Lógica – G-II, G-MI, G-II+ADE

Segunda Prueba Parcial (**Bloque LPO**), 21 de Diciembre de 2018

Tiempo para el examen: 2 horas

1. Formalización y Teoría (2 puntos)

A. (1.0 puntos) **Formalizar** sobre un dominio D de Hombres y Dioses la siguiente argumentación:

"Dios da pan al que no tiene dientes. Pepe no tiene dientes. Por tanto, alguien da pan a Pepe"

a: Dios
b: Pepe
P(x, y): x da pan a y
Q(x): x tiene dientes
$\forall x\, (\neg Q(x) \rightarrow P(a, x)),\ \neg Q(b)\ \models \exists x\, P(x, b)$

B. (1.0 puntos) Un niño realiza la siguiente deducción y se nos propone utilizar nuestros conocimientos de lógica para explicar por qué se ha equivocado:

"Todo lo que se duerme, tiene ojos. Se me ha dormido el brazo. Por tanto, el brazo tiene ojos"

Según el sentido común, el razonamiento es claramente incorrecto. Sin embargo, una primera formalización podría dar lugar a un razonamiento (escrito con fórmulas) que resulta ser correcto.

Sobre el dominio de las partes del cuerpo humano del niño (D = {cabeza, brazo, ojos…}), realizar la **formalización** del razonamiento **de dos formas distintas:**

1. Una que respete el significado **aparente** de las palabras y resulte en una conclusión (erróneamente) **consecuencia lógica** de las premisas; en esta formalización se usarán **dos** símbolos de predicado.
2. Otra que respete el significado **real** de las palabras en este contexto, y resulte en una conclusión que **no es consecuencia lógica** de las premisas; en esta formalización se usarán **tres** símbolos de predicado.

En ambas formalizaciones, la constante a representa el brazo y la constante b representa los ojos.

Formalización 1:

a: brazo
b: ojos

P(x): x se duerme
R(x, y): x tiene a y

$\forall x (P(x) \rightarrow R(x, b)),\ P(a)\ \models R(a, b)$

Formalización 2:

a: brazo
b: ojos
P(x): x se duerme
Q(x): x se entumece

R(x, y): x tiene a y

$\forall x(P(x) \rightarrow R(x, b)), Q(a) \models R(a, b)$

2. Semántica (2 puntos)

Demostrar por **medios semánticos** y con dominio D = { 1, 2 } que **no** hay **consecuencia lógica.**

Justificar adecuadamente los pasos principales del procedimiento.

$$\{ \forall x \forall y\, (P(x,y) \Longrightarrow Q(y) \land R(x)), \neg \exists x\, P(a,x), \exists x P(x,b) \} \quad \not\models \quad \exists x(P(x,x)) \Longrightarrow Q(a) \lor R(a)$$

i(A1)=V sii i(∀y (P(a,y) ⟹ Q(y) ∧ R(a)))=V y i(∀y (P(b,y) ⟹ Q(y) ∧ R(b)))=V

sii i(P(a,a) ⟹ Q(a) ∧ R(a))=V

y i(P(a,b) ⟹ Q(b) ∧ R(a))=V

y i(P(b,a) ⟹ Q(a) ∧ R(b))=V

y i(P(b,a) ⟹ Q(b) ∧ R(b))=V

sii [i(P(a,a))=F o i(Q(a) ∧ R(a))=V]

y [i(P(a,b))=F o i(Q(b) ∧ R(a))=V]

y [i(P(b,a))=F o i(Q(a) ∧ R(b))=V]

y [i(P(b,b))=F o i(Q(b) ∧ R(b))=V]

sii [i(P(a,a))=F o (i(Q(a))=V y i(R(a))=V)]

y [i(P(a,b))=F o (i(Q(b))=V y i(R(a))=V)]

y [i(P(b,a))=F o (i(Q(a))=V y i(R(b))=V)]

y [i(P(b,b))=F o (i(Q(b))=V y i(R(b))=V)]

i(A2)=V sii i(∃x P(a,x))=F sii i(P(a,a))=F y i(P(a,b))=F

i(A3)=V sii i(P(a,b))=V o i(P(b,b))=V

i(B)=F sii i(∃x (P(x,x)))=V y i(Q(a)∨R(b))=F sii (i(P(a,a))=V o i(P(b,b))=V)

y i(Q(a))=F

y i(R(a))=F

Unas condiciones obligatorias son i(Q(a))=F e i(R(a))=F. Estas hacen que se tengan que cumplir i(P(a,a))=F, i(P(a,b))=F, i(P(b,a))=F.

A su vez, estas condiciones hacen que se tenga que cumplir i(P(b,b))=V (porque ya no se puede cumplir ni i(P(a,b))=V ni i(P(a,a))=V)

Finalmente, esta última condición hace que se tengan que cumplir $\mathrm{i(Q(b))=V}$ e $\mathrm{i(R(b))=V}$.

Aún así, es posible encontrar una interpretación que dé las premisas verdaderas y la conclusión falsa:

i(a)=1

i(b)=2

i(P^2)={<2,2>} es decir i(P)(1,1) = F; i(P)(1,2) = F; i(P)(2,1) = F; i(P)(2,2) = V;

i(Q^1)={<2>} es decir i(R)(1) = F; i(R)(2) = V

i(R^1)={<2>} es decir i(R)(1) = F; i(R)(2) = V

3. Deducción Natural (2 puntos)

Demostrar la corrección del siguiente razonamiento usando el cálculo de **Deducción Natural**, justificando cada paso de la demostración.

$$T[\ \forall x\ (P(x) \lor \neg Q(x)),\ \forall x \exists y(\neg R(x,y) \Longrightarrow \neg P(y))\ ]\ \vdash\ \exists x\ S(x) \Longrightarrow \exists x\ (Q(x) \Longrightarrow R(f(a),x))$$

1.	$\forall x\ (P(x) \lor \neg Q(x))$	premisa
2.	$\forall x\ \exists y\ (\neg R(x,y) \Longrightarrow \neg P(y))$	premisa
3.	$\exists x\ S(x)$	supuesto
4.	$\exists y\ (\neg R(f(a),y) \Longrightarrow \neg P(y))$	eliminación de $\forall$ línea 2 con x/f(a)
5.	$\neg R(f(a),b^*) \Longrightarrow \neg P(b^*)$	eliminación de $\exists$ línea 4 con y/b*
6.	$P(b^*) \lor \neg Q(b^*)$	eliminación de $\forall$ línea 1 con x/b*
7.	$\neg\neg P(b^*) \lor \neg Q(b^*)$	intercambio (A con $\neg\neg$A) línea 6
8.	$\neg P(b^*) \Longrightarrow \neg Q(b^*)$	intercambio (A$\Longrightarrow$B con $\neg$A$\lor$B) línea 8
9.	$\neg R(f(a),b^*) \Longrightarrow \neg Q(b^*)$	transitividad líneas 5 y 8
10.	$Q(b^*) \Longrightarrow R(f(a), b^*)$	intercambio (A$\Longrightarrow$B con $\neg$B$\Longrightarrow\neg$A) línea 10
11.	$\exists x\ (Q(x) \Longrightarrow R(f(a),x))$	introducción de $\exists$ línea 10, b*/x
12.	$\exists x\ S(x) \Longrightarrow \exists x\ (Q(x) \Longrightarrow R(f(a),x))$	introducción de $\Longrightarrow$ líneas 3 y 11

4. Paso a Forma Clausular (2 puntos)

Transformar la siguiente fórmula en **Forma Clausular**, indicando los pasos principales del procedimiento.

$$\exists y(p(y) \vee \neg q(y,y)) \Leftrightarrow \exists y r(y,x)$$

Hay una variable libre y dos cuantificadores sobre la misma variable, además de la doble implicación. Por tanto, la mayor dificultad es el tratamiento de las variables.

Esta solución no es la única: además de los nombres de las variables renombradas y los de las constantes/funciones de Skolem, puede haber diferencias en el orden de los cuantificadores: el primero siempre va a ser ∃x, pero los otros dos existenciales y los dos universales pueden aparecer en cualquier orden; esto obviamente puede cambiar la Forma Normal de Skolem.

$(\exists y(p(y) \vee \neg q(y,y)) \Longrightarrow \exists w r(w,x)) \wedge (\exists w' r(w',x) \Longrightarrow \exists y'(p(y') \vee \neg q(y',y')))$	transformaciones previas
$\forall y \exists w \forall w' \exists y'((p(y) \vee \neg q(y,y) \Longrightarrow r(w,x)) \wedge (r(w',x) \Longrightarrow p(y') \vee \neg q(y',y')))$	forma prenex
$\exists x \forall y \exists w \forall w' \exists y'((p(y) \vee \neg q(y,y) \Longrightarrow r(w,x)) \wedge (r(w',x) \Longrightarrow p(y') \vee \neg q(y',y')))$	cierre existencial
$\exists x \forall y \exists w \forall w' \exists y'((\neg p(y) \vee r(w,x)) \wedge (q(y,y) \vee r(w,x)) \wedge (\neg r(w',x) \vee p(y') \vee \neg q(y',y')))$	forma normal conjuntiva
$\forall y \forall w' \forall z'((\neg p(y) \vee r(f(y),a)) \wedge (q(y,y) \vee r(f(y),a)) \wedge (\neg r(w',a) \vee p(g(y,w',z')) \vee \neg q(z', g(y,w',z'))))$	f. n. de Skolem
$\{\ \neg p(y) \vee r(f(y),a)),\quad q(y,y) \vee r(f(y),a),\quad \neg r(w',a) \vee p(g(y,w',z')) \vee \neg q(z', g(y,w',z'))\ \}$	forma clausular

Errores más frecuentes y correspondiente penalización (en realidad la penalización depende también de otros factores, por ejemplo si un error hace que el resto del ejercicio se vuelva trivial):

1. Mover los cuantificadores fuera de la doble implicación como si fuera una implicación sencilla. Probablemente es el error más frecuente, y en principio se penaliza con 0.4 puntos. Simplemente, no tenemos reglas para hacer esto, y lo único que se puede hacer es convertir la doble implicación por dos implicaciones sencillas (primer paso de la solución propuesta, en el que además se renombran variables)
2. No cuidar el renombrado de las variables. Penalización 0.6 puntos aprox. De los dos cuantificadores sobre y deberían generarse cuatro cuantificadores sobre variables distintas, como en la solución. Si no es así (bien porque sólo se generan dos cuantificadores, o incluso uno, o porque hay más de un cuantificador seguido sobre la misma variable y), se penaliza. Si además de esto se comete el error (1), las penalizaciones se suman.
3. Tratamiento de la variable libre (-0.4 puntos). Los errores más frecuentes en este sentido son: no darse cuenta de que hay una variable libre; error en el cierre existencial (cuantificador en el sitio equivocado); cuantificador universal en lugar de existencial.
4. Forma Normal Conjuntiva (-0.4 puntos). Los errores más frecuentes son simplemente calcular mal la FNC, y normalmente pasan por olvidarse los paréntesis en algún momento. Además, un error muy grave, que conlleva una penalización mayor, es pasar de la implicación doble a la sencilla sin ninguna justificación.
5. Forma Normal de Skolem (-0.4 puntos). Por ejemplo, introducir las constantes o funciones de Skolem de forma equivocada, u olvidarse de hacerlo, o hacerlo en el momento equivocado (por ejemplo anbtes de haber llegado a la forma prenex).
6. Forma Clausular (-0.4 puntos). Por ejemplo escribir la FC con fórmulas que contienen conjunciones o implicaciones, sin darse cuenta de que no son cláusulas.
7. División en dos fórmulas (-0.2 puntos). Muchos han dividido la doble implicación en dos implicaciones sencillas, tratando ambas fórmulas separadamente. No siempre se ha penalizado porque a veces el resultado final se puede considerar correcto. Sin embrago, además de que casi nadie ha justificado adecuadamente la transformación, el considerar dos fórmulas en lugar de una debería implicar que los nombres de constantes y funciones de Skolem no deberían repetirse.
8. Orden de los pasos. Este error no se ha penalizado en sí, con la condición que el resultado final fuera correcto. Sin embargo, hay que decir que muchos no se molestaron en intentar desarrollar el ejercicio de la forma que se explicó en clase, y aplicaron los pasos de forma desordenada (por ejemplo, quitando los cuantificadores existenciales antes de haber llegado a la FNC).

5. Unificación y Resolución con UMG (2 puntos)

A. (0,5 puntos) Decir si es **unificable** o no el siguiente par de átomos y, en caso afirmativo, dar el unificador más general, justificando adecuadamente la respuesta.

P(a,x,f(g(y)))   P(y,f(z),f(z))

B. (1,5 puntos) Demostrar con el método de **resolución con UMG** que el siguiente conjunto de cláusulas es insatisfacible

C1: ¬P(x,x,g(y)) ∨ ¬Q(x,g(y)) ∨ R(y)

C2: ¬P(y,x,x) ∨ ¬R(x)

C3: ¬Q(g(y),x) ∨ P(x,x,y)

C4: Q(y,x)

A. Unificación

α	Aα	Bα
{}	P(a,x,f(g(y)))	P(y,f(z),f(z))
{y/a}	P(a,x,f(g(a)))	P(a,f(z),f(z))
{y/a, x/f(z)}	P(a,f(z),f(g(a)))	P(a,f(z),f(z))
{y/a, x/f(g(a), z/g(a)}	P(a,f(g(a)),f(g(a)))	P(a,f(g(a)),f(g(a)))

Los átomos son unificables y su UMG es { y/a, x/f(g(a), z/g(a) }

B. Renombrar variables

C1: ¬P(x1, x1, g(y1)) ∨ ¬Q(x1, g(y1)) ∨ R(y1)

C2: ¬P(y2, x2, x2) ∨ ¬R(x2)

C3: ¬Q(g(y3), x3) ∨ P(x3, x3, y3)

C4: Q(y4, x4)

R1:	P(x3, x3, y3)	(C3,C4)	{ y4/g(y3), x4/x3 }
R2:	¬R(x3)	(R1,C2)	{ y3/x3, y2/x3, x2/x3 }
R3:	¬P(x1, x1, g(x3)) ∨ ¬Q(x1, g(x3))	(R2,C1)	{ y1/x3 }
R4:	¬Q(x3, g(x3))	(R3,R1)	{ x1/x3, y3/g(x3) }
R5:	[]	(R4,C4)	{ y4/x3, x4/g(x3) }