Tema 5

Interpolación

5.1 Introducción a la interpolación de funciones.

5.1.1 Polinomio interpolador.

Se llama interpolación al proceso matemático consistente en aproximar una función de la que sólo se conoce su valor (y quizá alguna de sus derivadas) en un conjunto finito de puntos.

Este proceso consiste en encontrar una función de una familia dada (normalmente un polinomio) que coincida con la función a aproximar en todos los datos conocidos.
La idea fundamental del problema viene dada por el siguiente teorema.

Teorema 5.1 *Sean* $x_o,\ldots,x_n\in[a,b]$ *números distintos* y $m_i\geq 0$ *un entero no negativo asociado a* x_i *para* $i\in\{0,\ldots,n\}$. *Sea* $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ m *veces derivable* en [a,b] *donde* $m=\text{máx}\{m_o,\cdots,m_n\}$. *Entonces existe un único polinomio P de grado* $\leq n+\sum_{i=0}^{n} m_i$ *que coincide con* f *y con sus derivadas de orden* $\leq m_i$ *en* x_i *para cada para* $i\in\{0,\ldots,n\}$.

$P^{(k)}(x_i)=f^{(k)}(x_i)$ $\qquad 0\leq i\leq n \qquad 0\leq k\leq m_i$

Demostración:
Sea $g= n+\sum_{i=0}^{n} m_i$ y consideremos los espacios vectoriales $\mathbb{R}^{g+1}$ y $\mathbb{R}_g[X]$, espacio de los polinomios de grado $\leq g$. Ambos tienen dimensión g+1.

Sea la aplicación lineal Γ: $\mathbb{R}_g[X] \to \mathbb{R}^{g+1}$

$$P \to (P(x_0),\ldots,P^{(m_0)}(x_0),\ldots,P(x_n),..,P^{(m_n)}(x_n))$$

Veamos que es inyectiva:

Sea $P\in\text{Ker}(\Gamma)$. Entonces:
$\Gamma(P)=(0,\ldots,0) \Rightarrow P(x_i)=\cdots= P^{(m_i)}(x_i)=0 \Rightarrow (x-x_i)^{m_i+1} | P(x)$

Así $(x-x_0)^{m_0+1}\cdots(x-x_n)^{m_n+1} \big| P(x)$, donde el polinomio de la izquierda tiene grado g+1. Al ser $gr(P)\leq g$ se concluye que P(x)=0 y que Γ es una aplicación lineal inyectiva.

Al tratarse de dos espacios vectoriales de la misma dimensión, toda aplicación lineal inyectiva es un isomorfismo.

Así pues: $\qquad \forall(y_o,\ldots,a_g)\in\mathbb{R}^{g+1}$ existe un único $P\in\mathbb{R}_g[X]$con $\Gamma(P)= (y_o,\ldots,y_g)$
Aplicando esto a $(f(x_0),\ldots,f^{(m_0)}(x_0),\ldots,f(x_n),\ldots,f^{(m_n)}(x_n))$ se obtiene el resultado.

Notación 5.2 Cuando sea necesario, para expresar lo anterior, diremos que las dos funciones coinciden en los puntos $x_o, \cdots, x_o, x_1, \cdots, x_1, \cdots, x_n, \cdots, x_n$, repitiendo cada punto m_i+1 veces.

Observación 5.3 Nótese que en el teorema 5.1 se han dado m_i+1 condiciones en cada punto, con lo que el número total de condiciones es $n+1+\sum_{i=0}^{n} m_i$, que es el número de coeficientes que tiene un polinomio del grado indicado.
El resultado anterior justifica la siguiente definición.

Definición 5.4 *Sean* $x_o,\ldots,x_n\in[a,b]$ *números distintos* y $m_i\geq 0$ *un entero no negativo asociado a* x_i *para* $i\in\{0,\ldots,n\}$. *Sea* $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ m *veces derivable* en $[a,b]$ *donde* $m=\text{máx}\{m_o, \ldots, m_n\}$. *Se llama polinomio interpolador de f para los datos indicados al único polinomio P de grado* $\leq n+\sum_{i=0}^{n} m_i$ *que coincide con f y con todas sus derivadas de orden* $\leq m_i$ *en* x_i *para cada para* $i\in\{0,\ldots,n\}$. *Los valores* $m_o+1, \cdots, m_n+1$ *reciben el nombre de orden de contacto de la función y el polinomio interpolador en los puntos* $x_o, \cdots, x_n$ *respectivamente.*

$$P^{(k)}(x_i)=f^{(k)}(x_i) \qquad 0\leq i\leq n \qquad 0\leq k\leq m_i$$

El coeficiente de grado máximo del polinomio interpolador recibe el nombre de diferencia dividida de f *en los puntos* $x_o, \cdots, x_o, x_1, \cdots, x_1, \cdots, x_n, \cdots, x_n$ *y se denota por* $f[x_o, \cdots, x_o, x_1, \cdots, x_1, \cdots, x_n, \cdots, x_n]$.

Observación 5.5 Llamando P al polinomio interpolador de f en los puntos $x_o, \cdots, x_n$ (puntos iguales o distintos) su n-ésima derivada es $P^{(n)}(x)= n!f[x_o,\cdots, x_n]$.

Ejemplo 5.6 Hallar el polinomio interpolador para la función $f(x)=2x^3+x^2+2x+8$, usando los puntos $x_o=1$ ($m_o=1$) y $x_1=-1$ ($m_1=0$)

Se trata de hallar un polinomio P de segundo grado con las condiciones
$P(1)=f(1)=13$, $P'(1)=f'(1)=10$ y $P(-1)=f(-1)=5$.

Sea $P(x)=a_2x^2+a_1x+a_o$ el polinomio interpolador. Entonces:

$$\begin{aligned} 13 &= P(1) = a_2+ a_1 + a_o \\ 11 &= P'(1) = 2a_2 + a_1 \\ 5 &= P(-1) = a_2 - a_1 + a_o \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema se obtiene la solución $a_2=3$, $a_1=4$, $a_o=6$ y el polinomio interpolador es $P(x)=3x^2+4x+6$. La diferencia dividida es $f[1,1,-1]=3$.

Observación 5.7 En la demostración del teorema 5.1 se obtiene el polinomio interpolador como solución de la igualdad $\Gamma(P)=(y_o,\cdots,y_g)$.

Haciendo $\mathbf{e_o}=(1,0,\ldots,0)$; $\mathbf{e_1}=(0,1,0,\cdots,0)$, …, $\mathbf{e_g}=(0,\cdots,0,1)$ se tiene:

$P= \Gamma^{-1}(y_o,\cdots,y_g)= \Gamma^{-1} (y_o\mathbf{e_o}+\cdots+y_g\mathbf{e_g})= y_o \Gamma^{-1}(\mathbf{e_o})+\cdots+y_g \Gamma^{-1}(\mathbf{e_g})$

Una solución al problema de interpolación se obtiene calculando los polinomios $\Gamma^{-1}(\mathbf{e_i})$, polinomios que sólo dependen de la distribución de puntos elegida y no de la función a interpolar.

Teorema 5.8 *Sea* $f:[a,b]\rightarrow \mathbb{R}$ *y sean* $x_o,\cdots,x_n\in[a,b]$. *Sean* P_n *el polinomio interpolador de* f *en* $x_o,\cdots,x_n$ *y* P_{n-1} *el polinomio interpolador de* f *en* $x_o,\cdots,x_{n-1}$. *Entonces*:
$P_n(x) = P_{n-1}(x) + f[x_o,\cdots,x_n](x-x_o)\cdots(x-x_{n-1})$

Demostración:
Sea $E_n(x)=P_n(x)-P_{n-1}(x)$. Entonces: $E_n(x_o)=\cdots=E_n(x_{n-1})=0$, ya que ambos polinomios coinciden con f en los puntos indicados.

Entonces: $E_n(x)=K_n(x-x_o)\cdots(x-x_{n-1})$ (nótese que el resultado es válido también si hay puntos repetidos).

Calculando su coeficiente de grado n: $K_n=f[x_o,\cdots,x_n]-0$.

Resumiendo: $P_n(x)=P_{n-1}(x)+E_n(x)=P_{n-1}(x)+f[x_o,\cdots x_n](x-x_o)\cdots(x-x_{n-1})$

Corolario 5.9: *Sea* $f:[a,b]\rightarrow \mathbb{R}$ *y sean* $x_o,\cdots,x_n\in[a,b]$. *Sean* P_n *el polinomio interpolador y* $z\in [a,b]$. *Entonces*: $f(z)=P_n(z)+ f[x_o,\cdots,x_n,z](z-x_o)\cdots(z-x_n)$

Demostración:
Sea P_{n+1} el polinomio interpolador de f en $x_o,\cdots,x_n,z$.
Por el teorema 5.8 $P_{n+1}(x)=P_n(x)+ f[x_o,\cdots,x_n,z](x-x_o)\cdots(x-x_n)$
Sustituyendo z en dicho polinomio se tiene:
$f(z)=P_{n+1}(z)=P_n(z)+ f[x_o,\cdots,x_n,z](z-x_o)\cdots(z-x_n)$

Comentario 5.10: En el corolario 5.9 hemos llamado z al punto de cálculo para mantener como x el nombre de la variable. La fórmula que emplearemos en lo sucesivo es $f(x)=P_n(x)+ f[x_o,\cdots,x_n,x](x-x_o)\cdots(x-x_n)$

5.1.2 Principales de tipos de interpolación.

Los casos más importantes de interpolación son:

- *Intepolación de Taylor*: n=0.
  Se trata de encontrar un polinomio que coincida con una función en un solo punto en su valor y en de sus primeras derivadas.
- *Interpolación de Lagrange*: $m_i=0$.
  Buscar un polinomio que coincida con una función en un determinado número de puntos.
- *Interpolación de Hermite*: $m_i=1$.
  Hallar un polinomio que coincida en valor y primera derivada con una función en varios puntos.

5.1.3 Preliminares analíticos.

Para el estudio de los errores de interpolación hemos de usar algunos resultados analíticos.

Teorema 5.11 (teorema de Rolle): *Sea* $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *continua en* $[a,b]$ *y derivable en* (a,b) *verificando* $f(a)=f(b)$. *Entonces* $\exists\alpha\in(a,b)$ *con* $f'(\alpha)=0$.

Demostración: Por el teorema de Weierstrass $\exists x_o,y_o\in[a,b]$ con $f(x_o)\leq f(x)\leq f(y_o)$, $\forall x\in[a,b]$ (una función continua en un intervalo cerrado tiene un máximo y un mínimo absolutos).

Si x_o e y_o son los extremos del intervalo, al ser $f(a)=f(b)$ se concluye que f es constante en $[a,b]$ y por tanto su derivada es nula en todos los puntos.

En otro caso uno de ellos es un extremo relativo en el interior del intervalo. Llamando α a dicho punto, se concluye que $f'(\alpha)=0$.

Teorema 5.12 (teorema de Rolle generalizado): *Sea* $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *n veces derivable y sean* $x_o,\cdots,x_n\in[a,b]$ *con* $f(x_o)=\cdots=f(x_n)=0$ (si algún punto apareciese k+1 veces, quiere decir se anula la función y sus k primeras derivadas). *Entonces* $\exists\alpha\in(a,b)$ *con* $f^{(n)}(\alpha)=0$.

Demostración: Supondremos $x_o\leq\cdots\leq x_n$. Haremos la demostración por inducción.
Supongamos n=1:

Si $x_o=x_1$. la consideración hecha dice que la condición es $f'(x_o)=0$, y x_o es el punto indicado. En otro caso, por el teorema de Rolle $\exists\alpha\in(x_o,x_1)$ con $f'(\alpha)=0$.

Supongamos que el resultado es cierto para n-1:
Ordenando los puntos si no lo estuvieran supondremos $x_o\leq\cdots\leq x_n$
Si $x_i<x_{i+1}$, por el teorema de Rolle, $\exists\alpha_i\in(x_i,x_{i+1})$ con $f'(\alpha_i)=0$.

Si k+1 elementos consecutivos de la sucesión coinciden $x_i=\cdots=x_{i+k}$, se tiene que $f'(x_i)=\cdots=f^{(k)}(x_i)=0$. Haciendo $\alpha_i=x_i$, $\cdots$, $\alpha_{i+k-1}=x_i$ podemos escribir $f'(\alpha_i)=\cdots=f'(\alpha_{i+k-1})=0$.

Concluimos que $f'(\alpha_o)=\cdots=f'(\alpha_{n-1})=0$.
Por la hipótesis de inducción $\exists\alpha\in(a,b)$ con $(f')^{(n-1)}(\alpha)=0$.
Se concluye que $f^{(n)}(\alpha)=(f')^{(n-1)}(\alpha)==0$.
De ahí el resultado.

Corolario 5.13: *Sea* $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *n veces derivable y sean* $x_o,\cdots,x_n\in[a,b]$. *Entonces:*

$\exists\alpha\in(a,b)$ *con* $f[x_o,\cdots,x_n]=\dfrac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}$

Demostración: Sea la función P(x) el polinomio interpolador de f en $x_o,\cdots,x_n$ y sea $E(x)=f(x)-P(x)$.

Entonces: $E(x_o)=\cdots=E(x_n)=0$.

Por el teorema 5.12: $\exists\alpha\in(a,b)$ *con* $E^{(n)}(\alpha)=0$.

Así pues: $0 = E^{(n)}(\alpha) = f^{(n)}(\alpha)-P^{(n)}(\alpha)= f^{(n)}(\alpha)-n!\cdot f[x_o,\cdots x_n] \Rightarrow f[x_o,\cdots x_n]= \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}$

5.2 Interpolación de Taylor y acotación del error.

5.2.1 Polinomio de Taylor

Según se explica en el apartado anterior el problema de interpolación de Taylor es el de hallar un polinomio que coincida con una función en un punto, tanto en su valor como en el de sus k primeras derivadas. Dicho con la notación 5.2 coincide en $x_o,\cdots,x_o$ (n_o+1 veces). Para resolverlo vamos a aplicar la observación 5.7.

Lema 5.14 *Dado un punto* x_o, *un orden de contacto* m_o+1 *y usando la notación de la observación 5.7 se tiene que* $\Gamma^{-1}(\mathbf{e_k}) = \frac{1}{k!}(x-x_0)^k$

Demostración:

Se trata de encontrar el polinomio P(x) con $\Gamma(P)=\mathbf{e_k}$. En otras palabras:

$P(x_o)= P(x_o)=\cdots=P^{(k-1)}(x_o)=0;\ P^{(k)}(x_o)=1;\ P^{(k+1)}(x_o)=\cdots= P^{(m)}(x_o)=0$

Por cumplirse las primeras condiciones el polinomio ha de ser múltiplo de $(x-x_o)^k$.
Como todas las derivadas de orden mayor de k de este polinomio son nulas, bastará con multiplicar por una constante y ajustarla para que $P^{(k)}(x_o)=1$.

$P(x)=M(x-x_o)^k \Rightarrow 1 = P^{(k)}(x_o)=M\cdot k! \Rightarrow M=\frac{1}{k!}$

De ahí el resultado.

Observación 5.15: En el lenguaje de diferencias divididas el resultado anterior indica que $f[x_o,\cdots,x_o]=\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$, cuando el punto aparece k+1 veces.

Corolario 5.16 El polinomio que interpola a la función f(x) en el punto x_o con orden de contacto m_o+1 es $f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(m_0)}(x_0)}{m_0!}(x-x_0)^{m_0}$

Definición 5.17 Dada la función f(x) se llama polinomio de Taylor de grado m_o en el punto x_o al polinomio $f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(m_0)}(x_0)}{m_0!}(x-x_0)^{m_0}$

Ejemplos 5.18 Los polinomios de Taylor en $x_o=0$ de algunas funciones son

$f(x)=e^x$; $P(x)= 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}$

$f(x)=\text{sen } x$; $P(x)=\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

$f(x)=\cos x$; $P(x)=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$

Ejercicio 5.19 Comprobar que el polinomio de Taylor de $f'(x)$ de grado m_o en el punto x_o es la derivada del polinomio de Taylor de grado m_o+1 de $f(x)$ en el mismo punto.

Ejercicio 5.20 Hallar el polinomio de Taylor de $f(x)$ de grado n en el punto $x_o=0$ de la función $f(x)=\sqrt{1+x}$

5.2.2 Error de interpolación

Teorema 5.21 (teorema de Taylor): *Sea* $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *n+1 veces derivable y sean* $x_o,x\in[a,b]$. *Entonces:*

$\exists\alpha\in(x_o,x)$ *con* $f(x)= f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{f^{(n+1)}(\alpha)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$

Demostración:
Consideremos $P_n(x)$ el polinomio de Taylor de f en x_o de grado n.

Por el corolario 5.16 se trata del polinomio interpolador de f en $x_o,\cdots,x_o$ (n+1 veces).

Por el corolario 5.9 se tiene $f(x)=P_n(x)+f[x_o,\cdots,x_o,x](x-x_o)\cdots(x-x_o)$

Por el corolario 5.13 $\exists\alpha\in(x_o,x)$ *con* $f[x_o,\cdots,x_o,x]=\frac{f^{(n+1)}(\alpha)}{(n+1)!}$

Resumiendo: $f(x)= f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{f^{(n+1)}(\alpha)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$

Corolario 5.22: *Sea* $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *n+1 veces derivable y* $x_o\in[a,b]$. *Sea* $P_n(x)$ *el polinomio de Taylor de f en x_o y sea $M_{n+1}\geq 0$ verificando que* $\forall x\in[a,b]$: $|f^{(n+1)}(x)|\leq M_{n+1}$ *Entonces:*

$\forall x\in[a,b]$: $|f(x)-P_n(x)|\leq\frac{M_{n+1}}{(n+1)!}|x-x_o|^{n+1}$

Demostración: Por el teorema de Taylor $f(x)-P_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\alpha)}{(n+1)!}(x-x_o)^{n+1}$, para algún $\alpha\in(x_o,x)$.

Entonces: $|f(x)-P_n(x)|=\frac{\left|f^{(n+1)}(\alpha)\right|}{(n+1)!}|x-x_o|^{n+1}\leq\frac{M_{n+1}}{(n+1)!}|x-x_o|^{n+1}$

Comentario 5.23: La idea de la interpolación es calcular un número que aproxime el valor de una función en un punto aproximándolo por el valor del polinomio interpolador. Llamando error de la interpolación a la diferencia entre el valor real y el valor aproximado, el corolario 5.22 nos da una expresión para el error de aproximación de Taylor.

Ejemplo 5.24: Calcular el valor de $\sqrt{e}$ con un error menor que una centésima.

Se trata de calcular f(0,5), donde $f(x)=e^x$.
Tomando como punto $x_o=0$ y teniendo en cuenta que $f^{(k)}(x)=e^x$, tenemos

$\forall x \in [0, 0,5]$: $|f^{(n+1)}(x)| = e^x \leq e^{0,5} = \sqrt{e} < 2$ · Tomamos, pues $M_{n+1}=2$.
Una cota del error es:
$E_n=\dfrac{M_{n+1}}{(n+1)!}|x-x_0|^{n+1}=\dfrac{2}{(n+1)!}0,5^{n+1}$
Calculando esta cota de error para diversos valores de n, tenemos:
$E_1=0,25$; $E_2=0,04$; $E_3=0,005$
Para n=3: $P_3(x)=$ $f(0)+\dfrac{f'(0)}{1!}(x-0)+\dfrac{f^{(2)}(0)}{2!}(x-0)^2+\dfrac{f^{(3)}(0)}{3!}(x-0)^3=1+\dfrac{x}{1!}+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}$
Entonces $P_3(0,5)=1+\dfrac{0,5}{1}+\dfrac{05,^2}{2!}+\dfrac{0,5^3}{3!}$=1,645833333
El valor exacto es $\sqrt{e}$ = 1,64872127

5.3 Interpolación clásica de Lagrange: método de los coeficientes indeterminados.

El problema clásico de interpolación, estudiado por Lagrange es el de buscar un polinomio de grado n que coincida con una función dada en n+1 puntos conocidos.

Se trata del problemas resuelto por el teorema 5.1, con $m_o=\cdots=m_n=0$.

Ejemplo 5.25 Hallar el polinomio interpolador de una función que verifica f(1)=1, f(2)=3, f(3)=7,

Como se tienen los valores en tres puntos se trata de hallar un polinomio de segundo grado $P_2(x)=a_o+a_1x+a_2x^2$, que coincida con f(x) en dichos puntos.
Entonces: $1=f(1)=P_2(1) = a_o+ a_1+ a_2$
$3=f(2)=P_2(2)= a_o+2a_1+4a_2$
$7=f(3)=P_2(3)= a_o+3a_1+9a_2$
Resolviendo el sistema se tiene la solución $a_o=1$, $a_1=-1$, $a_2=1$, y el polinomio interpolador es $P_2(x)=1-x+x^2$

El teorema 5.1 nos garantiza le existencia y unicidad de la solución de este problema. El método aquí descrito es conocido como método de los coeficientes indeterminados.

5.3 Método de Lagrange para la interpolación polinómica.

El método de Lagrange consiste en aplicar la observación 5.7 al caso que estamos tratando.

Proposición 5.26 (fórmula de interpolación de Lagrange): *Sea* f:[a,b]→ℝ *y sean* $x_o,\cdots,x_n\in[a,b]$. Entonces *el polinomio interpolador de la función f en los puntos* $x_o,\cdots,x_n$ es $P(x)=f(x_o)\cdot L_o(x)+\cdots+f(x_n)\cdot L_n(x)$, donde $L_i(x)=\dfrac{(x-x_0)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}$

Demostración: Según la observación 5.7 y utilizando su notación bastará con comprobar que $\Gamma^{-1}(\mathbf{e_i})=L_i(x)$.
Se trata de encontrar el polinomio $L_i(x)$ de grado n verificando:
$L_i(x_o)=\cdots=L_i(x_{i-1})=L_i(x_{i+1})=\cdots=L_i(x_n)=0$; $L_i(x_i)=1$.

Por las condiciones de nulidad el polinomio $L_i(x)$ es divisible por cada uno de los factores $(x-x_j)$ con $j\neq i$ y por tanto por $(x-x_o)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)$. Como ambos polinomios tienen grado n: $L_i(x)=K_i\cdot(x-x_o)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)$

Además:
$1=L_i(x_i)=K_i\cdot(x_i-x_o)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)\Rightarrow K_i=\dfrac{1}{(x_i-x_0)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}$

Así pues: $L_i(x)=\dfrac{(x-x_0)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}$.

Definición 5.27: Dados $x_o,\cdots,x_n\in\mathbb{R}$ se llaman polinomios de Lagrange para esos puntos a los polinomios $L_i(x)=\dfrac{(x-x_0)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}$., con $i=0,\cdots,n$.

Ejemplo 5.28 Repetir el ejemplo 5.25 utilizando los polinomios de Lagrange.

Se trata de buscar los polinomios $L_o(x)$, $L_1(x)$ y $L_3(x)$ para los puntos $x_o=1$, $x_1=2$, $x_2=3$.

$L_o(x)=\dfrac{(x-2)(x-3)}{(1-2)(1-3)}=\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{5}{2}x+3$ $\qquad$ $L_1(x)=\dfrac{(x-1)(x-3)}{(2-1)(2-3)}=-x^2+4x-3$

$L_2(x)=\dfrac{(x-1)(x-2)}{(3-1)(3-2)}=\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{3}{2}x+1$

El polinomio interpolador es

$P(x)=f(1)\cdot L_o(x)+f(2)\cdot L_1(x)+f(3)\cdot L_2(x)=1\cdot\left(\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{5}{2}x+3\right)+3\cdot(-x^2+4x-3)+7\left(\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{3}{2}x+1\right)=$
$=x^2-x+1$

5.4 Método de Newton.

El método de interpolación Newton consiste en utilizar las diferencias divididas en el cálculo del polinomio interpolador. En todos los casos supondremos que la función a interpolar es derivable tantas veces como requiera el problema, es decir, una unidad menos que el mayor orden de contacto que se tenga.

5.4.1 Interpolación de Newton en diferencias divididas

Proposición 5.29 *Sea* $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *y sean* $x_o,\cdots x_n\in [a,b]$. *Entonces el polinomio interpolador de* f *en* $x_o,\cdots x_n$ es $P_n(x)=f[x_o]+f[x_o,x_1](x-x_o)+\cdots+f[x_o,\cdots,x_n](x-x_o)\cdots(x-x_{n-1})$

Demostración: Por inducción sobre n.

Si n=0, $gr(P_o)=0$, luego P_o es su coeficiente de grado 0, es decir $P_o(x)=f[x_o]$

Supongamos que es cierto para n-1. Entonces:
$P_{n-1}(x)=f[x_o]+f[x_o,x_1](x-x_o)+\cdots+f[x_o,\cdots,x_{n-1}](x-x_o)\cdots(x-x_{n-2})$

Por el teorema 5.8: $P_n(x)=P_{n-1}(x)+ f[x_o,\cdots,x_n](x-x_o)\cdots(x-x_{n-1})$

Resumiendo:
$P_n(x)= f[x_o]+f[x_o,x_1](x-x_o)+\cdots +f[x_o,\cdots,x_{n-1}](x-x_o)\cdots(x-x_{n-2})+f[x_o,\cdots,x_n](x-x_o)\cdots(x-x_{n-1})$

Comentario 5.30: El resultado obtenido en la proposición 5.29 nos permite calcular de forma progresiva los polinomios interpoladores de una función en una colección de puntos, siempre y cuando se disponga de un procedimiento para calcular las diferencias divididas de una función.

Proposición 5.31: Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ y sean $x_o,\cdots x_n\in [a,b]$. Se tienen los siguientes resultados:

a) Si $x_o=\cdots=x_n$: $f[x_o,\cdots,x_o]=\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$, en particular $f[x_o]=f(x_o)$.

b) Si $x_0\neq x_n$: $f[x_o,\cdots,x_n]=\dfrac{f[x_1,\cdots,x_n]-f[x_0,\cdots,x_{n-1}]}{x_n-x_0}$

Demostración:

a) Es la observación 5.15

b) Sea $P_n(x)$ el polinomio interpolador de f en $x_o,\cdots,x_n$. $P_{n-1}(x)$ el polinomio interpolador de f en $x_o,\cdots,x_{n-1}$ y $Q_{n-1}(x)$ el polinomio interpolador de f en $x_1,\cdots,x_n$.

Por el teorema 5.8 se tienen las igualdades:

$P_n(x)=P_{n-1}(x)+f[x_o,\cdots,x_n](x-x_o)\cdots(x-x_{n-1}) \Rightarrow P_n(x)-P_{n-1}(x)=f[x_o,\cdots,x_n](x-x_o)\cdots(x-x_{n-1})$

$P_n(x)=Q_{n-1}(x)+f[x_1,\cdots,x_n](x-x_1)\cdots(x-x_n) \neq P_n(x)-Q_{n-1}(x)=f[x_o,\cdots,x_n](x-x_1)\cdots(x-x_n)$

Así pues: $(P_n(x)-P_{n-1}(x))(x-x_n)=f[x_o,\cdots,x_n](x-x_o)\cdots(x-x_{n-1})(x-x_n)= (P_n(x)-Q_{n-1}(x))(x-x_o)$

Desarrollando y pasando términos de miembro se obtiene:
$(x_n-x_o)P_n(x)=(x-x_n)P_{n-1}(x)-(x-x_o)Q_{n-1}(x)$

Sus coeficientes de grado n son $(x_n-x_o)f[x_o,\cdots,x_n]=f[x_1,\cdots,x_n]-f[x_o,\cdots,x_{n-1}]$
Despejando se obtiene el resultado.

Ejemplo 5.32 Vamos a repetir el ejemplo 5.6 usando diferencias divididas.

P(1)=f(1)=13, P'(1)=f'(1)=10 y P(-1)=f(-1)=5.

En términos de diferencias divididas los datos son f[1]=13, f[1,1]=10 y f[-1]=5.

El polinomio interpolador es $P_2(x)=f[1]+f[1,1](x-1)+f[1,1,-1](x-1)(x-1)$.

Nos falta calcular la última diferencia dividida. Para ello calculamos antes f[1,-1]:
$f[1,-1]=\dfrac{f[-1]-f[1]}{-1-1}=\dfrac{5-13}{-1-1}=4$
$f[1,1\text{-}1]=\dfrac{f[1,-1]-f[1,1]}{-1-1}=\dfrac{-2-4}{-1-1}=3$
$P_2(x)=13+10(x-1)+3(x-1)(x-1)=3x^2+4x-6$.

Comentario 5.33: Lo hecho en el ejemplo anterior se puede hacer siempre, poniendo los puntos en cualquier orden, sin más restricción que tener en cuenta que los puntos que sean múltiples han de ponerse consecutivamente. Para hacerlo de forma sistemática ponemos en una columna las primeras diferencias divididas con un solo punto, en una segunda las diferencias con dos puntos, etc.

Ejemplo 5.34 Construir el polinomio interpolador para los siguientes datos de una función f: f(0)=-5, f(1)=-3, f'(1)=3, f(2)=5

Hacemos la tabla de diferencias divididas

x_i	$f[x_i]$	$f[x_i,x_{i+1}]$	$f[x_i,x_{i+1},x_{i+2}]$	$f[x_i,x_{i,1},x_{i+2},x_{i+3}]$
0	-5			
		$\dfrac{f[1]-f[0]}{1-0}=\dfrac{-3-(-5)}{1}=2$		
1	-3		$\dfrac{f[1,1]-f[0,1]}{1-0}=\dfrac{3-2}{1-0}=1$	
		F[1,1]=f'(1)=3		$\dfrac{f[1,1,2]-f[0,1,1]}{2-0}=\dfrac{5-1}{2-0}=2$
1	-3		$\dfrac{f[1,2]-f[1,1]}{2-1}=\dfrac{8-3}{2-1}=5$	
		$\dfrac{f[2]-f[1]}{2-1}=\dfrac{5-(-3)}{2-1}=8$		
2	5			

El polinomio interpolador es $P(x)=f[0]+f[0,1](x-0)+f[0,1,1](x-0)(x-1)+f[0,1,1,2](x-0)(x-1)(x-1)=$
$=-5+2x+x(x-1)+2x(x-1)^2=2x^3-3x^2+3x-5$

5.4.2 Interpolación de Newton en diferencias ordinarias

Un caso particular en que las fórmulas de Newton se simplifican bastante es cuando los puntos se encuentran a igual distancia de unos de otros.

Definición 5.35 Una sucesión de puntos $x_o,\cdots, x_n$ se dice que está uniformemente distribuida si $\exists h\in\mathbb{R}^+$ con $x_{i+1}=x_i+h$, para $i=0, \cdots, n-1$.

Observación 5.36 En un sucesión de puntos uniformemente distribuidos se tienen las siguientes igualdades:

a) $x_{i+k}=x_i+k\cdot h$
b) $x_i-x_j=(i-j)h$

Definición 5.37 Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ y sea $h>0$. Entonces:

a) Se llama diferencia de amplitud h de f a la función $\triangle f:[a,b-h]:\to\mathbb{R}$ definida como $\triangle f(x)=f(x+h)-f(x)$.
b) Se define de manera recurrente la n-ésima diferencia de f como $\triangle^{n+1}f=\triangle(\triangle^n f)$..

Observación 5.38 Aplicando diferencias de funciones a sucesiones igualmente distribuidas se tiene $\triangle f(x_i)=f(x_i+h)-f(x_i)=f(x_{i+1})-f(x_i)$.

Proposición 5.39 *Sea* $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *y sean* $x_o,\cdots,x_n\in[a,b]$ *igualmente distribuidos. Entonces dados* $i,k\leq n$ *con* $i+k\leq n$ *se tiene* $f[x_i,\cdots,x_{i+k}]=\dfrac{\triangle^k f(x_i)}{k!\cdot h^k}$

Demostración:

Si k=1: $f[x_i,x_{i+1}]=\dfrac{f[x_{i+1}]-f[x_i]}{x_{i+1}-x_i}=\dfrac{f(x_{i+1})-f(x_i)}{h}=\dfrac{\triangle f(x_i)}{h}=\dfrac{\triangle f(x_i)}{1!\cdot h^1}$

Supongamos que es cierto para k-1.

Entonces: $f[x_i,\cdots x_{i+k}]=\dfrac{f[x_{i+1},\cdots,x_{i+k}]-f[x_i,\cdots,x_{i+k-1}]}{x_{i+k}-x_i}=\dfrac{\dfrac{\triangle^{k-1}f(x_{i+1})}{(k-1)!\cdot h^{k-1}}-\dfrac{\triangle^{k-1}f(x_i)}{(k-1)!\cdot h^{k-1}}}{k\cdot h}=$

$$=\frac{\triangle^{k-1}f(x_{i+1})-\triangle^{k-1}f(x_i)}{(k-1)!\cdot h^{k-1}\cdot k\cdot h}=\frac{\triangle(\triangle^{k-1})f(x_i)}{(k-1)!\cdot k\cdot h^{k-1}\cdot h}=\frac{\triangle^k f(x_i)}{k!\cdot h^k}$$

Obervación 5.40: Si tenemos puntos uniformemente distribuidos $x_o,\cdots,x_n$ y llamamos s al polinomio $s=\dfrac{x-x_0}{h}$ se tiene que $\dfrac{x-x_i}{h}=\dfrac{x-x_0-ih}{h}=\dfrac{x-x_0}{h}-i$ =s-i.

Análogamente, haciendo $t=\dfrac{x-x_n}{h}$ se tiene $\dfrac{x-x_{n-i}}{h}=\dfrac{x-x_n-+h}{h}=\dfrac{x-x_n}{h}+i$ =t+i

Teorema 5.40 (fórmula de interpolación de Newton en diferencias ordinarias): **Sea** f:[a,b]→$\mathbb{R}$ y *sean* $x_o,\cdots,x_n\in$[a.b] *uniformemente distribuidos. Entonces el polinomio interpolador de en dichos puntos es*:

$$P_n(x)=f(x_o)+\frac{\triangle f(x_0)}{1!}s+\frac{\triangle^2 f(x_0)}{2!}s(s-1)+\cdots+\frac{\triangle^n f(x_0)}{n!}s(s-1)\cdots(s-n+1),\ \textit{donde}\ s=\frac{x-x_0}{h}$$

Demostración:

Por la proposición 5.29 se tiene
$P_n(x)=f[x_o]+f[x_o,x_1](x-x_o)+\cdots+f[x_o,\cdots,x_n](x-x_o)\cdots(x-x_{n-1})$

Aplicando la proposición 5.39:

$$P_n(x)=f(x_o)+\frac{\triangle f(x_0)}{1!\cdot h}(x-x_o)+\frac{\triangle^2 f(x_0)}{2!\cdot h^2}(x-x_o)(x-x_1)+\cdots+\frac{\triangle^n f(x_0)}{n!\cdot h^n}(x-x_o)\cdots(x-x_{n-1})=$$

$$f(x_o)+\frac{\triangle f(x_0)}{1!}\cdot\frac{x-x_0}{h}+\frac{\triangle^2 f(x_0)}{2!}\cdot\frac{x-x_0}{h}\cdot\frac{x-x_1}{h}+\cdots+\frac{\triangle^n f(x_0)}{n!\cdot h^n}\cdot\frac{x-x_0}{h}\cdots\frac{x-x_{n-1}}{h}$$

Aplicando la proposición 5.40 se obtiene la fórmula indicada.

Comentario 5.41 La fórmula de Newton en diferencias ordinarias, aparte de ser más sencilla de recordar que la de Newton en diferencias divididas, requiere de menos operaciones y, además, utiliza unos cuantos polinomios fijos, por lo que es de uso más sencillo, ya que estos polinomios pueden estar más estudiados, o se pueden tener tabulados.

Notación 5.42: Se consideran los polinomios $s^{(k)}=s(s-1)\cdots(s-k+1)$ y $\binom{s}{k}=\frac{s^{(k)}}{k!}$; $\binom{s}{0}=1$.

Observación 5.43: Usando la notación 5.42 la fórmula de interpolación de Newton queda

$$P(x)=f(x_o)+\frac{\triangle f(x_0)}{1!}s+\frac{\triangle^2 f(x_0)}{2!}s^{(2)}+\cdots+\frac{\triangle^n f(x_0)}{n!}s^{(n)}=f(x_o)\binom{s}{0}+\triangle f(x_o)\binom{s}{1}+\cdots+\triangle^n f(x_o)\binom{s}{n}$$

Ejemplo 5.43 Hallar el polinomio interpolador para los siguientes datos:f(-1)=-1, f(1)=-1, f(3)=5, f(5)=59

Como se trata de puntos uniformemente distribuidos, podemos usar la fórmula de Newton en diferencias ordinarias. Primero construimos la tabla de diferencias:

x_i	$f(x_i)$	$\triangle f(x_i)$	$\triangle^2 f(x_i)$	$\triangle^3 f(x_i)$
-1	-7			
		f(1)-f(-1)=-1-(-7)=6		
1	-1		$\triangle$f(1)-$\triangle$f(-1)=6-6=0	
		f(3)-f(1)=5-(-1)=6		$\triangle^2$f(1)-$\triangle^2$f(-1)=48-0=48
3	5		$\triangle$f(3)-$\triangle$f(1)=54-6=48	
		f(5)-f(3)=59-5=54		
5	59			

Así el polinomio interpolador es $f(x)=-7+\frac{6}{1!}s+\frac{0}{2!}s(s-1)+\frac{48}{3!}s(s-1)(s-2)$, donde $s=\frac{x+1}{2}$

Teorema 5.44 (fórmula de interpolación de Newton en diferencias descendentes): Sea f:[a,b]→ℝ y *sean* $x_o,\cdots,x_n\in[a.b]$ *uniformemente distribuidos. Entonces el polinomio interpolador de en dichos puntos es*:

$$P_n(x)=f(x_n)+\frac{\Delta f(x_{n-1})}{1!}t+\frac{\Delta^2 f(x_{n-2})}{2!}t(t+1)+\cdots+\frac{\Delta^n f(x_0)}{n!}t(t+1)\cdots(t+n-1),\ \textit{donde}\ t=\frac{x-x_n}{h}$$

Demostración : Considerando los puntos en orden inverso se tiene:

$$P_n(x)=f[x_n]+f[x_n,x_{n-1}](x-x_n)+f[x_n,x_{n-1},x_{n-2}](x-x_n)(x-x_{x-1})+\cdots+f[x_n,\cdots,x_o](x-x_n)\cdots(x-x_1)=$$

$$= f(x_n)+\frac{\Delta f(x_{n-1})}{1!\cdot h}(x-x_n)+\frac{\Delta^2 f(x_{n-2})}{2!\cdot h^2}(x-x_n)(x-x_{n-1})+\cdots+\frac{\Delta^n f(x_0)}{n!\cdot h^n}(x-x_n)\cdots(x-x_1)=$$

$$= f(x_n)+\frac{\Delta f(x_{n-1})}{1!\cdot h}\cdot\frac{x-x_n}{h}+\frac{\Delta^2 f(x_{n-2})}{2!\cdot h^2}\cdot\frac{x-x_n}{h}\cdot\frac{x-x_{n-1}}{h}+\cdots+\frac{\Delta^n f(x_0)}{n!\cdot h^n}\frac{x-x_n}{h}\cdots\frac{x-x_1}{h}=$$

$$= f(x_n)+\frac{\Delta f(x_{n-1})}{1!}t+\frac{\Delta^2 f(x_{n-2})}{2!}t(t+1)+\cdots+\frac{\Delta^n f(x_0)}{n!}t(t+1)\cdots(t+n-1)$$

Ejemplo 5.45 : Hallar el polinomio interpolador del ejemplo 5.43 usando diferencias descendentes.
Usando la misma tabla ya calculada el polinomio interpolador es

$$P_n(x)=)=59+\frac{54}{1!}t+\frac{48}{2!}t(t+1)+\frac{48}{3!}t(t+1)(t+2),\ \text{donde } t=\frac{x-5}{2}$$

5.5 Acotación del error en la interpolación de Lagrange.

Proposición 5.46 Sea f:[a,b]→ℝ y *sean* $x_o,\cdots,x_n\in[a.b]$. *Sea* $P_n(x)$ *polinomio interpolador de* f *en* $x_o,\cdots,x_n$. *Entonces* $\forall x\in[a.b]$ $\exists\alpha\in[a,b]$ *con* $f(x)=P_n(x)+\frac{f^{(n+1)}(\alpha)}{(n+1)!}(x-x_0)\cdots(x-x_n)$

Demostración: Por el corolario 5.9 $f(x)=P_n(x)+f[x_o,\cdots,x_n](x-x_o)\cdots(x-x_n)$

Por el corolario 5.13 $\exists\alpha\in[a,b]$ con $f[x_o,\cdots,x_n]=\frac{f^{(n+1)}(\alpha)}{(n+1)!}$

Se concluye que $f(x)=P_n(x)+\frac{f^{(n+1)}(\alpha)}{(n+1)!}(x-x_0)\cdots(x-x_n)$

Corolario 5.47 (error de interpolación): *Sea* f:[a,b]→ℝ y *sean* $x_o,\cdots,x_n\in[a.b]$. *polinomio interpolador de* f *en* $x_o,\cdots,x_n$. *y sea* $M_{n+1}\geq 0$ *verificando que* $\forall x\in[a,b]$: $|f^{(n+1)}(x)|\leq M_{n+1}$

Entonces: $\forall x\in[a,b]$: $|f(x)-P_n(x)|\leq\frac{M_{n+1}}{(n+1)!}|(x-x_o)\cdots(x-x_n)|$

Demostración:

Por el teorema anterior: $f(x)-P_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\alpha)}{(n+1)!}(x-x_0)\cdots(x-x_n)$

Entonces: $|f(x)-P_n(x)|=\frac{\left|f^{(n+1)}(\alpha)\right|}{(n+1)!}\left|(x-x_0)\cdots(x-x_n)\right|\leq\frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\left|(x-x_0)\cdots(x-x_n)\right|$

Observación 5.48: Nótese que en la demostración anterior no se ha empleado si los puntos son iguales o distintos, así que es válida para todos los casos. Ya la habíamos obtenido para la interpolación de Taylor (además con la misma demostración esencialmente) y nos servirá para la interpolación de Lagrange y para la interpolación de Hermite que veremos en el siguiente epígrafe.

5.6 Interpolación de Hermite.

Según vimos en 5.1.2 la interpolación de Hermite consiste elegir varios puntos y una función de la que conocemos tanto su valor como su derivada en dichos puntos.

Definición 5.48: Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *derivable* y *sean* $x_o,\cdots,x_n\in[a.b]$ *puntos distintos. Se llama polinomio interpolador de Hermite en dichos puntos al único polinomio de grado*$\leq 2n+1$ $P(x)$ *verificando* $P(x_i)=f(x_i)$, $P'(x_i)=f'(x_i)$, *para* $i=0,\cdots,n$

Observación 5.49: La existencia y unicidad del polinomio de Hermite viene dada por el teorema 5.1. Para su cálculo se puede utilizar el método de las diferencias divididas ya explicado en 5.4.1 teniendo en cuenta que $f[x_i,x_i]=f'(x_i)$

Ejemplo 5.50 Hallar el polinomio interpolador de Hermite en los puntos -1, 0, 1 de una función f(x) que verifica f(-1)=3, f'(-1)=-5, f(0)=1, f'(0)=0, f(1)=5, f'(1)=11

Solución: Construimos la tabla de diferencias divididas

x_i	$f[x_i]$	$f[x_i,x_{i+1}]$	$f[x_i,x_{i+1},x_{i+2}]$	$f[x_i,\cdots,x_{i+3}]$	$f[x_i,\cdots,x_{i+4}]$	$f[x_i,\cdots,x_{i+5}]$
-1	3					
		f'(-1)=-5				
-1	3		$\frac{-2-(-5)}{0-(-1)}$=3			
		$\frac{1-3}{0-(-1)}$=-2		$\frac{2-3}{0-(-1)}$=-1		
0	1		$\frac{0-(-2)}{0-(-1)}$=2		$\frac{1-(-1)}{1-(-1)}$=1	
		f'(0)=0		$\frac{4-2}{1-(-1)}$=1		$\frac{1-1}{0-(-1)}$=0
0	1		$\frac{4-0}{1-0}$=4		$\frac{3-1}{1-(-1)}$=1	
		$\frac{5-1}{1-0}$=4		$\frac{7-4}{1-0}$=3		
1	5		$\frac{11-4}{1-0}$=7			
		f'(1)=11				
1	5					

El polinomio de Hermite es $P_5(x)=3-5(x+1)+3(x+1)^2-1(x+1)^2x+1(x+1)^2x^2+0(x+1)^2x^2(x-1)$

Comentario 5.51 En la proposición 5.26 utilizábamos los polinomios de Lagrange $L_i(x)=\dfrac{(x-x_0)...(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)...(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}$ para dar una expresión explícita de la solución del problema de interpolación de Lagrange. En la siguiente proposición construimos una fórmula equivalente par la interpolación de Hermite.

Proposición 5.52 Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *derivable* y *sean* $x_o,\cdots,x_n\in[a.b]$ *puntos distintos. El polinomio interpolador de Hermite en dichos puntos es*:

$P(x)=f(x_o)\cdot H_o(x)+f'(x_o)\cdot \tilde{H}_0(x)+\cdots+ f(x_n)\cdot H_n(x)+f'(x_n)\cdot \tilde{H}_n(x)$, *donde*

$H_i(x)=(-2\cdot L_i'(x_i)(x-x_i)+1)\cdot L_i(x)^2$ y $\tilde{H}_i(x)=(x-x_i)\cdot L_i(x)^2$, *siendo* $L_i(x)$ *los polinomios de Lagrange.*

Demostración:
En virtud de la observación 5.9 la solución es la indicada si más que obtener los elemento allí indicados como $\Gamma^{-1}(\mathbf{e_i})$. En nuestro caso se trata de hallar cuáles son los polinomios $H_i(x)$ y $\tilde{H}_i(x)$ de grado $\leq 2n+1$ que verifican:

$H_i(x_i)=1$; $H_i'(x_i)=0$; $H_i(x_j)=H_i'(x_j)=0$ si $j\neq i$

$\tilde{H}_i(x_i)=1$; $\tilde{H}_i'(x_i)=0$; $\tilde{H}_i(x_j)=\tilde{H}_i'(x_j)=0$ si $j\neq i$

Por ser $H_i(x_j)=H_i'(x_j)=0$, se tiene que $(x-x_j)^2|H_i(x)$ $\forall j\neq i$, de donde $L_i(x)^2 \mid H_i(x) \Rightarrow H_i(x)=Q(x)\cdot L_i(x)^2$, para cierto polinomio $Q(x)$.

Entonces $gr(Q)=gr(H_i)-2\cdot gr(L_i)\leq 2n+1-2n=1$.

Resumiendo $H_i(x)=(Ax+B)\cdot L_i(x)^2$, para ciertos $A,B\in\mathbb{R}$

Análogamente se tiene $\tilde{H}_i(x)=(Cx+D)\cdot L_i(x)^2$, para ciertos $C,D\in\mathbb{R}$

Sólo nos falta calcular los valores de A, B, C y D. (recordemos que $L_i(x_i)=1$)

$1=H_i(x_i)=(Ax_i+B)L_i(x_i)^2=Ax_i+B$

$0=H_i'(x_i)=A\cdot L_i(x_i)^2+(Ax_i+B)\cdot 2L_i(x_i)L_i'(x_i) = A+2L_i'(x_i)$ (hemos hecho uso de la primera igualdad obtenida).

Entonces: $A=-2L_i'(x_i)$ y $B=1-Ax_i$
$Ax+B=Ax+1-Ax_i=A(x-x_i)+1=-2L_i'(x_i)(x-x_i)+1 \Rightarrow H_i(x)=(-2\cdot L_i'(x_i)(x-x_i)+1)\cdot L_i(x)^2$

Calculamos ahora C y D:

$0=\tilde{H}_i(x_i)=(Cx_i+D)\cdot L_i(x_i)^2=Cx_i+D$

$1=\tilde{H}_i{}'(x_i)=C\cdot L_i(x_i)^2+(Cx_i+D)\cdot 2L_i(x_i)L_i'(x_i)= C \Rightarrow D=-Cx_i=-x_i$

Se concluye que $\tilde{H}_i(x)=(Cx+D)\cdot L_i(x)^2=\tilde{H}_i(x)=(x-x_i)\cdot L_i(x)^2$

Conjugando los polinomios obtenidos con la observación 5.9 se obtiene el resultado.

Ejercicio 5.54: Comprobar que $L_i'(x_i)=\frac{1}{x_i-x_0}+\cdots+\frac{1}{x_i-x_{i-1}}+\frac{1}{x_i-x_{i+1}}+\cdots+\frac{1}{x_i-x_n}$

Ejemplo 5.55: Hallar el polinomio interpolador de Hermite para los siguientes datos $f(1)=5$, $f'(1)=2$, $f(2)=3$, $f'(2)=4$

Solución:

Hallamos los polinomios de Lagrange y sus derivadas.

$L_o(x)=\frac{x-2}{1-2}=-x+2;$ $\quad L_o'(1)=-1$

$L_1(x)=\frac{x-1}{2-1}=x-1$ $\quad L_1'(2)=2$

Los polinomios de Hermite son:

$H_o(x)=(-2\cdot L_o'(x_o)(x-x_o)+1)\cdot L_o(x)^2=(-2\cdot(-1)(x-1)+1)\cdot(-x+2)^2=2x^3-9x^2+12x-4$

$\tilde{H}_0(x)=(x-x_o)L_o(x)^2=(x-1)(-x+2)^2=x^3-5x^2+8x-4$

$H_1(x)=(-2\cdot L_1'(x_1)(x-x_1)+1)\cdot L_1(x)^2=(-2\cdot 1(x-2)+1)(x-1)^2=-2x^3+9x^2-12x+5$

$\tilde{H}_1(x)=(x-x_1)L_1(x)^2=(x-2)(x-1)^2=x^3-4x^2+5x-2$

El polinomio buscado es

$P(x)=f(x_o)\cdot H_o(x)+f'(x_o)\cdot \tilde{H}_0(x)+f(x_1)\cdot H_1(x)+f'(x_1)\cdot \tilde{H}_1(x)=$
$=5(2x^3-9x^2+12x-4)+2\cdot(x^3-5x^2+8x-4)+2\cdot(-2x^3+9x^2-12x+5)+4\cdot(x^3-4x^2+5x-2)=$
$=10x^3-44x^2+60x-21$