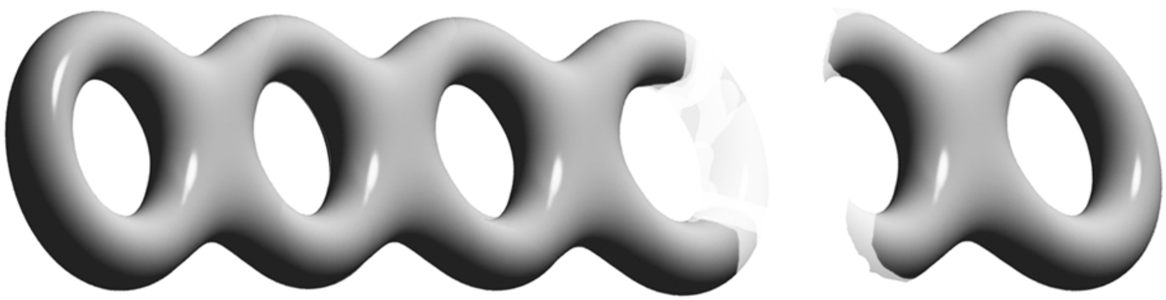
GRUPO FUNDAMENTAL DE UNA SUMA CONEXA DE TOROS

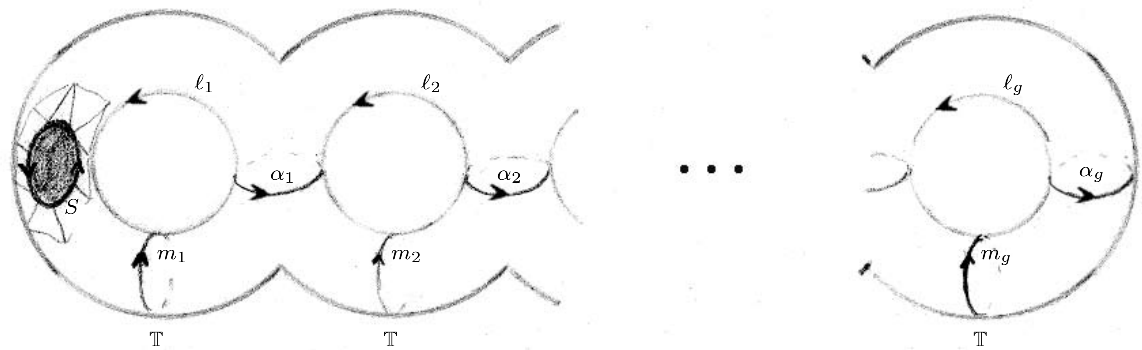
Denotamos $\mathbb{T}_g$ la superficie compacta orientable de *género* $g \geq 0$. Para $g = 0$ es la esfera $\mathbb{S}^2$, para $g = 1$ el toro $\mathbb{T}$. Este g es el *número de agujeros*. Es la *suma conexa* de g toros:

$$\mathbb{T}_g = \mathbb{T} \# \overset{g}{\cdots} \# \mathbb{T}.$$

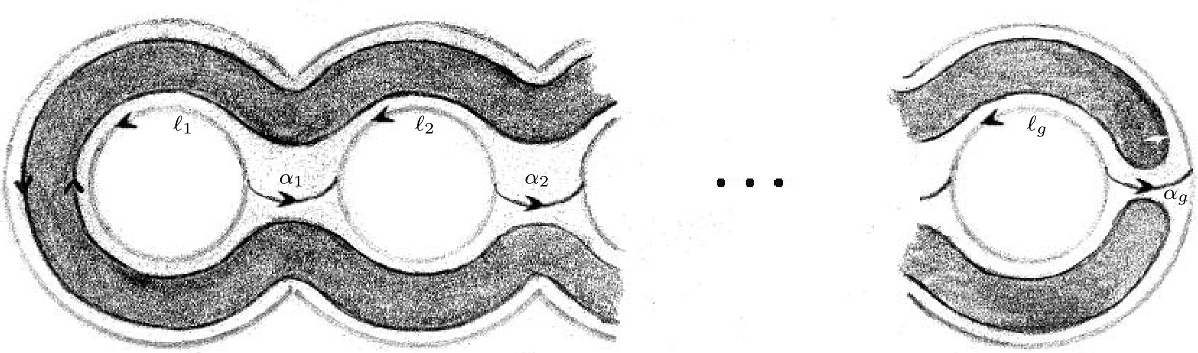


Veamos cómo puede calcularse el grupo fundamental de $\mathbb{T}_g$.

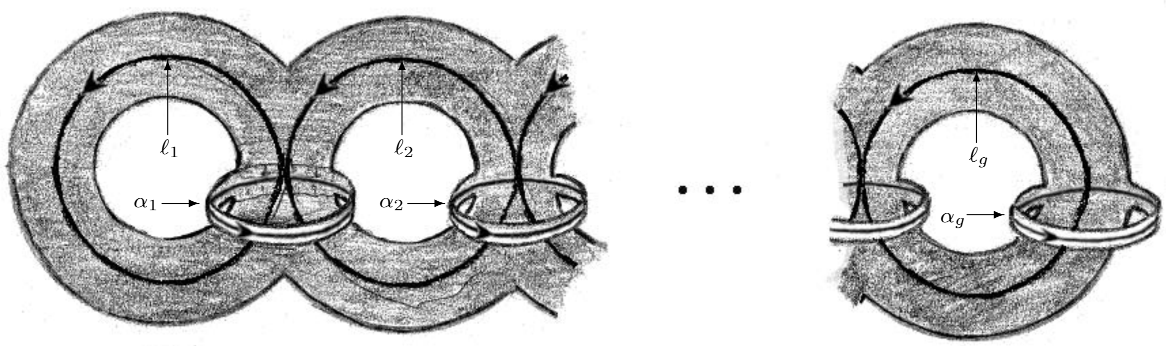
1. Primera presentación por generadores y relaciones. Empezamos haciendo un agujero cuyo borde es una circunferencia S:



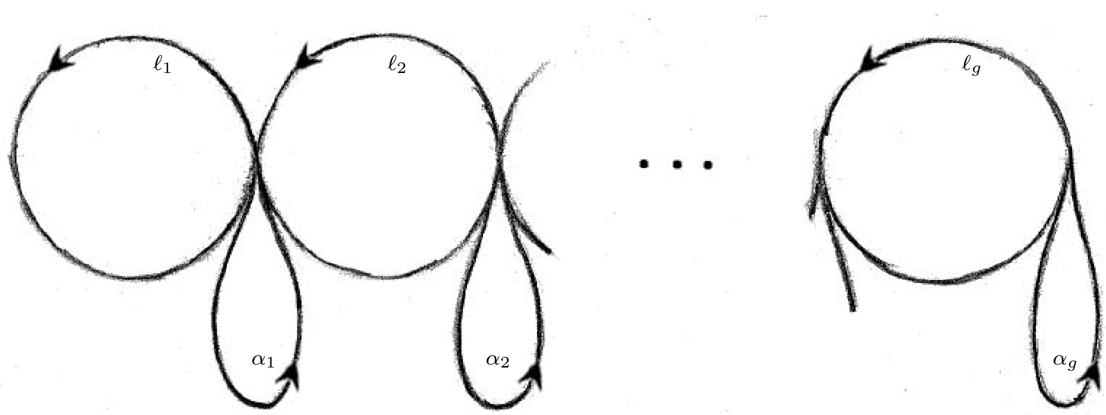
Ahora el agujero se expande:



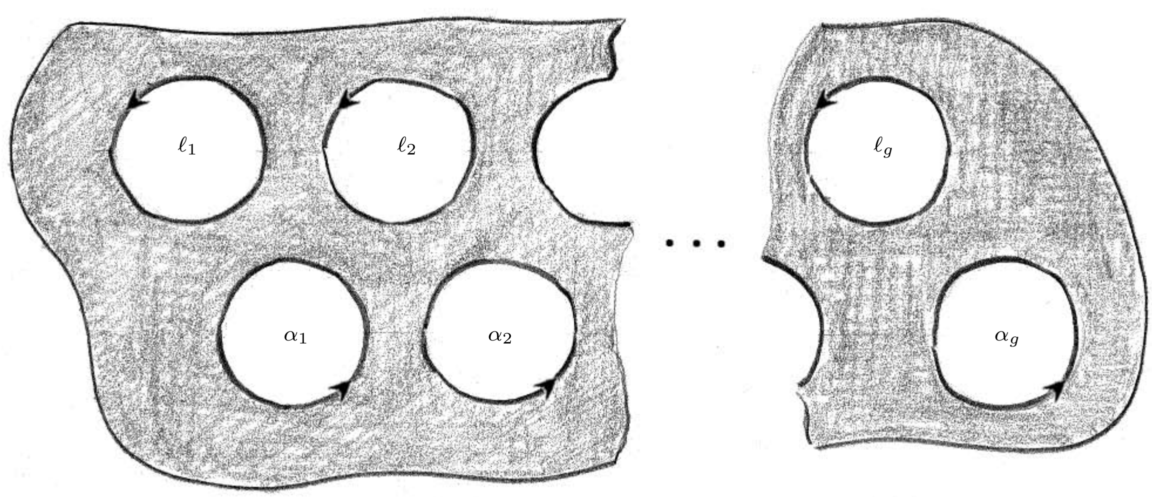
Y más aún:



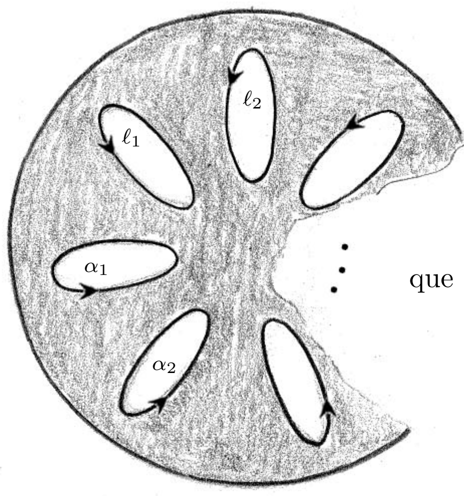
Ya se ve como este espacio se retracta sobre la región siguiente:



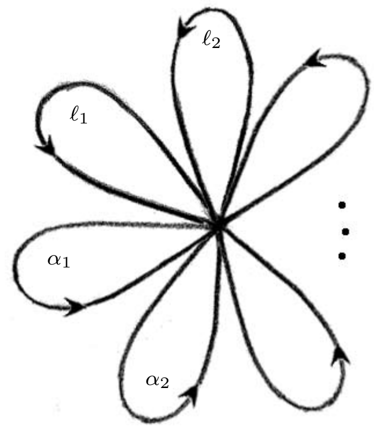
Pero esta curva se puede obtener también retractando la región



La región anterior es homeomorfa a



que a su vez se retracta sobre



Así pues, nuestra superficie $\mathbb{T}\#\cdots\#\mathbb{T}$ *con un agujero* tiene el mismo grupo fundamental que esta flor de $2g$ pétalos: el producto libre de $2g$ grupos cíclicos, cada uno generado por uno de los pétalos. Esos generadores son los lazos $\alpha_1, \ell_1, \ldots, \alpha_g, \ell_g$. Ahora bien, el borde del agujero es la circunferencia S, que en la superficie de partida $\mathbb{T}_g$ (sin agujero) es nulhomótopo. Por tanto, obtenemos el grupo fundamental

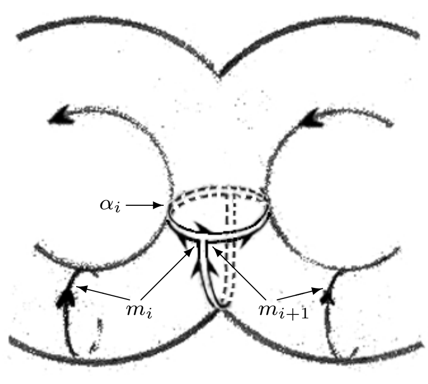
$$\pi(\mathbb{T}_g) = \langle \alpha_1, \ell_1, \ldots, \alpha_g, \ell_g \,|\, S = 1 \rangle,$$

que es el grupo con $2g$ generadores y la relación $S = 1$.

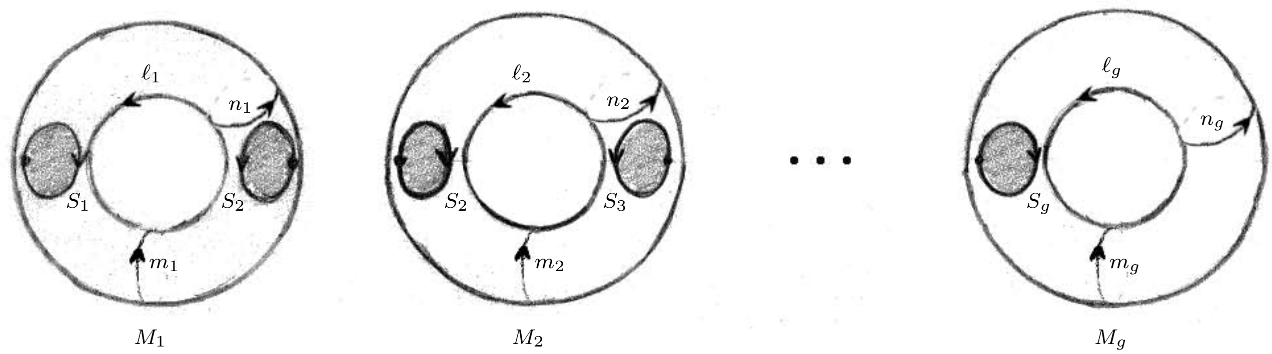
2. Cambio de generadores. Podemos tomar como generadores los m_i en lugar de los α_i, de manera que

$$\pi(\mathbb{T}_g) = \langle m_1, \ell_1, \ldots, m_g, \ell_g \,|\, S = 1 \rangle.$$

En efecto, la figura siguiente muestra cómo deformar los caminos para ver que $\alpha_i = m_{i+1}m_i^{-1}$ para $i < g$, y por deformación evidente es $\alpha_g = m_g^{-1}$.

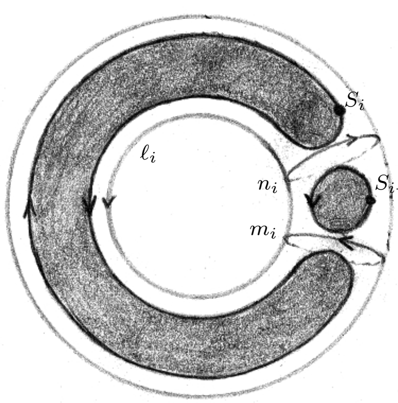


3. Cálculo de la relación y representación final. La suma conexa $\mathbb{T}_g$ de g toros se obtiene pegando los toros *agujereados* M_i siguientes según las circunferencias S_i contiguas en cada dos consecutivos:

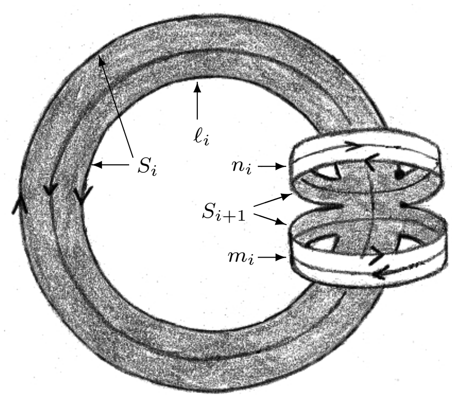


Obsérvese que hemos introducido n_i de manera que S_{i+1} está situado entre m_i y n_i. Hemos dibujado también la circunferencia $S = S_1$ borde del agujero practicado en $\mathbb{T}_g$ al empezar esta discusión.

Para comparar S_i y S_{i+1} en M_i, $1 \leq i < g$, dilatamos el primer agujero



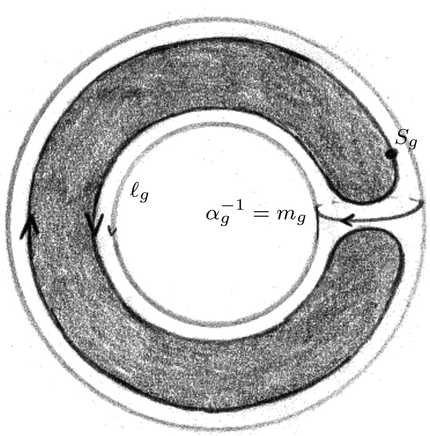
y dilatando aún más



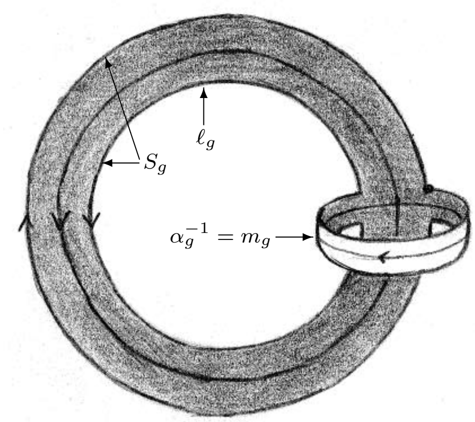
De esta manera

$$\begin{cases} S_i = n_i^{-1}\ell_i m_i^{-1}\ell_i^{-1}, \\ S_{i+1} = n_i^{-1}m_i^{-1}, \end{cases} \qquad \text{luego} \qquad S_i = S_{i+1}m_i\ell_i m_i^{-1}\ell_i^{-1}. \tag{1}$$

Esto vale para $i < g$, así que falta analizar S_g. Con la estrategia habitual, dilatamos el agujero de M_g



hasta



con lo que

$$S_g = m_g\ell_g m_g^{-1}\ell_g^{-1}. \tag{2}$$

En suma de las ecuaciones (1) y (2) resulta

$$S = S_1 = m_g \ell_g m_g^{-1} \ell_g^{-1} \cdots m_1 \ell_1 m_1^{-1} \ell_1^{-1}, \tag{3}$$

y en consecuencia el grupo fundamental de la superficie $\mathbb{T}_g$ es

$$\pi(\mathbb{T}_g) = \langle m_i, \ell_i \,|\, m_g \ell_g m_g^{-1} \ell_g^{-1} \cdots m_1 \ell_1 m_1^{-1} \ell_1^{-1} = 1 \rangle.$$

4. El punto base. Los argumentos anteriores arrojan el resultado correcto, aunque en ningún momento se ha tenido en consideración que el grupo fundamental se define dado *un punto base.* Este descuido puede ampararse intuitivamente en el hecho de que las clases de homotopía libre de lazos coinciden con las clases de homotopía con punto base. Sin embargo, la operación de grupo involucra el punto base que se tome, y aunque el cambio de punto base se gestiona *por conjugación,* los cálculos sólo son absolutamente rigurosos cuando se tiene en cuenta alguno en particular. Proponemos como ejercicio revisar la discusión precedente tras elegir un punto base de lazos.

5. Conmutatividad. Observamos que:

(i) Para $g = 0$ es $\pi(\mathbb{S}^2) = \{1\}$.

(ii) Para $g = 1$ la relación entre los dos generadores m_1 y ℓ_1 es simplemente $m_1 \ell_1 m_1^{-1} \ell_1^{-1} = 1$, es decir, $m_1 \ell_1 = \ell_1 m_1$, que expresa que los generadores conmutan y por tanto el grupo es abeliano: $\pi(\mathbb{T}) = \mathbb{Z}^2$.

(iii) Para $g \geq 2$ el grupo ya no es abeliano, pero podemos abelianizarlo. Para ello basta añadir las relaciones que indican que todos los genereadores m_i, ℓ_i conmutan. Pero entonces la relación

$$m_g \ell_g m_g^{-1} \ell_g^{-1} \cdots m_1 \ell_1 m_1^{-1} \ell_1^{-1} = 1$$

se convierte en la trivialidad $1 = 1$, y tenemos la suma directa de $2g$ grupos cíclicos: $\pi(\mathbb{T}_g)^{ab} = \mathbb{Z}^{2g}$.

El abelianizado del grupo fundamental es el *primer grupo de homología con coeficientes enteros,* y se denota $H_1(\mathbb{T}_g, \mathbb{Z})$. Por tanto,

$$H_1(\mathbb{T}_g, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^{2g},$$

para todo $g \geq 0$. Sólo para la esfera y el toro es $\pi = H_1$.