Grado en Matemáticas. UCM
TOPOLOGÍA ELEMENTAL

Raquel Díaz, Francisco Gallego Lupiañez, Feliciana Serrano, Jesús M. Ruiz

PROBLEMAS[1]

Lista 0. Para empezar

Número 0.1. Comprobar las leyes distributivas para la unión y la intersección de conjuntos, y las leyes de De Morgan.

Número 0.2. Sea $f : A \to B$. Sean $A_0 \subset A, B_0 \subset B$.
(a) Demostrar que $A_0 \subset f^{-1}(f(A_0))$ y que se da la igualdad si f es inyectiva.
(b) Demostrar que $f(f^{-1}(B_0)) \subset B_0$ y que se da la igualdad si f es sobreyectiva.

Número 0.3. Sea $f : A \to B$ y sean $A_1, A_2, A_l \subset A$ y $B_1, B_2, B_l \subset B$ para todo $l \in Ł$. Probar que f^{-1} conserva las inclusiones, uniones, intersecciones y las diferencias de conjuntos:
(a) Si $B_1 \subset B_2$, entonces $f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$.
(b) $f^{-1}(\bigcup_i B_i) = \bigcup_i f^{-1}(B_i)$.
(c) $f^{-1}(\bigcap_i B_i) = \bigcap_i f^{-1}(B_i)$.
(d) $f^{-1}(B_1 \setminus B_2) = f^{-1}(B_1) \setminus f^{-1}(B_2)$.
Demostrar que f conserva solamente las uniones y las inclusiones:
(e) Si $A_1 \subset A_2$, entonces $f(A_1) \subset f(A_2)$.
(f) $f(\bigcup_i A_i) = \bigcup_i f(A_i)$.
(g) $f(\bigcap_i A_i) \subset \bigcap_i f(A_i)$; se da la igualdad si f es inyectiva.
(d) $f(A_1 \setminus A_2) \supset f(A_1) \setminus f(A_2)$; se da la igualdad si $f$es inyectiva.

Número 0.4. Probar que el conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales es numerable. Probar que el intervalo $I = [0, 1]$ no es numerable, y que $\mathbb{R}$ no es numerable.

Número 0.5. *(Distancias en $\mathbb{R}^n$)* Comprobar que cada una de las siguientes es una distancia en $\mathbb{R}^n$. Estudiar cómo son las bolas en cada una de ellas.
(a) $d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$.
(b) $\rho_1(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$.
(c) $\rho_2(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, \dots, |x_n - y_n|\}$.
(Para la primera, utilizar la *desigualdad de Minkowsky*: $\sqrt{\sum (a_i + b_i)^2} \leq \sqrt{\sum a_i^2} + \sqrt{\sum b_i^2}$.)

Número 0.6. Sea $C(I)$ el conjunto de las aplicaciones continuas del intervalo $I = [0, 1]$ en $\mathbb{R}$. Probar que:
(a) $\rho(f, g) = \sup_{x \in I}\{|f(x) - g(x)|\}$ es una distancia en $C(I)$.
(b) $\sigma(f, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)|dx$ es una distancia en $C(I)$.
Estos ejemplos muestran distancias interesantes y útiles en espacios distintos de $\mathbb{R}^n$.

[1] Versión 2013.2

Número 0.7. *(Distancias acotadas)* Una distancia ρ en M es *acotada* si existe una constante A tal que $\rho(x,y) \leq A$ para todos $x, y \in M$. Probar que si ρ es una distancia cualquiera en M, entonces $\rho^*(x,y) = \min\{\rho(x,y), 1\}$ es también una distancia y es acotada.

Lista 1. Espacios topológicos

Número 1.1. Sea X un conjunto, y $\mathcal{T}_{\mathrm{CF}}$ la familia de todos los subconjuntos de X cuyo complementario es finito, más el conjunto vacío. Probar que $\mathcal{T}_{\mathrm{CF}}$ es una topología en X. Esta topología se llama, por razones evidentes, *topología de los complementarios finitos.* ¿Qué topología obtenemos si X es un conjunto finito?

Número 1.2. Sea X un conjunto infinito, y $\mathcal{T}_{\mathrm{CN}}$ la familia de todos los subconjuntos de X cuyo complementario es numerable, más el conjunto vacío. Probar que $\mathcal{T}_{\mathrm{CN}}$ es una topología en X. Esta topología se llama, por razones evidentes, *topología de los complementarios numerables.* ¿Cuándo obtenemos la topología discreta?

Número 1.3. En un conjunto X se considera la familia $\mathcal{T}$ de todos los subconjuntos con complementario infinito, vacío o todo X. Estudiar si $\mathcal{T}$ es una topología.

Número 1.4. Sea X un conjunto infinito y $\mathcal{T}$ una topología en la que todos los conjuntos infinitos son abiertos. Demostrar que $\mathcal{T}$ es la topología discreta.

Número 1.5. En un conjunto X está definida una topología $\mathcal{T}$, y se considera un subconjunto $S \subset X$. Probar que

$$\mathcal{T}' = \{\emptyset, G \cup S : \; G \in \mathcal{T}\}$$

define una topología en X. Comparar $\mathcal{T}$ y $\mathcal{T}'$.

Número 1.6. Sean $\mathcal{T}_1$ y $\mathcal{T}_2$ dos topologías en un conjunto X. Mostrar que su intersección $\mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2$ es también una topología. ¿Se puede decir lo mismo de su unión $\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$? Construir la topología menos fina que contiene a esa unión.

Número 1.7. En el plano $X = \mathbb{R}^2$ se considera la familia $\mathcal{T}$ de todos los subconjuntos U tales que para cada punto $(a,b) \in U$ existe $\varepsilon > 0$ con

$$[(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \times \{b\}] \cup [\{a\} \times (b-\varepsilon, b+\varepsilon)] \subset U.$$

Estudiar si $\mathcal{T}$ es una topología en X.

Número 1.8. En $X = \mathbb{R}^2$ se consideran los subconjuntos

$$G_t = \{(x,y) \in X : \; x > y + t\} \quad \text{con} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Demostrar que estos subconjuntos, junto con $\emptyset$ y X, son los abiertos de una topología en X. ¿Es esto mismo cierto si $t \in \mathbb{N}$?, ¿y si $t \in \mathbb{Q}$?

Número 1.9. Sea ω un elemento que no está en $\mathbb{R}$, y denotemos $X = \{\omega\} \cup \mathbb{R}$. Sea $\mathcal{T}$ la colección de todos los subconjuntos $G \subset X$ tales que: o bien (i) $\omega \notin G$, o bien (ii) $\omega \in G$ y $X \setminus G$ es finito. Estudiar si $\mathcal{T}$ es una topología en X.

Número 1.10. En el espacio $(X, \mathcal{T})$ del número 5, determinar la adherencia de un conjunto $A \subset X$ según la intersección $S \cap A$ sea o no vacía.

Número 1.11. En el conjunto finito $X = \{a, b, c, d, e\}$ se considera la topología $\mathcal{T}$ cuyos abiertos son los subconjuntos

$$\emptyset, X, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c, d\}, \{a, b, c, d\}, \{a, b, e\}.$$

Calcular la adherencia de los conjuntos $\{a\}$, $\{b\}$ y $\{c, e\}$. ¿Es denso alguno de ellos? Calcular el interior y la frontera del conjunto $\{a, b, c\}$. Determinar los sistemas de entornos de los puntos e y c.

Número 1.12. Describir el operador adherencia en un espacio con la topología discreta. ¿Qué subconjuntos son densos? ¿Cuál es la base de entornos más simple de un punto dado?

Número 1.13. Describir el operador adherencia en un espacio equipado con la topología trivial. ¿Cuáles son los subconjuntos densos? ¿Cuáles son los entornos de un punto dado?

Número 1.14. Sea X un conjunto. Definir en X una distancia que tenga asociada la topología discreta. ¿Se puede hacer lo mismo para la topología trivial?

Número 1.15. La topología *usual* $\mathcal{T}_u$ en un espacio afín $\mathbb{R}^n$ es por definición la asociada a la métrica euclídea. En el caso de la recta $X = \mathbb{R}$, esa topología se obtiene tomando como base la colección de los intervalos abiertos. Usando otros intervalos se pueden definir topologías diferentes. Por ejemplo, se puede tomar como base la colección de los intervalos semiabiertos por la derecha $[a, b)$ (resp. por la izquierda $(a, b]$), y obtener una topología $\mathcal{T}_{[,)}$ (resp. $\mathcal{T}_{(,]}$). Comparar esas topologías entre sí y con la usual.

Número 1.16. En $\mathbb{R}^2$ se considera la familia $\mathcal{B}$ de todos los subconjuntos

$$B((x, y), \varepsilon) = [(x, x + \varepsilon) \times (y, y + \varepsilon)] \cup \{(x, y)\}, \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \varepsilon > 0.$$

(a) Demostrar que $\mathcal{B}$ es base de una topología $\mathcal{T}$ en $\mathbb{R}^2$.
(b) Estudiar la relación de esta topología con la topología usual $\mathcal{T}_u$ del plano.
(c) Hallar el interior de $[0, 1] \times [0, 1]$ y la adherencia de $(0, 1) \times (0, 1)$ en $\mathcal{T}$ y en $\mathcal{T}_u$.

Número 1.17. En $\mathbb{R}^2$ se considera la topología $\mathcal{T}$ del número 8. ¿Son las rectas cerrados de esta topología? Si no lo son, ¿cuál es su adherencia? Calcular:
(a) Las adherencias de los cuadrantes $A : x \geq 0, y \leq 0$ y $B : x \geq 0, y \geq 0$,
(b) El interior y la adherencia del conjunto $\{x > y\} \cup \{x > -y\}$.
(c) ¿Tiene algún punto (x, y) algún entorno cerrado distinto de todo el plano?

Número 1.18. Sea d la distancia euclídea en el plano $\mathbb{R}^2$. Se definen otras dos distancias mediante

$$D(P, Q) = \begin{cases} 0 & \text{si } P = Q, \\ d(O, P) + d(O, Q) & \text{si no,} \end{cases} \qquad \text{y}$$

$$\delta(P, Q) = \begin{cases} d(P, Q) & \text{si } O, P \text{ y } Q \text{ están alineados,} \\ d(O, P) + d(O, Q) & \text{si no,} \end{cases}$$

donde O es el origen, y una tercera

$$\rho(P, Q) = \begin{cases} |y_1 - y_2| & \text{si } x_1 = x_2, \\ |y_1| + |x_1 - x_2| + |y_2| & \text{si no,} \end{cases}$$

donde $P=(x_1,y_1)$ y $Q=(x_2,y_2)$. Se consideran entonces las cuatro topologías del plano asociadas a las cuatro métricas d, D, δ, ρ. Hallar en todas ellas el interior y la adherencia de:

(a) Una recta,
(b) $[0,1)\times[0,1)$,
(c) $[0,1]\times[0,1]$, y
(d) $[1,2]\times[1,2]$.

Número 1.19. Sea $\mathfrak{T}$ la topología de la recta real $\mathbb{R}$ cuyos abiertos no vacíos son los subconjuntos $U\subset\mathbb{R}$ que contienen todos los números enteros $k\geq 1$ (esto es, $1,2,3,\ldots\in U$).

(a) ¿Tiene cada punto un entorno mínimo?
(b) Describir las operaciones de clausura e interior.

Número 1.20. Se consideran en el plano $\mathbb{R}^2$ los *triángulos semiabiertos* de vértice $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ y anchura $\varepsilon>0$ definidos por

$$U=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x-y\geq a-b,\ x+y\geq a+b,\ a\leq x<a+\varepsilon\},$$

y equipamos $\mathbb{R}^2$ con la topología $\mathfrak{T}$ que tiene todos esos triángulos por base de abiertos. Calcular la adherencia (en $\mathfrak{T}$) de un triángulo semiabierto U.

Número 1.21. Un subconjunto W del plano $\mathbb{R}^2$ se llama *radialmente abierto* si para cada punto $p\in W$ y cada recta L que pase por el punto, $W\cap L$ contiene un intervalo abierto centrado en p. Probar que los conjuntos radialmente abiertos son los abiertos de una topología $\mathfrak{T}$ en $\mathbb{R}^2$. ¿Qué relación tiene con la usual? Estudiar que topología induce $\mathfrak{T}$ en las circunferencias y en las rectas.

Lista 2. Aplicaciones continuas

Número 2.1. Sean $(X,\mathfrak{T}),(X',\mathfrak{T}')$ dos espacios topológicos y $f:X\to X'$ una aplicación. Probar que f es continua si y sólo si existe una base $\mathcal{B}'$ de $\mathfrak{T}'$ tal que $f^{-1}(B')\in\mathfrak{T}$ para cada $B'\in\mathcal{B}'$. Enunciar y probar el resultado análogo para subbases.

Número 2.2. Sea $(X,\mathfrak{T})$ un espacio topológico, $A\subset X$ y $\chi_A:(X,\mathfrak{T})\to(\mathbb{R},\mathfrak{T}_u)$ la correspondiente función característica:

$$\chi_A(x)=\begin{cases}1 & \text{si } x\in A,\\ 0 & \text{si } x\notin A.\end{cases}$$

Probar que χ_A es continua en $a\in X$ si y sólo si $a\notin \operatorname{Fr}(A)$.

Número 2.3. Probar que si un espacio topológico $(X,\mathfrak{T})$ tiene la propiedad de que todas las aplicaciones $f:(X,\mathfrak{T})\to(\mathbb{R},\mathfrak{T}_u)$ son continuas, entonces $\mathfrak{T}$ es la topología discreta.

Número 2.4. Sean $f:(X,\mathfrak{T})\to(X',\mathfrak{T}')$ y $g:(X',\mathfrak{T}')\to(X'',\mathfrak{T}'')$ aplicaciones continuas cuya composición $g\circ f$ es un homeomorfismo. Probar que si g es inyectiva (resp. f es suprayectiva), entonces f y g son homeomorfismos.

Número 2.5. Se considera la aplicación

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto \left(\frac{t}{1+t^4}, \frac{t^3}{1+t^4} \right),$$

y se denota $X = f(\mathbb{R})$. Se equipan $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^2$ con las topología usuales, y $X \subset \mathbb{R}^2$ con la topología relativa $\mathcal{T} = \mathcal{T}_u|X$. Mostrar que $f : (\mathbb{R}, T_u) \to (X, \mathcal{T})$ es una aplicación continua y biyectiva, pero no un homeomorfismo.

Número 2.6. Describir los homeomorfismos entre espacios con la topología de los complementos finitos. ¿Y con la topología de los complementos numerables?

Número 2.7. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la aplicación dada por $f(x) = x^2$. Estudiar si f es continua con las siguientes topologías:

$$\mathcal{T}_u \to \mathcal{T}_{\mathrm{CF}}, \quad \mathcal{T}_u \to \mathcal{T}_{\mathrm{CN}}, \quad \mathcal{T}_{\mathrm{CF}} \to \mathcal{T}_u, \quad \mathcal{T}_{\mathrm{CF}} \to \mathcal{T}_{\mathrm{CF}}, \quad \mathcal{T}_{[,)} \to \mathcal{T}_u, \quad \mathcal{T}_u \to \mathcal{T}_{[,)}, \quad \mathcal{T}_{[,)} \to \mathcal{T}_{[,)}.$$

(Estas topologías se definieron en la lección anterior.)

Número 2.8. Demostrar que si una aplicación $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua para $\mathcal{T}_u \to \mathcal{T}_{[,)}$ y también para $\mathcal{T}_u \to \mathcal{T}_{(,]}$, entonces es una aplicación constante.

Número 2.9. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ la aplicación $f(x) = (x, x^2)$. Estudiar si es continua para las siguientes topologías:

$$\mathcal{T}_u \to \mathcal{T}_\rho \text{ (número 1.18)}, \quad \mathcal{T}_u \to \mathcal{T} \text{ (número 1.16)}, \quad \mathcal{T}_{\mathrm{CN}} \to \mathcal{T}_u, \quad \mathcal{T}_{[,)} \to \mathcal{T}.$$

Número 2.10. Se equipa $\mathbb{R}^2$ con la topología $\mathcal{T}_\rho$. Estudiar la continuidad de:
(a) Las traslaciones $\tau : (\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_\rho) \to (\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_\rho)$.
(b) Los giros $\theta : (\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_\rho) \to (\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_\rho)$.
(c) Las simetrías $\sigma : (\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_\rho) \to (\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_\rho)$ respecto de una recta .

Número 2.11. Lo mismo que en el número anterior, reemplazando la topología $\mathcal{T}_\rho$ por la topología $\mathcal{T}_\delta$ del número 1.18.

Número 2.12. Se considera la aplicación $\mathbb{R} \to \mathbb{Z} : x \mapsto [x] =$ parte entera de x. Estudiar qué topologías en $\mathbb{Z}$ hacen continua esta aplicación, cuando en $\mathbb{R}$ se considera la topología usual.

Número 2.13. Definir homeomorfismos:
(a) Entre un triángulo equilátero y un disco cerrado, que transforme el borde del triángulo en la circunferencia, y los tres vértices del triángulo en tres puntos prefijados de la misma.
(b) Entre un cuadrado y un disco cerrado, que transforme el borde del cuadrado en la circunferencia y los cuatro vértices del cuadrado en cuatro puntos prefijados de la misma.
Extender las construcciones a polígonos planos más generales, no necesariamente regulares ni convexos.

Número 2.14. Demostrar que la topología $\mathcal{T}$ de los conjuntos *radialmente abiertos* del plano (1.21) es la topología que cumple las dos condiciones siguientes:
(1) Induce en las rectas del plano la topología usual.
(2) Una aplicacion $f : \mathbb{R}^2 \to X$ es continua si lo son todas sus restricciones a rectas.

Estudiar la cotinuidad de la función $f(x,y) = \frac{x^2y}{y^2+x^4}$ respecto de esta topología *radial* y respecto de la topología usual.

Lista 3. Construcción de topologías

Número 3.1. Demostrar que si Y es un subespacio de X y Z uno de Y, entonces la topología de Z como subespacio de Y es la misma que como subespacio de X.

Número 3.2. Sea $\mathcal{B}$ una base de una topología en X y $A \subset X$. Demostrar que los conjuntos $B \cap A$ forman una base de la topología relativa de A.

Número 3.3. En $\mathbb{R}^2$ se consideran las topologías $\mathcal{T}_D$, $\mathcal{T}_\delta$ y $\mathcal{T}_\rho$ asociadas a las métricas D, δ y ρ del número 1.18. Describir la topología inducida por cada una de esas tres en una recta de $\mathbb{R}^2$.

Lo mismo para la topología $\mathcal{T}$ del número 1.8.

Número 3.4. Sea $\mathcal{T}$ la topología del plano $\mathbb{R}^2$ definida en el número 1.16. Hallar la topología inducida por $\mathcal{T}$: (i) en la recta $r : x = 0$, y (ii) en la recta $s : x = y$.

Número 3.5. Estudiar si alguna de las topologías del plano $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ definidas en los dos números anteriores es el producto de dos topologías en $\mathbb{R}$.

Número 3.6. Sea $(X_i, \mathcal{T}_i), i \in I$, una colección de espacios topológicos y consideremos subconjuntos $A_i \subset X_i, i \in I$. Probar que la topología producto de las relativas $\mathcal{T}_i|A_i$ coincide con la topología relativa $\prod_i \mathcal{T}_i| \prod_i A_i$.

Número 3.7. Sean X e Y espacios topológicos, y $A \subset X$, $B \subset Y$ subconjuntos suyos. Se equipa $X \times Y$ con la topología producto. Demostrar que entonces:

(a) $\overset{\circ}{\overbrace{A \times B}} = \overset{\circ}{A} \times \overset{\circ}{B}$.
(b) $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$.
(c) $\operatorname{Fr}(A \times B) = \big(\overline{A} \times \operatorname{Fr}(B)\big) \cup \big(\operatorname{Fr}(A) \times \overline{B}\big)$.

Número 3.8. Sea $(X_i, \mathcal{T}_i), i \in I$, una colección de espacios topológicos y para cada $i \in I$ sea $A_i \subset X_i$. Probar que $\prod_i A_i$ es denso en $\prod_i X_i$ (con la topología producto) si y sólo si cada A_i es denso en X_i.

Número 3.9. Se considera en $X = \mathbb{R} \times \mathbb{Z}$ la topología $\mathcal{T}$ producto de la usual $\mathcal{T}_u$ en $\mathbb{R}$ y la de los complementos finitos $\mathcal{T}_{\mathrm{CF}}$ en $\mathbb{Z}$. Estudiar la continuidad de la aplicación $f : (X, \mathcal{T}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T}_u) : (t,k) \mapsto t - k$.

Número 3.10. Se consideran en el plano $\mathbb{R}^2$ la topología $\mathcal{T}$ de 1.20. ¿Existe alguna topología $\mathcal{T}_1$ en $\mathbb{R}$ tal que $\mathcal{T}$ sea la topología producto $\mathcal{T}_1 \times \mathcal{T}_1$? ¿Y tal que $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T})$ sea *homeomorfo* a $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_1 \times \mathcal{T}_1)$?

Número 3.11. En $\mathbb{R}^2$ se consideran las rectas $r : y = 0$, $s : y = 1$ y $t : x = 0$, su unión $M = r \cup s \cup t$, y el segmento $A : x = 0, 0 \le y \le 1$. En M se define la relación de equivalencia R que identifica todos los puntos de A. Ahora se equipa $\mathbb{R}^2$ con la topología usual y el conjunto cociente M/R con la topología cociente. Sea $p: M \to M/R$ la aplicación canónica. Estudiar si $p(t)$ es entorno de $p(A)$ en M/R, y determinar un subconjunto $E \subset M$ tal que $p(E)$ lo sea.

Número 3.12. En $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$ se considera la relación de equivalencia siguiente:

$$xRy \quad \text{si y sólo si} \quad x, y \in \mathbb{Q} \quad (\text{o} \quad x = y).$$

Por otra parte, en $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_u)$ se define análogamente:

$$(x, y)S(x', y') \quad \text{si y sólo si} \quad (x, y), (x', y') \in \mathbb{Q}^2 \quad (\text{o} \quad (x', y') = (x', y')).$$

¿Son homeomorfos el cociente $\mathbb{R}^2/S$ y el producto $\mathbb{R}/R \times \mathbb{R}/R$?

Número 3.13. En $\mathbb{R}$ con la topología usual se define la relación de equivalencia: xRy si y sólo si $x - y$ es un entero. Demostrar que el espacio cociente $\mathbb{R}/R$ es homeomorfo a la circunferencia $\mathbb{S}^1 : x^2 + y^2 = 1$ con la topología relativa como subconjunto de $\mathbb{R}^2$.

Número 3.14. Demostrar que la recta proyectiva real es homeomorfa a la circunferencia $\mathbb{S}^1$.

Número 3.15. Demostrar que el plano proyectivo es homeomorfo al espacio cociente obtenido del disco cerrado unidad del plano identificando cada dos puntos antipodales de su borde.

Número 3.16. Describir cómo la esfera unidad $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ puede obtenerse como espacio cociente del disco cerrado unidad del plano.

Número 3.17. Explicar cómo el disco cerrado unidad del plano puede obtenerse como cociente de un cilindro $\mathbb{S}^1 \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^3$.

Número 3.18. Explicar cómo puede obtenerse la esfera $\mathbb{S}^2$ mediante un cociente de la suma de dos discos cerrados.

Número 3.19. Describir el plano proyectivo como cociente de la suma topológica de un disco cerrado del plano y una banda de Möbius con borde.

Número 3.20. Sea $M \subset \mathbb{R}^3$ el tronco de cilindro $\{x^2 + y^2 = 1, -2 \leq z \leq 2\}$, y sean $E, F \subset X$ las dos circunferencias $\{x^2 + y^2 = 1, z = 1\}$, $\{x^2 + y^2 = 1, z = -1\}$. En M se considera la relación de equivalencia

$$p = (x, y, z) \sim p' = (x', y'.z') \quad \text{si y sólo si} \quad p = p' \quad \text{o} \quad z = z' = +1 \quad \text{o} \quad z = z' = -1.$$

Encontrar un subespacio de $\mathbb{R}^3$ homomorfo al espacio cociente $M/\sim$.

Número 3.21. Sea $S \subset \mathbb{R}^2$ el conjunto

$$\{(x, y) : -1 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1\}.$$

En S se considera la relación de equivalencia definida por las relaciones

$$(x, y) \sim (x, y); \quad (1, y) \sim (0, y); \quad (x, 1) \sim (x', 1) \text{ para } 0 \leq x, x' \leq 1.$$

Encontrar un subespacio de $\mathbb{R}^3$ homeomorfo al espacio cociente $X = S/\sim$.

Número 3.22. Sea $H \subset \mathbb{R}^2$ el rectángulo cerrado con vértices $(-1,1),(-1,-1),(1,-1)$ y $(1,1)$, y consideremos en él las dos relaciones de equivalencia definidas por

$$\begin{aligned} \mathcal{R} &: (x,1) \sim (x,-1), \quad (x,0) \sim (0,0), \\ \mathcal{S} &: (x,1) \sim (-x,-1), \quad (x,0) \sim (0,0). \end{aligned}$$

Describir subespacios de $\mathbb{R}^3$ homeomorfos a los espacios cocientes $X = H/\mathcal{R}$ e $Y = H/\mathcal{S}$. ¿Son X e Y homeomorfos?

Número 3.23. Sea $H \subset \mathbb{R}^2$ un hexágono regular cerrado con dos vértices opuestos en $(0,1)$ y $(0,-1)$, y consideremos la relación de equivalencia

$$(x,y) \sim (x,y) \;\text{ y }\; (0,1) \sim (0,-1).$$

Encontrar un subespacio de $\mathbb{R}^3$ homeomorfo al espacio cociente $H/\sim$.

Número 3.24. Se consideran en $\mathbb{R}^2$ los conjuntos

$$S = \{x^2 + y^2 \leq 1\} \cup \{1 \leq x \leq 2, y = 0\} \quad \text{y} \quad T = \{x^2 + y^2 = 1\} \cup \{(2,0)\},$$

equipados con la topología usual. En S se identifican entre sí todos los puntos de T (y nada más), y se denota X el espacio cociente resultante. Describir un subespacio de $\mathbb{R}^3$ homeomorfo a ese espacio cociente X.

Lista 4. Separación

Número 4.1. Definir en $\mathbb{R}$ una topología que no sea Kolmogoroff ($= T_0$). Hágase de manera que difiera de la usual sólo en los entornos de dos puntos, que sean los únicos que no puedan separarse entre sí.

Número 4.2. En un espacio topológico X se denota $y \to x$ la *relación de especialización* $x \in \overline{\{y\}}$, Definir una topología no trivial en un conjunto con dos puntos $x \neq y$, tal que la única especialización existente sea $y \to x$. Estudiar las propiedades de separación del espacio en cuestión.

Número 4.3. Mostrar con un ejemplo que una topología de Fréchet ($= T_1$) puede no ser Hausdorff ($= T_2$).

Número 4.4. Se equipa $\mathbb{R}$ con la topología $\mathcal{T}_{\text{CF}}$ (cuyos abiertos no vacíos son los conjuntos con complementario finito). Estudiar las propiedades de separación de este espacio.

Número 4.5. Se considera la aplicación $\mathbb{R} \to \mathbb{Z} : x \mapsto [x] =$ parte entera de x y se equipa $\mathbb{Z}$ con la topología final correspondiente a la usual en $\mathbb{R}$. Estudiar qué puntos de $\mathbb{Z}$ se pueden separar de cuáles, y qué axiomas de separación se cumplen en $\mathbb{Z}$ con esa topología final.

Número 4.6. Mostrar que el cociente de un espacio Hausdorff puede no ser ni siquiera Kolmogoroff.

Número 4.7. Probar que un espacio es Fréchet si y sólo si cada punto es la intersección de todos sus entornos.

Número 4.8. Estudiar si el intervalo abierto $X = (-1, 1)$ es Hausdorff con la topología cuyos cerrados $(\neq \emptyset, X)$ son los intervalos cerrados $[a, b]$ con $-1 < a \leq 0 \leq b < 1$.

Número 4.9. Se equipa el conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales con la topología cuyos abiertos son los conjuntos E que cumplen la siguiente condición: *si* $2n + 1 \notin E$*, entonces* $2n, 2n + 2 \notin E$. Estudiar si resulta ser un espacio Hausdorff.

Número 4.10. Estudiar las propiedades de separación de los espacios $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$, $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\mathrm{CF}})$ y $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{[,)})$. Utilizar el resultado para distinguirlos topológicamente.

Número 4.11. En $\mathbb{R}^2$ se considera la colección $\mathcal{B}$ de todos los subconjuntos

$$V(a, b) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq a,\ y \leq b\}.$$

Demostrar que $\mathcal{B}$ es efectivamente base de una topología, y estudiar sus propiedades de separación.

Número 4.12. Sea $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$ una aplicación continua para la topología usual de la circunferencia $\mathbb{S}^1$ y la de la recta afín $\mathbb{R}$. Mostrar que la topología $\mathcal{T}$ imagen inversa de f no es T_0.

Lista 5. Numerabilidad

Número 5.1. Se considera en la recta $\mathbb{R}$ la topología $\mathcal{T}_{\mathrm{CF}}$ de los complementarios finitos. Estudiar:

(1) Si converge la sucesión $(n)_{n\geq 1}$, y a qué puntos. Lo mismo para las sucesiones

$$1, 2, 3, 1, 4, 5, 1, 6, 7, 1, \dots \qquad \text{y} \qquad 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, \dots$$

(2) Si se puede formular una regla para saber cuándo una sucesión converge, y a qué puntos.

Número 5.2. Estudiar los axiomas de numerabilidad del plano $\mathbb{R}^2$ equipado con la topología de 1.7.

Número 5.3. En $X = (-1, 1)$ se considera la topología de 4.8. Se pide:

(1) Encontrar una sucesión que converja a todos los puntos del espacio, y un punto al que converjan todas las sucesiones. Mostrar que ese punto es único, y encontrar una sucesión que sólo converja a ese punto.

(2) ¿Existe una sucesión convergente (resp. no convergente) en la topología usual de la recta, y que no lo haga (resp. sí lo haga) en esta topología $\mathcal{T}$?

(3) Estudiar las propiedades de numerabilidad de esta topología $\mathcal{T}$.

Número 5.4. Estudiar los axiomas de numerabilidad de un espacio discreto.

Número 5.5. En un conjunto E se fija un punto $p \in E$, y se considera la topología cuyos abiertos no vacíos son los conjuntos que contienen dicho punto p. Estudiar los axiomas de numerabilidad de esa topología.

Número 5.6. Estudiar los axiomas de numerabilidad de $\mathbb{R}$ con la topología
(1) de los intervalos semiabiertos $[a, b)$,
(2) de los complementarios finitos,
(3) de los rayos $[a, \rightarrow)$.

Número 5.7. Se equipa la recta real $\mathbb{R}$ con la topología descrita por las siguientes bases de entornos:
(i) Para los puntos $a \neq 0$ los intervalos abiertos, y
(ii) Para $a = 0$ los conjuntos

$$(\leftarrow, -n) \cup (-\tfrac{1}{n}, \tfrac{1}{n}) \cup (n, \rightarrow), \quad n \geq 1.$$

Estudiar los axiomas de numerabilidad de esta topología.

Número 5.8. Demostrar que el plano $\mathbb{R}^2$ con la topología de 1.8 cumple el axioma 2º de numerabilidad.

Número 5.9. Se equipa el espacio $\mathbb{R}^n$ con la topología generada por los conjuntos $G = B \setminus A$, donde B es una bola abierta y A un conjunto numerable. Estudiar para esta topología:
(i) Las sucesiones convergentes.
(ii) Los axiomas de numerabilidad.

Número 5.10. Estudiar las propiedades de numerabilidad del plano $\mathbb{R}^2$ equipado con la topología $\mathcal{T}$ definida en 1.16.

Número 5.11. Estudiar los axiomas de numerabilidad del plano $\mathbb{R}^2$ equipado con la topología de 4.11.

Número 5.12. Se consideran en $\mathbb{R}^2$ las topologías $\mathcal{T}_D$, $\mathcal{T}_\delta$ y $\mathcal{T}_\rho$ asociadas a las métricas definidas en 1.18. Demostrar que ninguna de ellas cumple el axioma 2º de numerabilidad.

Número 5.13. Probar que en un espacio metrizable el Axioma 2º de numerabilidad, la separabilidad y ser Lindelöf son propiedades equivalentes.

Número 5.14. Estudiar los axiomas de numerabilidad de la esfera, del toro, de la recta proyectiva, del plano proyectivo y de la botella de Klein.

Número 5.15. Sea $\mathcal{T}$ la topología de la recta real $\mathbb{R}$ cuyos abiertos no vacíos son los subconjuntos $U \subset \mathbb{R}$ que contienen todos los números enteros $k \geq 1$ (esto es, $1, 2, 3, \ldots \in U$) (ver 1.19) Describir las sucesiones convergentes de esta topología y sus límites.

Número 5.16. Estudiar si el plano $\mathbb{R}^2$ con la topología $\mathcal{T}$ de 1.20 es un espacio de Lindelöf.

Número 5.17. Estudiar los axiomas de numerabilidad del plano $\mathbb{R}^2$ la topología $\mathcal{T}$ de los conjuntos *radialmente abiertos* (1.21).

Número 5.18. En el plano $\mathbb{R}^2$ se considera la topología $\mathcal{T}$ de la que una base consiste en los cuadrados abiertos de centro un punto arbitario $p \in \mathbb{R}^2$ y lado arbitrario $\varepsilon > 0$, menos los puntos $\neq p$ de las dos diagonales. Probar que esta topología es primer axioma de numerabilidad. ¿Es además separable? ¿Y segundo Axioma?

Número 5.19. Se considera en el semiplano $\mathbb{H} : y \geq 0$ de $\mathbb{R}^2$ la topología $\mathcal{T}$ generada por los discos abiertos de centros (a, b) con $b > 0$, y los "semidiscos"

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{H} : (x - a)^2 + y^2 < \varepsilon,\ y > 0\} \cup \{(a, 0)\}.$$

Estudiar los axiomas de numerabilidad de esta topología.

Lista 6. Compacidad

Número 6.1. Probar que en un espacio T_2 una intersección arbitraria de conjuntos compactos es compacto.

Número 6.2. Equipamos el conjunto $X = [0, 1] \cup \{2\}$ con la topología que coincide con la usual en $[0, 1]$, y tiene por base de entornos de 2 los conjuntos $(a, 1) \cup \{2\}$ con $0 < a < 1$. Estudiar si este espacio es compacto. Encontrar dos subconjuntos compactos cuya intersección no lo sea.

Número 6.3. Estudiar los subconjuntos compactos de T_{CF} y de T_{CN}.

Número 6.4. Mostrar con un ejemplo que la adherencia de un conjunto compacto no tiene por qué serlo.

Número 6.5. Se consideran en $\mathbb{R}^2$ las topologías $\mathcal{T}_D$, $\mathcal{T}_\delta$ y $\mathcal{T}_\rho$ asociadas a las métricas definidas en 1.18. Estudiar qué bolas cerradas son compactas.

Número 6.6. Caracterizar los subconjuntos compactos de $\mathbb{R}$ con la topología de los rayos $(a, \rightarrow)$,

Número 6.7. Sea C el subconjunto de $I = [0, 1]$ construido como sigue. Se toma primero $A_1 = I \setminus (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, luego $A_2 = A_1 \setminus (\frac{1}{9}, \frac{2}{9}) \cup (\frac{7}{9}, \frac{8}{9})$, y en general A_n se obtiene suprimiendo los intervalos abiertos centrales de la división en tres partes de cada intervalo de A_n. El conjunto $\bigcap_n A_n$ se llama *conjunto de Cantor*. Mostrar que es compacto.

Número 6.8. En $\mathbb{R}^2$ se considera la topología cuyos abiertos no vacíos son los complementarios de los compactos usuales. Estudiar si el semiplano $x \geq 0$ es compacto. ¿Y todo el plano $\mathbb{R}^2$?

Número 6.9. En $\mathbb{R}$ se considera la topología del número 5.7. Demostrar que con esta topología $\mathbb{R}$ es un espacio compacto homeomorfo a la unión de dos circunferencias tangentes en un punto.

Número 6.10. Se considera en $\mathbb{R}$ la topología usual. Demostrar que si un subconjunto $A \subset \mathbb{Q}$ tiene algún punto adherente irracional, entonces A no es compacto. Deducir que $\mathbb{Q}$ no es localmente compacto (con la topología usual).

Número 6.11. Sea $f : X \rightarrow Y$ una identificación abierta. Demostrar que si X es localmente compacto y Hausdorff, también lo es Y.

Número 6.12. Demostrar el teorema de Baire: En un espacio localmente compacto, una intersección numerable de abiertos densos es densa a su vez.

Número 6.13. Encontrar contraejemplos al teorema de Baire: (i) si la intersección no es numerable, (ii) si los conjuntos densos que se intersecan no son abiertos, (iii) Si el espacio no es Haussdorff.

Número 6.14. Estudiar con qué topologías de las que han ido apareciendo en estos problemas es la recta $\mathbb{R}$ un espacio localmente compacto.

Número 6.15. Se equipa el plano $\mathbb{R}^2$ con la topología de 1.16 (resp. la de 4.11). Estudiar si es un espacio localmente compacto.

Número 6.16. Probar que si dos espacios localmente compactos y T_2 son homeomorfos, entonces lo son sus compactificaciones de Alexandroff.

Número 6.17. Equipar la circunferencia $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2$ con una topología de modo que resulte ser la compactificación de Alexandroff de $\mathbb{R}$ con la topología discreta.

Número 6.18. Se equipa el conjunto $X = (-1,0) \cup (0,1) \subset \mathbb{R}$ con la topología usual. Hallar su compactificación de Alexandroff.

Número 6.19. Encontrar todos los subconjuntos compactos del espacio afín $\mathbb{R}^n$ equipado con la topología de 5.9.

Número 6.20. Se considera en $X = \mathbb{R} \times \mathbb{Z}$ la topología $\mathcal{T}$ producto de la usual $\mathcal{T}_u$ en $\mathbb{R}$ y la de los complementos finitos $\mathcal{T}_{\mathrm{CF}}$ en $\mathbb{Z}$ (ver 3.9). Probar que:

(a) Si $M \subset X$ es compacto, entonces:

(i) $M \cap (\mathbb{R} \times \{k\})$ es compacto para cada $k \in \mathbb{Z}$, y

(ii) existe $L > 0$ tal que $|t| \leq L$ para todo $(t,k) \in M$.

(b) El conjunto

$$M = \{(1,0)\} \cup \bigcup_{k \geq 1} [0, 1 - \tfrac{1}{k}] \times \{k\}$$

es compacto. ¿Es cerrado?

Número 6.21. Sea $\mathcal{T}$ la topología de la recta real $\mathbb{R}$ de 1.19. Mostrar que $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ no es compacto. ¿Es localmente compacto?

Número 6.22. Estudiar si el plano $\mathbb{R}^2$ con la topología $\mathcal{T}$ de 1.20 es un espacio localmente compacto.

Número 6.23. Estudiar si el plano $\mathbb{R}^2$ la topología $\mathcal{T}$ de los conjuntos *radialmente abiertos* (1.21) es un espacio locamente compacto.

Número 6.24. En el plano $\mathbb{R}^2$ se considera la topología $\mathcal{T}$ de 5.18. Demostrar que en esta topología un cuadrado cerrado no es compacto, y deducir que los conjuntos compactos tiene interior vacío. ¿Es el plano con esta topología localmente compacto?

Número 6.25. Se considera en el semiplano $\mathbb{H} : y \geq 0$ de $\mathbb{R}^2$ la topología $\mathcal{T}$ de 5.18. Decidir qué cuadrados $[a - \varepsilon, a + \varepsilon] \times [b - \varepsilon, b + \varepsilon]$ son compactos, y utilizarlo para determinar si $\mathbb{H}$ es localmente compacto con esta topología.

Lista 7. Conexión

Número 7.1. Probar que un espacio X es conexo si y sólo si cada subconjunto propio no vacío de X tiene frontera no vacía.

Número 7.2. Estudiar si son homeomorfos los intervalos $(0,1)$ y $[0,1)$.

Número 7.3. Estudiar si una circunferencia es homeomorfa a la unión de dos circunferencias tangentes en un punto.

Número 7.4. Demostrar que los puntos son los únicos subconjuntos conexos de $\mathbb{Q}$ con la topología usual.

Número 7.5. Equipamos el intervalo $X = (0,1)$ con la topología cuyos abiertos $\neq \emptyset, X$, son los conjuntos $\big(0, 1 - \frac{1}{n}\big)$, $n \geq 1$. Estudiar si es un espacio conexo.

Número 7.6. En el conjunto $\mathbb{Z}$ de los números enteros se considera la topología generada por $\{0\}$ y los conjuntos con complementario finito. ¿Es $\mathbb{Z}$ con ella un espacio conexo?

Número 7.7. Sea $\theta \in \mathbb{R}$ un número irracional, y $X = \mathbb{Q} \cup \{\theta\}$. Se considera en X la topología cuyos abiertos son los subconjuntos abiertos de $\mathbb{Q}$ para la topología usual, y los subconjuntos de X con complementario finito. Estudiar si X con esta topología es un espacio conexo.

Número 7.8. Se considera en $\mathbb{R}$ la topología del número 5.7. Estudiar si es un espacio conexo.

Número 7.9. En $\mathbb{R}^2$ se consideran las métricas D, δ y ρ de 1.18. Estudiar para cuáles de las topologías asociadas es $\mathbb{R}^2$ conexo.

Número 7.10. Demostrar que en $\mathbb{R}^2$ con la topología usual, los complementos de conjuntos numerables son conexos.

Número 7.11. Consideramos en $\mathbb{R}^2$ la topología de 1.8. Demostrar que la unión de dos rectas es un conjunto conexo. ¿Tiene $\mathbb{R}^2$ algún subconjunto no conexo?

Número 7.12. Estudiar si es conexo el plano $\mathbb{R}^2$ con las topologías de 1.16, 5.9, y 6.8.

Número 7.13. Se considera el siguiente subespacio del plano $\mathbb{R}^2$ con la topología usual:

$$X = \{(1,0),(0,0)\} \cup \bigcup_{n \neq 1} \{(x, \tfrac{1}{n}) : x \in \mathbb{R}\}.$$

Determinar si X es localmente conexo, y hallar sus componentes conexas.

Número 7.14. En $\mathbb{R}^2$ sea

$$X = \{(x,0) : \tfrac{1}{2} < x \leq 1\} \cup \bigcup_{n \geq 1} A_n,$$

donde

$$A_n = \{(x,y) : ny = x, 0 \leq x \leq 1\}.$$

Probar que X y $\overline{X}$ son conexos, pero no localmente conexos.

Número 7.15. Sea $X \subset \mathbb{R}^2$ el grafo de la función $y = \operatorname{sen}\big(\frac{1}{x}\big)$ para $0 < x \leq 1$, y sea $\widetilde{X} = X \cup \{(0,0)\}$. Estudiar si $\widetilde{X}$ es conexo, y si es localmente conexo.

Número 7.16. Se considera en $X = \mathbb{R} \times \mathbb{Z}$ la topología de 3.9: el producto de la usual $\mathcal{T}_u$ en $\mathbb{R}$ y la de los complementos finitos $\mathcal{T}_{\mathrm{CF}}$ en $\mathbb{Z}$. Estudiar si una unión finita

$$[0,1] \times \{k_1\} \cup \cdots \cup [0,1] \times \{k_r\}$$

es un conjunto conexo. ¿Y la unión infinita $\bigcup_{k\geq 1}[0,1] \times \{k\}$?

Número 7.17. Equipamos el plano $\mathbb{R}^2$ con la topología $\mathcal{T}$ de 1.20. Demostrar que los únicos conjuntos conexos para esta topología son los puntos.

Número 7.18. Estudiar si los subespacios siguientes de $\mathbb{R}^2$ con la topología usual son homeomorfos: $X : (x+1)^2 + y^2 \leq 4, x^2 + y^2 \geq 1$ e $Y : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$ (ambos en $\mathbb{R}^2$).

Número 7.19. ¿Cuáles son las componentes conexas del discontinuo de Cantor (6.7)?

Número 7.20. Sea $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$ una aplicación no constante continua para las topologías usuales. Sea X el espacio topológico cociente de $\mathbb{S}^1$ para la relación: $x \sim y$ si y sólo si $f(x) = f(y)$. ¿Cuál es el tipo topológico de X?

Lista 8. Conexión por caminos

Número 8.1. Enunciar y demostrar los teoremas del pivote para conexión por caminos.

Número 8.2. Demostrar que $\mathbb{R}$ con la topología de los complementos finitos es conexo por caminos.

Número 8.3. Demostrar que en $\mathbb{R}$ con la topología de los complementos numerables todos los caminos son constantes. Deducir que los únicos subconjuntos conexos por caminos son los puntos.

Número 8.4. Demostrar que el plano $\mathbb{R}^2$ con la topología de 1.8 es conexo por caminos.

Número 8.5. Sea $X \subset \mathbb{R}^2$ el conjunto de 7.14. Demostrar que X no es conexo por caminos, pero su adherencia sí.

Número 8.6. Sea $\widetilde{X} \subset \mathbb{R}^2$ como en 7.15. Estudiar si $\widetilde{X}$ es conexo por caminos.

Número 8.7. En $\mathbb{R}^2$ con la topología usual se considera el subconjunto

$$X = \big([0,1] \times \{0\}\big) \cup \big(\{(\tfrac{1}{k}, t) :\ k \geq 1,\ 0 \leq t \leq 1\}\big) \cup \{(0,1)\}.$$

Demostrar que X es conexo, pero no conexo por caminos.

Número 8.8. En $\mathbb{R}^2$ con la topología usual se consideran los subconjunto $S = \{\frac{1}{k} :\ k \geq 1\}$ $T = \{\frac{-1}{k} :\ k \geq 1\}$, y los intervalos $I = [0,1]$, $J = [-1,0]$. Sea

$$Y = \big(I \times S\big) \cup \big(T \times I\big) \cup \big(J \times T\big) \cup \big(S \times J\big).$$

Demostrar que X es conexo, pero no conexo por caminos.

Número 8.9. Se equipa la recta $\mathbb{R}$ con la topología generada por los conjuntos $G = H \setminus A$, donde H es un intervalo abierto y A un conjunto numerable. Demostrar que la recta con esta topología es conexa, pero no conexa por caminos.

Número 8.10. Sea $\mathcal{T}$ la topología de la recta real $\mathbb{R}$ descrita en 1.19. Dado $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 1$, construir una aplicación suprayectiva continua

$$\alpha : ([0,1], \mathcal{T}_u) \to (\{1, a\}, \mathcal{T}|\{1, a\}).$$

¿Es $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ conexo por caminos?

Número 8.11. En el plano $\mathbb{R}^2$ se considera la topología $\mathcal{T}$ de 5.18. Estudiar la continuidad de la aplicación $f : (\mathbb{R}, \mathcal{T}_u) \to (\mathbb{R}^2, \mathcal{T}) : t \mapsto (t, \lambda t)$, para $\lambda = 0, 1$. ¿Es $\mathbb{R}^2$ conexo por caminos con esta topología?

Número 8.12. Se considera en el semiplano $\mathbb{H} : y \geq 0$ de $\mathbb{R}^2$ la topología $\mathcal{T}$ de 5.18. Estudiar si $(\mathbb{H}, \mathcal{T})$ es conexo por caminos.

Lista 9. Homotopía

Número 9.1. Sea X un espacio conexo por caminos X. Demostrar que dos aplicaciones constantes $f, g : Y \to X$ son homótopas.

Número 9.2. Sea $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ una aplicación continua no homótopa a la identidad. Probar que f transforma algún punto $x \in \mathbb{S}^n$ en su antípoda: $f(x) = -x$. Dar una condición suficiente análoga para que f tenga algún punto fijo $x = f(x)$.

Número 9.3. Sean A un subconjunto convexo de $\mathbb{R}^n$, X un espacio topológico e $Y \subset X$. Demostrar que si $f, g : X \to A$ son continuas y coinciden en Y, entonces f y g son homótopas por una homotopía que coincide con ambas en Y. Deducir que un conjunto estrellado de $\mathbb{R}^n$ es simplemente conexo.

Número 9.4. Demostrar que un retracto de un espacio Hausdorff es un subconjunto cerrado. Deducir que una bola abierta no es retracto de $\mathbb{R}^n$.

Número 9.5. Demostrar que la esfera $\mathbb{S}^{n-1} : \|x\| = 1$ es un retracto de deformación de $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ y también de la corona esférica $C \subset \mathbb{R}^n$ definida por $1 \leq \|x\| \leq 2$. Demostrar que una bola cerrada de $\mathbb{R}^n$ es retracto de deformación de todo $\mathbb{R}^n$.

Número 9.6. Demostrar que:

(1) La circunferencia $x^2 + y^2 = 4$ es un retracto de deformación del conjunto

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \neq 1\} \cup \{(1, 0)\}.$$

(2) El conjunto $X : (x^2 + y^2)^2 - 4x^2 = 0$, formado por dos circunferencias tangentes, es un retracto de deformación del plano menos los centros $(\pm 1, 0)$.

Número 9.7. Calcular el grupo fundamental del espacio $X = A \cup B \subset \mathbb{R}^3$ donde

$$A : x^2 + y^2 + z^2 = 1, x \le 0; \quad B : x^2 + y^2 = 1, x \ge 0, z = 0.$$

Número 9.8. Calcular los grupos fundamentales de:

$$\mathbb{R} \times B^2, \quad \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1, \quad (B^2 \setminus \{a\}) \times \mathbb{S}^1, \quad (\mathbb{S}^2 \setminus \{a\}) \times \mathbb{S}^1.$$

(Se denota $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ la esfera unidad $x^2+y^2+z^2 = 1$, y $B^2 \subset \mathbb{R}^2$ el disco abierto $x^2+y^2 < 1$.)

Número 9.9. Calcular el grupo fundamental de las siguientes cuádricas de $\mathbb{R}^3$:

$$Q_1 : x^2 - y^2 - z^2 = 2, \quad Q_2 : z = x^2 + y^2, \quad Q_3 : x^2 + y^2 - z^2 = 0, \quad Q_4 : x^2 + y^2 - z^2 = 1.$$

Número 9.10. Calcular el grupo fundamental del paraguas de Whitney $X \subset \mathbb{R}^3$ de ecuación $x^2 - zy^2 = 0$

Número 9.11. Estudiar si los siguientes pares de espacios son homeomorfos:

(1) Un disco cerrado $D^2 \subset \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 1$ y la esfera unidad $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

(2) Una bola cerrada $D^3 \subset \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \le 1$ y $\mathbb{S}^2$.

(3) $X = D^2 \times \{0\} \cup \{(0,0)\} \times [0,1]$ e $Y = D^2 \times \{0\} \cup \{(1,0)\} \times [0,1]$.

(4) $S_1 \cup S_{-1}$ y $D_1 \cup D_{-1}$, donde

$$S_t \subset \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + (z-t)^2 = 1, \quad D_t \subset \mathbb{R}^2 : (x-t)^2 + y^2 \le 1.$$

Número 9.12. Sea D el disco cerrado de $\mathbb{R}^2$, con borde $\mathbb{S}^1$. Demostrar que $D \setminus \{a\}$ es simplemente conexo si y sólo si $a \in \mathbb{S}^1$. Deducir que todo homeomorfismo $f : D \to D$ transforma $\mathbb{S}^1$ en $\mathbb{S}^1$.

Número 9.13. Definir en el disco cerrado D una aplicación continua $f : D \to D$ que tenga un único punto fijo, que esté en el borde del disco.

Número 9.14. Sea $M \subset \mathbb{R}^3$ el tronco de cilindro $\{x^2 + y^2 = 1, -2 \le z \le 2\}$, $\sim$ la relación de equivalencia de 3.20, y $X = M/\sim$ el correspondiente espacio cociente. Calcular el grupo fundamental de X. ¿Es cierto en general que al hacer un cociente el grupo fundamental se simplifica?

Número 9.15. Consideramos en el rectángulo $S = \{(x,y) : -1 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$ la relación de equivalencia $\sim$ definida en 3.21, y el correspondiente cociente $X = S/\sim$. Mostrar que X es simplemente conexo, pero que no es homeomorfo a una esfera.

Número 9.16. Demostrar que en un espacio simplemente conexo dos caminos con los mismos extremos son homótopos *con extremos fijos*.

Número 9.17. Demostrar que existe una circunferencia en la banda de Möbius que es retracto de deformación suyo. Deducir que la banda de Möbius y el cilindro son homotópicamente equivalentes.

Número 9.18. Sea $f : X \to Y$ una equivalencia de homotopía. Probar que si X es conexo (resp. conexo por caminos), entonces Y lo es también. Más generalmente, probar que f

establece una biyección entre las componentes conexas (resp. conexas por caminos) C de X y las componentes conexas (resp. conexas por caminos) D de Y, de manera que las restricciones $f|_C : C \to D$ son equivalencias de homotopía bien definidas.