TOPOLOGÍA GENERAL (curso 2007/08)

Hoja 1

1. Si $f\colon (X,T) \to (X',T')$ es un homeomorfismo, entonces T es la topología inicial para f y T' es la topología final para f.

2. Sea X un espacio con la topología inicial inducida por la familia de aplicaciones $f_\alpha : X \to X_\alpha$, para $\alpha \in A$. Si cada X_α tiene la topología inicial dada por una colección de aplicaciones $g_{\alpha\lambda} : X_\alpha \to Y_{\alpha\lambda}$, para $\lambda \in \text{Ł}_\alpha$, entonces X tiene la topología inicial dada por las aplicaciones $g_{\alpha\lambda} \circ f_\alpha : X \to Y_{\alpha\lambda}$, para $\alpha \in A$ y $\lambda \in \text{Ł}_\alpha$. (*Nota:* esta propiedad se conoce como la propiedad transitiva de las topologías iniciales. Hay también la correspondiente propiedad transitiva para las topologías finales.)

3. Sea $\{X_i, i \in I\}$ una familia de espacios topológicos, y $A_i \subset X_i$. Demostrar que la topología producto en ΠA_i coincide con la topología heredada como subespacio de ΠX_i.

4. Consideremos $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, el conjunto de las sucesiones de números reales, y la aplicación $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ definida por $f(t) = (t, t, \ldots)$. Estudiar si esta función es continua respecto de la topología producto y la topología de las cajas en $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

5. *(Topología producto y convergencia puntual)* Sea $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots$ una sucesión de puntos en el espacio producto $\Pi_{\alpha \in A} X_\alpha$. Probar que esta sucesión converge al punto $\mathbf{x}$ si, y sólo si, la sucesión $\pi_\alpha(\mathbf{x}_1), \pi_\alpha(\mathbf{x}_2), \ldots$ converge a $\pi_\alpha(\mathbf{x})$, para cada α.

6. Sea $\{X_i, i \in I\}$ una familia de espacios topológicos, y $A_i \subset X_i$ un subconjunto cualquiera, para cada $i \in I$.
   (a) Probar que en el espacio producto se verifica la igualdad $\overline{\Pi_{i\in I} A_i} = \Pi_{i \in I} \bar{A}_i$.
   (b) Estudiar si se verifica una relación análoga para el producto de los interiores de los A_i.
   (c) Encontrar fórmulas para la clausura e interior de subconjuntos respecto de la topología de las cajas.

7. Sea $\mathbb{R}^\infty$ el subconjunto de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ formado por las sucesiones que son “finalmente cero”, es decir, las sucesiones $(x_1, x_2, \ldots)$ tales que $x_i \neq 0$ sólo para un número finito de valores de i. Estudiar la clausura de $\mathbb{R}^\infty$ en $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ respecto de la topología producto.

8. En $(\mathbb{R}, T_u)^{\mathbb{R}}$, estudiar la clausura y el interior de los siguientes subconjuntos:

$$\begin{aligned}
A &= \{f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ es acotada}\},\\
B &= \{f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ es estrictamente creciente}\},\\
C &= \{f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ toma valores en } \mathbb{Z}\},\\
D &= \{f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ es continua acotada}\}.
\end{aligned}$$

9. Se considera el espacio $\Pi_{n\in\mathbb{N}}(\mathbb{R}, T_n)$ siendo

$$T_n = \begin{cases} T_{[)} & \text{si } n \text{ es par} \\ T_{(]} & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

i) Determinar el interior y la clausura de

$$M = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{R} | -1 < f(n) < 1, \forall n \in \mathbb{N}\}.$$

ii) En este espacio, determinar la convergencia de las sucesiones $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ y $\{g_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ siendo

$$f_k(n) = (-1)^n \frac{1}{k}, \qquad g_k(n) = (-1)^{n+1} \frac{1}{k}.$$

10. Dado un conjunto de índices J, se define en $\mathbb{R}^J$ la distancia $\bar{\rho}$ como

$$\bar{\rho}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sup\{\bar{d}(x_\alpha, y_\alpha) \,|\, \alpha \in J\}$$

donde $\bar{d}$ es la distancia acotada de $\mathbb{R}$. Comprobar que $\bar{\rho}$ es, efectivamente, una distancia. La topología que induce en $\mathbb{R}^J$ se denomina *topología uniforme*.

(a) Probar que la topología uniforme es más fina que la topología producto y menos fina que la topología de las cajas. Las tres topologías son distintas si J es infinito.

(b) Consideramos $J = \mathbb{N}$; dado $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, y dado $0 < \epsilon < 1$, sea

$$U(\mathbf{x}, \epsilon) = (x_1 - \epsilon, x_1 + \epsilon) \times \ldots \times (x_n - \epsilon, x_n + \epsilon) \times \ldots.$$

(i) Probar que $U(\mathbf{x}, \epsilon)$ no es igual a la bola $B_{\bar{\rho}}(\mathbf{x}, \epsilon)$, ni siquiera es un abierto de la topología uniforme.

(ii) Probar que $B_{\bar{\rho}}(\mathbf{x}, \epsilon) = \bigcup_{\delta<\epsilon} U(\mathbf{x}, \delta)$.

* * * * * * * * * * * *

Hoja 2

1. **Variaciones del conjunto de Cantor**

(a) El *conjunto de Cantor mitad* es el conjunto $C_{\frac{1}{2}}$ de los números $x \in [0, 1]$ tales que $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{3^n}$ donde x_n es igual a 0 ó a 1, para todo n. Demostrar que $C_{\frac{1}{2}}$ es homeomorfo al conjunto de Cantor C.

(b) Sea T el conjunto de los números del intervalo $[0, 1]$ que se pueden escribir en base 7 utilizando sólo los dígitos 0 y 6. A este conjunto le llamamos *conjunto de Cantor delgado*.

(c) Sea S el conjunto de los números del intervalo $[0, 1]$ que se pueden escribir en base 7 utilizando sólo los dígitos 0, 2, 4 y 6. Estudiar si T y S son homeomorfos al conjunto de Cantor C.

(d) Hacer un dibujo que aproxime el conjunto $C \times C$. Probar que C es homeomorfo a $C \times C$. infinito).

2. **Autosemejanza del conjunto de Cantor.** Probar que $f(x) = 3x$ es un homeomorfismo entre el subconjunto de Cantor $I_0 \cap C$ y el conjunto total C.

3. Probar que el conjunto de Cantor es **homogéneo**. Es decir, si $a, b \in C$, entonces existe un homeomorfismo f de C tal que $f(a) = b$. (Sugerencia: ver C como producto infinito).

4. **El conjunto de Cantor como "conjunto prisionero"**. Consideramos la siguiente aplicación:

$$f\colon x \to \begin{cases} 3x & \text{si} \quad x \le 0.5 \\ -3x+3 & \text{si} \quad x > 0.5 \end{cases}$$

Comenzando con un punto inicial, x_0, consideramos la sucesión de sus imágenes iteradas: $x_0, x_1 := f(x_0), \ldots, x_n := f(x_{n-1}), \ldots$ Si esta sucesión tiende a $-\infty$, decimos que el punto x_0 *se escapa* (por ejemplo, los números negativos se escapan). Si la sucesión es acotada, decimos que x_0 es un *punto prisionero* (por ejemplo, $x_0 = 0$ es prisionero). ¿Qué puntos se escapan y cuáles son prisioneros?

* * * * * * * * * * * *

Hoja 3

1. En $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, sea $E = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid f(x) = 0 \text{ ó } 1, \text{ y } f(x) = 0 \text{ sólo una cantidad finita de veces}\}$ y sea $g \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ la función idénticamente cero. Demostrar que $g \in \bar{E}$. Calcular la clausura de E. Para cada punto $g \in \bar{E}$, estudiar si existe una sucesión en E que converja a g.

2. Sean: (i) (X, T_{CF}), con X un conjunto infinito y T_{CF} la topología de los complementos finitos (ii) (X, T_{CN}), con X un conjunto infinito no numerable y T_{CN} la topología de los complementos numerables.

   (a) ¿Qué sucesiones convergen y a qué puntos?

   (b) ¿Es X primer axioma de numerabilidad?

   (c) ¿Se puede caracterizar la clausura (cerrados, abiertos, continuidad) por sucesiones?

   (Una de las respuestas muestra que la condición de I A.N. no es necesaria para caracterizar la clausura por sucesiones).

3. Encontrar espacios topológicos X, Y y una aplicación $F : X \to Y$ que no sea continua pero con la propiedad de que si $x_n \to x$ en X, entonces $F(x_n) \to F(x)$ en Y.

4. Demostrar que en cualquier espacio topológico la unión de una sucesión convergente con un punto límite es un conjunto compacto. Sin embargo esta afirmación es falsa si se sustituye sucesión por red.

5. Sea $(\mathbf{x}_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ una red en $\Pi_{i \in I}(X_i, T_i)$ que tiene un punto de aglomeración. Probar que por todo $j \in I$, $(p_j(\mathbf{x}_\lambda))_{\lambda \in \Lambda}$ tiene un punto de aglomeración en (X_j, T_j). Probar que el recíproco no es cierto.

6. Sea X un conjunto y T, T' dos topologías en él. Probar que si para todo punto $x \in X$ y toda red convergente $(s_d)_{d \in D}$ a x en (X, T), se tiene que la red también converge a x en (X, T'), entonces $T' \subset T$.

   Deducir que si se tiene $\forall x \in X$

   $$(s_d)_{d \in D} \to x \text{ en } (X, T) \iff (s_d)_{\in D} \to x \text{ en } (X, T'),$$

   entonces $T = T'$.

7. Probar que la intersección de dos filtros $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ es el filtro generado por la familia $\{F \cup G \,|\, F \in \mathcal{F}, G \in \mathcal{G}\}$. ¿Es $\mathcal{F} \cup \mathcal{G}$ un filtro o está contenido en algún filtro?

8. (a) Caracterizar los filtros convergentes en un espacio con la topología discreta y en un espacio con la topología trivial.

   (b) Sea X un conjunto infinito y $\mathcal{F}$ el filtro de los conjuntos cuyos complementarios son conjuntos finitos. Estudiar la convergencia de $\mathcal{F}$ en la topología de los complementos finitos.

9. Demostrar que un filtro libre en un conjunto infinito X es más fino que el filtro de los complementarios de las partes finitas de X.

10. Correspondencia entre redes filtros. Una red $(x_\lambda)_{\lambda \in \text{Ł}}$ es *universal* si para cada $E \subset X$ se verifica que existe $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que $\forall \lambda \geq \lambda_0$, $x_\lambda \in E$, o bien existe $\lambda_1 \in \text{Ł}$ tal que $\forall \lambda \geq \lambda_0$, $x_\lambda \in X - E$.

    (a) Un punto x es punto de aglomeración de una red (x_λ) sii x es punto de aglomeración del filtro generado por (x_λ).

    (b) Un punto x es punto de aglomeración de un filtro $\mathcal{F}$ sii x es punto de aglomeración de la red con base $\mathcal{F}$.

    (c) Una red (x_λ) converge a un punto x si y sólo si el filtro generado por (x_λ) converge a x.

    (d) Un filtro $\mathcal{F}$ converge a un punto x si y sólo si la red con base $\mathcal{F}$ converge a x.

    (e) La red con base un ultrafiltro es una red universal; el filtro generado por una red universal es un ultrafiltro.

11. Probar que un espacio es de Hausdorff si y sólo si todo filtro (o equivalentemente toda red) converge a lo sumo a un punto.

12. Dada una aplicación suprayectiva $f : X \to X'$ entre dos conjuntos y un filtro $\mathcal{F}$ en X', demostrar que el conjunto
$$\{f^{-1}(F) \,|\, F \in \mathcal{F}\}$$
es una base de filtro en X. Se denota por $f^{-1}(\mathcal{F})$ el filtro generado por dicha base. Para $f : \mathbb{R} \to \mathrm{Im} f$, $f(x) = x^2$, y $\mathcal{F} = \{F \subset \mathbb{R} \,|\, 0 \in F\}$, encontrar $\lim \mathcal{F}$ y $\lim f^{-1}(\mathcal{F})$ con la topología usual. Lo mismo para $\mathcal{F} = \{F \subset \mathbb{R} \,|\, 1 \in F\}$.

13. Demostrar que la intersección de los elementos de un ultrafiltro $\mathcal{U}$ de un conjunto X contiene a lo más un punto y que si
$$\textstyle\bigcap_{F \in \mathcal{U}} F = \{x\},$$
entonces $\mathcal{U} = \{A \subseteq X | x \in A\}$.

14. Dado un filtro $\mathcal{F}$ en un espacio topológico, sea $\mathcal{F}' = \{\bar{F}$ siendo $F \in \mathcal{F}\}$. ¿Qué relación hay entre $\mathcal{F}$ y el filtro $\bar{\mathcal{F}}$ generado por $\mathcal{F}'$?

    Estudiar la veracidad de la afirmación siguiente
$$x \in \lim \mathcal{F} \iff x \in \lim \bar{\mathcal{F}}.$$

15. En $\mathbb{N}$ se considera la topología $T = \{\emptyset, P, \mathbb{N}\}$ siendo $P = \{2k \,|\, k \in \mathbb{N}\}$. Encontrar en este espacio topológico los puntos límite y de acumulación de los filtros engendrados por las bases $\mathcal{B}_1 = \{C \subset \mathbb{N} \,|\, \mathbb{N} - C \text{ es finito}\}$, y $\mathcal{B}_2 = \{\{1, 3, ..., 2k+1\} \,|\, k \in \mathbb{N}\}$.

16. Sea $\mathcal{F}$ un filtro definido en un espacio métrico (X, d). Se dice que $\mathcal{F}$ es de Cauchy si para todo $\varepsilon > 0$, existe un $F \in \mathcal{F}$ tal que $d(x, y) < \varepsilon$, para cualquier par de puntos $x, y \in F$. Probar:

   i) Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy, el filtro asociado también es de Cauchy.

   ii) Si $\mathcal{F}$ es un filtro de Cauchy, entonces $\mathcal{F}$ converge a todos sus puntos de acumulación.

17. En el espacio $(\mathbb{R}, T_u)^{\mathbb{R}}$, para cada $n \in \mathbb{N}$, se considera el subconjunto

$$M_n = \left\{ f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid f(x) > -\frac{1}{n} \, \forall x \in \mathbb{R} \right\}.$$

   i) Determinar la adherencia y el interior de M_n.

   ii) Sea $\mathcal{F}$ el filtro generado por $\{M_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Determinar los puntos de aglomeración y convergencia de $\mathcal{F}$.

* * * * * * * * * * * *

Hoja 4

Axiomas de numerabilidad y separación.

1. Sea (X, d) un espacio métrico. Demostrar:
   (a) X es I AN;
   (b) X no es necesariamente II AN;
   (c) si X es compacto, entonces es también II AN (*Indicación:* Sea $\mathcal{A}_n$ un recubrimiento finito de X por bolas de radio $1/n$.)
   (d) son equivalentes: IIAN, Lindelöf y separable (probar: (i) metrizable y separable implica IIAN; (ii) metrizable y Lindelöf implica IIAN).

2. Sea $(\mathbb{R}, T_{[)})$ la *recta de Sorgenfrey*, es decir, $\mathbb{R}$ con la topología generada por la base $\{[a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$.
   (a) Probar que $(\mathbb{R}, T_{[)})$ satisface todos los axiomas de numerabilidad excepto el segundo. Probar que es normal pero no metrizable.
   (b) Probar que $(\mathbb{R}, T_{[)}) \times (\mathbb{R}, T_{[)})$ no es de Lindelöf y no es normal. Estudiar el resto de los axiomas de numerabilidad y separación.

3. Demostrar que $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ con la topología producto no satisface el I AN.

4. **Propiedades hereditarias.** Una propiedad es *hereditaria* si, siempre que un espacio satisface esa propiedad, la satisfacen también todos sus subespacios.
   (a) Los siguientes axiomas son propiedades hereditarias: I AN, II AN, Hausdorff, regular, completamente regular, metrizable.
   (b) Ser de Lindelöf y ser normal son propiedades hereditarias para subconjuntos cerrados.
   (c) Separable no es propiedad hereditaria.

5. **Propiedades multiplicativas.**

(a) Los axiomas Hausdorff, regular y completamente regular son propiedades multiplicativas respecto de productos arbitrarios.

(b) Los axiomas I AN, II AN, separable y metrizable son propiedades multiplicativas respecto de productos numerables.

(c) Ser de Lindelöf y ser normal no son propiedades multiplicativas.

6. Sea $T = \{A \subset \mathbb{R} \mid A = G - H, G \in T_u, \mathrm{card}(H) \leq \mathrm{card}(\mathbb{N})\}$, siendo T_u la topología usual de $\mathbb{R}$. Probar que T es una topología en $\mathbb{R}$ y estudiar los axiomas de numerabilidad y de separación de $(\mathbb{R}, T)$.

7. Estudiar los axiomas de separación de $(\mathbb{R}, T)$, siendo T la topología generada por $T_u \cup \mathcal{P}(\mathbb{Q})$.

8. *Plano de Moore*: Sea $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0\}$.

   - Para cada $P = (x, y)$ con $y > 0$ se considera la familia de subconjuntos $\mathcal{V}(P) = \{B(P, \epsilon) \mid 0 < \epsilon < y\}$, donde $B(P, \epsilon)$ es la bola abierta centrada en en el punto P y de radio ϵ (respecto de la distancia usual);
   - para cada $P = (x, 0)$ se considera la familia de subconjuntos $\mathcal{V}(P) = \{D(P, \epsilon) \mid \epsilon \in \mathbb{R}^+\}$, donde $D(P, \epsilon) = \{(x, 0)\} \cup \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \,|\, v > 0, (u - x)^2 + v^2 < \epsilon^2\}$.

   Sea $\mathcal{B} = \bigcup_{P \in X} \mathcal{V}(P)$ y T la topología generada por $\mathcal{B}$. Estudiar los axiomas de separación y numerabilidad del (X, T).

9. *Plano de Niemytzki*: Sea $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0\}$.

   - Para cada $P = (x, y)$ con $y > 0$ se considera la familia de subconjuntos $\mathcal{V}(P) = \{B(P, \epsilon) \mid 0 < \epsilon < y\}$;
   - para cada $P = (x, 0)$ se considera la familia de subconjuntos $\mathcal{V}(P) = \{G(P, \epsilon) \,|\, \epsilon \in \mathbb{R}^+\}$, donde $G(P, \epsilon) = \{P\} \cup B((x, \epsilon), \epsilon)$.

   Sea $\mathcal{B} = \bigcup_{P \in X} \mathcal{V}(P)$ y T la topología generada por $\mathcal{B}$. Estudiar los axiomas de separación y numerabilidad del (X, T).

10. *(Lema de Jones)* Sea (X, T) un espacio normal, tal que tiene un subconjunto denso D y un subespacio cerrado y discreto E. Probar que $\mathrm{card}(E) < 2^{\mathrm{card}(D)}$. (Ayuda: encontrar una aplicación inyectiva entre el conjunto $\mathcal{P}(E)$ de las partes de E y el conjunto $\mathcal{P}(D)$).

* * * * * * * * * * * *

1. Sea $X = [0,1] \times [0,1]$ y $\Delta = \{(x,x) \,|\, x \in [0,1]\}$ la diagonal. Para un punto $(x,y) \notin \Delta$, y $\epsilon > 0$, se considera el subconjunto

$$N_\epsilon((x,y)) = \{x\} \times (y-\epsilon, y+\epsilon) \setminus \Delta;$$

para un punto $(s,s) \in \Delta$, $\epsilon > 0$ y F un subconjunto finito de $\mathbb{R}$ se considera el conjunto

$$B(\epsilon, (s,s), F) = \{(x,y) \in X \,|\, y \in (s-\epsilon, s+\epsilon), x \notin F\}$$

(banda horizontal abierta menos una cantidad finita de rectas verticales). Se considera el espacio (X,T) donde T es la topología generada por la base

$$\mathcal{B} = \{N_\epsilon((x,y)) \,|\, x \neq y, \epsilon > 0\} \bigcup \{B(\epsilon,(s,s),F) \,|\, s \in [0,1],\, \epsilon > 0,\, F \subset \mathbb{R} \quad \text{finito}\}$$

   a) Estudiar la topología inducida en las rectas horizontales, verticales, y en la diagonal Δ.
   b) Estudiar los axiomas de numerabilidad.
   c) ¿Es (X,T) compacto?
   d) Estudiar los axiomas de separación de (X,T). Sea $A = \Delta \setminus \{(0,0)\}$ y sea $B = \{(x,0) \,|\, x > 0\}$. Estudiar si existen abiertos disjuntos que separen A y B.

2. En $\mathbb{R}^2$ se considera la topología dada por la siguiente base $\mathcal{B} = \mathcal{B}_+ \cup \mathcal{B}_- \cup \mathcal{B}_0$, donde:

$$\mathcal{B}_+ = \{D((x,y),\epsilon) \,|\, x \in \mathbb{R}, y > 0, 0 < \epsilon < y\}$$

(donde $D((x,y),\epsilon)$ es el disco abierto centrado en (x,y) y de radio ϵ);

$$\mathcal{B}_- = \{\{x\} \times (a,b) \,|\, x \in \mathbb{R}, a < b < 0\}$$

(es decir, $\mathcal{B}_-$ son intervalos verticales abiertos contenidos en el semiplano inferior);

$$\mathcal{B}_0 = \{A((a,0),\epsilon) \,|\, a \in \mathbb{R}, \epsilon > 0\},$$

donde $A((a,0),\epsilon) = \{(x,y) \,|\, y > 0, (x-a)^2 + y^2 < \epsilon\} \cup \{(a,y) \,|\, -\epsilon < y \leq 0\}$

   a) Estudiar los axiomas de numerabilidad de $(\mathbb{R}^2, T(\mathcal{B}))$ (I AN, II AN, separable y Lindelöf).
   b) Estudiar si $(\mathbb{R}^2, T(\mathcal{B}))$ es regular.
   c) Se consideran los subconjuntos $C_1 = \{(x,y) \,|\, x \leq 0, y \leq -1\}$, $C_2 = \{(x,y) \,|\, x > 0, y \leq -1\}$. ¿Existen dos abiertos disjuntos que los separen? La misma pregunta con los subconjuntos $D_1 = \{(x,y) \,|\, x \leq 0, y \leq 0\}$, $D_2 = \{(x,y) \,|\, x > 0, y \leq 0\}$.

3. *Doble círculo de Alexandroff.* Se considera el espacio (X,T) donde $X = C_1 \cup C_2$, C_i es la circunferencia de $\mathbb{R}^2$ de centro el origen y radio i, $i = 1,2$, y T es la topología generada por la base (utilizamos notación de los números complejos para los elementos de $\mathbb{R}^2$).

$$\mathcal{B} = \Big\{\{z\} \,|\, z \in C_2\Big\} \cup \Big\{V(z,\epsilon) \,|\, z \in C_1, \epsilon > 0\Big\}$$

$$V(z,\epsilon) = \Big\{w \in X \mid \mathrm{Arg}(w) \in (\mathrm{Arg}(z) - \epsilon, \mathrm{Arg}(z) + \epsilon)\Big\} - \Big\{2e^{i\mathrm{Arg}(z)}\Big\}.$$

a) ¿Es (X,T) compacto?

b) Estudiar los axiomas de separación de (X,T).

c) Estudiar los axiomas de numerabilidad.

d) Demostrar que no toda aplicación continua de C_2 (con la topología inducida de X) en $\mathbb{R}$ se puede extender a una aplicación continua de X en $\mathbb{R}$.

4. *Topología de los quesitos en* $\mathbb{R}^2$. Se considera en $\mathbb{R}^2$ la topología T generada por la base

$$\mathcal{B} = \left\{ V((a,b),\alpha,\epsilon) \,|\, (a,b) \in \mathbb{R}^2, \alpha > 1, \epsilon > 0 \right\}$$

donde $V((a,b),\alpha,\epsilon)$ es el subconjunto de los puntos (x,y) del plano que verifican

$$y - b > \alpha(x-a), \quad y - b > -\alpha(x-a),$$

cortado con la bola abierta centrada en (a,b) y de radio ϵ, y unido el punto (a,b).

a) Estudiar la topología restringida a las rectas de $\mathbb{R}^2$.

b) Estudiar los axiomas de numerabilidad.

c) Estudiar si la aplicación $f : (\mathbb{R}^2, T) \to (R, T_u)$ definida como

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad y \geq 1 \\ 1 & \text{si} \quad y < 1 \end{cases}$$

es continua.

d) Estudiar los axiomas de separación.

5. En $\mathbb{R}$ se considera la "topología del lazo" T generada por la familia

$$\begin{aligned} \mathcal{B} = &\{(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \,|\, x \neq 0, 0 < \varepsilon < |x|\} \cup \\ &\{(-\infty, -n) \cup (-\varepsilon, \varepsilon) \cup (n, \infty) \,|\, n \in \mathbb{N}, \varepsilon > 0\}. \end{aligned}$$

Demostrar que el filtro de Frechet converge a 0 en esta topología. Estudiar los axiomas de separación y numerabilidad de $(\mathbb{R}, T)$. ¿Es compacto? ¿Es metrizable? ¿Se puede encontrar un subespacio de $\mathbb{R}^2$ homeomorfo a $(\mathbb{R}, T)$?

* * * * * * * * * * * *

Hoja 6

1. *El lema de Urysohn para espacios métricos.*

a) Sea (X,d) un espacio métrico y A un subconjunto cerrado de X. Para un punto $x \in X$, definimos la distancia de x al cerrado A como $d(x,A) = \inf\{d(x,a) \,|\, a \in A\}$. Demostrar que ésto define una aplicación $d(-,A)\colon X \to \mathbb{R}$ que es continua.

b) Sea (X,d) un espacio métrico y A,B dos cerrados disjuntos de X (con la topología T_d asociada a la métrica). Demostrar que la función

$$f(x) = \frac{d(x,B) - d(x,A)}{d(x,B) + d(x,A)}$$

es una función de X en $[-1,1]$ continua y tal que $f(A) = \{1\}$, $f(B) = \{-1\}$

   c) Consideremos $X = \mathbb{R}^2$ y d la distancia euclídea, y sean $A = \{(-1,0)\}$ y $B = \{(1,0)\}$; dibujar las líneas de nivel de la función f.

2. Sea Z un espacio topológico. Si Y es un subespacio de Z, diremos que Y es un *retracto* de Z su existe una aplicación continua $r : Z \to Y$ tal que $r(y) = y$ para cada $y \in Y$.

   a) Probar que si Z es Hausdorff e Y es un retracto de Z, entonces Y es cerrado en Z.

   b) Sea A un conjunto de $\mathbb{R}^2$ consistente en dos puntos. Probar que A no es un retracto de $\mathbb{R}^2$.

   c) Sea $\mathbb{S}^1$ la circunferencia unidad de $\mathbb{R}^2$. Probar que $\mathbb{S}^1$ es un retracto de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. ¿Es también retracto de $\mathbb{R}^2$?

3. Un espacio Y se dice que tiene la *propiedad universal de la extensión* si para cada terna formada por un espacio normal X, un subconjunto cerrado A de X y una función continua $f : A \to Y$, existe una extensión de f a una aplicación continua de X en Y.

   a) Probar que $\mathbb{R}^J$ tiene la propiedad universal de la extensión.

   b) Probar que si Y es homeomorfo a un retracto de $\mathbb{R}^J$, entonces Y tiene la propiedad universal de la extensión.

4. Sea Y un espacio normal. Se dice que Y es un *retracto absoluto* si para cada par de espacios (Y_0, Z) tal que Z es normal e Y_0 es un subespacio cerrado de Z homeomorfo a Y, el espacio Y_0 es un retracto de Z.

   a) Probar que si $\mathbb{R}^J$ tiene la propiedad universal de la extensión, entonces Y es un retracto absoluto. (El recíproco también es cierto, aunque más difícil.)

   b) Probar que si Y es un retracto absoluto e Y es compacto, entonces Y tiene la propiedad universal de la extensión. (*Indicación:* Utilizando el teorema de Tychonoff se obtiene que $[0,1]^J$ es normal. Construir un embebimiento de Y en $[0,1]^J$.)

5. a) La espiral logarítmica es la adherencia C en $\mathbb{R}^2$ de la curva

$$x = e^t \cos t,\ y = e^t \operatorname{sen} t.$$

   Demostrar que la espiral logarítmica es un retracto de $\mathbb{R}^2$. ¿Se puede definir una retracción específica $r : \mathbb{R}^2 \to C$?

   b) Probar que el eje *anudado* K de la figura es un retracto de $\mathbb{R}^3$.

K 

* * * * * * * * * * * *

Hoja 7

1. Sea X un espacio con particiones continuas de la unidad para recubrimientos finitos. Probar que entonces:

   (1) Existen *funciones meseta:* para cualquier entorno abierto U de un conjunto cerrado C existe una función continua $f : X \to \mathbb{R}$ que es $\equiv 1$ en C y $\equiv 0$ fuera de U.

   (2) Se tiene extensión local por 0: toda función continua $f : U \to \mathbb{R}$ definida en un entorno U de un punto $a \in X$ se extiende a una función continua $F : X \to \mathbb{R}$ que coincide con f en un entorno de a tal vez menor $V \subset U$, y es idénticamente nula fuera de U.

2. Sea $(\mathbb{R}, T)$ el conjunto de los reales dotado de la topología cuyos abiertos son los subconjuntos de la forma $U \cup V$ donde U es un abierto de la topología usual y V un subconjunto cualquiera de irracionales. Probar que el espacio $(\mathbb{R}, T)$ es paracompacto.

3. Probar que un espacio paracompacto y Hausdorff es normal.

4. Probar que los siguientes espacios no son paracompactos:

   (a) El plano de Niemytzki.

   (b) El espacio $X = \mathbb{R}^2$ dotado de la topología cuya base está dada por discos euclídeos abiertos centrados en todos los puntos $z \in \mathbb{R}^2$, excluídos una cantidad finita de diámetros y añadido de nuevo el punto z.

5. Probar que un subespacio cerrado de un espacio paracompacto es paracompacto

* * * * * * * * * * * *

Hoja 8

1. Se consideran las siguientes sucesiones de funciones continuas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$:

   (a) $$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad |x| \geq 1/n \\ nx+1 & \text{si} \quad -1/n \leq x \leq 0 \\ -nx+1 & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1/n \end{cases}$$

   (b) $$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leq 0 \quad \text{ó} \quad x \geq 2/n \\ nx & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1/n \\ -nx+2 & \text{si} \quad 1/n \leq x \leq 2/n \end{cases}$$

   (c) $$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leq 0 \quad \text{ó} \quad x \geq 2n \\ (1/n)x & \text{si} \quad 0 \leq x \leq n \\ -(1/n)x+2 & \text{si} \quad n \leq x \leq 2n \end{cases}$$

   (d) $$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leq 0 \quad \text{ó} \quad x \geq 2n \\ (1/n^2)x & \text{si} \quad 0 \leq x \leq n \\ -(1/n^2)x+2/n & \text{si} \quad n \leq x \leq 2n \end{cases}$$

   En cada uno de los casos, estudiar si (i) la sucesión converge puntualmente; (ii) si converge uniformemente en los compactos de $\mathbb{R}$; (iii) si converge uniformemente; (iv) si la función límite es continua.

2. Sean X, Y espacios topológicos. Demostrar que (Y^X, T_{CA}) es T_1 o Hausdorff si y solamente si Y lo es.

3. Estudiar la clausura y el interior de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ con respecto de: (a) la topología producto; (b) la topología compacto-abierta; (c) la topología uniforme sobre los compactos; (d) en la topología uniforme.

   (i) El conjunto $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ de aplicaciones continuas.

   (ii) El conjunto $\mathcal{B}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ de aplicaciones acotadas (con respecto de la métrica euclídea).

4. ¿Cuáles de los siguientes subconjuntos de I^I son compactos (a) con la topología producto; (b) con la topología compacto-abierta?

   (i) $\{f \in I^I \mid f(0) = 0\}$

   (ii) $\{f \in I^I \mid f \text{ es continua y } f(0) = 0\}$

   (iii) $\{f \in I^I \mid f \text{ es diferenciable y } |f'(x)| \leq 1 \text{ para todo } x \in I\}$.

5. Estudiar si los subconjuntos $\{f_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ del ejercicio 1 tienen clausura compacta en $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ con: (a) la topología producto; (b) la topología compacto-abierta.