Lógica (primer bloque)

Grado en Ingeniería Informática, Grado en Matemáticas e Informática, Doble Grado en Ingeniería Informática y ADE

Examen Final, Convocatoria Extraordinaria, 28 de Junio de 2019

1. Formalización y Teoría

Ejercicio 1.1 Responder y justificar la respuesta allá donde se indique.

1. ¿Es la siguiente frase verdadera o falsa? "*Decir que A no es una fórmula bien formada es equivalente a decir que A es contradictoria*." Justificar la respuesta.
   a) Verdadera
   b) Falsa

2. ¿Cuál es la conectiva dominante (la que se refiere a toda la fórmula) en la fórmula $p \rightarrow q \rightarrow r \rightarrow s$?
   a) La implicación lógica más a la derecha (la que está entre la r y la s).
   b) La implicación lógica del centro (la que está entre la q y la r).
   c) La implicación lógica más a la izquierda (la que está entre la p y la q).
   d) No es posible saberlo.

3. La fórmula $p \rightarrow \neg q \wedge r$ equivale a la fórmula $p \rightarrow (\neg q \wedge r)$. Justifica tu respuesta.
   a) Verdadero
   b) Falso

4. La fórmula $p \wedge q$ …
   a) Está en forma normal conjuntiva
   b) Está en forma normal disyuntiva
   c) Las dos primeras respuestas (a) y (b) son ciertas
   d) Ni (a) ni (b) son ciertas.

5. Sean dos fórmulas bien formadas cualesquiera A y B. Se sabe de ellas que tienen los mismos modelos. ¿Qué podemos afirmar de la fórmula $A \wedge \neg B$?
   a) Que es válida (tautología)
   b) Que es contingente
   c) Que es contradicción
   d) Que no es posible afirmar con certeza ninguna de las anteriores

6. Sean A, B, y C tres fórmulas bien formadas. Se sabe que los modelos de A son exactamente los contramodelos de C. ¿Qué podemos afirmar de la fórmula $A \wedge (C \rightarrow B \vee \neg A)$?

a) Que es válida (tautología)
b) Que es contingente
c) Que es contradicción
d) Que no es posible afirmar con certeza ninguna de las anteriores

7. El principio de explosión (*ex contradictione quodlibet*), expone que que de una contradicción:

a) Se puede demostrar cualquier fórmula. Justificar la respuesta.
b) No se puede demostrar ninguna fórmula. Justificar la respuesta.

8. La siguiente fórmula $(p \wedge q) \vee r \rightarrow (\neg r \rightarrow (p \wedge q))$. Justificar la respuesta.

a) Es una tautología
b) Es una contradicción
c) Es contingente

1.1.1 b. Una fórmula que no es una fórmula bien formada no tiene valores de verdad.

1.1.2 c.

1.1.3 a. La implicación lógica es la conectiva dominante en esta fórmula.

1.1.4 c.

1.1.5 c. Es una contradicción.

1.1.6 b.

1.1.7.a. Se puede demostrar $A \wedge \neg A \vdash B$ en cuatro pasos.

1.1.8 a. Lo cual puede verificarse construyendo la tabla de verdad siguiente:

r	p	q	A: $(p \wedge q) \vee r$	B: $(\neg r \rightarrow (p \wedge q))$	$A \rightarrow B$
f	f	f	v	v	v
f	f	v	v	v	v
f	v	f	v	v	v
f	v	v	f	f	v
v	f	f	v	v	v

v	f	v	f	f	v
v	v	f	v	v	v
v	v	v	f	f	v

Ejercicio 1.2. Formalizar el siguientes argumento en el lenguaje de la Lógica Proposicional, especificando el significado de cada símbolo usado. ¿Encierra un razonamiento correcto o es una falacia?

> *Si el cántaro de leche es bueno y no se me cae, tendré buena mantequilla. Si tengo buena mantequilla podré venderla y tener huevos. Si tengo huevos, tendré gallinas. Si tengo gallinas, las venderé y me compraré un vestido e iré al baile. Se me cae el cántaro de leche. Por tanto, no iré al baile.*

1.2) Cabe pensar diferentes formalizaciones. Una de ellas podría ser formalizado con las siguientes proposiciones:

p:= el cántaro de lecho es bueno
q:= se cae el cántaro de leche
r:= tener mantequilla
s:= tener huevos
t:= tener gallinas
u:= comprar un vestido e ir al baile

Siendo el razonamiento:

$$\{p \land \neg q \rightarrow r,\ r \rightarrow s,\ s \rightarrow t,\ t \rightarrow u,\ q\} \vDash \neg u$$

El razonamiento es una falacia, ya que nada impide que vaya al baile. Aunque el antecedente de una implicación lógica (→) sea falso, el consecuente puede ser verdadero.

2. Semántica

Decidir si existe o no relación de consecuencia lógica en el siguiente esquema argumental, utilizando **medios semánticos** y justificando adecuadamente los pasos dados y el resultado obtenido.

$$\{p \leftrightarrow \neg s,\ q \rightarrow r \land t,\ \neg(\neg r \lor p \rightarrow r \land \neg s)\} \vDash p \rightarrow t \lor q$$

Un argumento con premisas $\{A_1, ..., A_n\}$ y conclusión B es correcto si y solo si $[A_1,..., A_n] \vDash B$, es decir, si existe relación de consecuencia lógica entre las premisas y la conclusión.

Sea el argumento $\{p \leftrightarrow \neg s,\ q \to r \wedge t,\ \neg(\neg r \vee p \to r \wedge \neg s)\} \vDash p \to t \vee q$, donde:

A1: $p \leftrightarrow \neg s$

A2: $q \to r \wedge t$

A3: $\neg (\neg r \vee p \to r \wedge \neg s)$

B: $p \to t \vee q$

En el ejercicio se ha de razonar que no se cumple la relación de consecuencia lógica. Para ello, se busca un contramodelo del argumento, esto es, una interpretación I tal que,

$$i(B) = F \wedge i(A_j) = V \qquad j = 1,2,3$$

$i(B) = i(p \to t \vee q) = F$ sii **$i(p) = V$** y $i(t \vee q) = F$ sii **$i(t) = F$** y **$i(q) = F$**

$i(A_1) = i(p \leftrightarrow \neg s) = V$ sii $i(p) = i(\neg s) = V$ ó $i(p) = i(\neg s) = F$
como $i(p) = V$ $i(\neg s) = V$ y **$i(s) = F$**

$i(A_2) = i(q \to r \wedge t) = V$ ya se cumple, puesto que $i(q) = F$

$i(A_3) = i(\neg(\neg r \vee p \to r \wedge \neg s)) = V$ sii $i(\neg r \vee p \to r \wedge \neg s) = F$ sii
$i(\neg r \vee p) = V$ que ya se cumple pues dado que $i(p) = V$
y $i(r \wedge \neg s) = F$ como $i(\neg s) = V$ debe ser **$i(r) = F$**

$\Rightarrow$ Sí es posible definir un contramodelo:

$i(q) = F,\ i(p) = V,\ i(s) = F,\ i(r) = F,\ i(t) = F$

Por tanto el argumento no es correcto y podemos decir que no existe relación de consecuencia lógica.

3. Deducción Natural

Demostrar la siguiente deducción mediante **deducción natural** justificando cada paso:

$$T\ [\ \neg p \vee q\ ,\ q \vee r \to s\ ,\ \neg r \to p\ ] \vdash \neg t \to s$$

1. $\neg p \vee q$ premisa
2. $q \vee r \rightarrow s$ premisa
3. $\neg r \rightarrow p$ premisa
4. $\neg t$ supuesto
5. $\neg\neg r \vee p$ Teorema de Intercambio en 3 con la equivalencia $A \rightarrow B \Leftrightarrow \neg A \vee B$
6. $r \vee p$ Teorema de Intercambio en 5 con la equivalencia $A \Leftrightarrow \neg\neg A$
7. $q \vee r$ regla derivada de corte 1,6
8. s Modus Ponens 2,7
9. $\neg t \rightarrow s$ cerrar el supuesto de la línea 4: introd $\rightarrow$(4,8)

4. Transformación a Forma Clausular y Resolución

Decir si el siguiente conjunto de fórmulas es **satisfacible** calculando la **forma clausular** y aplicando a ella el método de **resolución**.

F1: $(p \rightarrow (q \wedge \neg r)) \wedge (s \leftrightarrow \neg q)$
F2: $\neg(\neg p \vee (\neg r \wedge \neg s))$
F3: $t \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg s)$
F4: $s \rightarrow t$

Se obtienen las siguientes cláusulas:
C1: $\neg p \vee q$ (de F1)
C2: $\neg p \vee \neg r$ (de F1)
C3: $\neg s \vee \neg q$ (de F1)
C4: $q \vee s$ (de F1)
C5: p (de F2)
C6: $r \vee s$ (de F2)
C7: $\neg t \vee \neg p$ (de F3)
C8: $\neg t \vee \neg s$ (de F3)
C9: $p \vee s \vee t$ (de F3)

C10: $\neg s \vee t$ (de F4)

Aplicando el método de resolución se obtienen los siguientes resolventes:

R1: q (C1,C5)
R2: $\neg s$ (R1,C3)
R3: r (R2,C6)
R4: $\neg p$ (R3,C2)
R5: $\square$ (R4,C5)

Por tanto, el conjunto inicial de fórmulas resulta ser insatisfacible.