Lógica – G-II, G-MI, G-II+ADE

Repesca (**Bloque LPO**), 23 de Enero de 2019

Tiempo para el examen: 2 horas

1. Formalización y Teoría (2 puntos)

1.1. **Formalizar** en el lenguaje de la lógica de primer orden los siguientes enunciados (1.5 puntos):

a) Para cada chiste de Ignacio hay alguien a quien le ofende ese chiste.
b) Una de dos, o bien eres cómico, o bien no ofendes a nadie.
c) No todo el que se enfada tiene razón.

Utilizar los siguientes predicados y constantes:

$C(x,y) \equiv$	x es un chiste de y
$O(x,y) \equiv$	x le ofende a y
$P(x) \equiv$	x es un cómico
$E(x) \equiv$	x se enfada
$R(x) \equiv$	x tiene razón
$a \equiv$	Ignacio

Solución:

a) Para cada chiste de Ignacio hay alguien a quien le ofende ese chiste.

- $\forall x\ (\ C(x,a) \rightarrow \exists y\ O(x,y)\ )$
- $\forall x \exists y\ (\ C(x,a) \rightarrow O(x,y)\ )$
- $\neg \exists x \forall y\ (\ C(x,a) \wedge \neg O(x,y)\ )$

b) Una de dos, o bien eres cómico, o bien no ofendes a nadie.

- $\forall x\ (\ \ (P(x) \wedge \exists y O(x,y))\ \vee\ (\neg P(x) \wedge \neg \exists y O(x,y))\ \ )$
- $\forall x\ (\ \ (P(x) \wedge \exists y O(x,y))\ \vee\ \neg\ (P(x) \vee \exists y O(x,y))\ \ )$

c) No todo el que se enfada tiene razón.

- $\neg\forall x\,(E(x) \rightarrow R(x))$
- $\exists x(E(x) \wedge \neg R(x))$

1.2. Determinar si son **unificables** los siguientes pares de fórmulas atómicas, encontrando, si existe, el **unificador de máxima generalidad** (**UMG**) y detallar el proceso de obtención del umg (0.5 puntos).

A: P(f(x), x, f(y), y)　　　　B: P(v, g(z), z, a)

siendo x, y, v, z variables y f, g funciones.

α	A α	B α	(t_A, t_B)
λ	P(f(x), x, f(y), y)	P(v, g(z), z, a)	(f(x), v)
{v/f(x)}	P(f(x), x, f(y), y)	P(f(x), g(z), z, a)	(x, g(z))
{v/f(g(z)), x/g(z)}	P(f(g(z)), g(z), f(y), y)	P(f(g(z)), g(z),z,a)	(f(y),z)
{v/f(g(f(y))), x/g(f(y)), z/f(y)}	P(f(g(f(y))), g(f(y)), f(y),y)	P(f(g(f(y))), g(f(y)), f(y), a)	(y/a)
{v/f(g(f(a))), x/g(f(a)), z/f(a), y/a}	P(f(g(f(a))), g(f(a)), f(a), a)	P(f(g(f(a))), g(f(a)), f(a), a)	

➔ A y B son unificables y su umg es {v/f(g(f(a))), x/g(f(a)), z/f(a), y/a}

2. Semántica (2 puntos)

Analizar con **medios semánticos** si la siguiente afirmación es correcta:

$$\vDash \exists x \forall y\, \neg P(x,y) \rightarrow \forall y(\exists x P(x,y) \rightarrow \neg P(y,a))$$

Si la afirmación es correcta, la fórmula es válida. Suponemos que la fórmula no es válida y buscamos un contramodelo.

Sea el dominio D = {a, b}. Ampliamos el lenguaje de la fórmula para que contenga la constante b también.

Interpretación de las constantes del lenguaje: i(a) = a, i(b) = b

1) $i(\exists x \forall y\, \neg P(x,y)) = V$ sii

1.1) $i(\forall y\, \neg P(a,y)) = V$, lo que requiere que $i(P(a,a))=F$ y $i(P(a,b))=F$

o bien

1.2) $i(\forall y\, \neg P(b,y)) = V$, lo que requiere que $i(P(b,a))=F$ y $i(P(b,b))=F$

2) $i(\forall y(\exists x P(x,y) \rightarrow \neg P(y,a))) = F$ sii

2.1) $i(\exists x P(x,a) \rightarrow \neg P(a,a)) = F$, lo que requiere que $i(\exists x P(x,a)) = V$ y $i(P(a,a)) = V$

o bien

2.2) $i(\exists x P(x,b) \rightarrow \neg P(b,a)) = F$, lo que requiere que $i(\exists x P(x,b)) = V$ y $i(P(b,a)) = V$

Para que exista contramodelo deben cumplirse 1) y 2), lo que requiere que se cumplan al menos una de las condiciones de 1) y al menos una de las de 2).

Fijemos las condiciones de 1.1), esto es, $i(P(a,a))=F$ y $i(P(a,b))=F$

Estas condiciones son incompatibles con la 2.1) porque ésta requiere que $i(P(a,a))=V$.

Se pueden cumplir las condiciones 2.2), respetando las 1.1), asignando $i(P(b,b))=V$.

Por tanto, existe un contramodelo que es:

$i(P(a,a))=F$, $i(P(a,b))=F$, $i(P(b,a))=V$, $i(P(b,b,))=V$

La fórmula NO es válida y la afirmación NO es correcta.

3. Deducción Natural (2 puntos)

Demostrar la siguiente deducción con el cálculo de deducción natural, justificando cada paso adecuadamente:

$$T\ [\ \exists y \forall z(R(y, z) \rightarrow Q(z)), \forall y \exists x(R(y, x) \vee \neg \exists z\, S(z))\ ]\ \vdash\ S(c) \rightarrow \exists y Q(y)$$

1. $\exists y \forall z\ (R(y, z) \rightarrow Q(z))$ Premisa
2. $\forall z\ (R(a^*, z) \rightarrow Q(z))$ E∃ (1)
3. $\forall y \exists x\ (R(y, x) \vee \neg \exists z\ S(z))$ Premisa
4. $\exists x\ (R(a^*, x) \vee \neg \exists z\ S(z))$ E∀ (3)
5. $R(a^*,b^*) \vee \neg \exists z\ S(z)$ E∃ (4)
6. $R(a^*,b^*) \rightarrow Q(b^*)$ E∀ (2)
7. $S(c)$ Supuesto
8. $\exists z\ S(z)$ I∃ (7)
9. $\neg\neg \exists z\ S(z)$ intercambio(8) $(A \Leftrightarrow \neg\neg A)$
10. $R(a^*,b^*)$ Corte (5,8)
11. $Q(b^*)$ E → (6,9)
12. $\exists y\ Q(y)$ I∃ (10)
12. $S(c) \rightarrow \exists y\ Q(y)$ I → (7,11)

Paso a Forma Clausular (2 puntos)

Sea $\{A_1,A_2,A_3,A_4\}$ el conjunto de fórmulas siguiente:

A_1: $\exists x B(x)$

A_2: $\forall x(\exists y C(y) \rightarrow D(x,y) \wedge A(x))$

A_3: $\exists x C(x) \wedge \forall y D(y,y)$

A_4: $\neg\exists x \forall y(D(x,y) \wedge \neg B(y))$

Construir el conjunto de cláusulas correspondiente a las fórmulas anteriores.

SOLUCION:

A_1: $\exists x B(x)$

$\exists x B(x)$ (Prenex, cierre, FNC)

$B(a)$ (FNS)

A_2: $\forall x(\exists z C(z) \rightarrow D(x,y) \wedge A(x))$ (renombrado)

$\forall x \forall z(C(z) \rightarrow D(x,y) \wedge A(x))$ (forma prenex)

$\exists y \forall x \forall z(C(z) \rightarrow D(x,y) \wedge A(x))$ (cierre existencial)

$\exists y \forall x \forall z(\neg C(z) \vee (D(x,y) \wedge A(x)))$

$\exists y \forall x \forall z((\neg C(z) \vee D(x,y)) \wedge (\neg C(z) \vee A(x)))$ (FNC)

$\forall x \forall z((\neg C(z) \vee D(x,b)) \wedge (\neg C(z) \vee A(x)))$ (FNS)

A_3: $\exists x C(x) \wedge \forall y D(y,y)$

$\exists x(C(x) \wedge \forall y D(y,y))$

$\exists x \forall y(C(x) \wedge D(y,y))$ (prenex, cierre, FNC)

$\forall y(C(c) \wedge D(y,y))$ (FNS)

A_4: $\neg\exists x \forall y(D(x,y) \wedge \neg B(y))$ (negación)

$\forall x \neg\forall y(D(x,y) \wedge \neg B(y))$

$\forall x \exists y \neg(D(x,y) \wedge \neg B(y))$ (prenex, cierre)

$\forall x \exists y (\neg D(x,y) \vee B(y))$ (FNC)

Prenex: $(\neg\exists x A) \leftrightarrow (\forall x \neg A)$
$(\neg\forall x A) \leftrightarrow (\exists x \neg A)$
Cierre $\exists$
FNC: $\neg(A \wedge A) \leftrightarrow \neg A \vee \neg A$

Eliminación $\exists$ $\{x/f(x)\}$

$\forall x\ (\neg D(x,f(x)) \vee B(f(x)))$ (FNS)

Forma Clausular:

$\{ B(a), \neg C(b) \vee D(x,y), \neg C(b) \vee A(x), C(c), D(y,y), \neg D(x,f(x)) \vee B(f(x)) \}$

5. Resolución con UMG (2 puntos)

Demostrar mediante el método de **resolución con UMG** que la fórmula

$$\exists x \exists y\ (\ t(y,g(f(y))) \vee t(x,a)\ )$$

se deduce del siguiente conjunto de cláusulas (nota: se trata de terminar el paso a forma clausular…):

C0:	$\neg p(g(x),x) \vee r(a,g(a))$
C1:	$\neg q(f(y),x) \vee p(x,f(z))$
C2:	$\neg r(a,x) \vee \neg r(f(y),y) \vee \neg r(z,g(y))$
C3:	$q(z,w) \vee t(f(z),w)$
C4:	$t(g(x),a) \vee r(f(a),a)$

La transformación de la negación de la conclusión a forma clausular genera dos nuevas cláusulas:

C5:	$\neg t(y,g(f(y)))$
C6:	$\neg t(x,a)$

Se renombran todas las variables:

C0:	$\neg p(g(x0),x0) \vee r(a,g(a))$
C1:	$p(x1,f(z1)) \vee \neg q(f(y1),x1)$
C2:	$\neg r(a,x2) \vee \neg r(f(y2),y2) \vee \neg r(z2,g(y2))$
C3:	$q(z3,w3) \vee t(f(z3),w3)$
C4:	$r(f(a),a) \vee t(g(x4),a)$
C5:	$\neg t(y5,g(f(y5)))$
C6:	$\neg t(x6,a)$

La resolución puede ser la siguiente:

C7:	$r(f(a),a)$	(C4,C6)	$\{ x6/g(x4) \}$
C8:	$\neg r(a,x2) \vee \neg r(z2,g(a))$	(C7,C2)	$\{ y2/a \}$
C8’:	$\neg r(a,g(a))$	(C8)	$\{ x2/g(a), z2/a \}$
C9:	$\neg p(g(x0),x0)$	(C0,C8’)	$\{ \}$
C10:	$\neg q(f(y1),g(f(z1)))$	(C9,C1)	$\{ x1/g(f(z1)), x0/f(z1) \}$
C11:	$t(f(f(y1)),g(f(z1)))$	(C10,C3)	$\{ z3/f(y1), w3/g(f(z1)) \}$
C12:	$\square$	(C11,C5)	$\{ y5/f(f(y1)), z1/f(f(y1)) \}$