Evaluación de Lógica Proposicional

Grado en Ingeniería Informática, Grado en Matemáticas e Informática y Doble Grado en Ingeniería Informática y ADE

27 de octubre de 2017

Ejercicio 1. Formalizar en el lenguaje de la lógica proposicional

a) los siguientes *enunciados*:

- Contrato el plan AmigoEnergia o me hago autosuficiente si y solamente si quiero ahorrar pero me preocupa el medio ambiente.
- Si te suben el seguro de la casa, tienes que venir a MultiSeguro y solicitar un descuento a menos que tu casa tenga más de 15 años

b) y la siguiente *argumentación*:

- Si tienes más de tres años y una hermana melliza, el colegio asigna clases diferentes para los hermanos, a menos que tus padres reclamen a los tribunales. Si tus padres reclaman a los tribunales, el colegio no puede asignar clases diferentes para los hermanos. No es cierto que tengas una hermana melliza y que tus padres hayan reclamado a los tribunales. Por consiguiente, tienes menos de tres años y el colegio asigna la misma clase para los hermanos.

<u>Solución</u>:

a-1)

- p: Contrato el plan AmigoEnergia
- q: Me hago autosuficiente
- r: Quiero ahorrar
- s: Me preocupa el medio ambiente
-
- $(p \vee q) \leftrightarrow (r \wedge s)$

a-2)

- subirSeguroCasa → (¬casaMas15Años→ venirAMultiSeguro ∧ solicitarDescuento)

b)

- p: Tienes más de tres años
- q: Tienes hermana melliza
- r: Asignar clases diferentes

- s: Tus padres reclaman a los tribunales

  - Si tienes más de tres años y una hermana melliza, el colegio asigna clases diferentes para los hermanos, a menos que tus padres reclamen a los tribunales.
    - $(p \wedge q) \rightarrow (r \vee s)$
  - Si hay una reclamación a los tribunales, el colegio no puede asignar clases diferentes.
    - $s \rightarrow \neg r$
  - No es cierto que tienes una hermana melliza y que haya una reclamación a los tribunales.
    - $\neg (q \wedge s)$
  - Por consiguiente, tienes menos de tres años y el colegio asigna la misma clase para los hermanos.
    - $\neg p \wedge \neg r$

Ejercicio 2.1. Indica claramente si las siguientes afirmaciones son VERDADERAS (V) o FALSAS (F). Es necesario justificar brevemente las respuestas en todos los casos.

a) Una fórmula satisfacible puede ser contingente

b) Una fórmula satisfacible puede ser válida

c) Una fórmula satisfacible puede ser contradicción

d) B es consecuencia de A1, A2, …, An si al menos una interpretación es tanto modelo de B como de A1, A2, ..., An

e) Si B no es deducible de A1, A2, …, An, entonces podemos afirmar que A1 ∧ A2 ∧ … ∧ An ∧ ¬B es insatisfacible

Solución:

a) *V Una fórmula es satisfacible si tiene al menos un modelo (es decir, una interpretación que la hace verdadera). Una fórmula es contingente si tiene al menos un modelo y un contramodelo. Una fórmula satisfacible, al tener al menos un modelo, puede ser contingente, siempre que también tenga algún contramodelo.*

(Nota para a, b y c: No se considera una justificación correcta cuando sólo se da una de las dos definiciones o cuando se mencionan premisas y conclusiones)

b) *V Una fórmula es satisfacible si tiene al menos un modelo (es decir, una interpretación que la hace verdadera). Una fórmula es válida si sólo tiene modelos. Una fórmula satisfacible, al tener al menos un modelo, puede ser válida, siempre que no tenga ningún contramodelo.*

c) *F Una fórmula es satisfacible si tiene al menos un modelo (es decir, una interpretación que la hace verdadera). Una fórmula es contradicción si sólo tiene contramodelos. Una fórmula satisfacible, al tener al menos un modelo, no cumple la propiedad de que todas las interpretaciones sean contramodelos*

d) *F Para que B sea consecuencia lógica de A1, A2, …, An, se debe cumplir que todas las interpretaciones que satisfagan A1, A2, …, An, también tienen que satisfacer B, no sólo para una.*

(Nota: No se considera una justificación correcta si se indica que todas las interpretaciones tienen que satisfacer A1, A2, …, An o B o que las que satisfagan B han de satisfacer también A1, A2, …, An)

e) *F Si no es deducible, podemos encontrar un modelo de A1, A2, …, An y de ¬B (es decir contramodelo de B), por lo que esta fórmula sería satisfacible.*

(Nota: No se considera una justificación correcta decir que no se puede saber si sería satisfacible o insatisfacible)

Ejercicio 2.2. Clasificar las siguientes fórmulas entre “contingente”, “válida”, “contradicción” o “no es posible saberlo” (no es necesario justificar la respuesta) (+0.25p por respuesta correcta, -0.1p por respuesta incorrecta (mínimo 0p)):

a) $(A \wedge \neg A) \vee \neg(A \wedge \neg A)$ sabiendo que A es contradicción

b) $A \wedge (A \rightarrow \neg B)$ sabiendo que B es válida

Solución:

a) $(A \wedge \neg A) \vee \neg(A \wedge \neg A)$ sabiendo que A es contradicción *Válida*

(Justificación no necesaria: Para $i(A) = F$, $i(A \wedge \neg A) = Sig_{\wedge}(F, V) = F$ y a su vez, $i(\neg(A \wedge \neg A)) = Sig_{\neg}(F) = V$. Por tanto, $Sig_{\vee}(F, V) = V$ siempre)

b) $A \wedge (A \rightarrow \neg B)$ sabiendo que B es válida *Contradicción*

(Justificación no necesaria: Dado que $i(B) = V$, $i(\neg B) = F$ siempre. Cuando $i(A) = V$, $i(A \rightarrow \neg B) = Sig_{\rightarrow}(V, F) = F$ y por tanto $i(A \wedge (A \rightarrow \neg B)) = Sig_{\wedge}(V, F) = F$. Y cuando $i(A) = F$, $i(A \wedge (A \rightarrow \neg B)) = Sig_{\wedge}(F, V) = F$. Por lo tanto la fórmula siempre es F)

Ejercicio 3. Demostrar con medios semánticos que no se cumple la siguiente relación de consecuencia lógica. Indicar de forma explícita y completa: (1) los pasos principales del procedimiento y (2) el resultado final obtenido.

$$\{p \lor q \to r \lor s, r \to \neg q, \neg(r \land s \land t)\} \vDash p \land q \to \neg t$$

(Nota: no pueden utilizarse ni las tablas de verdad, ni la deducción natural, ni el método de resolución)

Solución:

Para demostrar que no se cumple la relación de consecencia lógica, buscamos un contramodelo i tal que:

(i) $i(p \land q \to \neg t) = F$
(ii) $i(p \lor q \to r \lor s) = V$
(iii) $i(r \to \neg q) = V$
(iv) $i(\neg(r \land s \land t)) = V$.

(i) => $i(p \land q) = V$ & $i(\neg t) = F$. Entonces $i(p) = i(q) = i(t) = V$.

(ii) => $i(r) = F$ o $i(\neg q) = V$. Por tanto, $i(r) = F$, dado que $i(\neg q) = F$. $i(r) = F$ => $i(r \land s \land t) = F$, y (iv) está satisfecho.

Dado que $i(p \lor q) = V$ y $i(r) = F$, para obtener (ii) necesitamos que $i(s) = V$ y en consecuencia $i(r \lor s) = V$ y entonces $i(p \lor q \to r \lor s) = V$. Por tanto hemos demostrado (i) - (iv) . Interpretación i con los valores $i(p) = i(q) = i(t) = i(s) = V$ y $i(r) = F$ es un contramodelo.

Ejercicio 4. Demostrar la siguiente deducción mediante deducción natural justificando cada paso:

$$T\,[\; q \vee r \rightarrow s \;, \neg p \vee q \;,\; \neg r \rightarrow p \;] \;\vdash\; s$$

(No se puede utilizar tablas de verdad, resolución ni análisis semántico)

<u>Solución</u>:

<u>1ª solución</u>: la más evidente

1 -	$q \vee r \rightarrow s$	premisa
2 -	$\neg p \vee q$	premisa
3 -	$\neg r \rightarrow p$	premisa
4 -	$\quad \neg s$	supuesto
5 -	$\quad \neg (q \vee r)$	modus tollens 4,1
6 -	$\quad \neg q \wedge \neg r$	De Morgan 5 con th intercambio $\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$
7 -	$\quad \neg r$	elim $\wedge$ 6
8 -	$\quad p$	modus ponens 7,3
9 -	$\quad q$	corte 8,2
10 -	$\quad \neg q$	elim $\wedge$ 6
11 -	$\quad q \wedge \neg q$	int $\wedge$ 9,10
12 -	$\neg\neg s$	int $\neg$ 4, 11
13 -	s	elim $\neg$ 12

<u>2ª solución</u>: más corta

1. $q \vee r \rightarrow s$ premisa
2. $\neg p \vee q$ premisa
3. $\neg r \rightarrow p$ premisa
4. $\neg\neg r \vee p$ Teorema de Intercambio con la equivalencia $A \rightarrow B \Leftrightarrow \neg A \vee B$
5. $r \vee p$ Teorema de Intercambio con la equivalencia $A \Leftrightarrow \neg\neg A$
6. $q \vee r$ Regla derivada de corte 2,5
7. s Modus Ponens 1,6

3ª solución: utilizando eliminación de la disyunción

1.	$q \vee r \rightarrow s$	premisa
2.	$\neg p \vee q$	premisa
3.	$\neg r \rightarrow p$	premisa
4.	$\neg p$	supuesto
5.	$\neg\neg r$	modus tollens 4,3
6.	r	elim $\neg$ 5
7.	$q \vee r$	intr $\vee$ 6
8.	s	modus ponens 7,1
9.	$\neg p \rightarrow s$	intr $\rightarrow$ 4,8
10.	q	supuesto
11.	$q \vee r$	intr $\vee$ 9
12.	s	modus ponens 10, 1
13.	$q \rightarrow s$	intr $\rightarrow$ 10,12
14.	s	elim $\vee$ 2, 9, 13

Ejercicio 5. Demostrar que la siguiente estructura deductiva es correcta usando el método de resolución:

$$T\ [\neg((r \rightarrow t) \rightarrow s)\ ,\ p \rightarrow q \vee r\ ,\ t \leftrightarrow \neg r\ ]\ \vdash\ \neg s \wedge (p \rightarrow q)$$

<u>Solución</u>:

Forma Normal Conjuntiva de premisas y de negación de la conclusión:

FNC de A1: $\neg((r \rightarrow t) \rightarrow s)$ ≡ (interdefinición de → por negación y disyunción) $\neg(\neg (r \rightarrow t) \vee s))$ ≡ (interdefinición de → por negación y disyunción) $\neg(\neg (\neg r \vee t) \vee s))$ ≡ (De Morgan) $\neg\neg (\neg r \vee t) \wedge \neg s$ ≡ (eliminación de ¬) $(\neg r \vee t) \wedge \neg s$

FNC de A2: $p \rightarrow q \vee r$ ≡ (interdefinición de →) $\neg p \vee (q \vee r)$ ≡ (mismo conector ∨) $r \vee (p \rightarrow q)$ ≡ $\neg p \vee q \vee r$

FNC de A3: $t \leftrightarrow \neg r$ ≡ (interdefinición de ↔ con ∧ y →) $(t \rightarrow \neg r) \wedge (\neg r \rightarrow t)$

≡ (interdefinición de →) $(\neg t \vee \neg r) \wedge (\neg\neg r \vee t)$ ≡ (eliminación de ¬) $(\neg t \vee \neg r) \wedge (r \vee t)$

FNC de ¬B: $\neg(\neg s \wedge (p \rightarrow q))$ ≡ (interdefinición de →) $\neg(\neg s \wedge (\neg p \vee q))$ ≡ (De Morgan) $\neg\neg s \vee \neg(\neg p \vee q)$

≡ (eliminación de ¬) $\neg\neg s \vee \neg(\neg p \vee q)$ ≡ (De Morgan) $s \vee (\neg\neg p \wedge \neg q)$ ≡ (eliminación de ¬) $s \vee (p \wedge \neg q)$

≡ (distributividad de ∨ a ∧) $(s \vee p) \wedge (s \vee \neg q)$

Forma Clausular (FC) de $A1 \wedge A2 \wedge A3 \wedge \neg B$: $\{\neg r \vee t, \neg s, \neg p \vee q \vee r, \neg t \vee \neg r, r \vee t, s \vee p, s \vee \neg q\}$

Resolución:

1. $\neg r \vee t$
2. $\neg s$
3. $\neg p \vee q \vee r$
4. $\neg t \vee \neg r$
5. $r \vee t$
6. $s \vee p$
7. $s \vee \neg q$

8. p (de C2 y C6)
9. $\neg q$ (de C2 y C7)
10. $q \vee r$ (de C3 y C8)
11. r (de C10 y C9)
12. t (de C11 y C1)
13. $\neg t$ (de C11 y C4)
14. □ (de C12 y C13)