\operatorname{sen}^2\mu = \dfrac{W^2}{g^2}\dfrac{V^4}{R^2}\cos^4\gamma \rightarrow n^2\operatorname{sen}^2\mu = \dfrac{1}{g^2}\dfrac{V^4}{R^2}\cos^4\gamma \rightarrow n^2\left(1-\dfrac{\cos^2\gamma}{n^2}\right) = \dfrac{1}{g^2}\dfrac{V^4}{R^2}\cos^4\gamma \rightarrow$

$$\rightarrow n^2-\cos^2\gamma = \frac{1}{g^2}\frac{V^4}{R^2}\cos^4\gamma \rightarrow n^2 = \cos^2\gamma\left(1+\left(\frac{V^2}{gR}\cos\gamma\right)^2\right)$$

$$\rightarrow -W\operatorname{sen}\gamma + T - \frac{1}{2}\rho V^2 S C_{D0} - \frac{2\cos^2\gamma\, W^2\left(1+\left(\frac{V^2}{gR}\cos\gamma\right)^2\right)}{\rho V^2 S} = \frac{W}{g}\frac{dV}{dt}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} dt = \int_{V_1}^{V_2}\frac{dV}{g\left(\frac{T}{W}-\operatorname{sen}\gamma - \frac{\rho V^2 S C_{D0}}{2W} - \frac{2\cos^2\gamma\, W\left(1+\frac{V^2}{gR}\cos\gamma\right)^2)}{\rho V^2 S}\right)}$$

3)

- $n^2 = \cos^2\gamma\left(1+\left(\dfrac{V^2}{gR}\cos\gamma\right)^2\right) \rightarrow n^2$ es una función monótona creciente con $V$, luego $n_{max} \leftrightarrow V_{max}$. Como (según enunciado) $T$ es tal que $\dfrac{dV}{dt}>0$, $V_{max}$ se alcanzará al final de la hélice, es decir, con $V_2$:

$$n|_{max} = \sqrt{\cos^2\gamma\left(1+\left(\frac{V_2^2}{gR}\cos\gamma\right)^2\right)}$$

- $n|_{max} \leftrightarrow (\cos\mu)|_{min} \leftrightarrow \mu_{max}$: $\cos(\mu_{max}) = \dfrac{\cos\gamma}{\sqrt{\cos^2\gamma\left(1+\left(\frac{V_2^2}{gR}\cos\gamma\right)^2\right)}}$

- $C_L = \dfrac{nW}{\frac{1}{2}\rho V^2 S} \xrightarrow[V^2=\frac{gR}{\cos\gamma}\sqrt{\frac{n^2}{\cos^2\gamma}-1}]{} C_L = \dfrac{nW}{\frac{1}{2}\rho S\frac{gR}{\cos\gamma}\sqrt{\frac{n^2}{\cos^2\gamma}-1}}$

$\cancel{\dfrac{\partial(C_L^2)}{\partial n} = 0 = n^2 - \cos^2\gamma - n^2}$

$\dfrac{d(C_L)^2}{dn} = 0 \rightarrow n^2 - \cos^2\gamma - n^2 = 0$

4) $\theta = \alpha + \gamma \xrightarrow[C_L = C_{L\alpha}\alpha + C_{L0}]{} \theta = \dfrac{C_L}{C_{L\alpha}} - \dfrac{C_{L0}}{C_{L\alpha}} + \gamma \xrightarrow{C_L = C_L(V) = C_L(t)} \theta = \theta(t)$

C-190

Te.
Vuelo Sim.
en Plano Vertical.

**PROBLEMA 7**

Un avión cuyas características geométricas, aerodinámicas y másicas son conocidas, realiza una maniobra definida como sigue:

a) la trayectoria del centro de gravedad es una circunferencia de radio $R$ conocido, situada en un plano vertical

b) la trayectoria mencionada se describe con velocidad $V_0$ constante y conocida.

Suponiendo que se elige un sistema de ejes cuerpo en el que el eje $x_b$ coincide con la dirección del vector velocidad en el punto más bajo de la trayectoria y que el empuje está dirigido según dicho eje, se pide:

No olvidar sacar $C_{L0}$ y despejar bien

1°) Determinar el ángulo de ataque del avión en función del tiempo, suponiendo para ello que $T \operatorname{sen} \alpha$ es despreciable frente a las demás fuerzas del problema.

2°) Determinar la velocidad de cabeceo del avión en función del tiempo.

3°) Determinar el empuje y la deflexión del timón de profundidad que debe fijar el piloto en función del tiempo.

**PROBLEMA 8** no lo he hecho

Según la teoría de Newton puede suponerse que las acciones aerodinámicas producidas por un flujo molecular libre sobre un elemento cualquiera de superficie de un obstáculo, son las expresadas en la Figura 1.

Utilizando la citada teoría determínese, en los distintos casos que puedan presentarse, $C_L = C_L(\alpha)$, $C_D = C_D(C_L)$ y $E_{max}$ para la cuña bidimensional representada en la Figura 2.

**NOTA:** Todos los ángulos que intervienen en el problema son pequeños.

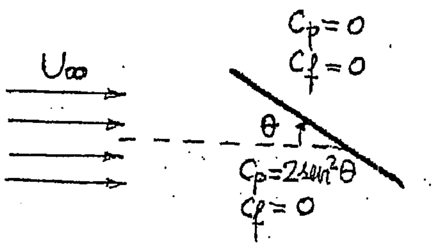



Figura 1

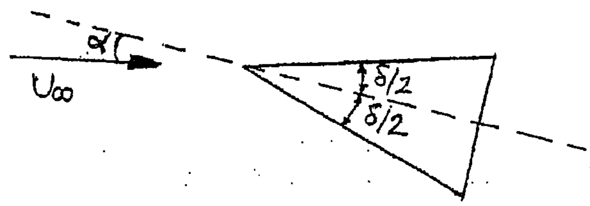
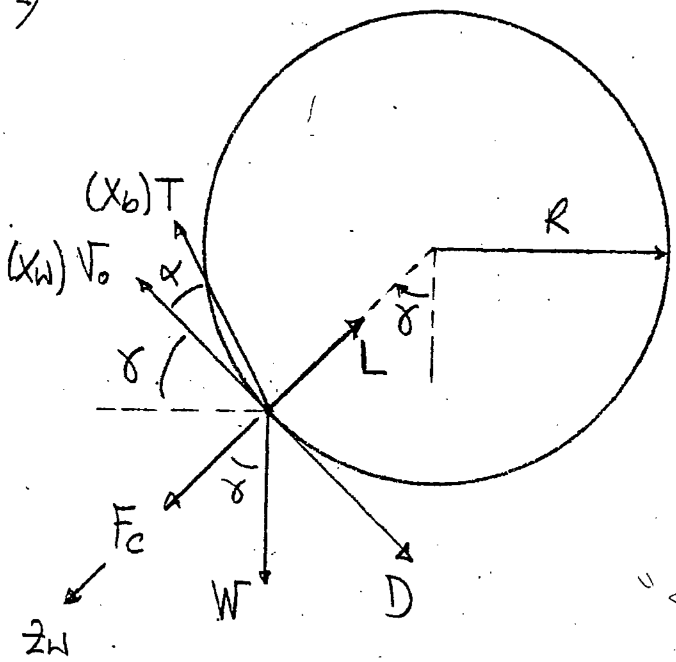



Figura 2

PROBLEMA 9 (13-11-1990)

problema 7

1)




- R conocido.
- $V_0$ = constante y conocida
- $T\operatorname{sen}\alpha$ despreciable

$$F_c = \frac{W}{g}\frac{V_0^2}{R}$$

- En $\gamma = 0$: $x_b \parallel V_0 \longrightarrow \alpha = 0$

$C_L = C_{L_0} + \alpha C_{L_\alpha}$
no es dato?
"se conocen características geométricas, aerodinámicas y másicas"

$\vec{i}_w)$ $T\cos\alpha - D - W\operatorname{sen}\gamma = 0$ (1)

$\vec{k}_w)$ $-L - \cancel{T\operatorname{sen}\alpha} + W\cos\gamma + \dfrac{W}{g}\dfrac{V_0^2}{R} = 0$ (2)

despreciable (según enunciado)

De (2)

$$L = W\cos\gamma + \frac{W}{g}\frac{V_0^2}{R}$$

$$L = \frac{1}{2}\rho V_0^2 S\, C_L = \frac{1}{2}\rho V_0^2 S\,(C_{L_0} + C_{L_\alpha}\alpha(t)) \quad (*)$$

En $\gamma = 0 \rightarrow \alpha = 0 \longrightarrow L = \frac{1}{2}\rho V_0^2 S\,(C_{L_0} + C_{L_\alpha}\cancel{\alpha(t)}) = W + \dfrac{W}{g}\dfrac{V_0^2}{R}$

0

Por tanto: $C_{L_0} = \left(W + \dfrac{W}{g}\dfrac{V_0^2}{R}\right)\cdot\dfrac{2}{\rho V_0^2 S}$

Sustituyendo $C_{L_0}$ en $(*)$ y despejando:

$$\alpha(t) = \frac{\left(W\cos\gamma + \cancel{\frac{W}{g}\frac{V_0^2}{R}}\right)}{\frac{1}{2}\rho V_0^2 S C_{L_\alpha}} - \frac{\left(W + \cancel{\frac{W}{g}\frac{V_0^2}{R}}\right)}{\frac{1}{2}\rho V_0^2 S C_{L_\alpha}} = \frac{2W}{\rho V_0^2 S C_{L_\alpha}}(\cos\gamma - 1)$$

Trayectoria circular : $V_0 = \dot{\gamma} R \longrightarrow \frac{d\gamma}{dt} = \frac{V_0}{R} \longrightarrow \gamma(t) = \frac{V_0}{R} t$

Por tanto $\alpha(t)$ queda :
$$\boxed{\alpha(t) = \frac{2W}{\rho V_0^2 S C_{L\alpha}} \cdot \left( \cos\left(\frac{V_0}{R} t\right) - 1 \right)}$$

2) Velocidad de cabeceo $\equiv \dot{\theta} = d\theta/dt$

$\theta \equiv$ Ángulo de asiento : Ángulo que forma el eje $X_b$ con su proyección sobre el plano horizontal

$$\boxed{\theta = \gamma + \alpha} \longrightarrow \dot{\theta} = \dot{\gamma} + \dot{\alpha}$$

* $\dot{\gamma} = V_0/R$
* $\dot{\alpha} = \frac{d\alpha}{dt} = \frac{2W}{\rho V_0^2 S C_{L\alpha}} \left( -\operatorname{sen}\left(\frac{V_0}{R} t\right) \cdot \frac{V_0}{R} \right)$

Por tanto :
$$\boxed{\dot{\theta} = \frac{V_0}{R} \left( 1 - \frac{2W}{\rho V_0^2 S C_{L\alpha}} \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{V_0}{R} t\right) \right)}$$

3) T se calcula de la ecuación (1)

$$(1) \rightarrow T = \frac{D + W \operatorname{sen}\gamma}{\cos\alpha}$$

Sabemos: $D = \frac{1}{2}\rho V_0^2 S C_D = \frac{1}{2}\rho V_0^2 S \left( C_{D0} + K C_L^2 \right) = \frac{1}{2}\rho V_0^2 S \left( C_{D0} + K (C_{L0} + C_{L\alpha}\alpha)^2 \right)$

Sustituyendo D en la expresión de T :

$$\boxed{T = \frac{\frac{1}{2}\rho V_0^2 S \left( C_{D0} + K (C_{L0} + C_{L\alpha}\alpha)^2 \right) + W \operatorname{sen}\gamma}{\cos\alpha}}$$

Donde $\begin{cases} \gamma = \frac{V_0}{R} t \\ \alpha = \alpha(t) \\ \text{(Del apartado 1º)} \end{cases}$

deflexión timón profundidad

3) De la Teoría $\cancel{M_T}^{0} + M_A = I_y \dot{q} - (I_z - I_x)pr + J_{xz}(p^2 - r^2)$

Donde
$$\begin{aligned} p &= \dot{\phi} - \dot{\psi}\,\mathrm{sen}\theta &&= 0 \\ q &= \dot{\theta}\cos\phi + \dot{\psi}\cos\theta\,\mathrm{sen}\phi &&= \dot{\theta} \\ r &= \dot{\psi}\cos\theta\cos\phi - \dot{\theta}\,\mathrm{sen}\phi &&= 0 \end{aligned}$$

$\phi = \psi = \dot{\phi} = \dot{\psi} = 0$

$\theta \neq 0;\ \dot{\theta} \neq 0$

Por tanto queda: $M_A = I_y \dot{q} = I_y \ddot{\theta} = I_y(\cancel{\ddot{\gamma}}^{0} + \ddot{\alpha}) = I_y \ddot{\alpha}$

$M_A \equiv$ Momento de las fuerzas aerodinámicas en el centro de gravedad

$$M_A = \frac{1}{2}\rho V_0^2 S c\left(C_{m_0} + C_{m_\alpha}\alpha + C_{m_\delta}\delta_e + C_{m_q}\bar{q}\right)$$

velocidad angular de cabeceo

Operando y despejando obtendremos $\longrightarrow$ $\delta_e(t)$

# PROBLEMA 7 CLASE

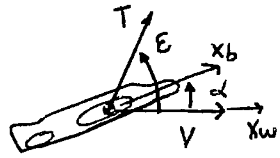
Ec de movimiento Oxz

CARACTERÍSTICAS GEOMÉTRICAS, AEROD., MÁSICAS CONOCIDA

REALIZA MANIOBRA
- Trayectoria del centro de grave(dad) conocido, situado en el plano vertical
- Velocidad $V_0$ constante y conocida

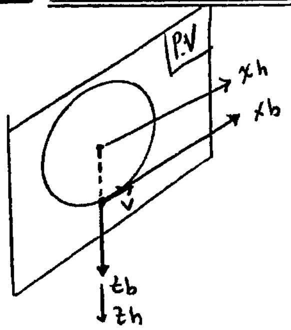
SISTEMA EJES CUERPO ⟶
- $X_b \equiv$ dirección del vector velocidad en el punto más bajo de la trayect.
- Empuje según $X_b$

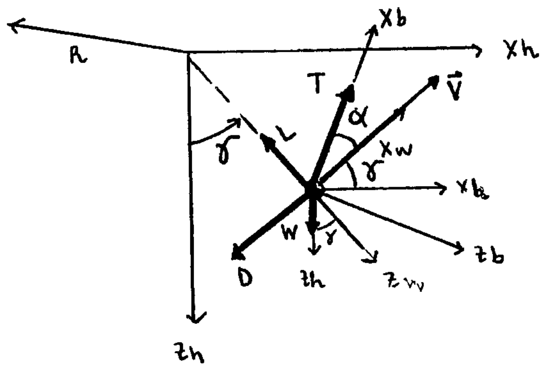
## 1 DETERMINAR $\alpha = \alpha(T)$ con $T \operatorname{sen} \alpha \ll$ resto de fuerzas




* VUELO SIMÉTRICO $\beta = 0$

* EMPUJE SEGÚN Xb $\varepsilon = \alpha$




$$\begin{cases} \vec{V} = \dot{\gamma} R \cdot \vec{i}_w \\ \vec{a} = -\dot{\gamma}^2 R \vec{k}_w \end{cases}$$

Dato $\vec{V} = V_0 = $ cte
- $V_0 = \dot{\gamma} R$
- $\dfrac{\partial \gamma}{\partial t} = \dfrac{V_0}{R} \longrightarrow \gamma = \dfrac{V_0}{R} \cdot t + \gamma_0$
- En $t = 0$ $\gamma = 0 \Rightarrow \gamma_0 = 0$

$\boxed{\gamma = \dfrac{V_0}{R} t}$

$$\begin{cases} \vec{V} = \dfrac{V_0}{R} R \, \vec{i}_w \\ \vec{a} = -\dfrac{V_0^2}{R^2} \cdot R \, \vec{k}_w = -\dfrac{V_0^2}{R} \vec{k}_w \end{cases}$$

**EQUILIBRIO de FUERZAS** $\Sigma F = m \cdot \vec{a}$

$$\begin{cases} \vec{i}_w \equiv T \cos \alpha - D - W \operatorname{sen} \gamma = 0 \quad (1) \\ \vec{k}_w \equiv \underbrace{-\cancel{T \operatorname{sen} \alpha}}_{\text{DATO del ENUNCIADO } T\operatorname{sen}\alpha \ll L, W} - L + W \cos \gamma = -\dfrac{V_0^2}{R} \cdot \underbrace{m}_{W/g} \quad (2) \end{cases}$$

con
$$\begin{cases} L = \tfrac{1}{2} \rho S V_0^2 \cdot C_L \longrightarrow \boxed{C_L = C_{L_0} + C_{L_\alpha} \cdot \alpha(t)} \\ D = \tfrac{1}{2} \rho S V_0^2 \cdot C_D \end{cases}$$

Ec (2) $L - W \cos \gamma - V_0^2/R \; \dfrac{W}{g} = 0$;

$\underline{\tfrac{1}{2} \rho V_0^2 S} \left( C_{L_0} + C_{L_\alpha} \alpha(t) \right) - W \cos \gamma - \dfrac{V_0^2}{R} \dfrac{W}{g} = 0$

Busco $C_{L_0}$

$\boxed{t = 0} \longrightarrow \gamma = 0$

En el punto + bajo Xb lleva dirección del vector velocidad | DATO $\rightarrow \alpha = 0$

$\square \, C_{L_0} - W - \dfrac{W}{g} \dfrac{V_0^2}{R} = 0$

$\underline{C_{L_0} = \dfrac{W - \frac{W}{g} \frac{V_0^2}{R}}{\rho V_0^2 S \frac{1}{2}}}$

Así: $\square \left[ C_{L_0} + C_{L_\alpha} \alpha(t) \right] = W \cos \left( \dfrac{V_0}{R} t \right) + \dfrac{W}{g} \dfrac{V_0^2}{R}$;

$\square \, C_{L_\alpha} \alpha(t) = \underbrace{-W - \dfrac{W}{g} \cancel{\dfrac{V_0^2}{R}}}_{\square C_{L_0}} + W \cos (\quad) + \dfrac{W}{g} \cancel{\dfrac{V_0^2}{R}}$

$$\boxed{\alpha(t) = \dfrac{2W \left( -1 + \cos \left( \frac{V_0}{R} t \right) \right)}{C_{L_\alpha} \cdot \rho V_0^2 S}}$$

*[2] DETERMINAR $\gamma = \gamma(E, T/W, \varepsilon)$

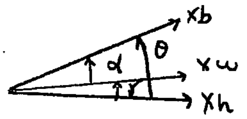
$$E = L/D = W/D$$

Ec (1): $T\cos\varepsilon - D - W \operatorname{sen}\cancel{\gamma} = 0$

$$\frac{T}{W}\cos\varepsilon - \frac{D}{W} - \operatorname{sen}\gamma = 0 \longrightarrow T/W\cos\varepsilon - 1/E = \operatorname{sen}\gamma$$

$$\boxed{\gamma = \operatorname{arcsen}\left[T/W\cos\varepsilon - 1/E\right]}$$

[2] DETERMINAR VELOCIDAD de CABECEO del AVIÓN en $f(t)$




$$\theta = \alpha + \gamma \rightarrow \dot\theta = \dot\alpha + \dot\gamma$$

$(p, q, r)$

Velocidad de CABECEO $\equiv q = \dot\theta\cos\phi + \dot\psi\cos\theta\operatorname{sen}\phi$

$$\left.\begin{matrix}\psi = 0\\ \phi = 0\end{matrix}\right\} \rightarrow q = \dot\theta = \dot\alpha + \dot\gamma$$

ALAS A NIVEL

$$q = \underbrace{\frac{2W\left(-\operatorname{sen}\left(\frac{V_0}{R}t\right)\right)}{C_{L\alpha}\, S\rho\, V_0^2}\cdot\frac{V_0}{R}}_{\dot\alpha(t)} + \underbrace{\frac{V_0}{R}}_{\dot\gamma(t)}$$

$$\boxed{q = \frac{V_0}{R}\left[1 - \frac{2W\operatorname{sen}\left(\frac{V_0}{R}t\right)}{C_{L\alpha}\, S\rho\, V_0^2}\right]}$$

[3.] EMPUJE Y DEFLEXIÓN de TIMÓN de PROFUNDIDAD en $f(t)$

$T(t)$:

Ec (1) $T\cdot\cos\varepsilon - D - W\operatorname{sen}\gamma = 0 \longrightarrow \boxed{T = \dfrac{W\operatorname{sen}\left(\frac{V_0}{R}t\right) - D}{\cos\alpha}}$

con $\alpha = \alpha(t)$ ya calculado

y $D = \underbrace{1/2\,\rho\, S V_0^2}_{}\cdot C_D = \square\,(C_{D_0} + \underbrace{C_L^2}\cdot K)$

donde $C_L = C_{L_0} + C_{L\alpha}\cdot\alpha(t)$

con $\alpha(t)$ y $C_{L_0}$ ya calculados).

$\delta_e(t)$: $\longrightarrow$ 2º Problema

Ec. de EQUILIBRIO de MOMENTOS

$$\underset{0}{\cancel{M_T}} + M_A = I_y\cdot\dot q + 0 + 0$$

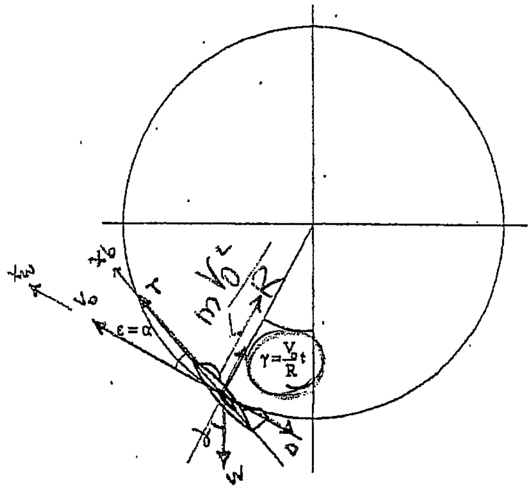
$M_A = C_{mcg}\cdot q_0\cdot S\bar{C} = I_y\dot q$ donde $C_{mcg} = C_{m_0} + C_{m\alpha}\,\alpha_{wb} + C_{m\delta}\cdot\delta_e$

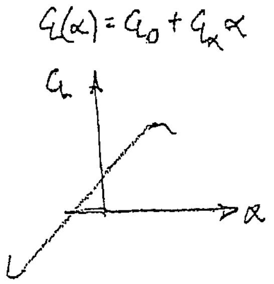
$$\dot q = \ddot\theta = \ddot\alpha + \underset{0}{\cancel{\ddot\gamma}} = -\left(\frac{V_0}{R}\right)^2\frac{2W}{\rho S V_0^2 C_{L\alpha}}\cos\left(\frac{V_0}{R}t\right)$$

Así $$\boxed{\delta_e = \frac{I_y\cdot\dot q}{\frac{1}{2}\rho V_0^2 S\bar{C}} - \frac{C_{m_0}}{C_{m\delta}} - \frac{C_{m\alpha}}{C_{m\delta}}\alpha_{wb} = \delta_e(t)}$$

ACADEMIA NEWTON
Hilarión Eslava 12, 2ºA - 91 543 45 12

**G7**




1. Las ecuaciones que gobiernan el movimiento son las correspondientes al vuelo simétrico en un plano vertical (VSPV):

$$\left\{\begin{array}{lcl} T\cos\varepsilon - D - mg\sin\omega t & = & 0 \quad (m\dot{V}=0) \quad (1)\\ T\cancel{\sin}\varepsilon + L - m\left(g\cos\omega t + \omega V_o\right) & = & 0 \quad (mV\dot{\gamma}=mV_0\cdot\frac{V_0}{R}) \quad (2)\end{array}\right.$$

siendo $\omega=\frac{V_o}{R}$. Puesto que se conocen las características aerodinámicas del avión, entre ellas $C_{L0}$ y $C_{L\alpha}$, resulta que, como la componente del empuje perpendicualar a la velocidad aerodinámica no cuenta, la sustentación es

$$L = mg\cos\omega t + m\frac{V_o^2}{R} = \frac{1}{2}\rho V_o^2 S\left(C_{L0}+C_{L\alpha}\alpha\right)$$

El $C_{L0}$, que es el $C_L$ para $\alpha=0$, se obtiene a partir del equilibrio dinámico en el punto inferior de la circunferencia (se toma como referencia para $\alpha$), ya que la sustentación debe compensar el peso y la aceleración centrífuga

$$L_{inf.} = mg + m\frac{V_o^2}{R} = \frac{1}{2}\rho V_o^2 S C_{L0}$$

de modo que

$$mg\cos\omega t + m\frac{V_o^2}{R} == mg + +m\frac{V_o^2}{R} + \frac{1}{2}\rho V_o^2 S C_{L\alpha}\alpha$$

y, por tanto

$$\alpha = \frac{2mg\left(\cos\omega t - 1\right)}{\rho V_o^2 S C_{L\alpha}} = -\frac{4mg}{\rho V_o^2 S C_{L\alpha}}\sin^2\left(\frac{V_o}{2R}t\right)$$

2. Ahora, por composición de movimientos, se tiene que el ángulo de asiento en función del tiempo es

$$\dot{q} : \dot{\theta} = \dot{\gamma} + \dot{\alpha} = \frac{V_o}{R} - \frac{2mg}{\rho V_o^2 S C_{L\alpha}}\frac{V_o}{R}\sin\left(\frac{V_o}{R}t\right) = \frac{V_o}{R}\left[1 - \frac{2mg}{\rho V_o^2 S C_{L\alpha}}\sin\left(\frac{V_o}{R}t\right)\right]$$

3. El empuje, sabiendo que, en el punto inferior de la trayectoria ha de ser

$$T_o = D_o = \frac{1}{2}\rho V_o^2 S\left(C_{D0} + kC_{L0}^2\right)$$

resulta entonces que viene dado por la siguiente expresión

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{\cos\alpha}\left[\frac{1}{2}\rho V_o^2 S\left[C_{D0} + k\left(C_{L0}+C_{L\alpha}\alpha\right)^2\right] + mg\sin\left(\frac{V_o}{R}t\right)\right] \\ &= \frac{1}{\cos\alpha}\left[T_o + \frac{1}{2}\rho V_o^2 Sk\left(C_{L\alpha}^2 + 2C_{Lo}C_{L\alpha}\alpha\right) + mg\sin\left(\frac{V_o}{R}t\right)\right]\end{aligned}$$

$\Sigma M = I_y\cdot\dot{q} = I_y\ddot{\theta}$

$M_A + \cancel{M_T} = \frac{1}{2}\rho V^2 Sc\cdot C_m = \frac{1}{2}\rho V^2 Sc\left[C_{m_0} + C_{m\alpha}\cdot\alpha\cdot C_{m\delta}\cdot\delta_e + C_{m_{\dot{q}}}\cdot\dot{q}\right] = I_y\cdot\ddot{\theta} \Rightarrow \delta_e = \delta_e(t)$

0

C-140

**PROBLEMA 8**

Según la teoría de Newton puede suponerse que las acciones aerodinámicas producidas por un flujo molecular libre sobre un elemento cualquiera de superficie de un obstáculo, son las expresadas en la Figura 1.

Utilizando la citada teoría determínese, en los distintos casos que puedan presentarse, $C_L = C_L(\alpha)$, $C_D = C_D(C_L)$ y $E_{max}$ para la cuña bidimensional representada en la Figura 2.

NOTA: Todos los ángulos que intervienen en el problema son pequeños.

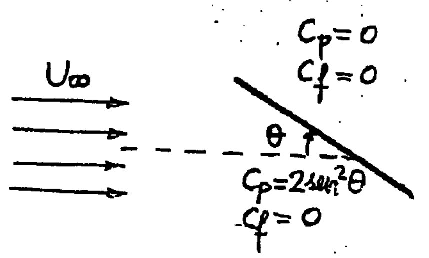



Figura 1

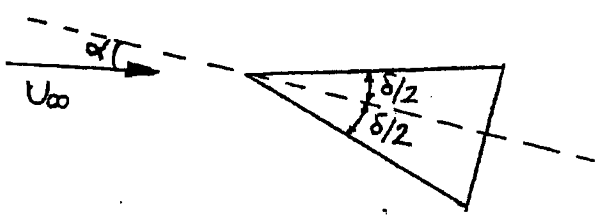



Figura 2

C-190

## PROBLEMA 7

Un avión cuyas características geométricas, aerodinámicas y másicas son conocidas, realiza una maniobra definida como sigue:

a) la trayectoria del centro de gravedad es una circunferencia de radio $R$ conocido, situada en un plano vertical

b) la trayectoria mencionada se describe con velocidad $V_0$ constante y conocida.

Suponiendo que se elige un sistema de ejes cuerpo en el que el eje $x_b$ coincide con la dirección del vector velocidad en el punto más bajo de la trayectoria y que el empuje está dirigido según dicho eje, se pide:

$\dot{\alpha} - \varepsilon = cte \rightarrow \dot{\alpha} - \varepsilon = 0 \Rightarrow \alpha = \varepsilon$

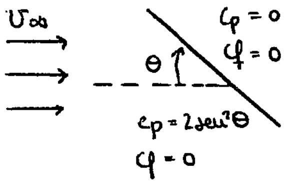
1°) Determinar el ángulo de ataque del avión en función del tiempo, suponiendo para ello que $T\operatorname{sen}\alpha$ es despreciable frente a las demás fuerzas del problema.

2°) Determinar la velocidad de cabeceo del avión en función del tiempo.

3°) Determinar el empuje y la deflexión del timón de profundidad que debe fijar el piloto en función del tiempo.

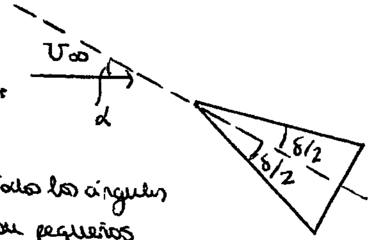
# PROBLEMA 8 CLASE

TEORÍA de NEWTON

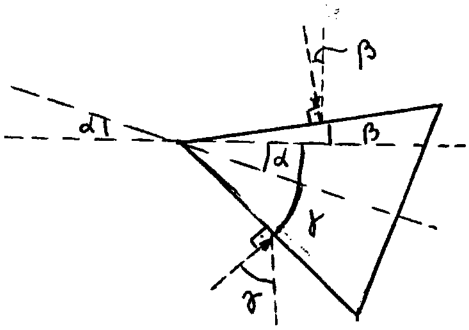



DETERMINAR PARA DIFERENTES CASOS $C_L = C_L(\alpha)$, $C_D = C_D(C_L)$ y $E_{max}$

Todos los ángulos son pequeños




## CASO 1 $\quad 0 \leq \alpha \leq \delta/2$




$\beta = \frac{\delta}{2} - \alpha$

$\gamma = \frac{\delta}{2} + \alpha$

sólo resistencia del intradós !!

$* \; C_L = C_{p_i} \cdot \cos\gamma - C_{p_e} \cdot \cos\beta =$ ✓ $C_p = 2\,\text{sen}^2\theta$

✓ áng. pequeños

$= 2\,\text{sen}^2\gamma\cos\gamma - 2\,\text{sen}^2\beta\cos\beta \simeq$

$\simeq 2\gamma^2 - 2\beta^2 = 2\left[\left(\frac{\delta}{2}+\alpha\right)^2 - \left(\frac{\delta}{2}-\alpha\right)^2\right]$

$$\boxed{C_L = 2 \cdot 2\left[\frac{\delta}{2} \cdot \alpha \cdot 2\right] = 4\delta\alpha}$$

los dos aportan resistencia !!

$* \; C_d = C_{p_i} \cdot \text{sen}\,\gamma + C_{p_e} \cdot \text{sen}\,\beta = 2\,\text{sen}^3\gamma - 2\,\text{sen}^3\beta \simeq 2(\gamma^3 + \beta^3) =$

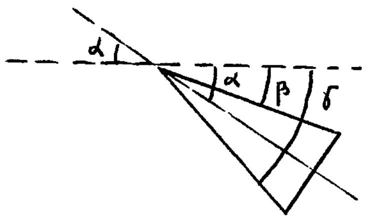
$= \ldots = \frac{\delta^3}{2} + \frac{3}{8\delta}(4\alpha\delta)^2$ donde

$C_{D_0} + K \cdot C_L^2$

$$\boxed{\begin{array}{l} C_{D_0} = \delta^3/2 \\ K = 3/8\delta \\ C_L = 4\alpha\delta \end{array}}$$

$$* \; \boxed{E_{max} = \frac{1}{2\sqrt{C_{D_0} \cdot K}}} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{\frac{\delta^3}{2} \cdot \frac{3}{8\delta}}} = \boxed{\frac{2}{\sqrt{3}\,\delta}}$$

## CASO 2 $\quad \alpha \geq \delta/2$




$\gamma = \frac{\delta}{2} + \alpha$

La diferencia es que la corriente no impacta en el extradós.

$* \; \boxed{C_L} = C_{p_i} \cdot \cos\gamma = 2\,\text{sen}^2\gamma \cdot \cos\gamma \simeq 2\gamma^2 = \boxed{2\left(\alpha + \frac{\delta}{2}\right)^2}$

$* \; \boxed{C_D} = C_{p_i} \cdot \text{sen}\,\gamma = 2\,\text{sen}^3\gamma \simeq 2\gamma^3 = \boxed{2\left(\alpha + \frac{\delta}{2}\right)^3 = C_L\left(\alpha + \frac{\delta}{2}\right)}$

**G8**

A primera vista se observa que existen dos casos claramente distinguibles:

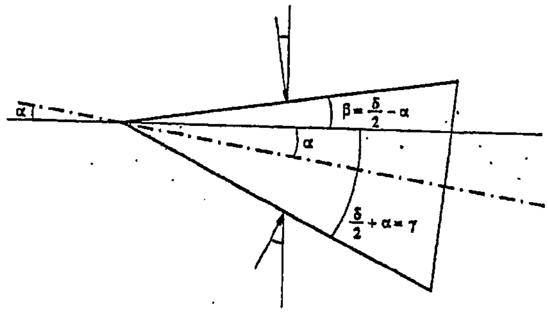
- $0 \leq \alpha \leq \dfrac{\delta}{2}$

$$c_l = c_{pi}\cos\gamma - c_{pe}\cos\beta = 2\sin^2\gamma\cos\gamma - 2\sin^2\beta\cos\beta \simeq 2\left(\gamma^2-\beta^2\right) = 2\cdot\delta\cdot 2\alpha = 4\alpha\delta$$

$$\begin{aligned} c_d &= c_d = c_{pi}\sin\gamma + c_{pe}\sin\beta = 2\sin^3\gamma + 2\sin^3\beta \simeq 2\left(\gamma^3+\beta^3\right) = 2\left[\left(\tfrac{\delta}{2}+\alpha\right)^3 + \left(\tfrac{\delta}{2}-\alpha\right)^3\right] = \\ &= 4\left(\tfrac{\delta}{2}\right)^3 + 6\alpha^2\delta = \tfrac{\delta^3}{2} + \tfrac{3}{8\delta}\left(4\alpha\delta\right)^2 = C_{D0} + kC_L^2 \end{aligned}$$

La $E_{max}$ se obtiene derivando con respecto a $\alpha$ e igualando a 0, para así obtener el resultado correspondiente al caso de polar parabólica de coeficientes constantes:

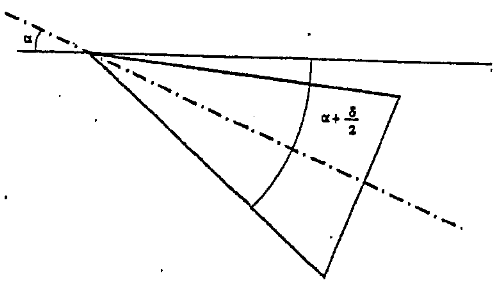
$$E_{max} = \frac{1}{2\sqrt{C_{D0}k}} = \frac{1}{2\sqrt{\frac{\delta^3}{2}\cdot\frac{3}{8\delta}}} = \frac{2}{\sqrt{3\delta^2}} = \frac{2}{\delta\sqrt{3}}$$




- $\alpha \geq \dfrac{\delta}{2}$

$$c_l = c_{pi}\cos\left(\alpha+\frac{\delta}{2}\right) = 2\sin^2\left(\alpha+\frac{\delta}{2}\right)\cos\left(\alpha+\frac{\delta}{2}\right) \simeq 2\left(\alpha+\frac{\delta}{2}\right)^2 = 2\left(\alpha^2+\frac{\delta^2}{4}+\alpha\delta\right)$$

$$c_d = c_{pi}\sin\left(\alpha+\frac{\delta}{2}\right) = 2\sin^3\left(\alpha+\frac{\delta}{2}\right) \simeq 2\left(\alpha+\frac{\delta}{2}\right)^3 = 2\left(\alpha^3+\left(\frac{\delta}{2}\right)^3+3\alpha^2\frac{\delta}{2}+3\alpha\left(\frac{\delta}{2}\right)^2\right)$$



C-153

## PROBLEMA 11

Un avión está efectuando un vuelo simétrico en un plano vertical descompuesto en los siguientes tramos (ver Figura 1):

Tramo AB: Vuelo horizontal, rectilíneo, estacionario

Tramo BC: Vuelo en maniobra, con velocidad $V$ y radio de curvatura $R_1$ constante

Tramo CD: Vuelo en maniobra, con velocidad $V$ y radio de curvatura $R_2$ constante

Tramo DE: Vuelo horizontal, rectilíneo, estacionario

Suponiendo además que:

a) Son conocidas todas las características geométricas, aerodinámicas y másicas del avión. En concreto: el coeficiente de sustentación del avión completo es una función lineal del ángulo de ataque, entre los valores $C_{L_{MAX}}$ y $C_{L_{MIN}}$, y es independiente de las deflexiones del timón de profundidad (ver Figura 2); la polar es parabólica con coeficientes constantes.

b) El empuje de los motores $T$ está siempre dirigido según el eje $x_w$.

c) La velocidad de vuelo $V$ es constante y conocida en todo el problema.

d) Son despreciables las transiciones entre los distintos tramos.

e) Se consideran constantes conocidas durante todo el vuelo el peso del avión $W$, la densidad atmosférica $\rho$ y la aceleración de la gravedad $g$.

Se pide:

1°) En el tramo BC:

1.1) Determinar el radio de curvatura mínimo, $R_{1MIN}$, que puede conseguir el avión

1.2) Para la condición de 1.1, determinar la evolución con el tiempo de $\alpha, \delta_e, T$

2°) En el tramo CD:

2.1) Determinar el radio de curvatura mínimo, $R_{2MIN}$, que puede conseguir el avión

2.2) Para la condición de 2.1, determinar la evolución con el tiempo de $\alpha, \delta_e, T$

3°) Comparar los valores de $R_{1MIN}$ y $R_{2MIN}$ para las distintas velocidades de vuelo.

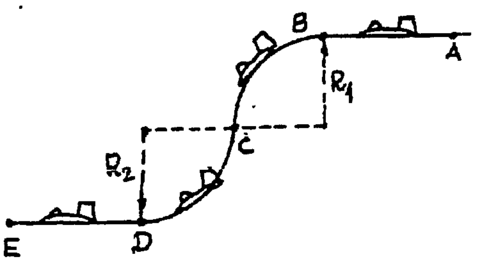



FIGURA 1

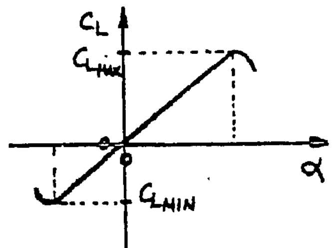
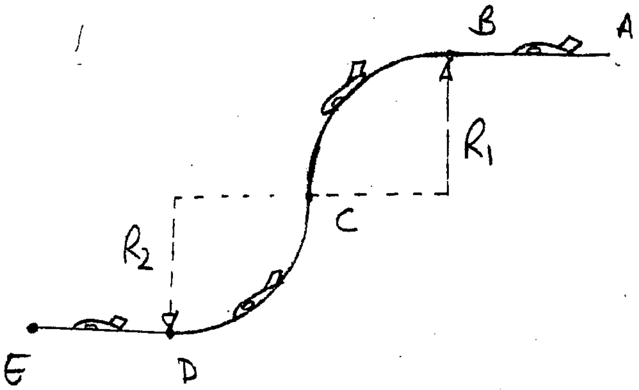



FIGURA 2

$C_{LMAX} > |C_{LMIN}|$

PROBLEMA 10 (13-11-1990) problema 11

Vuelo simétrico en un plano vertical : $y_e = cte$ ; $\nu = \beta = 0 \rightarrow \chi = \mu = 0$
$(Q = 0)$




AB : Horizontal, rectilíneo estacionario
BC : Maniobra, V, $R_1 = cte$
CD : Maniobra, V, $R_2 = cte$
(BC y CD: $V = cte$)
DE : Horizontal, rectilíneo, estacionario

$C_L = \cancel{C_{L_0}} + C_{L\alpha} \cdot \alpha$ (0, GRÁFICA DEL ENUNCIADO)

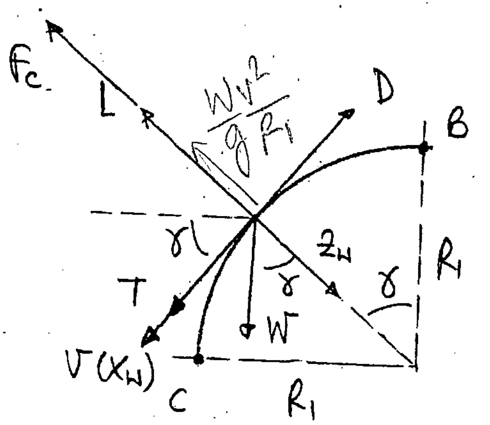
$C_D = C_{D_0} + K C_L^2$

$T \parallel X_W$

$W, \rho, g, V$ conocidas y constantes

1)

1.1)




$$F_c = \frac{W}{g}\frac{V^2}{R_1}$$

$$\vec{i}_W) \quad T - D + W \sin\gamma = 0 \qquad (1)$$

$$\vec{k}_W) \quad -L - \frac{W}{g}\frac{V^2}{R_1} + W\cos\gamma = 0 \qquad (2)$$

Sabemos que :

$$D = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_D = \frac{1}{2}\rho V^2 S (C_{D_0} + K C_L^2)$$

$$L = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_L = \frac{1}{2}\rho V^2 S (\cancel{C_{L_0}} + C_{L\alpha}\alpha)$$ (0)

De (2) $L = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_L = -\frac{W}{g}\frac{V^2}{R_1} + W\cos\gamma$

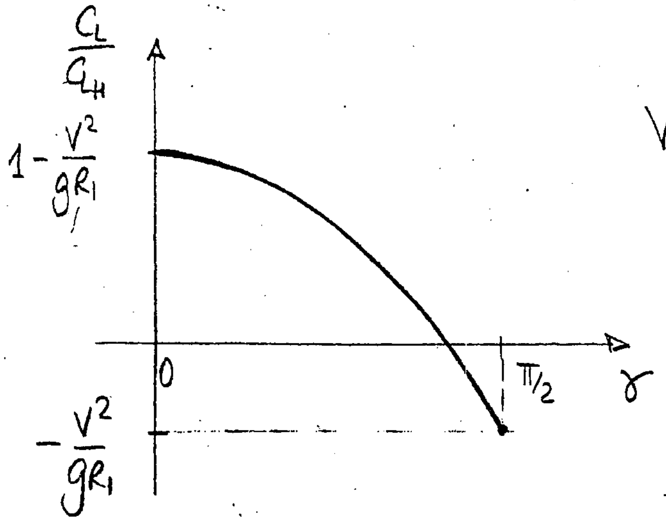
$n = \frac{L}{W} = \cos\gamma - \frac{1}{g}\frac{V^2}{R_1}$

$$\hookrightarrow \quad C_L = \underbrace{\frac{2W}{\rho V^2 S}}_{= C_{L_{HORIZONTAL}}} \left(\cos\gamma - \frac{V^2}{gR_1}\right) ;$$ Aquí se ve que si $R_1 \downarrow$, $C_L \downarrow$ (El límite inferior de $R_1$ lo marcaría $C_{L_{min}}$)

$= C_{L_{HORIZONTAL}}$ $\left(L = W \rightarrow C_{L_H} = \frac{2W}{\rho V^2 S}\right)$

1.

Vamos a dibujar la función $\frac{C_L}{C_{LH}} = \cos\gamma - \frac{V^2}{gR_1}$ para $0 \leq \gamma \leq \frac{\pi}{2}$




Vemos que $C_{L_{MIN}}$ para $\gamma = \frac{\pi}{2}$

Para $\gamma = \frac{\pi}{2} \longrightarrow C_{L_{MIN}} = \frac{2W}{\rho V_0^2 S}\left(-\frac{V_0^2}{gR_{1_{MIN}}}\right) \longrightarrow \boxed{R_{1_{MIN}} = -\frac{2W}{g\rho S \underbrace{C_{L_{MIN}}}_{<0}}} > 0$

1.2) $V = cte = \dot{\gamma} R_1 \longrightarrow \frac{d\gamma}{dt} = \frac{V}{R_1} \longrightarrow \gamma = \frac{V}{R_{1_{MIN}}} t$

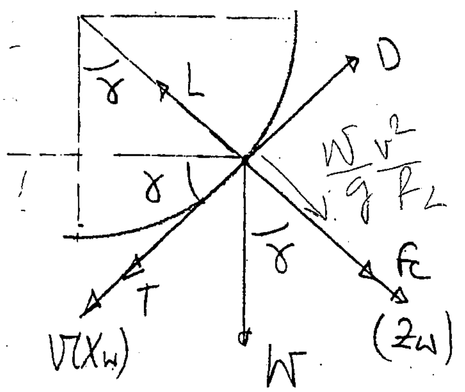
$$C_L = C_{L\alpha}\alpha = \frac{2W}{\rho V^2 S}\left(\cos\gamma - \frac{V^2}{gR_{1_{MIN}}}\right) \longrightarrow \boxed{\alpha(t) = \frac{2W}{\rho V^2 S C_{L\alpha}}\left(\cos\left(\frac{Vt}{R_{1_{MIN}}}\right) - \frac{V^2}{gR_{1_{MIN}}}\right)}$$

De la ecuación (1) : $T = D - W\sin\gamma = \frac{1}{2}\rho V^2 S (C_{D_0} + KC_L^2) - W\sin\gamma$

$$\boxed{T = \frac{1}{2}\rho V^2 S \left[C_{D_0} + K\left(\underbrace{\frac{2W}{\rho V^2 S}\left(\cos\left(\frac{Vt}{R_{1_{MIN}}}\right) - \frac{V^2}{gR_{1_{MIN}}}\right)}_{C_L}\right)^2\right] - W\sin\left(\frac{Vt}{R_{1_{MIN}}}\right)}$$

$$\left.\begin{array}{l} M_A + \cancel{M_T}^{\,0} = I_y \dot{q} \qquad (\phi = \psi = 0\ ;\ \theta \neq 0) \\ M_A = \frac{1}{2}\rho V^2 S c\,(C_{m_0} + C_{m\alpha}\alpha + C_{m\delta}\delta_e + C_{m\bar{q}}\bar{q}) \end{array}\right\} \longrightarrow \delta_e(t)$$

2) 2.1)




$$F_c = \frac{W}{g}\frac{V^2}{R_2}$$

$\vec{i_w}$) $T - D + W\sin\gamma = 0$ (1)

$\vec{k_w}$) $W\cos\gamma + \frac{W}{g}\frac{V^2}{R_2} - L = 0$ (2)

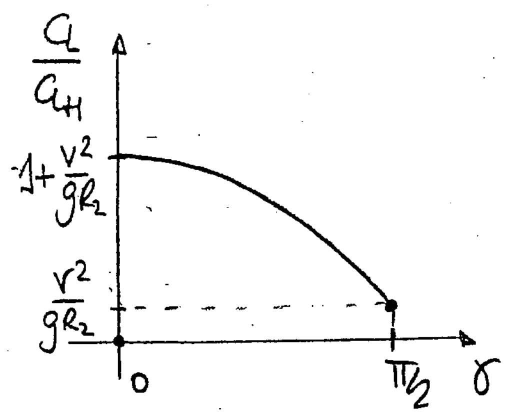
Sabemos que: $D = \frac{1}{2}\rho S V^2 C_D = \frac{1}{2}\rho V^2 S (C_{D_0} + K C_L^2)$

$L = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_L = \frac{1}{2}\rho V^2 S (\cancel{C_{L_0}} + C_{L\alpha}\alpha)$ 0

De (2) $L = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_L = W\cos\gamma + \frac{W}{g}\frac{V^2}{R_2}$

$\hookrightarrow C_L = \underbrace{\frac{2W}{\rho V^2 S}}_{C_{L\,HORIZONTAL}}\left(\cos\gamma + \frac{V^2}{gR_2}\right)$ ; Aquí se ve que si $R_2 \downarrow$ $C_L \uparrow$
(El límite inferior de $R_2$ lo marcará $C_{L_{MAX}}$)

Si dibujamos $\frac{C_L}{C_{L_H}} = \cos\gamma + \frac{V^2}{gR_2}$ para $0 \leq \gamma \leq \frac{\pi}{2}$




Vemos que $C_{L_{MAX}}$ para $\gamma = 0$

$$C_{L_{MAX}} = \frac{2W}{\rho V^2 S}\left(1 + \frac{V^2}{gR_{2_{MIN}}}\right)$$

$$\hookrightarrow \boxed{R_{2_{MIN}} = \frac{V^2}{g\left(\frac{\rho V^2 S C_{L_{MAX}}}{2W} - 1\right)}}$$

2.2) $v = \frac{dx}{dt} = \dot{\gamma}^* R_2$ donde $\gamma^* = \left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right)$

$$\hookrightarrow v = -\underset{\gamma \text{ va decreciendo}}{\dot{\gamma} R_2} = -\frac{d\gamma}{dt} R_2 \rightarrow \frac{d\gamma}{dt} = -\frac{v}{R_{2min}}$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\gamma} d\gamma = -\frac{v}{R_{2min}} t \rightarrow \left(\gamma - \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{vt}{R_{2min}} \rightarrow \gamma = \frac{\pi}{2} - \frac{vt}{R_{2min}}$$

Sabemos que: $C_L = C_{L\alpha} \alpha = \frac{2W}{\rho S V^2}\left(\cos\gamma + \frac{V^2}{g R_{2min}}\right)$

$$\hookrightarrow \boxed{\alpha(t) = \frac{2W}{\rho V^2 S C_{L\alpha}}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{vt}{R_{2min}}\right) + \frac{V^2}{g R_{2min}}\right)}$$

De la ecuación (1): $T = D - W\sin\gamma = \frac{1}{2}\rho V^2 S (C_{D0} + K C_L^2) - W\sin\gamma$

$$\boxed{T = \frac{1}{2}\rho V^2 S\left(C_{D0} + K\left(\frac{2W}{\rho V^2 S}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{vt}{R_{2min}}\right) + \frac{V^2}{g R_{2min}}\right)\right)^2\right) - W\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{vt}{R_{2min}}\right)}$$

3) * Se puede observar que $R_{1min}$ es independiente de la velocidad de vuelo del avión!

* También se ve que $R_{2min}$ depende de la velocidad de vuelo ($V$). Además cuando el denominador de la función $R_{2min}$ se hace nulo, tendremos $R_{2min} \rightarrow \infty$

C-153

TR
Vuelo Sim.
en Plano Vertical.

**PROBLEMA 11**

Un avión está efectuando un vuelo simétrico en un plano vertical descompuesto en los siguientes tramos (ver Figura 1):

Tramo AB: Vuelo horizontal, rectilíneo, estacionario

Tramo BC: Vuelo en maniobra, con velocidad $V$ y radio de curvatura $R_1$ constante

Tramo CD: Vuelo en maniobra, con velocidad $V$ y radio de curvatura $R_2$ constante

Tramo DE: Vuelo horizontal, rectilíneo, estacionario

Suponiendo además que:

a) Son conocidas todas las características geométricas, aerodinámicas y másicas del avión. En concreto: el coeficiente de sustentación del avión completo es una función lineal del ángulo de ataque, entre los valores $C_{L_{MAX}}$ y $C_{L_{MIN}}$, y es independiente de las deflexiones del timón de profundidad (ver Figura 2); la polar es parabólica con coeficientes constantes.

b) El empuje de los motores $T$ está siempre dirigido según el eje $x_w$.

c) La velocidad de vuelo $V$ es constante y conocida en todo el problema.

d) Son despreciables las transiciones entre los distintos tramos.

e) Se consideran constantes conocidas durante todo el vuelo el peso del avión $W$, la densidad atmosférica $\rho$ y la aceleración de la gravedad $g$.

Se pide:

1°) En el tramo BC:

1.1) Determinar el radio de curvatura mínimo, $R_{1MIN}$, que puede conseguir el avión

1.2) Para la condición de 1.1, determinar la evolución con el tiempo de $\alpha, \delta_e, T$

2°) En el tramo CD:

2.1) Determinar el radio de curvatura mínimo, $R_{2MIN}$, que puede conseguir el avión

2.2) Para la condición de 2.1, determinar la evolución con el tiempo de $\alpha, \delta_e, T$

3°) Comparar los valores de $R_{1MIN}$ y $R_{2MIN}$ para las distintas velocidades de vuelo.

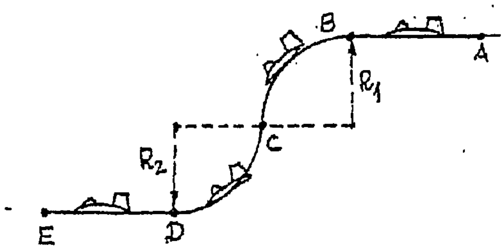



FIGURA 1

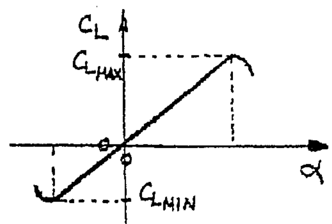
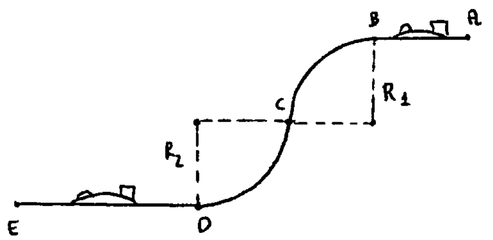



FIGURA 2

$C_{L_{MAX}} > |C_{L_{MIN}}|$

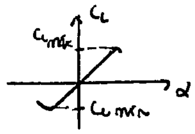
# PROBLEMA 11 CLASE

AVIÓN VUELO SIMÉT. en el PLANO VERTICAL



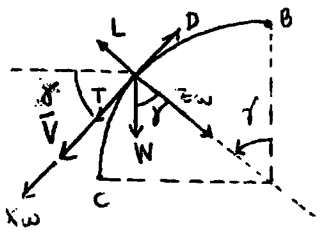

$\begin{cases} \text{TRAMO AB : VUELO HORIZONTAL, rectilíneo, estacionario} \equiv DE \\ \text{TRAMO BC : Maniobra a } V = cte \;\; R_1 = cte \\ \text{TRAMO CD : Maniobra a } V = cte \;\; R_2 = cte \end{cases}$

- Conocidas características geom, aerod, másicas. $\int C_L = f.$ lineal de $\alpha$
- Polar parabólica
- Empuje de los motores según el $x_w$ $\boxed{\varepsilon = \nu = 0}$
- V constante y conocida
- Transiciones entre tramos despreciables
- $W, \rho, g$ dato




$C_{Lmax} > |C_{Lmin}|$

## 1.1 TRAMO BC : $R_{1min}$




$$\begin{cases} \vec{V} = R\dot{\gamma}\,\vec{i}_w \longrightarrow \underline{\dot{\gamma} = \frac{V}{R} = cte} \\ \vec{a} = \dot{\gamma}^2 R\,\vec{k}_w \end{cases}$$

$$\Sigma \vec{F} = m\cdot\vec{a} \quad \begin{cases} \vec{i}_w: \; T - D + W\cdot \operatorname{sen}\gamma = 0 \quad (1) \\ \vec{k}_w: \; -L + W\cos\gamma = m\dot{\gamma}^2 R = \frac{V^2}{R}\frac{W}{g}; \quad (2) \end{cases}$$

En (2) $\quad L = W\left[\cos\gamma - \frac{V^2}{Rg}\right]; \longrightarrow n = \frac{L}{W} = \cos\gamma - \frac{V^2}{Rg};$

$$\begin{cases} \text{En el punto B } \gamma = 0 \longrightarrow n = 1 - \frac{V^2}{gR_1} \\ \text{En el punto } \gamma = \pi/4 \longrightarrow n = \frac{\sqrt{2}}{2} - V^2/gR_1 \\ \text{En el punto C } \gamma = \pi/2 \to n = 0 - V^2/gR_1 \longrightarrow \text{sustentación NEGATIVA !!!} \end{cases}$$

FACTOR de CARGA MÍNIMO ⇒ para una V dada y una S dada, el mayor valor que puedo tener de sustentación viene dado por $C_{L min}$ ⟶ PUNTO MÁS CRÍTICO es el PUNTO C

$$n = \frac{1/2\,\rho S V^2 C_L}{W} = \cos\gamma - \frac{V^2}{Rg}$$

$$\text{En C} \to \cos\gamma = 0 \qquad \frac{\rho S \cancel{V^2} C_L}{2W} = \frac{-\cancel{V^2}}{gR}$$

no puede ser radio de curvatura negativo !!

$$\boxed{R_{min} = -\frac{2W}{\rho S g\, C_{Lmin}} = \frac{2W}{\rho S g\,|C_{Lmin}|}}$$

Para la condición de 1.1.

## 1.2 EVOLUCIÓN con el TIEMPO de $\alpha$, $\delta_e$, T

$$* \; L = -\frac{W V^2}{g R_{min}} + \cos\gamma\cdot W \qquad \gamma = \frac{V}{R_{min}}t$$

$$\frac{1}{2}\rho V^2 S\,(\underbrace{\cancel{C_{L_0}}}_{=0 \text{ (de la figura)}} + C_{L\alpha}\,\alpha(t)) = W\cos\left(\frac{V}{R_{min}}t\right) - \frac{\cancel{W}\cdot V^2}{\cancel{g}}\cdot\frac{\rho S \cancel{g}\,|C_{Lmin}|}{2\cancel{W}}$$

$$\boxed{\alpha(t) = \frac{2W}{\rho V^2 S\, C_{L\alpha}}\cdot\left[\cos\left(\frac{V}{R_{min}}t\right) - \frac{V^2}{W}\frac{1}{2}\rho S\,|C_{Lmin}|\right]}$$

$$* \; T = D - W\operatorname{sen}\gamma = 1/2\,\rho V^2 S\left[C_{D_0} + K\cdot C_L^2\right] - W\operatorname{sen}\left(\frac{V}{R_{min}}t\right) \longrightarrow \boxed{T(t) = \left[\frac{1}{2}\rho V^2 S\left[C_{D_0} + K(C_{L\alpha}\cdot\alpha(t))^2\right] - W\operatorname{sen}(\;\;)\right]}$$

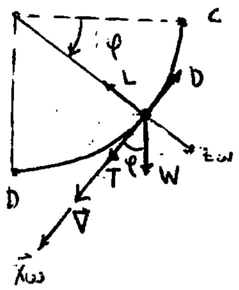
* Ec. de MOMENTOS

$$M = 1/2\,\rho V^2 S c\left[C_{m_0} + C_{m_\alpha}\alpha(t) + C_{m_\delta}\boxed{\delta_E(t)} + C_{m_q} q\right] = I_y\,\dot{q} \quad \int \dot{q} = \ddot{\theta} = \ddot{\gamma} + \ddot{\alpha}$$

vuelo simétrico ($-$ángulo $\gamma$ integrado)

Así $\boxed{\delta_E(t) = \ldots\ldots}$

## 2.1 TRAMO CD : $R_{2min}$




$\Sigma \vec{F} = m \cdot \vec{a}_g$

$\vec{V} = \dot{\varphi} R_2 \vec{i}_w$, $\quad \dot{\varphi} R_2 = V$

$\vec{a} = -\dot{\varphi}^2 R_2 \vec{k}_w$

$\dot{\varphi} = \frac{V}{R_2} = cte \rightarrow \ddot{\varphi} = 0$

$$\boxed{\varphi = \frac{V}{R_2} t}$$

$$\begin{cases} \vec{i}_w: & T - D + W\cos\varphi = 0 \\ \vec{k}_w: & W \operatorname{sen}\varphi - L = -\frac{V^2}{R_2}\frac{W}{g} \end{cases}$$

$$n = \frac{L}{W} = \operatorname{sen}\varphi + \frac{V^2}{g R_2} \begin{cases} \varphi_C = 0 \rightarrow n = V^2/g R_2 \\ \varphi_{\pi/4} = \pi/4 \rightarrow n = \frac{\sqrt{2}}{2} + V^2/g R_2 \\ \varphi_D = \pi/2 \rightarrow n = 1 + V^2/g R_2 \end{cases}$$

Al aumentar $\varphi$ tb lo hace el factor de carga $n$

$n_{min} = n_C$

En C: $n = \frac{1/2 \rho V^2 S C_L}{W} = V^2/g R_2$

$$\boxed{R_{2min} = \frac{2W}{\rho S g C_{Lmáx}}}$$

## 2.2 PARA $R_{2min}$ $\alpha(t)$ $\delta_E(t)$ $T(t)$

$$\begin{cases} L = 1/2 \rho V^2 [C_{L\alpha} \alpha(t)] S = W\left[\operatorname{sen}\left[\frac{V}{R_2} t\right] + \frac{V^2 \rho S g C_{Lmáx}}{g\, 2W}\right] \longrightarrow \alpha(t) = \dots \\ T = D - W\cos\varphi = 1/2 \rho V^2 S \cdot [C_{D0} + K \cdot [C_{L\alpha} \cdot \alpha(t)]^2] - W\cos\left(\frac{V}{R_2} t\right) = \dots = T(t) \\ M = 1/2 \rho V^2 S c\, (C_{m0} + C_{m\alpha}\alpha(t) + C_{m\delta} \cdot \delta_E(t) + C_{mq} \cdot q) = I_y \dot{q} \longrightarrow \delta_E(t) = \dots \end{cases}$$

$\dot{q} = \ddot{\theta} = \ddot{\alpha}(t)$

## 3 COMPARAR $R_{2min}$ y $R_{1min}$ PARA DIFERENTES VELOC. de VUELO

?

$\left.\begin{matrix} R_{1min} \\ R_{2min} \end{matrix}\right\}$ no son función de la $\vec{V}$ $\longrightarrow$ Además como $C_{Lmáx} > |C_{Lmin}|$

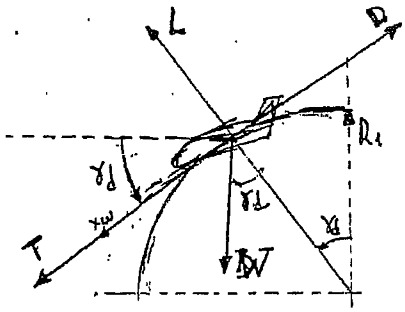
$R_{1min} > R_{2min}$

PROBLEMA 11

$T$ según que $x_w$ :

$V = cte$

1) Tramo BC




$\dot{\gamma}_d = \frac{V}{R_1} \longrightarrow \gamma_d = \frac{V}{R_1} t$

Ojo positivo (que desciendes)

$$\begin{cases} T - D + W \operatorname{sen} \gamma_d = (+) \frac{W}{g} \cancel{\frac{dV}{dt}} \quad (V = cte) \\ -L + W \cos \gamma_d = \frac{W}{g} \cdot \frac{V^2}{R_1} \end{cases}$$

- $-L + W \cos \gamma_d = \frac{W}{g} \frac{V^2}{R_1} \Longrightarrow -\frac{1}{2} \rho S V^2 C_L + W \cos \gamma_d = \frac{W}{g} \frac{V^2}{R_1} \longrightarrow$

$$\longrightarrow \boxed{C_L = \frac{2W}{\rho V^2 S} \left( \cos \gamma_d - \frac{V^2}{g R_1} \right)}$$

# para cada $R_1$, como $\gamma_d \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ; el $C_L$ va disminuyendo haciéndose cada vez + negativo. $\longrightarrow$ la situación + crítica se da en $\gamma_d = \frac{\pi}{2}$

# para $\gamma_d = \frac{\pi}{2}$ : $C_L = -\frac{2W}{\rho V^2 S} \cdot \frac{V^2}{g R_1} \longrightarrow \boxed{R_{1_{min}} = -\frac{2W}{\rho V^2 S} \cdot \frac{V^2}{g \underbrace{C_{L_{MIN}}}_{<0}}}$

(ya que $C_{L_{MIN}}$ es el valor negativo de $C_L$ con mayor valor absoluto).

- Como aún no hemos visto los temas relacionados con los momentos, no calcularemos la $\delta_e(t)$, suponiendo, en consecuencia, que $C_L = C_{L_0} + C_{L_\alpha} \cdot \alpha$ ;

$C_L = C_{L_0} + C_{L_\alpha} \cdot \alpha_{R_{min}} = \cos \gamma_d - \frac{2W}{\rho V^2 S} \cdot \frac{V^2}{g C_{L_{MIN}}} \longrightarrow \boxed{\alpha \Big]_{R_{min}}(t) = -\frac{1}{C_{L_\alpha}} \left[ \frac{2W}{\rho V^2 S} \frac{V^2}{g C_{L_{MIN}}} + C_{L_0} - \cos \gamma_d \right]}$

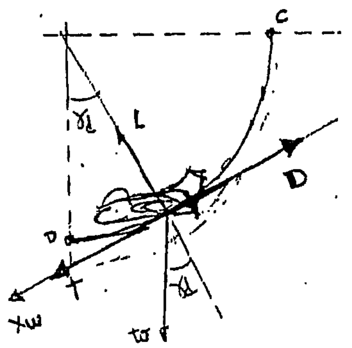
donde $\gamma_d = \frac{V}{R_1} t$

• $T = D - W \operatorname{sen}\gamma_d = \boxed{\frac{1}{2}\rho V^2 S\,(C_{D_0}+KC_L^2) - W \operatorname{sen}\gamma_d = T\big]_{R_{min}}}$

donde $C_L(t) = C_{L_0} + \alpha(t)_{R_{min}} \cdot C_{L\alpha}$ ; $\gamma_d = \frac{V}{R_{min}}\, t$

---

2) <u>Tramo **CD**</u>




• $\gamma_d = \frac{\pi}{2} - \frac{V}{R_2}t \longrightarrow \dot\gamma_d = -\frac{V}{R_2}$

• $$\begin{cases} T - D + W \operatorname{sen}\gamma_d = \frac{W}{g}\cancel{\frac{dV}{dt}} \overset{0\ (V=cte)}{=} 0 & [1] \\ -L + W\cos\gamma_d = -\frac{W}{g}\frac{V^2}{R_2} & [2] \end{cases}$$

• De [2] : $C_L = \frac{2W}{\rho V^2 S}\left(\frac{V^2}{gR_2}+\cos\gamma_d\right) = \underset{C_L \text{ en vuelo horizontal}}{C_{L_H}}\left(\frac{V^2}{gR_2}+\cos\gamma_d\right)$ $(L=W)$

• Luego; el $C_L$ va disminuyendo con valor positivo ya que $\gamma_d \in [0, \frac{\pi}{2}]$ para cada R
→ la situación de máximo para $C_L$ (para cada $R_2$) se dará para $\gamma_d = 0$ :

$$C_{L_{max}} = \left(\frac{V^2}{gR_{2_{min}}} + 1\right)\cdot C_{L_H} \longrightarrow \boxed{R_{2_{min}} = \frac{V^2}{g\left(\frac{\rho V^2 S C_{L_{max}}}{2W} - 1\right)}}$$

---

3)

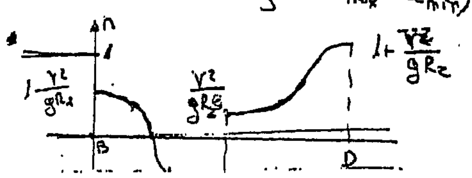
: $R_{1_{min}}$ independiente de $V$

• $R_{2_{min}}$ es $= \infty$ para $V^* = \sqrt{\frac{2W}{\rho S C_{L_{max}}}}$ = veloc. de pérdida en vuelo horizontal rectilíneo ; si $V < V^*$ no se puede hacer la mani

• Si hago que $R_{1_{min}} = R_{2_{min}} \longrightarrow V^{**} = \sqrt{\frac{2W}{\rho S (C_{L_{max}} + C_{L_{min}})}}$

- <u>Curiosidad</u>

$$\frac{L}{W} = n = \cos\gamma_d - \frac{V^2}{gR_1}$$



## ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS AERONÁUTICOS

UNIDAD DOCENTE DE MECÁNICA DEL VUELO 29.04.08

CICA *"Mecánica del Vuelo I"*

**PROBLEMA**

Un avión efectúa un vuelo simétrico con las alas a nivel en un plano vertical en presencia de un viento horizontal asimismo contenido en el plano vertical de módulo $V_w = V_{w0} + k_w\, t$ ($V_{w0}$ y $k_w$ son constantes positivas conocidas). El avión describe respecto a la atmósfera una circunferencia con velocidad aerodinámica $V$ y radio $R$ ambos constantes y conocidos.

Suponiendo además que:

a) Se conocen las características geométricas, aerodinámicas y másicas del avión necesarias para la resolución del problema (en concreto su peso es constante, la polar es parabólica de coeficientes constantes, el coeficiente de sustentación es una función lineal del ángulo de ataque, etc.).
b) El empuje del motor es paralelo al eje $x_b$ y este eje coincide con el vector velocidad en el punto más bajo de la trayectoria.
c) El ángulo de ataque es pequeño y la componente del empuje según el eje $z_w$ siempre es despreciable frente a las otras fuerzas que intervienen en el problema.
d) $\rho$ y $g$ son constantes conocidas y siempre $V > V_w$.

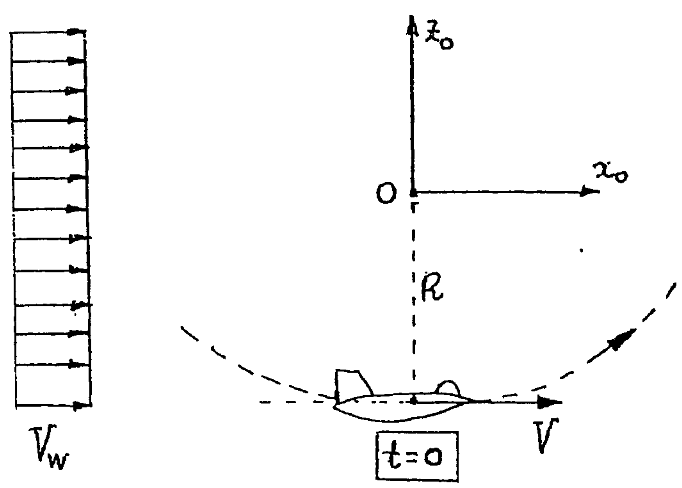
Se pide:

1°) Determinar la posición del avión en función del tiempo en el sistema de ejes fijos respecto a tierra $x_0$,$z_0$ de la figura.

2°) Plantear el sistema de ecuaciones dinámicas del avión en el sistema de ejes viento.

3°) Determinar el ángulo de ataque y el factor de carga en función del tiempo.

4°) Determinar los factores de carga máximo y mínimo, $n_{max}$ y $n_{min}$, así como los ángulos de asiento de velocidad aerodinámica para los que éstos se producen, $\gamma_{n_{max}}$ y $\gamma_{n_{min}}$.




TIEMPO CONCEDIDO: 1$^h$

## ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS AERONÁUTICOS

UNIDAD DOCENTE DE MECÁNICA DEL VUELO 07.05.10
CICA *"Mecánica del Vuelo I"*

**PROBLEMA**

Un avión efectúa un vuelo simétrico con las alas a nivel en un plano vertical en presencia de un viento horizontal asimismo contenido en el plano vertical de módulo $V_w = V_{w0} + k_w\, t$ ($V_{w0}$ y $k_w$ son constantes positivas conocidas). El avión describe respecto a la atmósfera una circunferencia con velocidad aerodinámica $V$ y radio $R$ ambos constantes y conocidos.

Suponiendo además que:

a) Se conocen las características geométricas, aerodinámicas y másicas del avión necesarias para la resolución del problema (en concreto su peso es constante, la polar es parabólica de coeficientes constantes, el coeficiente de sustentación es una función lineal del ángulo de ataque, etc.).
b) El empuje del motor es paralelo al eje $x_b$ y este eje coincide con el vector velocidad en el punto más bajo de la trayectoria.
c) El ángulo de ataque es pequeño y la componente del empuje según el eje $z_w$ siempre es despreciable frente a las otras fuerzas que intervienen en el problema.
d) $\rho$ y $g$ son constantes conocidas y siempre $V > V_w$.

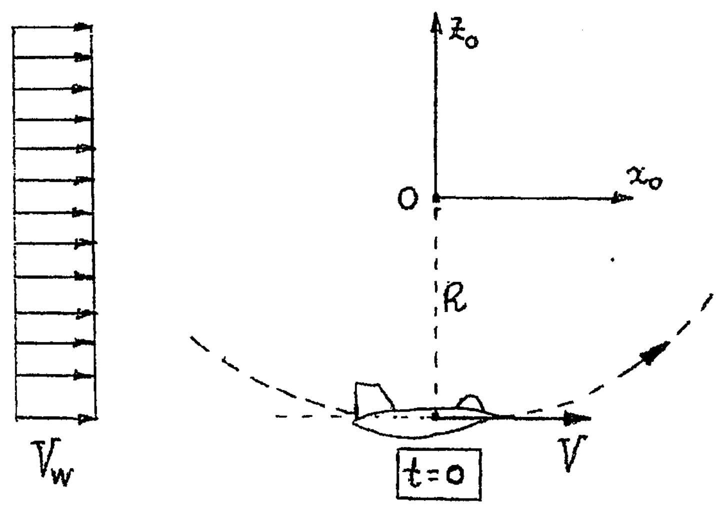
Se pide:

1º) Determinar la posición del avión en función del tiempo en el sistema de ejes fijos respecto a tierra $x_0, z_0$ de la figura.

2º) Plantear el sistema de ecuaciones dinámicas del avión en el sistema de ejes viento.

3º) Determinar el ángulo de ataque y el factor de carga en función del tiempo.

4º) Determinar los factores de carga máximo y mínimo, $n_{max}$ y $n_{min}$, así como los ángulos de asiento de velocidad aerodinámica para los que éstos se producen, $\gamma_{n_{max}}$ y $\gamma_{n_{min}}$.

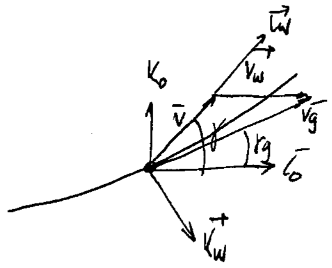



TIEMPO CONCEDIDO: 1$^h$

1) Empuje según $\vec{x_b} \Rightarrow \alpha = \varepsilon$

$$\dot{\gamma} = \frac{V}{R} = Cte \Rightarrow \gamma = \frac{V}{R}t \;;\; \ddot{\gamma} = 0$$

$$\vec{V_g} = \vec{V} + \vec{V_w} = (V\cos\gamma + V_{w0} + K_w t)\,\vec{i_0} + V\operatorname{sen}\gamma\,\vec{k_0}$$




$$\frac{d\vec{V_g}}{dt} = K_w\,\vec{i_0} = K_w\cos\gamma\,\vec{i_w} + K_w\operatorname{sen}\gamma\,\vec{k_w}$$

$$\vec{i_0} = \cos\gamma\,\vec{i_w} + \operatorname{sen}\gamma\,\vec{k_w}$$

$$\frac{dx_0}{dt} = V_g\cos\gamma_g = V\cos\gamma + V_{w0} + K_w t \;;\; \boxed{x_0} = \int_0^t \left(V\cos\left(\frac{V}{R}t\right) + V_{w0} + K_w t\right)dt = \boxed{R\operatorname{sen}\frac{Vt}{R} + V_{w0}t + \frac{K_w t^2}{2}}$$

$$\frac{dz_0}{dt} = V_g\operatorname{sen}\gamma_g = V\operatorname{sen}\gamma \;;\; \int_{-R}^{z_0} dz_0 = \int_0^t V\operatorname{sen}\frac{Vt}{R}\,dt \;;\; \boxed{z_0 = -R\cos\frac{Vt}{R}}$$

2)

$$T - D - W\operatorname{sen}\gamma = \frac{W}{g}\cdot\frac{dV}{dt} \rightarrow$$

$$-\underbrace{T\alpha}_{0\ (\text{enunciado})} - L + W\cos\gamma = \frac{-W}{g}\,V\cdot\frac{d\gamma}{dt} \rightarrow$$

$$\boxed{\begin{aligned} &T - D - W\operatorname{sen}\gamma = \frac{W}{g}\cdot K_w\cos\gamma \quad (\mathrm{I}) \\ &-L + W\cos\gamma = \frac{W}{g}\cdot K_w\operatorname{sen}\gamma - \frac{W}{g}\cdot\frac{V^2}{R} \quad (\mathrm{II}) \\ &D = \frac{1}{2}\rho V^2 S\left(C_{D0} + K C_L^2\right) \\ &L = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_L \quad (\mathrm{III}) \end{aligned}}$$

3)

$$(\mathrm{II}) \rightsquigarrow L = W\cos\left(\frac{V}{R}t\right) + \frac{W}{g}\cdot\frac{V^2}{R} - \frac{W}{g}K_w\operatorname{sen}\left(\frac{V}{R}t\right)$$

$$C_L = C_{L\alpha}\,\alpha$$

$$(\mathrm{III}) \rightsquigarrow \boxed{\alpha = \frac{2}{\rho S V^2 C_{L\alpha}}\left[W\cos\left(\frac{V}{R}t\right) + \frac{W}{g}\cdot\frac{V^2}{R} - \frac{W}{g}K_w\operatorname{sen}\left(\frac{V}{R}t\right)\right]}$$

$$\boxed{n = \frac{L}{W} = \cos\left(\frac{V}{R}t\right) + \frac{V^2}{gR} - \frac{K_w}{g}\operatorname{sen}\left(\frac{V}{R}t\right)}$$

4)

$$t = 0 \Rightarrow \boxed{n = 1 + \frac{V^2}{gR} = n_{MAX}} \Rightarrow \boxed{\gamma_{n\,MAX} = 0}$$

$$t = \frac{\pi R}{2V} \Rightarrow n = \frac{K_w}{g} + \frac{V^2}{gR}$$

$$t = \frac{3\pi R}{2V} \Rightarrow n = -\frac{K_w}{g} + \frac{V^2}{gR}$$

$$t = \frac{\pi R}{V} \Rightarrow \boxed{n = -1 + \frac{V^2}{gR} = n_{min}} \Rightarrow \boxed{\gamma_{n\,min} = \pi}$$

**H6: 25-06-97**

Un avión efectúa un vuelo simétrico con las alas a nivel en un plano vertical en presencia de un viento horizontal asimismo contenido en el plano vertical de módulo $V_w = c_w t$ ($c_w$ es una constante positiva conocida). El avión describe respecto a la atmósfera una circunferencia con velocidad aerodinámica $V$ y radio $R$ ambos constantes y conocidos.

Suponiendo además que:

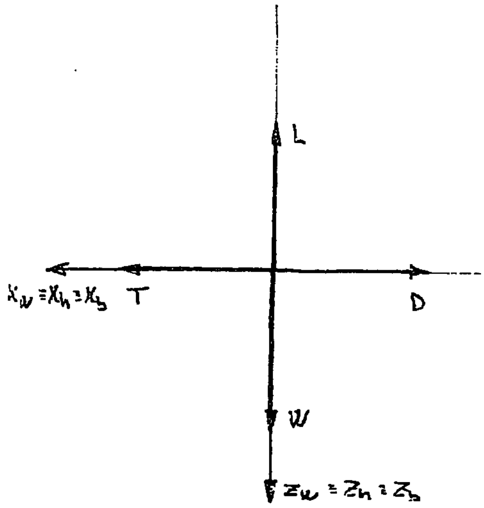
- Se conocen las características geométricas, aerodinámicas y másicas del avión necesarias para la resolución del problema (en concreto, la polar es parabólica de coeficientes constantes, $C_{L\delta_e} = C_{Lq} = 0$, etc).
- El empuje del motor es paralelo a $x_b$ y este eje coincide con el vector velocidad en el punto más bajo de la trayectoria.
- El ángulo de ataque es pequeño y la componente del empuje según el eje $z_w$ siempre es despreciable frente a las otras fuerzas que intervienen en el problema.
- $\rho$ y $g$ son constantes conocidas y $V > V_w$.

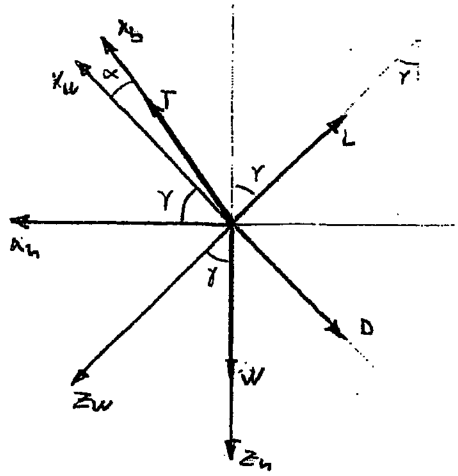
Se pide:

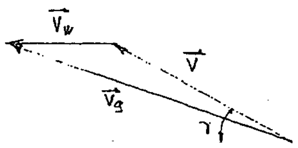
1. Determinar la posición del avión en función del tiempo en el sistema de ejes fijos respecto a tierra $x_o z_o$ de la figura.
2. Plantear el sistema de ecuaciones dinámicas del avión en el sistema de ejes viento.
3. Determinar el ángulo de ataque y el factor de carga en función del tiempo.
4. Determinar los factores de carga máximo y mínimo, $n_{max}$ y $n_{min}$, así como todos los puntos donde se producen.

1)

$t=0$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $t>0$




$$V = cte \implies \gamma = \frac{Vt}{R}$$

$$\vec{V}_g = (V\cos\gamma + V_W)\,\vec{i}_o + V \,\mathrm{sen}\,\gamma\,\vec{k}_o$$

$$\vec{V}_g = \frac{dx_o}{dt}\vec{i}_o + \frac{dz_o}{dt}\vec{k}_o = \left(V\cos\frac{Vt}{R} + C_W t\right)\vec{i}_o + V\,\mathrm{sen}\,\frac{Vt}{R}\,\vec{k}_o$$

$$\frac{dx_o}{dt} = V\cos\frac{Vt}{R} + C_W t \implies \int_0^{x_o} dx_o = \int_0^t \left(V\cos\frac{Vt}{R} + C_W t\right) dt$$

$$\frac{dz_o}{dt} = V\,\mathrm{sen}\,\frac{Vt}{R} \implies \int_{-R}^{z_o} dz_o = \int_0^t V\,\mathrm{sen}\,\frac{Vt}{R}\,dt$$

$$\boxed{\begin{aligned} x_o &= R\,\mathrm{sen}\,\frac{Vt}{R} + \frac{C_W t^2}{2} \\ z_o &= -R\cos\frac{Vt}{R} \end{aligned}}$$

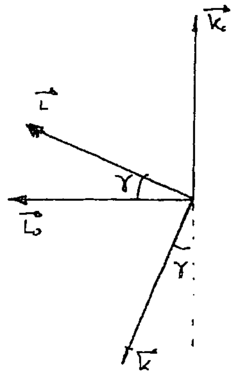
2)

$$T\cos\alpha - W\,\mathrm{sen}\,\gamma - D = \frac{W}{g}\left.\frac{d\vec{V}_g}{dt}\right|_x$$

$$-L + \underbrace{T\,\mathrm{sen}\,\alpha}_{\approx\ \text{Resto}} + W\cos\gamma = \frac{W}{g}\left.\frac{d\vec{V}_g}{dt}\right|_z$$

$$\vec{V_g} = \left( V \cos \frac{Vt}{R} + C_w t \right) \vec{i_0} + V \,\text{sen}\, \frac{Vt}{R} \vec{k_0}$$

$$\frac{d\vec{V_g}}{dt} = \left( - \frac{V^2}{R} \,\text{sen}\, \frac{Vt}{R} + C_w \right) \vec{i_0} + \frac{V^2}{R} \cos \frac{Vt}{R} \vec{k_0}$$




$$\vec{i_0} = \cos\gamma \,\vec{i} + \text{sen}\,\gamma \,\vec{k}$$

$$\vec{k_0} = \text{sen}\,\gamma \,\vec{i} - \cos\gamma \,\vec{k}$$

$$\frac{d\vec{V_g}}{dt} = - \frac{V^2}{R} \,\text{sen}\, \cancel{\frac{Vt}{R} \cos \frac{Vt}{R}} \vec{i} + C_w \cos \frac{Vt}{R} \vec{i} - \frac{V^2}{R} \,\text{sen}^2 \frac{Vt}{R} \vec{k} + C_w \,\text{sen}\, \frac{Vt}{R} \vec{k}$$

$$+ \frac{V^2}{R} \cos \cancel{\frac{Vt}{R} \,\text{sen}}\, \frac{Vt}{R} \vec{i} - \frac{V^2}{R} \cos^2 \frac{Vt}{R} \vec{k}$$

$$\frac{d\vec{V_g}}{dt} = C_w \cos \frac{Vt}{R} \vec{i} + \left( C_w \,\text{sen}\, \frac{Vt}{R} - \frac{V^2}{R} \right) \vec{k}$$

$$\boxed{\begin{aligned} T\cos\alpha - D - W \,\text{sen}\,\gamma &= \frac{W}{g} C_w \cos \frac{Vt}{R} \\ W\cos\gamma - L &= \frac{W}{g} \left( C_w \,\text{sen}\, \frac{Vt}{R} - \frac{V^2}{R} \right) \end{aligned}}$$

3)

$$C_L = C_{L_0} + C_{L\alpha}\,\alpha$$

$$L = \frac{1}{2} \rho S V^2 C_L$$

$$D = \frac{1}{2} \rho S V^2 \left( C_{D_0} + K C_L^2 \right)$$

$$L = \frac{1}{2} \rho S V^2 \left( C_{L_0} + C_{L\alpha}\,\alpha \right) = W \cos \frac{Vt}{R} - \frac{W}{g} \left( C_w \,\text{sen}\, \frac{Vt}{R} - \frac{V^2}{R} \right)$$

$$\boxed{\alpha(t) = \frac{1}{C_{L\alpha}}\left[\left[W\cos\frac{Vt}{R} - \frac{W}{g}\left(C_W \operatorname{sen}\frac{Vt}{R} - \frac{V^2}{R}\right)\right]\frac{1}{\frac{1}{2}\rho S V^2} - C_{L0}\right]}$$

$$n = \frac{L}{W} = \cos\gamma - \frac{1}{g}\left(C_W \operatorname{sen}\frac{Vt}{R} - \frac{V^2}{R}\right)$$

$$\boxed{n = \cos\frac{Vt}{R} - \frac{1}{g}\left(C_W \operatorname{sen}\frac{Vt}{R} - \frac{V^2}{R}\right)}$$

4)

$$\frac{\partial n}{\partial t} = 0 = -\frac{V}{R}\operatorname{sen}\frac{Vt}{R} - \frac{C_W}{g}\frac{V}{R}\cos\frac{Vt}{R} \Rightarrow \gamma = n\pi \quad ; \quad n = 0, 1, \ldots$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} n_{max} = 1 + \dfrac{V^2}{gR} \quad ; & \gamma = 0 \\ n_{min} = \dfrac{V^2}{gR} - 1 \quad ; & \gamma = \pi \end{array}}$$

**ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS AERONÁUTICOS**

UNIDAD DOCENTE DE MECÁNICA DEL VUELO 29.04.08

CICA *"Mecánica del Vuelo I"*

## PROBLEMA

Un avión efectúa un vuelo simétrico con las alas a nivel en un plano vertical en presencia de un viento horizontal asimismo contenido en el plano vertical de módulo $V_w = V_{w0} + k_w\, t$ ($V_{w0}$ y $k_w$ son constantes positivas conocidas). El avión describe respecto a la atmósfera una circunferencia con velocidad aerodinámica $V$ y radio $R$ ambos constantes y conocidos.

Suponiendo además que:

a) Se conocen las características geométricas, aerodinámicas y másicas del avión necesarias para la resolución del problema (en concreto su peso es constante, la polar es parabólica de coeficientes constantes, el coeficiente de sustentación es una función lineal del ángulo de ataque, etc.).

b) El empuje del motor es paralelo al eje $x_b$ y este eje coincide con el vector velocidad en el punto más bajo de la trayectoria.

c) El ángulo de ataque es pequeño y la componente del empuje según el eje $z_w$ siempre es despreciable frente a las otras fuerzas que intervienen en el problema.

d) $\rho$ y $g$ son constantes conocidas y siempre $V > V_w$.

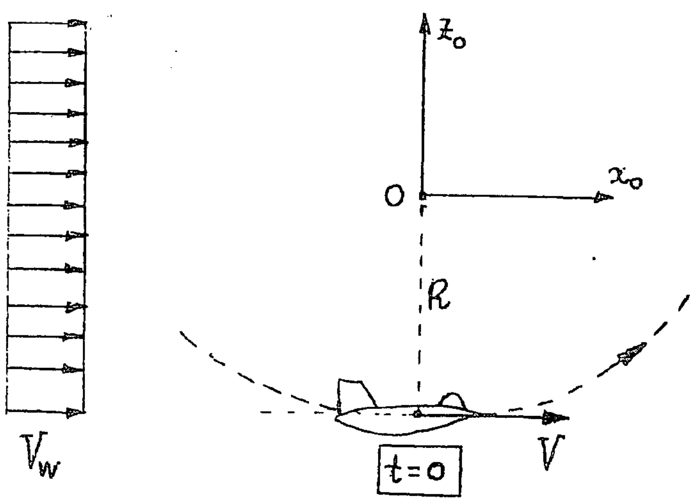
Se pide:

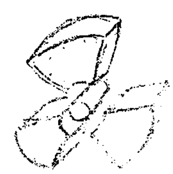
1º) Determinar la posición del avión en función del tiempo en el sistema de ejes fijos respecto a tierra $x_0, z_0$ de la figura.

2º) Plantear el sistema de ecuaciones dinámicas del avión en el sistema de ejes viento.

3º) Determinar el ángulo de ataque y el factor de carga en función del tiempo.

4º) Determinar los factores de carga máximo y mínimo, $n_{max}$ y $n_{min}$, así como los ángulos de asiento de velocidad aerodinámica para los que éstos se producen, $\gamma_{n_{max}}$ y $\gamma_{n_{min}}$.



TIEMPO CONCEDIDO: 1$^h$

*Ingenieros Aeronáuticos*
MECÁNICA DEL VUELO I
Javier Crespo

TR
Vuelo Simétrico
en Plano Vert.

ACADEMIA NEWTON
Hilarión Eslava 12, 2°A - 91 543 45 12

**H6: 25-06-97** ¡ $V_w$ variable con t !

Un avión efectúa un vuelo simétrico con las alas a nivel en un plano vertical en presencia de un viento horizontal asimismo contenido en el plano vertical de módulo $V_w = c_w t$ ($c_w$ es una constante positiva conocida). El avión describe respecto a la atmósfera una circunferencia con velocidad aerodinámica $V$ y radio $R$ ambos constantes y conocidos.

Suponiendo además que:

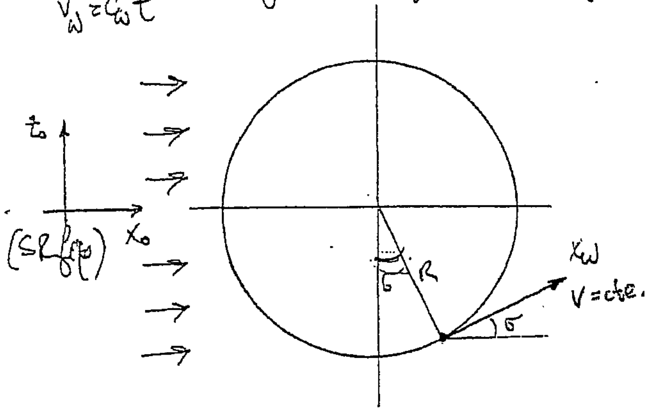
- Se conocen las características geométricas, aerodinámicas y másicas del avión necesarias para la resolución del problema (en concreto, la polar es parabólica de coeficientes constantes, $C_{L\delta_e} = C_{Lq} = 0$, etc).
- El empuje del motor es paralelo a $x_b$ y este eje coincide con el vector velocidad en el punto más bajo de la trayectoria.
- El ángulo de ataque es pequeño y la componente del empuje según el eje $z_w$ siempre es despreciable frente a las otras fuerzas que intervienen en el problema.
- $\rho$ y $g$ son constantes conocidas y $V > V_w$.

Se pide:

1. Determinar la posición del avión en función del tiempo en el sistema de ejes fijos respecto a tierra $x_o z_o$ de la figura.
2. Plantear el sistema de ecuaciones dinámicas del avión en el sistema de ejes viento.
3. Determinar el ángulo de ataque y el factor de carga en función del tiempo.
4. Determinar los factores de carga máximo y mínimo, $n_{max}$ y $n_{min}$, así como todos los puntos donde se producen.

$\boxed{\text{HG } (25\text{-}06\text{-}97)}$

Trayectoria respecto la tierra




$\sigma = \frac{V}{R} t$ ≠ $\gamma = (\widehat{x_W, x_h})$ ⇒ imprescindible saber para escribir los cos!!

$\alpha << 1$

## 1 Posición absoluta

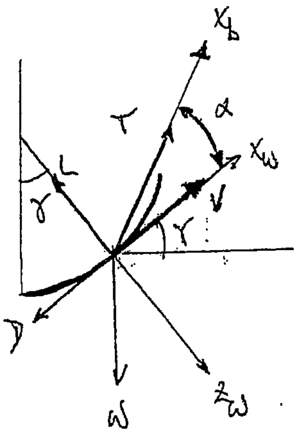
$$\vec{V}_g = \vec{V} + \vec{V}_W = (V\cos\sigma + \overset{C_W t}{V_W})\vec{i}_0 + V\,\text{sen}\,\sigma\,\vec{k}_0 = \frac{dx_0}{dt}\vec{i}_0 + \frac{dz_0}{dt}\vec{k}_0$$

$$\int_0^{x_0} d\xi = \int_0^t \left(V\cos\frac{V}{R}\tau + C_W\tau\right)d\tau = R\,\text{sen}\frac{V}{R}t + \frac{C_W}{2}t^2 \Rightarrow \boxed{x_0 = R\,\text{sen}\frac{V}{R}t + \frac{C_W}{2}t^2}$$

$$\int_{-R}^{z_0} d\eta = z_0 + R = \int_0^t V\,\text{sen}\frac{V}{R}\tau\,d\tau = -R\cos\frac{V}{R}t + R \Rightarrow \boxed{z_0 = -R\cos\frac{V}{R}t}$$

---

## 2 Ecs. dinámicas en ejes viento




$\Sigma\vec{F} = m\vec{a}$ ⇒ 2 métodos:

a) $\vec{a}$ obtenida de derivar la velocidad absoluta en ref. inercial y luego proyectar en ejes viento.

b) Proyectar la $\vec{a}$ absoluta y luego derivar en ejes móviles.

a) $$\boxed{\dot{\vec{V}}_g = \left(-V\,\text{sen}\,\sigma\cdot\frac{V}{R} + C_W\right)\vec{i}_0 + V\cos\sigma\cdot\frac{V}{R}\vec{k}_0} = C_W\cos\sigma\,\vec{i}_W + \left(C_W\,\text{sen}\,\sigma - \frac{V^2}{R}\right)\vec{k}_W$$

$$\begin{cases} \vec{i}_0 = \cos\sigma\,\vec{i}_W + \text{sen}\,\sigma\,\vec{k}_W \\ \vec{k}_0 = \text{sen}\,\sigma\,\vec{i}_W - \cos\sigma\,\vec{k}_W \end{cases}$$

b) $\vec{V}_g = (V\cos\sigma + C_\omega t)\vec{i}_0 + V\,\text{sen}\,\sigma\,\vec{k}_0 = (V + C_\omega t\cos\sigma)\vec{i}_w + C_\omega t\,\text{sen}\,\sigma\,\vec{k}_w$

$$\boxed{\left.\frac{d\vec{V}_g}{dt}\right|_{Li} = \left.\frac{\partial \vec{V}_g}{\partial t}\right|_w + \underbrace{\vec{\omega}_{wh}}_{\dot{\gamma}\vec{j}_w} \wedge \vec{V}_{g}\big|_w} = \left(C_\omega\cos\sigma + C_\omega t(-\text{sen}\,\sigma)\frac{V}{R}\right)\vec{i}_w + \left(C_\omega\,\text{sen}\,\sigma + C_\omega t\cos\sigma\cdot\frac{V}{R}\right)\vec{k}_0 +$$

$$+ \begin{vmatrix} \vec{i}_w & \vec{j}_w & \vec{k}_w \\ 0 & \dot{\gamma} & 0 \\ \smile & 0 & \smile \end{vmatrix} = \dots$$

$\Sigma\vec{F} = m\vec{a}$. En ejes viento:

$$\begin{cases} T\cos\alpha - D - W\,\text{sen}\,\gamma = \frac{W}{g}C_\omega\cos\sigma & (1)\\ -\underbrace{\cancel{T\,\text{sen}\,\alpha}}_{\ll L_W} - L + W\cos\gamma = \frac{W}{g}\left(-\frac{V^2}{R} + C_\omega\,\text{sen}\,\sigma\right) & (2)\end{cases}$$

$L = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_L$ ; $C_L = C_{L0} + C_{L\alpha}\alpha + \cancel{C_{L\delta_e}\delta_e}^{\,0} + \cancel{C_{Lq}\bar{q}}^{\,0}$ (3), (4)

$D = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_D$ ; $C_D = C_{D0} + kC_L^2$ (5), (6)

$\cancel{m\dot{u} + \dot{\varphi} = 0}$ $\boxed{\text{Sólo para actuaciones integrales}}$

Ec. momentos ; $M_A = q S c C_m = I_y\dot{\bar{q}}$ (7)

$C_m = C_{m0} + C_{m\alpha}\alpha + C_{m\delta}\delta_e + C_{mq}\bar{q}$ (8)

$q = \dot{\gamma} + \dot{\alpha}$ (9)

} sin estas queda 3 con 3.

9 ecs.
9 incognitas: $T, \alpha, D, L, C_L, C_D, C_m, \bar{q}, \delta_e$ } $\Rightarrow$ 0 gdl

---

$\boxed{3}$ $\alpha, n(t)$

* De (2) ; $-L + W\cos\gamma = \frac{W}{g}\left(-\frac{V^2}{R} + C_\omega\,\text{sen}\,\sigma\right)$ ; $L = \frac{1}{2}\rho V^2 S(C_{L0} + C_{L\alpha}\alpha)$ } $\Rightarrow$ $\alpha = \frac{1}{C_{L\alpha}}\left[\frac{2W}{\rho V^2 S}\left(\cos\underbrace{\frac{V}{R}t}_{\gamma} + \frac{V^2}{gR} - \frac{C_\omega}{g}\text{sen}\frac{V}{R}t\right) - (\right.$

* $n = \frac{L}{W} = \cos\frac{V}{R}t + \frac{V^2}{gR} - \frac{C_\omega}{g}\text{sen}\frac{V}{R}t$

$\boxed{4}$ $n_{max}$ y $n_{min}$ $\frac{dn}{dt} = 0 = -\frac{V}{R}\text{sen}\,\gamma - \frac{V}{R}\frac{C_\omega}{g}\cos\gamma = 0 \Rightarrow \text{tg}\,\gamma = -\frac{C_\omega}{g} \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{\gamma = \text{arctg}\left(\frac{-C_\omega}{g}\right) + k\pi \;;\; k = 1, 2, \dots}$

ACADEMIA NEWTON
Hilarión Eslava 12, 2ºA - 91 543 45 12

**25-06-97**

Un avión efectúa un vuelo simétrico con las alas a nivel en un plano vertical en presencia de un viento horizontal asimismo contenido en el plano vertical de módulo $V_w = c_w t$ ($c_w$ es una constante positiva conocida). El avión describe respecto a la atmósfera una circunferencia con velocidad aerodinámica $V$ y radio $R$ ambos constantes y conocidos.

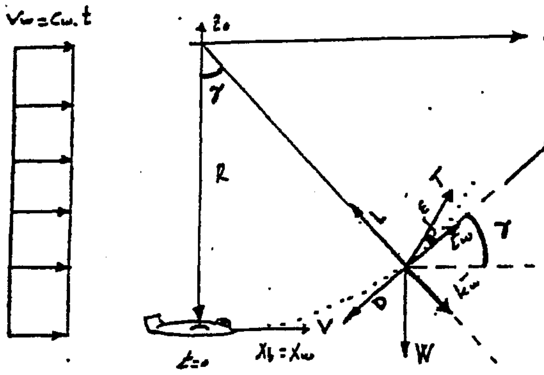
Suponiendo además que:

- Se conocen las características geométricas, aerodinámicas y másicas del avión necesarias para la resolución del problema (en concreto, la polar es parabólica de coeficientes constantes, $C_{L\delta_e} = CL_q = 0$, etc).
- El empuje del motor es paralelo a $x_b$ y este eje coincide con el vector velocidad en el punto más bajo de la trayectoria.
- El ángulo de ataque es pequeño y la componente del empuje según el eje $z_w$ siempre es despreciable frente a las otras fuerzas que intervienen en el problema.
- $\rho$ y $g$ son constantes conocidas y $V > V_w$.

Se pide:

1. Determinar la posición del avión en función del tiempo en el sistema de ejes fijos respecto a tierra $x_o z_o$ de la figura.
2. Plantear el sistema de ecuaciones dinámicas del avión en el sistema de ejes viento.
3. Determinar el ángulo de ataque y el factor de carga en función del tiempo.
4. Determinar los factores de carga máximo y mínimo, $n_{max}$ y $n_{min}$, así como todos los puntos donde se producen.

$\star$ Problema nº : 25-06-97




- $\bar{V}_g = \bar{V} + \bar{V}_w$
- El avión describe "respecto a la atmósfera" una circunferencia
- $C_{L\dot{\alpha}} = C_{L\dot{\gamma}} = 0$
- $T \parallel x_b$ : en $t=0$ $x_b = x_w \Rightarrow \widehat{T, x_w} = \varepsilon$; $\alpha = \widehat{x_b, x_w}$

De la 2ª suposición obtenemos que $\varepsilon = \alpha$

Por ser $T \parallel x_b$ y además a $t=0$ $x_b \parallel x_w \Rightarrow$ el decalado es cero $\varepsilon = \alpha$

- $\alpha \ll 1$ ; $T . \sin\varepsilon \ll$ Fuerzas
- $\dot{\gamma}$ cte y $V > V_w$

## 1º) Determinar la posición del avión en función del tiempo en el sistema de ejes fijos respecto a tierra $x_0 z_0$ de la figura.

$$\bar{V}_g = \bar{V} + \bar{V}_w = V(\cos\gamma . \bar{i}_h - \sin\gamma . \bar{k}_h) + c_w . t\, \bar{i}_h = (V . \cos\gamma + c_w . t) . \bar{i}_h - V . \sin\gamma . \bar{k}_h$$

Como $\bar{i}_0 = \bar{i}_h$, $\bar{k}_0 = -\bar{k}_h$

¡ Se describe una circunferencia respecto a la atmósfera con $V =$ cte y $R =$ cte $\Rightarrow \boxed{\gamma = \frac{V}{R} t}$ !

$$\Rightarrow \bar{V}_g = \frac{dx_h}{dt} \bar{i}_h + \frac{dz_h}{dt} . \bar{k}_h = \frac{dx_0}{dt} . \bar{i}_0 - \frac{dz_0}{dt} . \bar{k}_0$$

$$\int_0^{x_0} d\xi = \int_0^t \left[ V . \cos\left(\frac{V}{R} t\right) + c_w . t \right] . dt = R . \sin\left(\frac{V}{R} . t\right) + \frac{c_w}{2} . t^2$$

$$\int_R^{z_0} d\eta = \int_0^t V . \sin\left(\frac{V}{R} . t\right) . dt = -R . \cos\left(\frac{V}{R} . t\right) + R = z_0 - (-R) = z_0 + R$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} x_0 &= R . \sin\left(\frac{V}{R} . t\right) + \frac{c_w}{2} . t^2 \\ z_0 &= -R \cos\left(\frac{V}{R} . t\right) \end{aligned}}$$

## 2º) Plantear el sistema de ecuaciones dinámicas del avión en el sistema de ejes viento.

$$\bar{i}_w : \quad -D + T . \cos \overset{\alpha}{\varepsilon} - W . \sin\gamma = \frac{W}{g} (\dot{V}_g|_{w_x})$$

$$\bar{k}_w : \quad -L - \cancel{T . \sin\varepsilon} + W . \cos\gamma = \frac{W}{g} (\dot{V}_g|_{w_z})$$

(3ª hipótesis)

A la hora de poner m·a podemos proceder de 2 maneras distintas cuando $\bar{V}_g$.

a) · Poner una aceleración relativa y en el otro lado una fuerza de inercia.

b) · Poner directamente una aceleración absoluta.

1) Primero derivo $\bar{V}_g$ en ejes "e" $(\dot{\bar{V}}_g|_e)$ y luego proyecto en ejes "viento". → Normalmente éste es más corto

2) Primero proyecto $\bar{V}_g$ en ejes "viento" y luego derivo pero con mucho cuidado pq → $\frac{\partial \bar{v}|_w}{\partial t} + \bar{\omega}_{we} \wedge \bar{v}|_w$

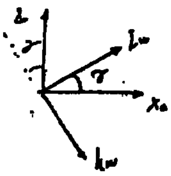
En nuestro problema los ejes absolutos son los "0"

$$\bar{V}_g|_0 = \left[V\cos\left(\frac{V}{R}t\right) + c_w t\right]\bar{i}_0 + V\sin\left(\frac{V}{R}t\right)\bar{k}_0$$

$$\dot{\bar{V}}_g|_0 = \left[-V\cdot\frac{V}{R}\sin\left(\frac{V}{R}t\right) + c_w\right]\bar{i}_0 + V\frac{V}{R}\cos\left(\frac{V}{R}t\right)\bar{k}_0$$

$$\dot{\bar{V}}_g|_0 = \left[-\frac{V^2}{R}\sin\left(\frac{V}{R}t\right) + c_w\right]\bar{i}_0 + \frac{V^2}{R}\cos\left(\frac{V}{R}t\right)\bar{k}_0$$

Ahora lo proyectamos en ejes viento: a)




$\bar{i}_0 = \cos\gamma\,\bar{i}_w + \sin\gamma\,\bar{k}_w$

$\bar{k}_0 = +\sin\gamma\,\bar{i}_w - \cos\gamma\,\bar{k}_w$

b) En matrices.

$$\dot{\bar{V}}_g|_w = \left[-\frac{V^2}{R}\sin\left(\underbrace{\frac{V}{R}t}_{\gamma}\right) + c_w\right]\left(\cos\gamma\,\bar{i}_w + \sin\gamma\,\bar{k}_w\right) + \frac{V^2}{R}\cos\gamma\cdot\left(\sin\gamma\,\bar{i}_w - \cos\gamma\,\bar{k}_w\right)$$

$$\boxed{\dot{\bar{V}}_g|_w = c_w\cos\gamma\,\bar{i}_w + \left(c_w\sin\gamma - \frac{V^2}{R}\right)\bar{k}_w}$$

Finalmente:

$$\boxed{\begin{aligned} -D + T\cos\alpha - W\sin\gamma &= \frac{W}{g}\,c_w\cos\gamma \\ -L + W\cos\gamma &= \frac{W}{g}\left(c_w\sin\gamma - \frac{V^2}{R}\right) \end{aligned}}$$

¡CUANDO HAYA VIENTO JAMÁS COGER LAS ECS. DEL GUIÓN PQ ESTÁN CALCULADAS SIN VIENTO!

3º) Determinar el ángulo de ataque y el factor de carga en función del tiempo.

$$C_L = C_{L_0} + C_{L\alpha} \cdot \alpha$$

$$L = \frac{1}{2}\rho V^2 S \ (C_{L_0} + C_{L\alpha}\cdot\alpha)$$

$$D = \frac{1}{2}\rho V^2 S \ \left[ C_{D_0} + k\ (C_{L_0} + C_{L\alpha}\cdot\alpha)^2 \right]$$

$$-L + W\cdot\cos\gamma = -\frac{1}{2}\rho V^2 S \ (C_{L_0} + C_{L\alpha}\cdot\alpha) + W\cdot\cos\gamma = \frac{W}{g}\left(c\omega\cdot\sin\gamma - \frac{V^2}{R}\right)$$

nota: Si queremos comprobar si los signos son correctos → vemos los límites:

Para peso y viento no importa → $-L = -\frac{V^2}{R}$ ¡ok!

ya podemos sacar $\alpha$ → $\boxed{\alpha(t) = \frac{1}{C_{L\alpha}}\left\{\left[\frac{W}{g}\left(c\omega\cdot\sin\gamma - \frac{V^2}{R}\right) - W\cdot\cos\gamma\right]\cdot\frac{-1}{\frac{1}{2}\rho V^2 S} - C_{L_0}\right\}}$

$\gamma = \frac{V}{R}t$

$$-\frac{L}{W} + \cos\gamma = \frac{1}{g}\left(c\omega\cdot\sin\gamma - \frac{V^2}{R}\right) \rightarrow \boxed{n = -\frac{1}{g}\left(c\omega\cdot\sin\left(\frac{V}{R}t\right) - \frac{V^2}{R}\right) + \cos\left(\frac{V}{R}t\right)}$$

4º) Determinar todos los factores de carga máximo y mínimo, $n_{max}$ y $n_{min}$, así como todos los puntos donde se producen.

$$\frac{\partial n}{\partial t} = 0$$

Del tipo $A\sin\gamma + \cos\gamma + \frac{V^2}{R}$, pero parecido como $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$

$$A = \frac{\cos\beta}{\sin\beta} \quad \text{de manera que} \quad \operatorname{tg}\beta = \frac{-g}{c\omega}$$

y $\sin(\alpha+\beta)$ es máximo cuando $\alpha+\beta = \frac{\pi}{2}(2n+1)$

# ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS AERONÁUTICOS

UNIDAD DOCENTE DE MECÁNICA DEL VUELO 21.09.11
E. Final Septiembre *"Mecánica del Vuelo I"*

## PROBLEMA 1º

Un avión efectúa un vuelo en subida simétrico rectilíneo casi-estacionario con las alas a nivel, y con ángulo de asiento de velocidad, $\gamma$, conocido y no pequeño. Todo el vuelo se efectúa a velocidad equivalente, $V_e$, constante (la velocidad equivalente se define mediante $V_e = V\sqrt{\sigma}$, donde $V$ es la velocidad de vuelo y $\sigma = \rho/\rho_0$, siendo $\rho$ la densidad del aire a cierta altitud $h$ y $\rho_0$ la densidad al nivel del mar).

Suponiendo además que:

a) Se conocen todas las características geométricas, aerodinámicas y másicas del avión necesarias para la resolución del problema (en particular, el peso constante, $W$, la superficie alar, $S$, los coeficientes constantes de la polar parabólica, $C_{D0}$, $k$, etc.).
b) El empuje de los motores está dirigido según el eje $x_w$.
c) El vuelo se realiza en la troposfera de una atmósfera ISA (la variación de la densidad con la altitud viene dada por la ley $\sigma = (1 - c_1 h)^{c_2}$ donde $\rho_0$, $c_1$, $c_2$ son constantes conocidas).

Se pide:

1º) Determinar la velocidad equivalente que minimiza la relación empuje-peso ($T/W$), así como el correspondiente valor de $(T/W)_{min}$.

2º) Si en toda la subida se vuela en las condiciones del apartado 1º), determinar la velocidad de vuelo y el coeficiente de sustentación como funciones de la altitud. Comentar los resultados obtenidos.

3º) Si en toda la subida se vuela en las condiciones del apartado 1º), determinar el tiempo que tarda el avión en ascender desde el nivel del mar hasta una altitud $H$ dada.

TIEMPO CONCEDIDO: $1^h$

(14)

1) $T - D - W \operatorname{sen}\gamma = 0$ $\qquad V = \frac{V_e}{\sqrt{\sigma}}$

$-L + W \cos\gamma = 0$

$L = \frac{1}{2}\rho S V^2 C_L = \frac{1}{2}\rho S \frac{V_e^2}{\sigma} C_L \rightarrow C_L = \frac{2\sigma W \cos\gamma}{\rho S V_e^2} = \frac{2W\cos\gamma}{\rho_0 S V_e^2}$

$D = \frac{1}{2}\rho S V^2 (C_{D0} + K C_L^2) = \frac{1}{2}\rho S \frac{V_e^2}{\sigma}\left(C_{D0} + \frac{4KW^2\cos^2\gamma}{\rho_0^2 S^2 V_e^4}\right)$

$\frac{T}{W} = \frac{D}{W} + \operatorname{sen}\gamma = \frac{\rho_0 S V_e^2}{2W}\left(C_{D0} + \frac{4KW^2\cos^2\gamma}{\rho_0^2 S^2 V_e^4}\right) + \operatorname{sen}\gamma$

$\frac{d\left(\frac{T}{W}\right)}{dV_e} = \frac{2\rho_0 S C_{D0} V_e}{2W} - \frac{4KW\cos^2\gamma}{\rho_0 S V_e^3} = 0$

$\cancel{2}\rho_0^2 S^2 V_e^4 C_{D0} = \cancel{8}^{\,4} K W^2 \cos^2\gamma \;;\; V_e^4 = \frac{4KW^2\cos^2\gamma}{\rho_0^2 S^2 C_{D0}} \;;\; V_e^2 = \frac{2W\cos\gamma}{\rho_0 S}\sqrt{\frac{K}{C_{D0}}}$

$$\boxed{V_e = \sqrt{\frac{2W\cos\gamma}{\rho_0 S}}\cdot\sqrt[4]{\frac{K}{C_{D0}}}}$$

$\left.\frac{T}{W}\right|_{MIN} = \frac{\cancel{\rho_0 S}}{\cancel{2W}}\cdot\frac{\cancel{2W}\cos\gamma}{\cancel{\rho_0 S}}\sqrt{\frac{K}{C_{D0}}}\cdot\left[C_{D0} + \frac{\cancel{4KW^2\cos^2\gamma}}{\cancel{\rho_0^2 S^2}\frac{\cancel{4KW^2\cos^2\gamma}}{\cancel{\rho_0^2 S^2} C_{D0}}}\right] + \operatorname{sen}\gamma = \cos\gamma\sqrt{\frac{K}{C_{D0}}}\left[2C_{D0}\right] + \operatorname{sen}\gamma$

$$\boxed{\left.\frac{T}{W}\right|_{MIN} = 2\cos\gamma\sqrt{K C_{D0}} + \operatorname{sen}\gamma}$$

2) $$\boxed{V = \frac{V_e}{\sqrt{\sigma}} = \sqrt{\frac{2W\cos\gamma}{\rho_0 S}}\cdot\sqrt[4]{\frac{K}{C_{D0}}}\cdot\frac{1}{\sqrt{(1-C_1 h)^{C_2}}}}$$

$$\boxed{C_L = \frac{2W\cos\gamma}{\rho S V^2} = \frac{2\cancel{W\cos\gamma}}{\rho \cancel{S}}\cdot\frac{(1-C_1 h)^{C_2}}{\frac{\cancel{2W\cos\gamma}}{\rho_0 \cancel{S}}\sqrt{\frac{K}{C_{D0}}}} = \frac{(1-C_1 h)^{C_2}}{\frac{\rho}{\rho_0}\sqrt{\frac{K}{C_{D0}}}} = \frac{\cancel{(1-C_1 h)^{C_2}}}{\cancel{\sigma}\sqrt{\frac{K}{C_{D0}}}} = \sqrt{\frac{C_{D0}}{K}} = C_{L_{OPT}}}$$

3) $$\frac{dh}{dt} = V \sin\gamma$$

$$\int_0^H \frac{dh}{V\sin\gamma} = \int_0^t dt = t$$

$$t = \int_0^H \frac{\sqrt{(1-c_1 h)^{c_2}}}{\sqrt{\frac{2W\cos\gamma}{\rho_0 S}}\sqrt[4]{\frac{K}{C_{D0}}}\sin\gamma}\,dh = \frac{1}{\sin\gamma\sqrt{\frac{2W\cos\gamma}{\rho_0 S}}\sqrt[4]{\frac{K}{C_{D0}}}}\int_0^H (1-c_1 h)^{\frac{c_2}{2}}\,dh$$

$$\int (1-c_1 x)^{\frac{c_2}{2}}dx = \frac{-c_1}{-c_1}\int (1-c_1 x)^{\frac{c_2}{2}}dx = \frac{1}{-c_1}\cdot\frac{(1-c_1 x)^{1+\frac{c_2}{2}}}{1+\frac{c_2}{2}}$$

$$t = \frac{1}{\sin\gamma\sqrt{\frac{2W\cos\gamma}{\rho_0 S}}\cdot\sqrt[4]{\frac{K}{C_{D0}}}}\left[\frac{-1}{c_1}\cdot\frac{(1-c_1 h)^{1+\frac{c_2}{2}}}{(1+\frac{c_2}{2})}\right]_0^H = \frac{1}{\sin\gamma\sqrt{\frac{2W\cos\gamma}{\rho_0 S}}\sqrt[4]{\frac{K}{C_{D0}}}}\left[\frac{(c_1 H-1)^{1+\frac{c_2}{2}}}{c_1(1+\frac{c_2}{2})} + \frac{1}{c_1(1+\frac{c_2}{2})}\right]$$

$$\boxed{t = \frac{1}{\sin\gamma\sqrt{\frac{2W\cos\gamma}{\rho_0 S}}\sqrt[4]{\frac{K}{C_{D0}}}}\left[\frac{(c_1 H-1)^{1+\frac{c_2}{2}}+1}{c_1(1+\frac{c_2}{2})}\right]}$$