Ejercicios Análisis I

Grado en Ciencias Físicas 2019-2020

Hoja 4: Continuidad.

1. Dibujar la gráfica y estudiar la continuidad de las siguientes funciones, donde $[x]$ denota la parte entera de x.

A. $f(x) = [x]$. B. $f(x) = x - [x]$.

C. $f(x) = \sqrt{x - [x]}$. D. $f(x) = [x] + \sqrt{x - [x]}$.

E. $f(x) = \left[\dfrac{1}{x}\right]$. F. $f(x) = \dfrac{1}{\left[\dfrac{1}{x}\right]}$.

2. Estudiar los puntos de discontinuidad y establecer, en su caso, el tipo de la misma para las siguientes funciones:

A. $f(x) = \dfrac{x^3 - 8}{x^2 - 4}$. B. $f(x) = \dfrac{b}{x - b}$.

C. $(*)$ $f(x) = x\left[\dfrac{1}{x}\right]$. D. $f(x) = [\sin x]$.

E. $$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{si } x \in [a-1, a), \\ x + a, & \text{si } x \in [a, a+1]. \end{cases}$$

F. $$f(x) = \begin{cases} -|\sin x| - 4, & \text{si } x < \pi, \\ |\cos x| - 5, & \text{si } x \geq \pi. \end{cases}$$

G. $$f(x) = \begin{cases} \arctan x, & \text{si } x \leq 0, \\ \sin \pi x, & \text{si } 0 < x < 1, \\ |x^2 - 5x + 4|, & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

H. $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2 + 2^{\tan x}}, & \text{si } x \in [0, \pi] \setminus \{\frac{\pi}{2}\}, \\ \dfrac{1}{2}, & \text{si } x = \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

3. Estudiar si las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas:

A. Si una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ alcanza un máximo y un mínimo en todo intervalo cerrado entonces es continua.

B. Si una función f de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, para todo intervalo $[a, b]$ toma todos los valores comprendidos entre $f(a)$ y $f(b)$, entonces es continua.

C. Si f es una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ continua en 0 y tal que $f(x+y) = f(x) + f(y)$, entonces f es continua en $\mathbb{R}$.

4. (*) Demostrar que no existe ninguna función continua de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ que tome exactamente dos veces cada valor.

5. Dar un ejemplo de función definida sobre todos los reales que sólo sea continua en los puntos 0 y 1.

6. Supóngase que f y g son funciones continuas en $[a, b]$ y que $f(a) < g(a)$, pero $f(b) > g(b)$. Demostrar que $f(x) = g(x)$ para algún x en (a, b).

7. Supóngase que f es una función continua en $[0, 1]$ y que $f(x)$ está en $[0, 1]$ para todo x. Demostrar que $f(x) = x$ para algún x en $[0, 1]$.

8. Demostrar que las siguientes ecuaciones tienen solución:

A. $x - \sin x - 5 = 0$.   B. $x^7 + \dfrac{213}{2 + x^2 + \tan^2 x} = 12$.

Comentarios: (*) ejercicio difícil, (**) ejercicio muy difícil.