Multiplicación de matrices: cinco puntos de vista

Sean A matriz $n \times p$ y B matriz $p \times q$. Tenemos las descripciones:

$$A = \left[\begin{array}{c} \mathbf{f}_1 \\ \hline \mathbf{f}_2 \\ \hline \vdots \\ \hline \mathbf{f}_n \end{array}\right] \quad , \quad B = \left[\begin{array}{c|c|c|c} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_q \end{array}\right] \quad ,$$

donde las $\mathbf{f}_i$ son filas $1 \times p$ y los $\mathbf{v}_j$ son columnas $p \times 1$.

Veamos ahora **cinco maneras de entender** AB. Primero hacemos las descripciones:

$$AB = (u_{ij})_{n\times q} = \left[\begin{array}{c|c|c|c} \mathbf{v}'_1 & \mathbf{v}'_2 & \ldots & \mathbf{v}'_q \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} \mathbf{f}'_1 \\ \hline \mathbf{f}'_2 \\ \hline \vdots \\ \hline \mathbf{f}'_n \end{array}\right] \quad ,$$

donde los $\mathbf{v}'_j$ son columnas $n \times 1$ y las $\mathbf{f}'_i$ son filas $1 \times q$. Entonces los cinco puntos de vista son los siguientes:

$u_{ij} = \mathbf{f}_i \mathbf{v}_j$,

$A \left[\begin{array}{c|c|c|c} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_q \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c|c|c} A\,\mathbf{v}_1 & A\,\mathbf{v}_2 & \cdots & A\,\mathbf{v}_q \end{array}\right]$,

$\mathbf{v}'_j =$ combinación lineal de las columnas de A con coeficientes las entradas de $\mathbf{v}_j$,

$$\left[\begin{array}{c} \mathbf{f}_1 \\ \hline \mathbf{f}_2 \\ \hline \vdots \\ \hline \mathbf{f}_n \end{array}\right] B = \left[\begin{array}{c} \mathbf{f}_1\,B \\ \hline \mathbf{f}_2\,B \\ \hline \vdots \\ \hline \mathbf{f}_n\,B \end{array}\right] \quad ,$$

$\mathbf{f}'_i =$ combinación lineal de las filas de B con coeficientes las entradas de $\mathbf{f}_i$.

No es importante cuál es el primero y cuál el quinto, pero sí el conocerlos todos.

Ejemplo para practicar:

$$\left[\begin{array}{rr} 2 & -1 \\ 7 & 3 \\ 3 & 4 \end{array}\right] \left[\begin{array}{rr} 4 & 1 \\ 5 & -5 \end{array}\right] \quad .$$