Lógica – Grado en Ingeniería Informática , Grado en Matemáticas e Informática , Doble grado en Ingeniería Informática y ADE

22 de enero de 2018

Repesca de LP (Lógica Proposicional)

Ejercicio 1.1. Decir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, justificando brevemente las respuestas. *(0,8 puntos)*

a) *Si A y B son dos fórmulas, ambas contingentes, la fórmula $A \to \neg B$ podría ser válida.*

b) *Cuando se aplica el Teorema de Intercambio en una demostración de Deducción Natural, obteniendo una fórmula C' a partir de C, las dos fórmulas C y C' son lógicamente equivalentes*

Solución

(1) VERDADERO: puede suceder si todo modelo de B, que viene a ser un contramodelo de ¬B, es contramodelo de A; no sabemos si esto pasa pero ciertamente es compatible con el hecho de que A y B sean contingentes.

(2) VERDADERO: por el mismo enunciado (y demostración) del Teorema de Intercambio y cómo se usa en Deducción Natural

Ejercicio 1.2. Formalizar en el lenguaje de la lógica proposicional, especificando el significado de cada símbolo utilizado: *(1,7 puntos)*

a) el siguiente *enunciado*:

No voy a trabajar a menos que mi jefe me llame o me encuentre bien pero no tenga nada mejor que hacer

b) el siguiente *razonamiento*:

Si Nadal pasa a tercera ronda será número uno del mundo. Si no lo hace, pero llega a segunda ronda y Federer no llega a cuartos de final, también (Nadal) será número uno del mundo. Si Federer no llega a octavos de final, tampoco llega a cuartos de final. Si Federer no llega a tercera ronda, tampoco llega a octavos de final. Federer no llega a tercera ronda. Por tanto, Nadal será número uno del mundo a no ser que pierda en primera ronda

Solución

(1) P: "voy a trabajar"; Q: "mi jefe me llama"; R: "me encuentro bien"; S: "tengo algo mejor que hacer" (que trabajar)

$$P \to Q \vee (R \wedge S)$$

(2) M3: "Nadal llega a tercera ronda"; M2: "Nadal llega a segunda ronda"; B5: "Federer llega a cuartos de final (quinta ronda)"; B4: "Federer llega a octavos de final (cuarta ronda)"; B3: "Federer llega a tercera ronda"; N1: "Nadal será número uno del mundo"

$$\begin{array}{c} M3 \to N1 \\ \neg M3 \wedge M2 \wedge \neg B5 \to N1 \\ \neg B4 \to \neg B5 \\ \neg B3 \to \neg B4 \\ \neg B3 \\ \hline \neg N1 \to \neg M2 \end{array}$$

Ejercicio 2. Demostrar con medios semánticos que no se cumple la siguiente relación de consecuencia lógica. Indicar de forma explicita y completa: (1) los pasos principales del procedimiento y (2) el resultado final obtenido.

$$\{ q \rightarrow \neg r , t \rightarrow p \wedge s , \neg s, (r \wedge s) \leftrightarrow \neg q \} \vDash q \wedge \neg r \rightarrow t$$

Nota: no pueden utilizarse ni las tablas de verdad ni el método de resolución. *(2,5 puntos)*

Solución:

A1: $q \rightarrow \neg r$ A2: $t \rightarrow p \wedge s$ A3: $\neg s$ A4: $(r \wedge s) \leftrightarrow \neg q$

B: $q \wedge \neg r \rightarrow t$

Recordatorio:

{A1 , A2 , A3, A4} ⊨ B ⇔ para toda i (i(Aj) = V j = 1,2,3,4 ⇒ i(B) = V) (1)

{A1 , A2 , A3, A4} no ⊨ B ⇔ existe i tal que i(Aj) = V j = 1,2,3,4 ∧ i(B) = F (2)

Buscamos una interpretación (un contramodelo) i tal que i(B) = F ∧ i(Aj) = V j = 1,2,3,4 (usamos (2))

1.1. i(B) = i(q ∧ ¬r → t) = F sii i(q ∧ ¬r) = V y i(t) = F

a. i(q ∧ ¬r) = V sii i(q) = V y i(r) = F

1.2. i(A1) = i (q → ¬r) = V

a. i(¬r) = V (paso 1.1.a), por tanto i (q → ¬r) = V (i(q) = V o i(q) = F)

1.3. i(A2) = i (t → p ∧ s) = V

a. i(t) = F (paso 1.1), por tanto i (t → p ∧ s) = V (i (p ∧ s) = V o i (p ∧ s) = F)

1.4. i(A3) = i(¬s) = V sii i((s) = F

1.5. i(A4) = (r ∧ s) ↔ ¬ q = V sii i(r ∧ s) = i(¬ q)

a. i(¬ q) = F (paso 1.1a)

b. i(r ∧ s) = F sii i(r) = F o i(s) = F

Por tanto, hemos encontrado dos interpretaciones que hacen Verdadero a A1, A2, A3, A4 y Falso a B

- i(t) = F , i(q) = V , i(r) = F , i(s) = F, i(p) = V
- i(t) = F , i(q) = V , i(r) = F , i(s) = F, i(p) = F

⇒ Se demuestra que NO se cumple la relación de consecuencia lógica

Ejercicio 3. Demuestra la corrección de la siguiente argumentación mediante deducción natural **utilizando solamente reglas básicas**:

$$T[\neg p \rightarrow \neg q \wedge r] \vdash q \rightarrow p \vee r$$

(2,5 puntos)

Solución:

1. $\neg p \rightarrow \neg q \wedge r$ premisa
2. q supuesto
3. $\neg p$ supuesto

4. $\neg q \wedge r$ modus ponens 1, 3

5. $\neg q$ $E\wedge$ 4

6. $\neg q \wedge q$ $I\wedge$ 2, 5

7. $\neg\neg p$ $I\neg$ 3, 6

8. p $E\neg$ 7

9. $p \vee r$ $I\vee$ 8

10. $q \rightarrow p \vee r$ $I\rightarrow$ 2, 9

Ejercicio 4. Analizar, utilizando el método de resolución, si $T[A_1,A_2,A_3,A_4] \vdash C$, siendo: *(2,5 puntos)*

$$T\,[\neg r \rightarrow s,\ \neg r,\ t \rightarrow p,\ \neg((p \wedge s) \vee q)\,] \ \vdash\ \neg(p \wedge q) \rightarrow \neg(p \vee q) \wedge \neg(t \vee \neg s)$$

Solución:

Una deducción $[P_1, P_2, ..., P_n] \vdash C$ es correcta sii $FC(P_1 \wedge P_2 \wedge ... \wedge P_n \wedge \neg C)$ es insatisfacible

Pasamos a realizar la comprobación con la deducción propuesta en el ejercicio:

1. Pasamos a forma Clausular las premisas y la conclusión negada:

A_1: $\neg r \rightarrow s$

$\neg\neg r \vee s$ *$(A \rightarrow B) \leftrightarrow (\neg A \vee B)$*

$r \vee s$ *$\neg\neg A \leftrightarrow A$*

$FC = \{r \vee s\}$

A_2: $\neg r$

$FC = \{\neg r\}$

A_3: $t \rightarrow p$

$\neg t \vee p$ *$(A \rightarrow B) \leftrightarrow (\neg A \vee B)$*

$FC = \{\neg t \vee p\}$

A_4: $\neg((p \wedge s) \vee q)$

$\neg(p \wedge s) \wedge \neg q$ *$\neg(A \wedge B) \leftrightarrow \neg A \vee \neg B$*

$(\neg p \vee \neg s) \wedge \neg q$ *$\neg(A \vee B) \leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$*

$FC = \{\neg q, \neg p \vee \neg s\}$

C: $\neg(p \wedge q) \rightarrow \neg(p \vee q) \wedge \neg(t \vee \neg s)$

¬C: $\neg(\neg(p \wedge q) \rightarrow \neg(p \vee q) \wedge \neg(t \vee \neg s))$ *$(A \rightarrow B) \leftrightarrow (\neg A \vee B)$*

$\neg(\neg\neg(p \wedge q) \vee \neg(p \vee q) \wedge \neg(t \vee \neg s))$ *$\neg\neg A \leftrightarrow A$*

$\neg((p \wedge q) \vee \neg(p \vee q) \wedge \neg(t \vee \neg s))$ *$\neg(A \vee B) \leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$*

$\neg(p \wedge q) \wedge \neg(\neg(p \vee q) \wedge \neg(t \vee \neg s))$

$(\neg p \vee \neg q) \wedge \neg(\neg(p \vee q) \wedge \neg(t \vee \neg s))$ *$\neg(A \wedge B) \leftrightarrow \neg A \vee \neg B$*

$(\neg p \vee \neg q) \wedge \neg\neg(p \vee q) \vee \neg\neg(t \vee \neg s)$ *$\neg\neg A \leftrightarrow A$*

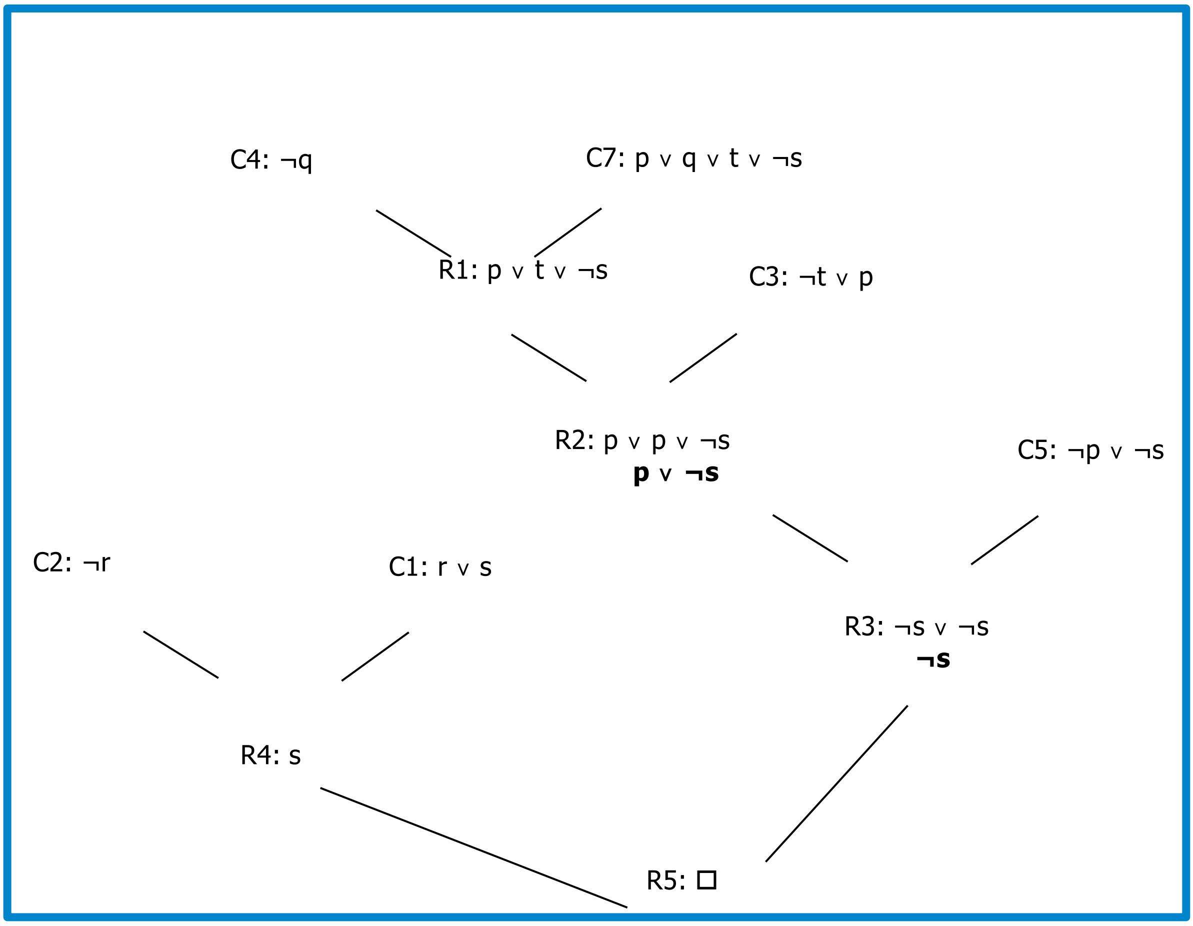
$(\neg p \vee \neg q) \wedge (p \vee q) \vee \neg\neg(t \vee \neg s)$ *$\neg\neg A \leftrightarrow A$*

$(\neg p \vee \neg q) \wedge (p \vee q) \vee (t \vee \neg s)$

$FC = \{\neg p \vee \neg q, p \vee q \vee t \vee \neg s\}$

Forma Clausular: {r v s, ¬r v s, ¬t v p, ¬q, ¬p v ¬s, ¬p v ¬q, p v q v t v ¬s}

2. Aplicamos el método de resolución para observar si el conjunto es insatisfacible, es decir, si podemos conseguir la cláusula vacía a partir del conjunto de cláusulas que tenemos disponible:
   C1: r v s
   C2: ¬r
   C3: ¬t v p
   C4: ¬q
   C5: ¬p v ¬s
   C6: ¬p v ¬q
   C7: p v q v t v ¬s



Podemos encontrar la cláusula vacía utilizando el método de resolución, con lo que el conjunto estudiado ($A_1 \wedge A_2 \wedge A_3 \wedge A_4 \wedge \neg C$) es insatisfacible. Por consiguiente, por reducción al absurdo el conjunto ($A_1 \wedge A_2 \wedge A_3 \wedge A_4 \wedge C$) es satisfacible y existe consecuencia lógica.

Lógica – Grado en Ingeniería Informática, Grado en Matemáticas e Informática, Doble grado en Ingeniería Informática y ADE

22 de enero de 2018

Repesca de LPO (Lógica de Primer Orden)

Ejercicio 1.1. Formalizar en el lenguaje de la Lógica de Primer Orden los siguientes enunciados: *(1,5 puntos)*

a) No todo el que estudia matemáticas conoce a Pitágoras.
b) Sólo las personas que conocen a Aristóteles estudian lógica.
c) Sócrates conoce al profesor de Aristóteles.

Solución

a ≡ matemáticas

b ≡ Pitágoras

c ≡ Aristóteles

d ≡ lógica

e ≡ Sócrates

C(x,y) ≡ x conoce a y

E(x,y) ≡ x estudia y

f(x), función "profesor de x"

a) $\neg \forall x(E(x,a) \rightarrow C(x,b))$; $\exists x(E(x,a) \wedge \neg C(x,b))$
b) $\forall x(E(x,d) \rightarrow C(x,c))$; $\neg\exists x(E(x,d) \wedge \neg C(x,c))$
c) $C(e, f(c))$

Ejercicio 1.2. Calcular, si es posible, el UMG entre los siguientes dos átomos. Detallar tanto el procedimiento como el resultado final. *(0,5 puntos)*

$A = R(f(z), f(y), g(a, x))$ $\qquad$ $B = R(y, x, g(z, f(x)))$

Ejercicio 2. Analizar con medios semánticos, sobre el dominio {0, 1}, la corrección o no del siguiente esquema argumental: *(2 puntos)*

$$\{ \forall x(\neg P(x) \rightarrow Q(x, x)),\ \exists x P(x),\ Q(b, b) \} \vDash \exists x \forall y Q(x, y) \vee P(a)$$

Solución:

$i(\forall x(\neg P(x) \rightarrow Q(x, x))) = V$ sii

y
- $i(\neg P(a) \rightarrow Q(a, a)) = V$ sii
  - o
    - $i(\neg P(a)) = F$ sii $\cancel{i(P(a)) = V}$
    - **$i(Q(a, a)) = V$**

i(¬P(b) → Q(b, b)) = V sii

o [
- i(¬P(b)) = F sii **i(P(b)) = V**
- **i(Q(b, b)) = V**

i(∃xP(x)) = V sii

o [
- ~~i(P(a)) = V~~
- **i(P(b)) = V**

i(Q(b, b)) = V

i(∃x∀yQ(x, y) ∨ P(a)) = F sii

y [
- i(∃x∀yQ(x, y)) = F sii
  - y [
    - i(∀yQ(a, y)) = F sii
      - o [
        - **i(Q(a, a)) = F**
        - ~~i(Q(a, b)) = F~~
    - i(∀yQ(b, y)) = F sii
      - o [
        - **i(Q(b, a)) = F**
        - ~~i(Q(b, b)) = F~~
- **i(P(a)) = F**

La siguiente interpretación es Modelo de las premisas y Contramodelo de la conclusión, por lo que queda demostrado que no se cumple la relación de consecuencia lógica

D = {0,1} i(a) = 0, i(b) = 1

i(P1) = {<1>}

i(Q2) = {<0, 0>, <1, 1>}

Ejercicio 3. Demostrar la corrección de la siguiente estructura deductiva mediante deducción natural, **utilizando solamente reglas básicas**: *(2 puntos)*

T[∀x(A(x) → B(x) ∨ C(x)), ∃xB(x) → ∃yD(y), ∃xC(x) → ∃yD(y))] ⊢ ∃xA(x) → ∃yD(y)

Solución:

1. ∀x(A(x) → B(x) ∨ C(x))	premisa
2. ∃xB(x) → ∃yD(y)	premisa
3. ∃xC(x) → ∃yD(y)	premisa
4. ∃xA(x)	supuesto
5. A(a*)	E∃(4)
6. A(a*) → B(a*) ∨ C(a*)	E∀(1)
7. B(a*) ∨ C(a*)	mp(5,6)

8. $B(a^*)$	supuesto
9. $\exists x B(x)$	$I\exists(8)$
10. $\exists y D(y)$	mp(9,2)
11. $B(a^*) \rightarrow \exists y D(y)$	$I\rightarrow$ (8,10)
12. $C(a^*)$	supuesto
13. $\exists x C(x)$	$I\exists(12)$
14. $\exists y D(y)$	mp(13,3)
15. $C(a^*) \rightarrow \exists y D(y)$	$I\rightarrow$ (12,14)
16. $\exists y D(y)$	$E\vee$(7,11,15)
17. $\exists x A(x) \rightarrow \exists y D(y)$	$I\rightarrow$(4,16)

Ejercicio 4. Obtener de forma detallada la forma clausular de la estructura deductiva: $T\ [A_1, A_2] \vdash B$

A_1: $\exists x P(x, y) \vee \forall x Q(x, y) \rightarrow \exists x \exists y R(x, y)$ *(2 puntos)*

A_2: $\exists x \forall y P(x, y) \wedge \forall x \exists y (Q(x, y) \rightarrow R(a,f(b)))$

B: $\forall x (P(x, y) \vee (\exists z R(z) \vee (\exists y Q(x, y) \wedge \forall t Q(t, c))))$

Solución:

A1: prenex: $\exists x P(x,y) \vee \forall z Q(z,y) \rightarrow \exists t \exists u R(t,u)$ (renombrar variables)

$\forall x \exists z \exists t \exists u\ (P(x,y) \vee Q(z,y) \rightarrow R(t,u))$

Cierre existencial: $\exists y \forall x \exists z \exists t \exists u\ (P(x,y) \vee Q(z,y) \rightarrow R(t,u))$

FNC: $\exists y \forall x \exists z \exists t \exists u\ (\neg\ (P(x,y) \vee Q(z,y)) \vee R(t,u))$ (elim $\rightarrow$)

$\exists y \forall x \exists z \exists t \exists u\ ((\neg\ P(x,y) \wedge \neg Q(z,y)) \vee R(t,u))$ (DeMorgan)

$\exists y \forall x \exists z \exists t \exists u\ ((\neg\ P(x,y) \vee R(t,u)) \wedge (\neg Q(z,y) \vee R(t,u)))$ (distributividad)

Skolemizacion: y/d, z/g1(x), t/g2(x), u/g3(x) $\forall x ((\neg\ P(x,d) \vee R(g2(x), g3(x))) \wedge (\neg Q(g1(x),d) \vee R(g2(x), g3(x))))$ (2 clausulas)

A2: prenex: $\exists x \forall y P(x,y) \wedge \forall z \exists t (Q(z,t) \rightarrow R(a,f(b)))$ renombrar variables

$\forall x \exists y \exists z \forall t\ (P(x,y) \wedge Q(z,t) \rightarrow R(a,f(b)\ )$

FNC: $\forall x \exists y \exists z \forall t\ (\neg (P(x,y) \wedge Q(z,t)) \vee R(a,f(b)\ )$ (elim $\rightarrow$)

$\forall x \exists y \exists z \forall t\ (\neg P(x,y) \vee \neg\ Q(z,t) \vee R(a,f(b)\ )$ (DeMorgan)

Skolemizacion: y/h1(x), z/h2(x): $\forall x \forall t\ (\neg P(x,h1(x)) \vee \neg\ Q(h2(x),t) \vee R(a,f(b)\ )$ (1 clausula)

¬ B: prenex: $\neg \forall x (P(x,y) \vee (\exists z R(z) \vee (\exists u Q(x,u) \wedge \forall t Q(t,c))))$ renombrar las variables

$\neg \forall x \exists z \exists u \forall t\ (P(x,y) \vee (R(z) \vee (Q(x,u) \wedge Q(t,c))))$

$\exists x \forall z \forall u \exists t\ \neg\ (P(x,y) \vee (R(z) \vee (Q(x,u) \wedge Q(t,c))))$

Cierre existencial: $\exists y \exists x \forall z \forall u \exists t \neg (P(x,y) \vee (R(z) \vee (Q(x,u) \wedge Q(t,c))))$

FNC: $\exists y \exists x \forall z \forall u \exists t \ (\neg P(x,y) \wedge \neg (R(z) \vee (Q(x,u) \wedge Q(t,c))))$ (DeMorgan)

$\exists y \exists x \forall z \forall u \exists t \ (\neg P(x,y) \wedge (\neg R(z) \wedge \neg (Q(x,u) \wedge Q(t,c))))$ (DeMorgan)

$\exists y \exists x \forall z \forall u \exists t \ (\neg P(x,y) \wedge \neg R(z) \wedge (\neg Q(x,u) \vee \neg Q(t,c)))$ (DeMorgan)

Skolemizacion: y/e, x/e1, t/f1(z,u): $\forall z \forall u \ (\neg P(e1,e) \wedge \neg R(z) \wedge (\neg Q(e1,u) \vee \neg Q(f1(z,u),c)))$ (3 clausulas)

FC: $\{\neg P(x,d) \vee R(g2(x), g3(x)), \neg Q(g1(x),d) \vee R(g2(x), g3(x)), \neg P(x,h1(x)) \vee \neg Q(h2(x),t) \vee R(a,f(b)), \neg P(e1,e), \neg R(z), \neg Q(e1,u) \vee \neg Q(f1(z,u),c)\}$

Ejercicio 5. Analizar por resolución con UMG si el siguiente conjunto de cláusulas es insatisfacible:

(2 puntos)

C1 : $P(y) \vee \neg T(g(y)) \vee Q(y)$

C2 : $Q(x) \vee P(x) \vee \neg R(x, g(x))$

C3 : $R(h(z), z) \vee \neg Q(h(z))$

C4 : $\neg P(y)$

C5 : $\neg R(x, y)$

C6 : $T(x) \vee P(x)$

Solución

C1 : $P(y1) \vee \neg T(g(y1)) \vee Q(y1)$
C2 : $Q(x2) \vee P(x2) \vee \neg R(x2, g(x2))$
C3 : $R(h(z3), z3) \vee \neg Q(h(z3))$
C4 : $\neg P(y4)$
C5 : $\neg R(x5,y5)$
C6 : $T(x6) \vee P(x6)$

R1 = (C3,C5) = $\neg Q(h(z3))$ x5/h(z3), y5/z3
R2 = (R1,C1) = $P(h(z3)) \vee \neg T(g(h(z3)))$ y1/h(z3)
R3 = (R2,C4) = $\neg T(g(h(z3)))$ y4/h(z3)
R4 = (R3,C6) = $P(g(h(z3)))$ x6/g(h(z3)) No se utiliza C2
R5 = (R4,C4') = $\square$ y4'/g(h(z3)) Se utiliza otra vez C4 con y4'