Lógica – Grado en Ingeniería Informática, Grado en Matemáticas e Informática

20 de enero de 2016

Repesca de LPO (Lógica de Primer Orden)

¡¡¡¡¡ Hojas diferentes para cada ejercicio !!!!!!

¡¡¡¡¡¡ APELLIDOS, NOMBRE (completos) en cada hoja !!!!

Ejercicio 1.1. Formalizar en el lenguaje de primer orden dado, los siguientes enunciados: *(1 punto)*

a) No existen políticos que no mientan alguna vez. (P(x) ≡ x es político, M(x) ≡ x miente alguna vez)

b) Sólo los socios o familiares de Juan tendrán un cargo en el ayuntamiento. (S(x,y) ≡ x es socio de y, F(x,y)≡ x es familiar de y, C(x) ≡ x tiene un cargo en el ayuntamiento, a ≡ Juan)

Ejercicio 1.2. Para los siguientes pares de fórmulas atómicas, encontrar, si existe, el unificador de máxima generalidad (umg), detallando el proceso de obtención del umg. *(1 punto)*

a) A: $P(g(x), x, g(t), t)$ B: $P(y, h(z), z, b)$ siendo x, y, z, t variables y h, g funciones

b) A: $Q(h(x), g(x, z), z)$ B: $Q(h(t), g(y, h(y)), t)$ siendo x, y, z, t variables y g, h funciones

Ejercicio 2. Averiguar si la fórmula Q(a,a) es o no consecuencia lógica del conjunto: *(2 puntos)*

$$\{ \exists x P(x),\ \forall y(P(y) \to Q(a,y)) \}$$

Ejercicio 3. Demostrar la corrección de la siguiente estructura deductiva mediante el cálculo de **deducción natural,** justificando adecuadamente cada paso: *(2 puntos)*

$$T[\forall x(P(x) \to R(x) \vee S(x)), \exists x(\neg R(x) \wedge \neg S(x))] \ \vdash\ \exists x \neg P(x)$$

Ejercicio 4. Obtener la forma clausular de la estructura deductiva T[C1, C2] |– Q: *(2 puntos)*

C1: $\exists y \forall x \exists z \forall w \exists v(\neg A(x,y,z) \to B(f(w,v)) \wedge C(y))$

C2: $\forall x(D(x) \to \neg \forall y A(y,a,g(b)) \vee \exists y F(x,y))$

Q: $\forall x E(x) \to C(x)$

(x,y,z,w,v son variables; a,b son constantes; f,g funciones; A,B,C,D,E,F predicados)

Ejercicio 5. Estudiar si el siguiente conjunto es insatisfacible utilizando el método de **resolución con umg**: *(2 puntos)*

C1 : $P(f(x)) \vee \neg Q(x) \vee R(x)$
C2 : $\neg P(f(x)) \vee S(g(y), y)$
C3 : $P(y) \vee R(y) \vee \neg S(y, g(y))$
C4 : $Q(x) \vee R(y)$
C5 : $\neg S(x, y)$
C6 : $\neg R(x)$

1.1. Formalizar, utilizando el lenguaje de primer orden proporcionado, los siguientes enunciados:

a) *No existen políticos que no mientan alguna vez.* *(P(x) ≡ x es político, M(x) ≡ x miente alguna vez)*

$$\neg\exists x(P(x) \wedge \neg M(x))$$

b) *Sólo los socios o familiares de Juan tendrán un cargo en el ayuntamiento.* *(S(x,y)≡ x es socio de y, F(x,y)≡ x es familiar de y, C(x) ≡ x tiene un cargo en el ayuntamiento)*

$$\forall x\ (C(x) \rightarrow S(x, a) \vee F(x, a))$$

1.2. Para los siguientes pares de fórmulas atómicas, encontrar, si existe, el unificador de máxima generalidad (umg) detallando en la tabla el proceso de obtención del umg. (Nota: α representa la sustitución que va construyendo el algoritmo de unificación hasta acabar definiendo el umg, si es que existe).

A: P(g(x), x, g(t), t) B: P(y, h(z), z, b) siendo x, y, z, t variables y h, g funciones

s = {y/g(x)}

As: P(g(x), x, g(t), t) Bs: P(g(x), h(z), z, b)

s = {y/g(h(z)), x/h(z)}

As: P(g(h(z)), h(z), g(t), t) Bs: P(g(h(z)), h(z), z, b)

s = {y/g(h(g(t))), x/h(g(t)), z/g(t)}

As: P(g(h(g(t))), h(g(t)), g(t), t) Bs: P(g(h(g(t))), h(g(t)), g(t), b)

s = {y/g(h(g(b))), x/h(g(b)), z/g(b), t/b}

As: P(g(h(g(b))), h(g(b)), g(b), b) Bs: P(g(h(g(b))), h(g(b)), g(b), b)

A y B son unificables y s = {y/g(h(g(b))), x/h(g(b)), z/g(b), t/b} es su UMG

A: Q(h(x), g(x, z), z) B: Q(h(t), g(y, h(y)), t) siendo x, y, z, t variables y g, h funciones

s = {t/x}

As: Q(h(x), g(x, z), z) Bs: Q(h(x), g(y, h(y)), x)

s = {t/x, y/x}

As: Q(h(x), g(x, z), z) Bs: Q(h(x), g(x, h(x)), x)

s = {t/x, y/x, z/h(x)}

As: Q(h(x), g(x, h(x)), h(x)) Bs: Q(h(x), g(x, h(x)), x)

La discordancia (x, h(x)) no tiene solución, por lo que A y B no son unificables

Averiguar si la fórmula $Q(a,a)$ es o no consecuencia lógica del conjunto

$$\{ \exists x\, P(x) \;,\; \forall y\, (P(y) \rightarrow Q(a,y)) \}$$

Fuente: eval enero 2016

1.Demostrar la corrección de la siguiente estructura deductiva mediante deducción natural:

T[□x(P(x) □ R(x) ∨ S(x)), □x(←R(x) ∍ ←S(x))] ├── □x ¬P(x)

1. □x(←R(x) ∍ ←S(x)) (prem)
2. ¬R(a) ∍ ←S(a)
3. ¬R(a)
4. ¬S(a)
5. P(a) (sup)
6. □x(P(x) □ R(x) ∨ S(x)) (prem)
    1. P(a) □ R(a) ∨ S(a)
    2. R(a) ∨ S(a) (5,7)
    3. R(a) corte (4,3)
    4. R(a) ∍ ←R(a) (3,9)

11. P(a) → R(a) ∍ ←R(a) (5,9)
12. ¬P(a) (I¬ 11)
13. □x ¬P(x)

(INDENT FROM 5)

Obtener la forma clausular de la estructura deductiva [C1, C2] |– Q:
Donde tenemos
C1: $\exists y \forall x \exists z \forall w \exists v(\neg A(x,y,z) \rightarrow B(f(w,v)) \wedge C(y))$
C2: $\forall x(D(x) \rightarrow \neg \forall y A(y,a,g(b)) \vee \exists y\, F(x,y))$
Q: $\forall x\, E(x) \rightarrow C(x)$
(x,y,z,w,v son variables; a,b son constants; f,g funciones; A,B,C,D,E,F predicatos)

Solucion:

C1: es en forma prenex
C1: no tiene variables libres, nada por cierre existencial
C1: FNC: $\neg\neg A(x,y,z) \vee (B(f(w,v)) \wedge C(y))$ (eliminación de $\rightarrow$)
$A(x,y,z) \vee (B(f(w,v)) \wedge C(y))$ (eliminación de $\neg\neg$)
$(A(x,y,z) \vee B(f(w,v))) \wedge (A(x,y,z) \vee C(y))$ (distributivitad de $\vee$ a $\wedge$ y)
C1: Skolemizacion (tenemos en las formulas: constantes a,b, funciones f,g):
$\forall x\, \forall w\, (A(x,c,h(x)) \vee B(f(w,f'(x,w)))) \wedge (A(x,c,h(x)) \vee C(c))$ (dos clausulas)

C2: poner en forma prenex:
$\forall x(D(x) \rightarrow \neg \forall y A(y,a,g(b)) \vee \exists z\, F(x,z))$ (renombrar la segunda variable y)
$\forall x(D(x) \rightarrow \exists y \neg A(y,a,g(b)) \vee \exists z\, F(x,z))$ (Interdefinición de cuantificadores)
$\forall x \exists y\, (D(x) \rightarrow \neg A(y,a,g(b)) \vee \exists z\, F(x,z))$ (distribución de conectivas)
$\forall x \exists y \exists z\, (D(x) \rightarrow \neg A(y,a,g(b)) \vee F(x,z))$ (distribución de conectivas)
C2: no tiene variables libres, nada por cierre existencial
C2: FNC: $(\neg D(x) \vee \neg A(y,a,g(b)) \vee \exists z\, F(x,z))$ (eliminación de $\rightarrow$)
C1: Skolemizacion (tenemos en las formulas: constantes a,b,c funciones f,g,h,f'):
$\forall x\, \exists z\, (\neg D(x) \vee \neg A(f''(x),a,g(b)) \vee F(x,f'''(x)))$ (una sola clausula)

Negar la conclusión:
$\neg$Q: forma prenex:
$\neg(\forall x\, E(x) \rightarrow C(x))$
$\neg(\exists x\, (E(x) \rightarrow C(x)))$ Distribución de conectivas respecto a cuantificadores
$\forall x\, \neg\, (E(x) \rightarrow C(x))$ Interdefinición de cuantificadores:
$\neg$Q: no tiene variables libres, nada por cierre existencial
$\neg$Q: FNC: $\neg\, (\neg E(x) \vee C(x))$ eliminación de $\rightarrow$
$E(x) \wedge \neg C(x)$ (DeMorgan)
$\neg$Q: Skolemizacion: $\forall x\, (E(x) \wedge \neg C(x))$ no tenemos cuantificadores existenciales (2 clausulas)

Forma clausular:
$\{ A(x,c,h(x)) \vee B(f(w,f'(x,w))), A(x,c,h(x)) \vee C(c), \neg D(x) \vee \neg A(f''(x),a,g(b)) \vee F(x,f'''(x)), E(x), \neg C(x)\}$

Ejercicio 5. Estudiar si el siguiente conjunto es insatisfacible utilizando el método de resolución:

C1 : $P(f(x)) \vee \neg Q(x) \vee R(x)$

C2 : $\neg P(f(x)) \vee S(g(y), y)$

C3 : $P(y) \vee R(y) \vee \neg S(y, g(y))$

C4 : $Q(x) \vee R(y)$

C5 : $\neg S(x, y)$

C6 : $\neg R(x)$

Solución:

Renombrado de variables,

C1 : $P(f(x1)) \vee \neg Q(x1) \vee R(x1)$

C2 : $\neg P(f(x2)) \vee S(g(y2), y2)$

C3 : $P(y3) \vee R(y3) \vee \neg S(y3, g(y3))$

C4 : $Q(x4) \vee R(y4)$

C5 : $\neg S(x5, y5)$

C6 : $\neg R(x6)$

Resolución,

R1: $P(f(x1)) \vee \neg Q(x1)$	C1,C6 {x6/x1}
R2: $Q(x4)$	C4,C6’ {x6’/y4}, siendo C6’: $\neg r(x6’)$
R3: $P(f(x1))$	R1,R2 {x4/x1}
R4: $S(g(y2),y2)$	R3,C2 {x2/x1}
R5: $\square$	R4,C5 {x5/g(y2), y5/y2}

(C6 se usa dos veces con su correspondiente renombrado y C3 no se usa)