

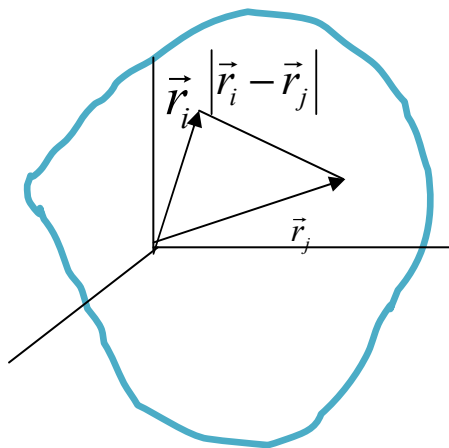
Mecánica Racional y Analítica (GAE)

Tema 4: Cinemática de la partícula (Plano)

IMPORTANTE: Estos apuntes de sólido rígido corresponden al libro de Formulario de Física General, de **L.Abad**. A.I.Velasco, A.Chocarro, H.Zeaiter, por tanto no podrán ser utilizados sin el consentimiento de los autores.

INTRODUCCIÓN

El **sólido rígido** es un caso especial de los sistemas constituidos por muchas partículas con la propiedad de que todas ellas conservan sus posiciones relativas, por tanto, *las distancias entre todos sus componentes*, $|\vec{r}_i - \vec{r}_j|$, *permanecen constantes* bajo la aplicación de una fuerza o momento. Un cuerpo rígido conserva su forma durante el movimiento. Lo contrario a un sólido rígido sería un sólido deformable



(La aplicación de fuerzas hará que el sólido se traslade, la aplicación de momentos hará que el sólido gire)

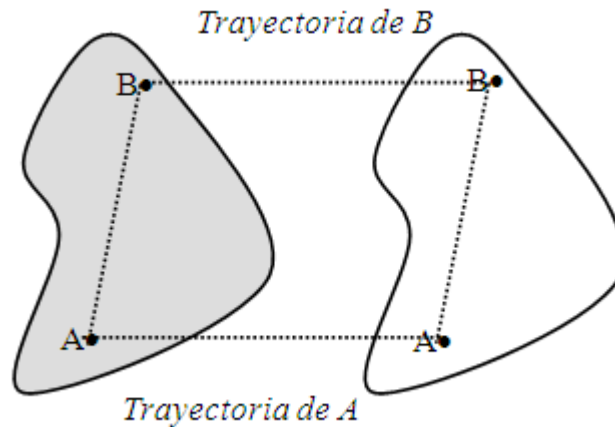
Punto del sólido: partícula material que forma parte del cuerpo.

Punto solidario al sólido: se refiere a los infinitos puntos que obtendríamos por prolongación imaginaria del sólido, además de los propios puntos del sólido.

Estudiamos aquí únicamente el movimiento en un plano (dos dimensiones) de cuerpos rígidos. En ese caso todos los puntos del sólido permanecen a una distancia constante de un plano fijo de referencia, denominado *plano del movimiento*, y todos los otros puntos del cuerpo se mueven en planos que son paralelos al plano del movimiento.

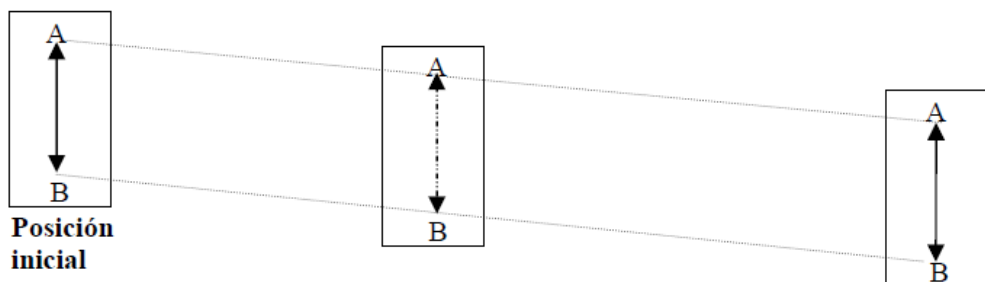
MOVIMIENTO DE UN CUERPO: TRASLACIÓN PURA

Cualquier línea del cuerpo permanece paralela a su posición inicial. Como todos los puntos del cuerpo tienen el mismo desplazamiento, el movimiento de un punto determina el movimiento de todo el sólido.

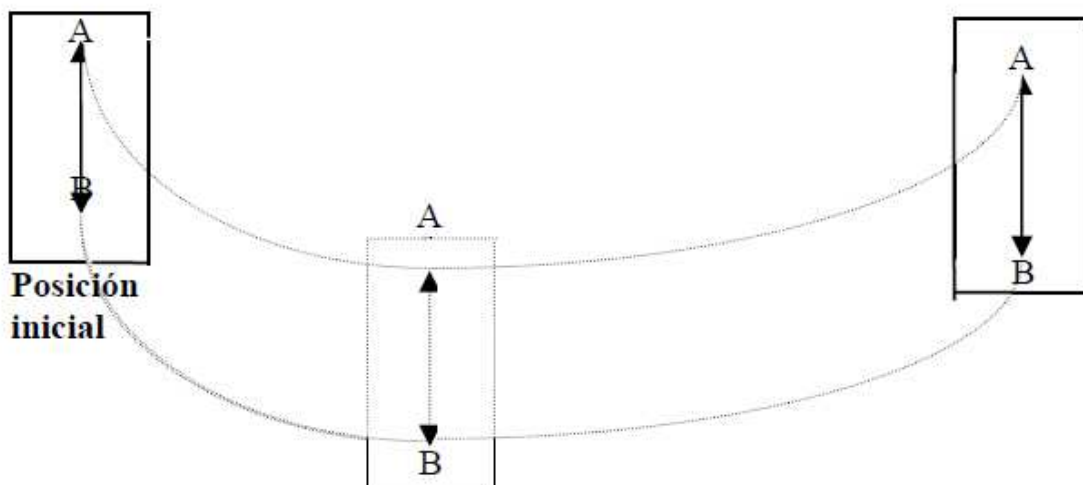


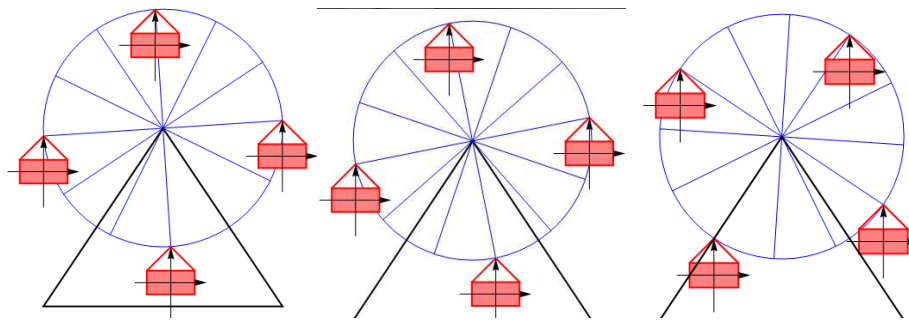
Un sólido rígido efectúa una **traslación**, cuando el segmento que une dos cualesquiera de sus partículas, por ejemplo las partículas A y B de las figuras, siempre permanece paralelo a la posición inicial durante el movimiento

La **traslación es rectilínea**, si las trayectorias seguidas por las partículas del sólido rígido en su movimiento son líneas rectas. Así sucede con las trayectorias de los puntos A y B de la figura, que se representan en el dibujo mediante líneas discontinuas.



La **traslación es curvilínea**, cuando las trayectorias seguidas por las partículas del sólido rígido son líneas curvas. Obsérvense en la figura siguiente, las trayectorias de las partículas A y B . Nótese que es una traslación, porque el segmento AB sigue paralelo así mismo, y a como se encontraba en la posición inicial.





Movimiento de traslación de las barquillas de una noria. Figura adaptada de <http://solidos-cinematica.blogspot.com.es/>

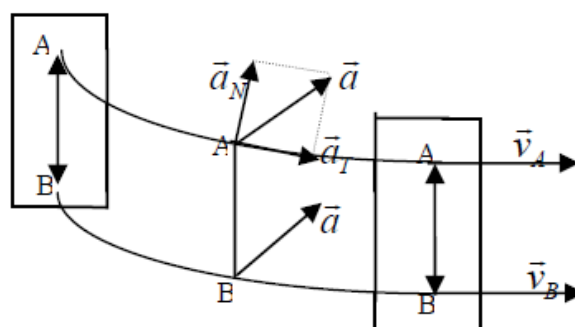
Cuando un sólido rígido realiza una traslación, bien sea rectilínea o curvilínea, en cada instante, la velocidad es la misma para todas sus partículas.

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B$$

En cada instante, la aceleración es la misma para todas las partículas de un sólido rígido, que efectúa una traslación.

$$\vec{a}_A = \vec{a}_B$$

Con lo que ya sabes de física y de Mecánica Racional y Analítica puedes observar que en el caso de una traslación rectilínea, los vectores velocidad y aceleración, están sobre la propia trayectoria de cada partícula, sin embargo, si la traslación es curvilínea, la velocidad es tangente a la trayectoria, pero la aceleración tiene sus dos componentes intrínsecas, la tangencial en la dirección del vector velocidad y la normal, en dirección perpendicular a la tangente y con sentido hacia el centro de curvatura del elemento de trayectoria.

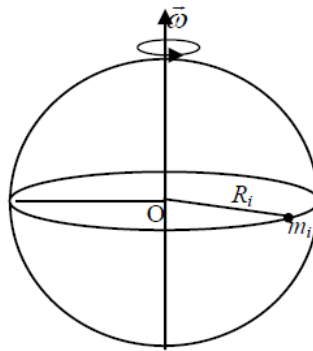


Como puedes ver muchos de los conceptos que aparecen en cinemática del sólido ya los conoces de cinemática de la partícula (componentes intrínsecas de la aceleración).

MOVIMIENTO DE UN CUERPO: ROTACIÓN ALREDEDOR DE UN EJE FIJO

Cuando un sólido rígido gira con una cierta velocidad angular ω entorno a un eje de rotación, cada una de sus partículas tiene que describir una circunferencia con centro en el eje, ya que por definición de sólido rígido, la distancia de la partícula al eje debe permanecer constante.

Si centramos la atención en una partícula como la m_i se observa en la figura, como describe una circunferencia de radio R_i con centro en el punto O. Los puntos del sólido que forman el eje de rotación, se considera que no giran.



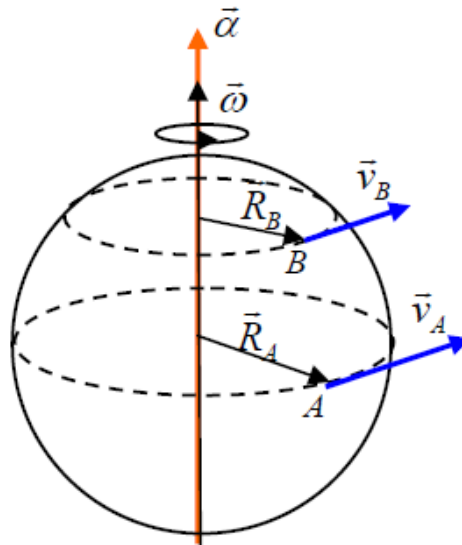
👁 *La velocidad angular es en cada instante, la misma para todas las partículas del sólido rígido con un movimiento de rotación.*

Cuando la velocidad angular no permanece constante, es decir que depende del tiempo, entonces existe aceleración angular, y al igual que la velocidad angular, es en cada instante, la misma para todas las partículas del sólido rígido. En resumen:

👁 *Tanto la velocidad angular, como la aceleración angular, en cada instante, son iguales para todas las partículas del sólido rígido, cuando gira alrededor de un eje fijo.*

$$\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \neq 0$$

👁 *La velocidad lineal de cada partícula del sólido rígido, es sin embargo un vector distinto para cada una de las partículas del sólido.*



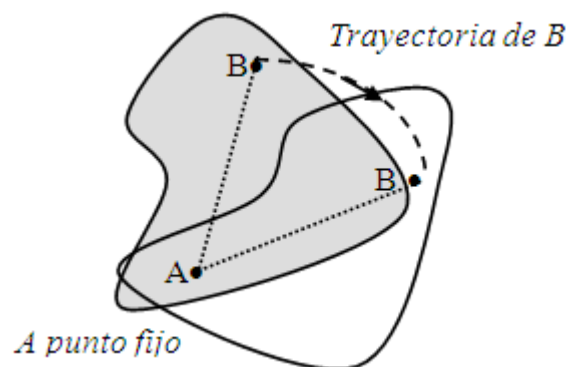
Como el radio de giro es mayor para A que para B la velocidad lineal de A es mayor que la de B.

La aceleración de cualquier partícula del sólido rígido, también es distinta para cada una.

$$\vec{a}_i = \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \wedge \vec{R}_i) = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{R}_i + \vec{\omega} \wedge \frac{d\vec{R}_i}{dt} = \vec{\alpha} \wedge \vec{R}_i + \vec{\omega} \wedge \vec{v}_i$$

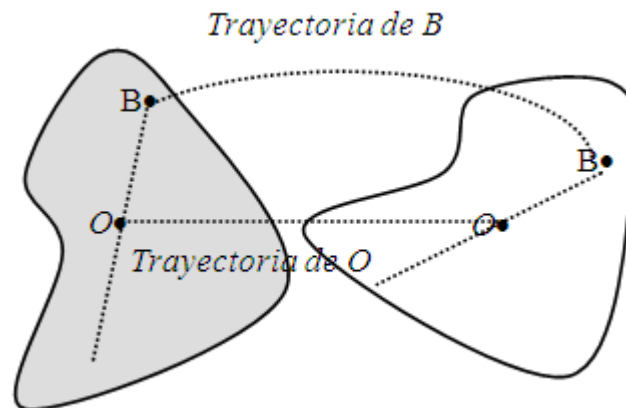
La primera es la componente tangente y la segunda es la componente normal de la aceleración.

El sistema tiene sólo un grado de libertad, con lo que sólo se necesita una coordenada para describir el movimiento.



Movimiento plano general: Teorema de Chasle: En el movimiento general de un cuerpo rígido ningún punto puede ser fijo. En el caso del movimiento plano el movimiento puede considerarse como una traslación paralela a cierto plano fijo más una rotación alrededor de un eje apropiado perpendicular al plano. Frecuentemente el eje se hace pasar por el centro de masa. El eje es el eje instantáneo y el punto donde el eje intersecta al plano fijo se llama

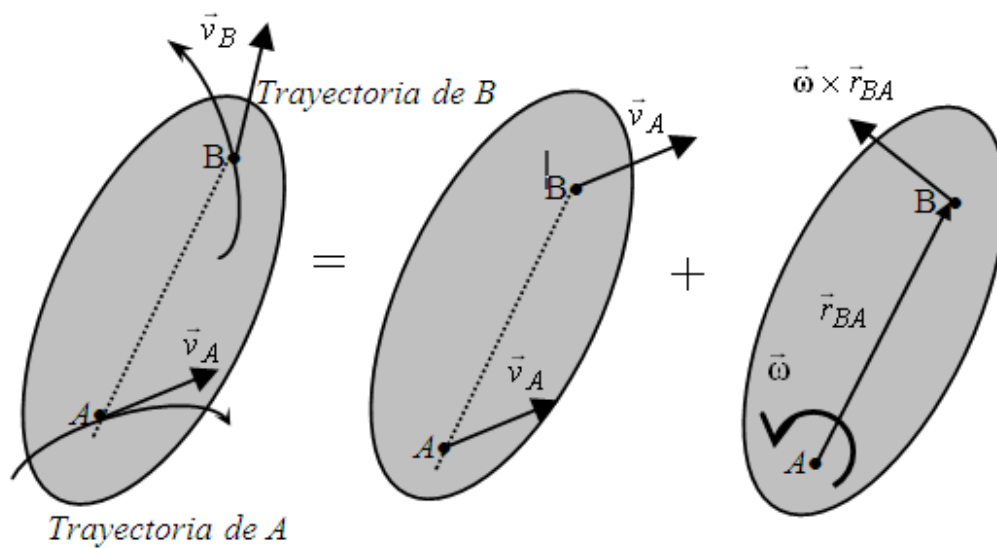
centro instantáneo de rotación (CIR). El número de grados de libertad es ahora tres: dos coordenadas se emplean para describir la traslación y una para describir la rotación.



MOVIMIENTO RELATIVO DE DOS PUNTOS EN UN CUERPO RÍGIDO

Si un cuerpo rígido experimenta un movimiento general en un plano, y si A y B son dos puntos del cuerpo, la ecuación que relaciona la velocidad de los dos puntos es la siguiente:

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{AB}$$



Ejemplo, el movimiento de la hélice de un avión sería un “movimiento rototraslatorio”



Fuente: [North American P-51D Mustang Ferocious Frankie](#) en *Flying Legends* 2008

En la traslación la velocidad de cada punto es igual a la velocidad del punto de referencia A ($\vec{v}_B = \vec{v}_A$)

En la rotación alrededor de un eje fijo en A : $\vec{v}_{BA} = \vec{\omega} \times \vec{r}_{BA}$

En particular, se debe cumplir necesariamente que la diferencia vectorial de las velocidades de dos puntos ha de ser perpendicular al segmento que une esos dos puntos: $\vec{v}_B - \vec{v}_A \perp \vec{r}_{BA}$ (en caso contrario el sólido se estaría rompiendo).

$$\vec{v}_B - \vec{v}_A = \vec{\omega} \times \vec{r}_{AB}, \text{ como } \vec{v}_B - \vec{v}_A \perp \vec{r}_{BA} \Rightarrow |\vec{v}_B - \vec{v}_A| = |\vec{\omega}| \cdot |\vec{r}_{BA}| \Rightarrow \omega = \frac{|\vec{v}_B - \vec{v}_A|}{|\vec{r}_{BA}|}$$

Un sólido tiene **velocidad angular nula** si y sólo si todos sus puntos poseen la misma **velocidad (campo de velocidades homogéneo)** en cada instante (esta velocidad común a todos los puntos, puede ir cambiando con el tiempo).

RODAR SIN DESLIZAR

En la figura se muestra un sólido rígido de radio R que rueda sobre una superficie horizontal con una velocidad angular ω y aceleración angular α , ambas en el sentido del giro de las manecillas de un reloj (sentido negativo).

En lo que sigue a continuación, O es el centro y C es el punto de contacto.

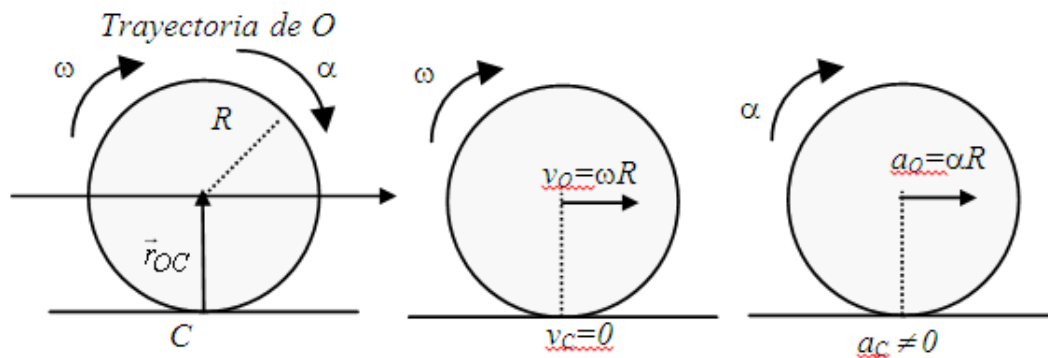
La trayectoria del centro O es una recta paralela a la superficie. La rodadura sin patinar (sin deslizar) ocurre si el punto C de contacto sobre el disco no tiene velocidad, es decir, si el disco no desliza a lo largo de la superficie.

Las velocidades de los puntos C y O se relaciona de la forma siguiente:

$$\vec{v}_O = \vec{v}_C + \vec{\omega} \times \vec{r}_{OC}$$

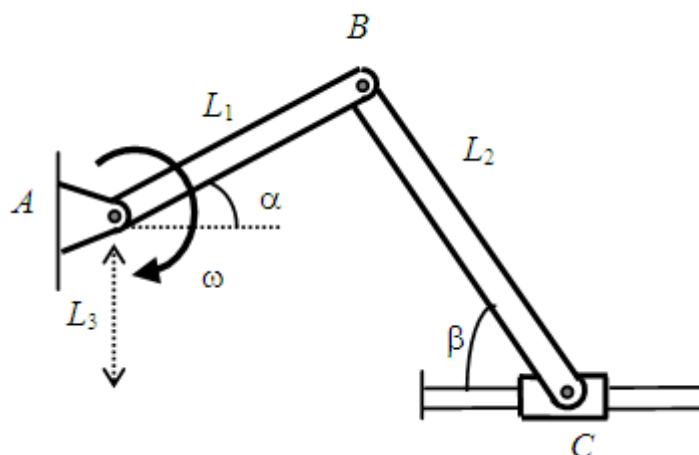
$\vec{\omega} = -\omega \cdot \vec{k}$, $\vec{r}_{OC} = R \cdot \vec{j} \Rightarrow \vec{v}_O = -\omega \cdot \vec{k} \times R \cdot \vec{j} = \omega R \cdot \vec{i}$, la velocidad del centro O es paralela a la superficie en que rueda el disco siendo su módulo $v_O = \omega R$

Aceleración lineal: $\vec{a}_O = \frac{d\vec{v}_O}{dt} = \frac{d\omega}{dt} R \cdot \vec{i} = \alpha R \cdot \vec{i} \Rightarrow a_O = \alpha R$, siendo α la aceleración angular. La aceleración lineal es paralela a la superficie horizontal.



Ejemplo: La velocidad angular de la barra AB es constante en el sentido indicado en la figura. Determinar la velocidad angular de la barra BC y la velocidad del collarín C en esa dirección.

Se observa que A es un punto fijo, la trayectoria de C es una recta horizontal, la trayectoria de B es un círculo con centro en A y conecta a las barras AB y BC .



Intenta tú sólo llegar a la solución: $v_C = \omega L_1 \sin \alpha + \frac{\omega L_1 \cos \alpha \cdot \sin \beta}{\cos \beta}$ es la velocidad del collarín C .

CENTRO INSTANTÁNEO DE ROTACIÓN

👁 Siempre existe un punto solidario al sólido que se halla instantáneamente en reposo. Este es el *CIR* (centro instantáneo de rotación)

👁 En cada instante, el movimiento del sólido consiste en una rotación pura alrededor del *CIR* (ya que la velocidad del *CIR* es cero).

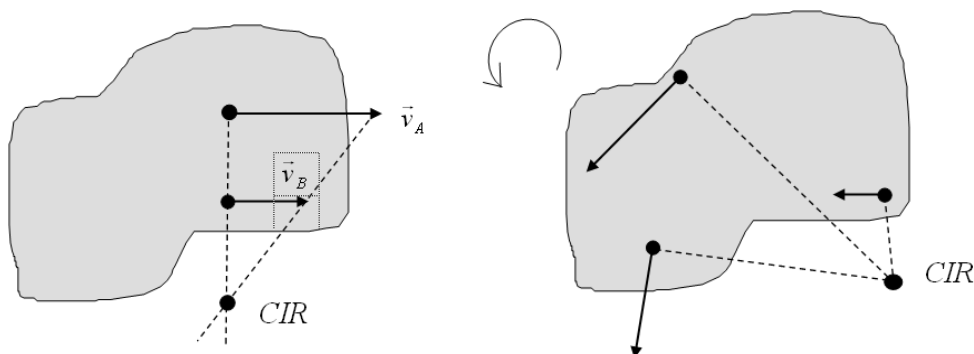
Tomando el *CIR* como punto de arrastre para la descripción del movimiento del sólido, la velocidad de cualquier punto B del sólido será : $\vec{v}_B = \vec{v}_{CIR} + \vec{\omega} \times \overrightarrow{CIRB}$. Como $\vec{v}_{CIR} = \vec{0}$, se tiene, en cada instante, $\vec{v}_B = \vec{\omega} \times \overrightarrow{CIRB}$, para todo punto B del sólido.

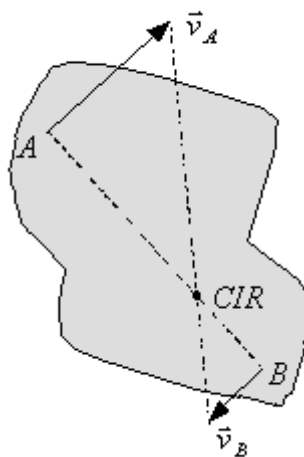
A efectos del campo de aceleraciones, la aceleración de cada punto *no* es una aceleración centrípeta respecto al *CIR*.

Propiedades del *CIR*:

- Es un punto solidario al sólido, cuya velocidad es cero en todo instante
- En cada instante, existe un y sólo un *CIR*. Puede permanecer *siempre en un mismo punto*, ó *moverse respecto al cuerpo y respecto al espacio*. El *CIR* se mueve en el espacio si y sólo si se mueve en el cuerpo.
- Puede hallarse fuera del cuerpo.
- Tomando el *CIR* como punto de arrastre, vemos que el movimiento del sólido, en cada instante, se puede interpretar como una rotación pura alrededor del *CIR*.
- Si en un instante dado el sólido no rota, sino que sólo se traslada (esto es $\omega = 0$), entonces el *CIR* se halla en el infinito.

Mostramos a continuación algunos ejemplos.





Campo de aceleraciones: Como el punto P está en reposo respecto del sistema $\{A; x, y, z\}$:

$$\vec{a}_P = \vec{a}_A + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{AP}) + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{AP}$$

$$\vec{a}_P = \vec{a}_A - \omega^2 \vec{AP} + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{AP}$$

Las expresiones anteriores muestran que el movimiento plano se puede visualizar como el desplazamiento de todo el sólido con un punto A más una rotación alrededor del punto A .

👁 Aceleración del CIR : La velocidad instantánea del CIR, como punto material o solidario al sólido, es nula, no así su aceleración.

$$\vec{a}_{CIR} = \vec{a}_A - \vec{\omega} \times \vec{v}_A - \frac{\dot{\vec{\omega}}}{\omega} \times \vec{v}_A$$

👉 **Ejemplo:** Si el sólido rueda sin deslizar la aceleración del CIR, como punto solidario, está dirigida hacia el centro y vale v_o^2 / R (o lo que es lo mismo $\omega^2 R$)

👉 **Ejemplo:** Si el sólido de la figura rueda sin deslizar calcula la aceleración del CIR, suponiendo que a) la velocidad angular es constante, b) la velocidad angular no lo es. Verás que sale lo mismo.



👉 **Ejemplo:** Para los tres sólidos idénticos de la figura que ruedan sin deslizar con la misma velocidad angular constante compara la aceleración del CIR, en los tres casos.

Ten cuidado a la hora de resolver este tipo de ejercicios. El centro del disco verde se mueve “en recta”. Si la velocidad angular es constante su aceleración sería nula (si la velocidad angular no lo fuese su aceleración sería sólo tangencial).

Sin embargo el centro de los discos rojo y amarillo describe una trayectoria circular. La aceleración del centro de estos dos discos es sólo normal si la velocidad angular es constante (sería normal y tangente si la velocidad angular no fuese constante). Y la aceleración de estos dos centros es distinta al tener distinto radio de curvatura.

