Hoja 5: Intersecciones, cociente, funciones lineales

1. Consideremos en $\mathbb{R}^4$ los subespacios vectoriales $W_1 =< v_1, v_2, v_3 >$ y $W_2 =< v_4, v_5 >$, con

$$v_1 = (1,-2,-1,3),\ v_2 = (0,2,1,-1),\ v_3 = (-2,6,3,-7),\ v_4 = (1,2,1,1),\ v_5 = (2,0,-1,1)\,.$$

a) Halla una base de cada uno de los siguientes espacios: W_1 , W_2 , $W_1 + W_2$ y $W_1 \cap W_2$.

b) Comprueba que se verifica la fórmula de Grassmann.

c) Mismas cuestiones cambiando v_4 por $(1,-2,-2,0)$.

2. Para cada una de las aplicaciones siguientes decide, razonadamente, si es lineal o no.

i) $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $F(x,y) = (2x+3y, -5x)$.

ii) $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $F(x,y) = (2+3y, x+y)$.

iii) $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $F(x,y) = (x, y^2)$.

iv) $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $F(x,y) = \sqrt[3]{x^3+y^3}$.

v) $\{\text{funciones } f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\} \xrightarrow{\mathcal{F}} \mathbb{R}$, $\mathcal{F}\big[f(x)\big] = f(7'5)$.

vi) $\{\text{funciones acotadas } f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\} \xrightarrow{\mathcal{F}} \mathbb{R}$, $\mathcal{F}\big[f(x)\big] = \sup f(x)$.

vii) $\{\text{funciones } f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\} \xrightarrow{T} \{\text{funciones } f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$, $T\big[f(x)\big] = f(\cos x)$.

viii) $\{\text{funciones } f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\} \xrightarrow{T} \{\text{funciones } f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$, $T\big[f(x)\big] = \cos\big(f(x)\big)$.

ix) $F : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$, $F\big(p(x)\big) = p(x+1)$.

x) $F : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$, $F\big(p(x)\big) = p(x) + 1$.

xi) $F : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$, $F\big(p(x)\big) = 2\,p(x) - (1+x^2)\,p'(x)$.

xii) $F : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}$, $F\big(p(x)\big) = \int_{-1}^{2} p(x)\,dx$.

xiii) $T : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$, $T\big(p(x)\big) = \int_0^x p(\xi)\,d\xi$.

xiv) $F : \mathrm{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathrm{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, $F(A) = A^t$.

xv) $F : \mathrm{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $F(A) = \det A$.

xvi) $F : \mathrm{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathrm{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, $F(A) = I_2 + A$.

xvii) $F : \mathrm{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathrm{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$, $F(A) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

3. Dados conjuntos X, Y y una aplicación $f : X \to Y$, el *grafo de* f es el siguiente subconjunto del producto cartesiano: $\big(\text{grafo de } f\big) \stackrel{\text{def}}{=} \big\{\,\big(x\,,\,f(x)\big) : x \in X\,\big\} \subseteq X \times Y$.

a) Explica cómo recuperar f a partir de su grafo.

b) Si V, W son espacios vectoriales, demuestra que $f : V \to W$ es lineal si y sólo si su grafo es un subespacio vectorial del espacio vectorial producto $V \times W$.

c) Todo subespacio vectorial de $V \times W$ tiene que pasar por el origen $(\vec{0}_V, \vec{0}_W)$. ¿Cómo afecta eso a las funciones lineales $f : V \to W$?

4. De una función lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ sabemos que $f(1,0,0) = -1$, $f(2,1,0) = 5$ y $f(3,4,1) = 7$. Sabiendo eso, determina $f(3,5,-1)$.

5. Sean $V = \mathbb{R}^2$ y $W = \langle (1,2) \rangle$. Da un ejemplo de dos vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$ que sean linealmente independientes mientras que $\mathbf{v}_1 + W$, $\mathbf{v}_2 + W \in V/W$ son linealmente dependientes.

6. Sean E un espacio vectorial, $V \subseteq E$ un subespacio vectorial y $v_1, \ldots, v_k \in E$ una lista de vectores.

a) Demuestra que si $v_1 + V, \ldots, v_k + V$ es una lista linealmente independiente de vectores de E/V entonces la lista $v_1, \ldots, v_k$ es linealmente independiente y la suma $V + \langle v_1, \ldots, v_k \rangle$ es directa.

b) Demuestra que si $v_1 + V, \ldots, v_k + V$ generan E/V entonces $V + \langle v_1, \ldots, v_k \rangle = E$.

c) Enuncia y demuestra el recíproco de a). Igual para el recíproco de b).