Lógica (segundo bloque)

Grado en Ingeniería Informática, Grado en Matemáticas e Informática, Doble Grado en Ingeniería Informática y ADE

Segundo Parcial, 20 de Diciembre de 2019, 17:00h - Duración del examen: 2 horas

1. Formalización y Teoría (**2.5 puntos**)

1.1 - **Formalizar** el siguiente razonamiento en el lenguaje de la Lógica de Primer Orden (**1.7 puntos**).

> *Un persona que presta dinero a otra es acreedor suyo.*
> *Para que mi negocio salga adelante, todos mis acreedores tienen que estar contentos.*
> *Pepe me presta dinero y su negocio sale adelante, pero no está contento, mientras Paco es acreedor mío a no ser que yo le caiga mal.*
> *Yo le caigo bien a todo el mundo.*
> *Por tanto, mi negocio sale adelante.*

Las constantes “yo”, “pepe” y “paco” indican las tres personas mencionadas en el razonamiento.
Los predicados tienen el siguiente significado:

- P(x): x es una persona
- PD(x,y): x presta dinero a y
- AC(x,y): x es acreedor de y
- SA(x): el negocio de x sale adelante
- C(x): x está contento
- CB(x,y): x le cae bien a y

$\forall x \forall y\, (P(x) \land P(y) \land PD(x,y) \to AC(x,y))$
$SA(yo) \to \forall x (AC(x,yo) \to C(x))$
$PD(pepe,yo) \land SA(pepe) \land \neg C(pepe) \land (AC(paco,yo) \lor \neg CB(yo,paco))$
$\forall x (P(x) \to CB(yo,x))$

$SA(yo)$

COMENTARIOS

- No es mala idea usar una función n(x) que indicara “el negocio de x”, con la condición de que su uso fuera consistente en toda la formalización.
- No se ha penalizado el no uso del predicado P: se ha considerado correcta, por ejemplo, $\forall x \forall y\, (PD(x,y) \to AC(x,y))$ como primera fórmula. En clase hemos comentado muchas veces que acotar el alcance de las oraciones usando predicados como P es buena práctica, aunque en general la necesidad o no de usarlos depende del contexto. En este caso se podría argumentar que el uso de P no es necesario porque predicados como PD solo son verdaderos cuando ambos argumentos son personas.

ERRORES MÁS FRECUENTES

Sería imposible detallar todos los errores que se han encontrado. Nos limitamos a mencionar los más significativos:

- Inexplicablemente, en la primera fórmula un número no pequeño de alumnos ha usado dos variables sin introducirlas con cuantificadores; esto probablemente se debe a que no se ha entendido que la afirmación es general: “toda persona que presta dinero a otra es acreedor suyo.
- Muchos han usado constantes para Pepe y Paco pero, no se sabe por qué, han dejado “yo” como variable. Además de no tener sentido, esto ha complicado bastante las cosas.

- Algunos han considerado que “ser acreedor” es un concepto formalizable con un predicado de un argumento; esto va en contra del uso que se hace: “acreedor SUYO”; “acreedor MÍO”.
- Muchísimos han formalizado mal la segunda fórmula: (a) $SA(yo) \rightarrow \forall x(AC(x,yo) \wedge C(x))$ y (b) $\forall x(AC(x,yo) \wedge C(x)) \rightarrow SA(yo)$ han sido dos de las versiones más frecuentes. En el caso de (b) el error es, una vez más, no haberse fijado en que lo que se dice de los acreedores es condición NECESARIA para que mi negocio salga adelante. Más interesante es el caso de (a): si bien se ha interpretado correctamente el aspecto que acabamos de mencionar, esta formalización incorrecta demuestra cuánto tengamos el temario por así decir “cogido con alfileres”: en cuanto una frase como “todos mis acreedores tienen que estar contentos”, que claramente es un $\forall$ con una $\rightarrow$ dentro, se encuentra dentro de una oración más grande, perdemos el norte y, al no parecernos que dos implicaciones una dentro de otra puede ser correcto, decidimos poner una conjunción.
- En la tercera fórmula se han cometido muchísimos errores a la hora de formalizar el “a no ser que”; también, algunos han decidido que Pepe y Paco son la misma persona, o han leído la frase de forma incorrecta (está claro que “le caiga mal” se refiere a Paco y a mí).
- La cuarta fórmula era fácil pero algunos han encontrado soluciones muy imaginativas como usar una constante para “todo el mundo”.
- Relativamente poco se han equivocado con la conclusión; sin embargo, algunos no han indicado correctamente que, justamente, se trata de la conclusión y no de otra premisa más.
- Se han considerado errores graves el uso de predicados anidados: un ejemplo típico ha sido el uso de $C(A(x,y))$ para indicar que uno de mis acreedores está contento.

1.2 - Decir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, **justificando la respuesta** (**0.4 puntos**).

A. En una refutación lineal e input a partir de seis cláusulas iniciales C1...C6, la cláusula C7 obtenida como primer resolvente puede resultar de resolver C2 con C3.
B. Dos fórmulas $B1=\exists x\forall yA$ y $B2=\forall y\exists xA$, donde A es la misma fórmula en ambas, pueden ser equivalentes, es decir, tener exactamente los mismos modelos y contramodelos.

A. VERDADERO: este paso de la refutación cumple con la condición necesaria para que sea una derivación input porque se usa al menos una (de hecho, dos) de las cláusulas iniciales; además, la definición de derivación lineal no pone ninguna condición sobre el primer resolvente obtenido (sí pone condiciones sobre los siguientes resolventes). Por tanto, este paso puede ser el primer paso de una refutación lineal e input.
B. VERDADERO: esto sucede por ejemplo cuando ambas fórmulas B1 y B2 vienen de calcular la forma prenex de alguna fórmula C, cambiando el orden en que se mueven los cuantificadores para que finalmente estén en la cabeza de la fórmula; al aplicarse reglas de equivalencia en cada paso de transformación de C, tanto B1 como B2 son equivalentes a C y, por tanto, B1 es equivalente a B2.

COMENTARIOS

Para A he considerado como aceptable prácticamente cualquier explicación que demostrara MÁS O MENOS que se conocían las definiciones. Para B, en cambio, he sido bastante binario (todo o nada).

ERRORES MÁS FRECUENTES

- Casi todos han hecho A de forma correcta o casi correcta.
- Casi nadie ha acertado B: las respuestas equivocadas más frecuentes han sido:
    - Que el orden distinto de los cuantificadores genera una Forma Normal de Skolem diferente y, por tanto, los modelos son distintos sin remedio (o que es falso).
    - Que simplemente las dos fórmulas son distintas por el cambio de orden.
    - Que pueden tener los mismos modelos si A es una tautología: esto no está del todo equivocado aunque A viene a ser una fórmula abierta (con variables libres), por lo que no

hemos definido del todo el concepto de tautología en estos casos; además, no se ha dado un ejemplo que habría ayudado a entender la argumentación.

- Algunos han dado argumentaciones razonables para llegar a contestar VERDADERO, pero partiendo de condiciones arbitrarias sobre las interpretaciones: “pongamos que el dominio tenga un elemento” o “sea P el ‘menor o igual’”. En cambio, la pregunta se refiere a todas las interpretaciones, por lo que limitarse a algunas solo permite dar una respuesta parcial.

1.3 - Dar un ejemplo de una fórmula que no tenga ningún **modelo** con dominio de **un elemento** y sí tenga modelos con dominio de **dos elementos**. Justificar la respuesta (**0.4 puntos**).

La fórmula que se pedía era una que requiriese la presencia de al menos dos elementos distintos del dominio para ser verdadera.
El ejemplo probablemente más sencillo es $p(a)\wedge\neg p(b)$: si el dominio tiene un solo elemento, pongamos el número 0, la interpretación de a y b TIENE que ser la misma ($I(a)=I(b)=0$), por lo que no es posible que p sea verdadero y falso a la vez para 0; en cambio, si hay al menos dos elementos ES POSIBLE que I(a) no sea lo mismo que I(b), por lo que el comportamiento de p deja de ser contradictorio.
Otros ejemplos son $\exists x p(x)\wedge\neg\forall x p(x)$, $\exists x\exists y(p(x)\wedge\neg p(y))$, etc. todos ellos juegan con imposibilidad de que un mismo predicado fuera verdadero y falso a la vez. Otro tipo de ejemplo usa la desigualdad: $a\neq b$; $\exists x\exists y(x\neq y)$, etc.

ERRORES MÁS FRECUENTES

- Poner un razonamiento en lugar de una fórmula (inexplicable) e intentar apañarse de esta forma.
- Acotar el significado de los predicados. Esto no se puede hacer por lo mismo que comentamos en 1.2: que no tenga modelos con dominios de un elemento significa que, a la hora de buscar modelos, solo se puede asumir ciertas características del dominio, pero no de los predicados; de otra forma, la respuesta “no hay modelo” es inevitablemente parcial. La excepción en este caso es la (des)igualdad, cuyo significado está decidido de antemano.
- Usar fórmulas con variables libres como $p(x)\wedge\neg p(y)$: esto queda ambiguo porque no hemos definido su semántica de forma completa.
- Tratar $p(x)\wedge\neg p(x)$ como si las dos ocurrencias de la variable pudieran tener distinto valor: obviamente habría que usar dos variables en lugar de una.
- Usar dos fórmulas, una para el dominio de un elemento y otra para el dominio de dos; obviamente, no era lo que se pedía en este ejercicio.
- Usar medios semántico de forma creativa para conseguir la demostración a partir de un ejemplo incorrecto.

2. Semántica (**2.5 puntos**)

Demostrar mediante **análisis semántico**, en el dominio D = {0,1}, que **no** existe relación de consecuencia lógica en la siguiente argumentación, **justificando** adecuadamente todos los pasos.

$$\{\ \exists x(R(a,x) \vee \forall y\, S(b,y)),\ \ S(a,b)\wedge S(b,a),\ \ \forall x(\neg Q(b)\rightarrow P(x)),\ \ \forall x(R(x,b)\rightarrow P(x))\ \}$$
$$\vDash\ \exists x(R(x,x)\vee S(x,x)\vee P(b))$$

Solución. Denotamos por A,B,C,D,E las 5 fórmulas de izquierda a derecha. Para demostrar que E no es consecuencia lógica de A-D, buscamos una interpretación <D,i> que es modelo de A-D y contramodelo de E. Ponemos i(a) = 0, i(b) = 1. Hay que definir los valores de P_D, Q_D, R_D, S_D.

(i) i(E)=F implica que $P_D(1) = F$ y no existe un constante c tal que i(R(x,x){x/c}) = V o i(S(x,x){x/c}) = V. Por tanto $R_D(0,0) = S_D(0,0) = R_D(1,1) = S_D(1,1) = F$.

(ii) i(A) = V => i(∃xR(a,x)) = V o i(∀y S(b,y)) = V. Pero S_D(1,1) = F en (i) implica que i(S(b,y){y/b}) = F. Entonces i(∀y S(b,y))) = F. Por tanto i(∃xR(a,x)) = V. Ahora R_D(0,0) = F en (i) implica que i(R(a,x){x/a}) = F y por tanto para tener i(∃xR(a,x)) = V ponemos i(R(a,x){x/b}) = V y así R_D(0,1) = V.

(iii) Dado que en (i) P_D(1) = F, i(P(x){x/b}) = F y entonces i(∀xP(x)) = F. Para que se verifica fórmula C, i(∀x(¬Q(b) → P(x))) = V, tenemos que poner i(Q(b)) = V y entonces Q_D(1) = V.

(iv) i(D) = V sii i(R(x,b) → P(x)){x/a} = i(R(x,b) → P(x)){x/b} = V. De (i) R_D(1,1) = F implicando que i(R(b,b)) = F y entonces i(R(x,b) → P(x)){x/b} = V. Desde (ii) R_D(0,1) = V y por tanto i(R(x,b){x/a) = V, Así por tener i(R(x,b) → P(x)){x/a} = V, necesitamos que i(P(x){x/a}) = V y así P_D(0) = V.

(v) i(B) = V implica que i(S(a,b)) = i(S(b,a)) = V. Nos da entonces los valores S_D(0,1) = S_D(1,0) = V.

Con estos valores la interpretación i satisface A - D y es contramodelo de E. Tanto para Q_D(0) como R_D(1,0) podemos elegir el valor V o el valor F.

El contramodelo completo es

P_D			Q_D			R_D	0	1		S_D	0	1
0	V		0	V/F		0	F	V		0	F	V
1	F		1	V		1	V/F	F		1	V	F

Una representación alternativa sería

P_D = {<0>}, Q_D ={<1>}, R_D ={<0,1>}, S_D ={<0,1>, <1,0>}.

Explicación de notas.

Un contramodelo correcto y completo vale 1,5.

Un correcto análisis semántico de las fórmulas vale 0,5.

Se da otro 0,5 por la justificación completa de los valores del contramodelo.

Puntuación de 2 a 2,4.

La solución es básicamente correcta pero puede ser que

- faltan justificaciones (no es suficiente solamente tachar opciones sin explicación)

- la descripción del modelo no es adecuada, por ejemplo que falta el dominio {0.1} (no es suficiente simplemente dar valores de subfórmulas).

Puntuación de 1 a 1,9.

- El contramodelo es incompleto o contiene errores.
- El análisis semántico tiene errores.

Puntuación de 0 a 0,9.

- Falta el contramodelo

- Faltan partes importantes de la solución.

3. Paso a Forma Clausular y Unificación (**2.5 puntos**)

3.1 - Sea $\{ A_1, A_2 \} \models B$ la siguiente estructura deductiva:

A_1: $\exists x P(x) \land \neg \forall x Q(x)$
A_2: $\neg(\forall y Q(y) \to \exists x P(f(x)))$
B: $\forall x R(x) \land \neg \forall y P(y) \to \forall z Q(z)$

Construir el **conjunto de cláusulas** correspondiente.

Obtenemos las cláusulas para cada una de las fórmulas. Para ello tenemos que hacer las transformaciones necesarias para llegar a la forma clausular:

A_1: $\exists x P(x) \land \neg \forall x Q(x)$

$\exists x B(x) \land \neg \forall x Q(x)$ — 1. Prenex: Cambio de nombre {x/x'}
$(\exists x B(x) \land \neg \forall x' Q(x'))$ — *$(\exists x A \land B) \leftrightarrow \exists x(A \land B)$*
$\exists x(B(x) \land \exists x' \neg Q(x'))$ — *$(\neg \forall x A) \leftrightarrow (\exists x \neg A)$*
$\exists x(B(x) \land \exists x' \neg Q(x'))$ — *$(A \land \exists x B) \leftrightarrow \exists x(A \land B)$*
$\exists x \exists x'(B(x) \land \neg Q(x'))$

2. Cierre $\exists$: No hay variables libres
3. FNC: *Está en FNC*
4. Eliminar $\exists$: *{x/a}, {x'/b}*

$P(a) \land \neg Q(b)$

A_2: $\neg(\forall y Q(y) \to \exists x P(f(x)))$ — 1. Prenex: $\exists x A \to B \leftrightarrow \forall x(A \to B)$
$\neg \exists y(Q(y) \to \exists x P(f(x)))$ — *$(\neg \forall x A) \leftrightarrow (\exists x \neg A)$*
$\forall y \neg(Q(y) \to \exists y P(f(x)))$ — *$(A \to \exists x B) \leftrightarrow \exists x(A \to B)$*
$\forall y \neg \exists x(Q(y) \to P(f(x)))$ — *$(\neg \exists x A) \leftrightarrow (\forall x \neg A)$*

2. Cierre $\exists$: No hay variables libres
3. FNC:

$\forall y \forall x \neg(Q(y) \to P(f(x)))$ — *$(A \to B) \leftrightarrow (\neg A \lor B)$*
$\forall y \forall x \neg(\neg Q(y) \lor P(f(x)))$ — *$\neg(A \lor B) \leftrightarrow \neg A \land \neg B$*
$\forall y \forall x(\neg\neg Q(y) \land \neg P(f(x)))$ — *$\neg\neg A \leftrightarrow A$*
$\forall y \forall x(Q(y) \land \neg P(f(x)))$ — 4. Eliminar $\exists$: *{y/a}*
$\forall y \forall x(Q(y) \land \neg P(f(x)))$

$\neg$B: $\neg(\forall x R(x) \land \neg \forall y P(y) \to \forall z Q(z))$ — 1. Prenex: *$(\forall x A \land B) \leftrightarrow \forall x(A \land B)$*
$\neg(\forall x(R(x) \land \neg \forall y P(y)) \to \forall z Q(z))$ — $\forall x A \to B \leftrightarrow \exists x(A \to B)$
$\neg \exists x((R(x) \land \neg \forall y P(y)) \to \forall z Q(z))$ — *$(\neg \forall x A) \leftrightarrow (\exists x \neg A)$*
$\forall x \neg((R(x) \land \exists y \neg P(y)) \to \forall z Q(z))$ — *$(\neg \exists x A) \leftrightarrow (\forall x \neg A)$*
$\forall x \neg((R(x) \land \exists y \neg P(y)) \to \forall z Q(z))$ — *$(\exists x A \land B) \leftrightarrow \exists x(A \land B)$*
$\forall x \neg(\exists y(R(x) \land \neg P(y)) \to \forall z Q(z))$ — $\exists x A \to B \leftrightarrow \forall x(A \to B)$
$\forall x \neg \forall y((R(x) \land \neg P(y)) \to \forall z Q(z))$ — *$(\neg \forall x A) \leftrightarrow (\exists x \neg A)$*
$\forall x \exists y \neg((R(x) \land \neg P(y)) \to \forall z Q(z))$ — $A \to \forall x B \leftrightarrow \forall x(A \to B)$
$\forall x \exists y \neg \forall z((R(x) \land \neg P(y)) \to Q(z))$ — *$(\neg \forall x A) \leftrightarrow (\exists x \neg A)$*
$\forall x \exists y \exists z \neg((R(x) \land \neg P(y)) \to Q(z))$

2. Cierre $\exists$: No hay variables libres
3. FNC: *$(A \to B) \leftrightarrow (\neg A \lor B)$*

$\forall x \exists y \exists z \neg(\neg(R(x) \land \neg P(y)) \lor Q(z))$ — *$\neg(A \lor B) \leftrightarrow \neg A \land \neg B$*
$\forall x \exists y \exists z (\neg\neg(R(x) \land \neg P(y)) \land \neg Q(z))$ — *$\neg\neg A \leftrightarrow A$*
$\forall x \exists y \exists z((R(x) \land \neg P(y)) \land \neg Q(z))$ — *$\neg\neg A \leftrightarrow A$*

4. Eliminar $\exists$: *{y/f(x), z/g(x)}*

$\forall x(R(x) \land \neg P(f(x))) \land \neg Q(g(x)))$

El conjunto de clausulas obtenido es:

{C_1: {P(a)}, C_2: {¬Q(b)}, C_3: {Q(y)}, C_4: {¬P(f(x))}, C_5: {R(x)}, C_6: {¬P(f(x))}, C_7: {¬Q(g(x))}}

3.2 - Para los siguientes pares de fórmulas atómicas, encontrar, si existe, el **unificador de máxima generalidad** (UMG). Detallar el proceso de obtención del UMG.

(a) P(z, h(f(y), y), f(z)) con P(g(x), h(u,g(b)), u)

(b) Q(f(x, y), x, y) con Q(f(t, t), v, g(v))

Obtenemos el proceso de unificación:

a)

α	Aα	Bα	tA	tB
λ	P(z, h(f(y), y), f(z))	P(g(x), h(u, g(b)), u)	z	g(x)
{z/g(x)}	P(g(x) , h(f(y), y), f(g(x)))	P(g(x), h(u, g(b)), u)	f(y)	u
{ z/g(x),u/f(y)}	P(g(x) , h(f(y), y), f(g(x)))	P(g(x), h(f(y), g(b)), f(y))	y	g(b)
{z/g(x),u/f(g(b)), y/g(b)}	P(g(x) , h(f(g(b)), g(b)), f(g(x)))	P(g(x), h(f(g(b)), g(b)), f(g(b)))	x	b
{z/g(b),u/f(g(b)), y/g(b),x/b}	P(g(b) , h(f(g(b)), g(b)), f(g(b)))	P(g(b) , h(f(g(b)), g(b)), f(g(b)))		

Unificable, con UMG = {z/g(b), u/f(g(b)), y/g(b), x/b}

b)

α	Aα	Bα	tA	tB
λ	Q(f(x, y), x, y)	Q(f(t, t), v, g(v))	x	t
{x/t}	Q(f(t, y), t, y)	Q(f(t, t), v, g(v))	y	t
{x/t, y/t}	Q(f(t, t), t, t)	Q(f(t, t), v, g(v))	t	v
{x/t, y/t, v/t}	Q(f(t, t), t, t)	Q(f(t, t), t, g(t))	**t**	**g(t)**

No Unificable

4. Resolución con UMG (**2.5 puntos**)

4.1 - Decidir mediante **resolución con UMG** si el siguiente conjunto de cláusulas es insatisfacible, indicando en cada paso el **UMG** obtenido (**1.5 puntos**):

C1:	¬P(x) ∨ Q(x)
C2:	¬Q(x) ∨ R(b, x) ∨ S(b, x)
C3:	S(f(x), x)
C4:	T(a, b)
C5:	P(a)
C6:	¬R(b, a)
C7:	¬T(x, y) ∨ ¬S(y, x)

4.2 - ¿Se puede demostrar con una refutación **NO LINEAL** y **SÍ DIRIGIDA** (siendo C1-C5 el conjunto soporte y C6-C7 el conjunto objetivo)? Si se puede, dar un **ejemplo**. (**1.0 puntos**)

Ejemplo de solución NO LINEAL y SÍ DIRIGIDA

Renombrado:

C1:	¬P(x1) ∨ Q(x1)
C2:	¬Q(x2) ∨ R(b, x2) ∨ S(b, x2)
C3:	S(f(x3), x3)
C4:	T(a, b)
C5:	P(a)
C6:	¬R(b, a)
C7:	¬T(x7, y7) ∨ ¬S(y7, x7)

R1:	¬Q(a) ∨ S(b, a)	(C2, C6)	{x2/a}
R2:	¬S(b, a)	(C4, C7)	{x7/a, y7/b}
R3:	¬Q(a)	(R1, R2)	{ }
R4:	¬P(a)	(R3, C1)	{x1/a}
R5:	[]	(R4, C5)	{ }

Si se responde con una resolución correcta SÍ LINEAL y/o NO DIRIGIDA, solo se obtienen los puntos del apartado 4.1 (i.e. 1,5p)