Lógica – G-II, G-MI, G-II+ADE

Examen Final (**sólo Bloque LPO**), 29 de Junio de 2018

Tiempo para el examen: 1 hora y 45 minutos

1. LPO – Formalización y Unificación

5.1 - **Formalizar** el siguiente razonamiento en el lenguaje de la Lógica de Primer Orden:

Si nadie me paga no tengo dinero. O tengo dinero o no puedo comprar ninguna camiseta. Hay una camiseta que me gusta, y que me haría contento ponerme, pero no la tengo a no ser que la compre. Para ponerse una prenda de ropa es necesario tenerla. Una camiseta es una prenda de ropa. Por tanto no estoy contento a no ser que mi primo me pague.

La constante 'a' significa "yo"; la constante 'b' significa "mi primo"

paga(x,y)	significa "x paga a y"
dinero(x)	significa "x tiene dinero"
compra(x,y)	significa "x compra y"
camiseta(x)	significa "x es una camiseta"
gusta(x,y)	significa "x le gusta a y"
pone(x,y)	significa "x se pone y"
tiene(x,y)	significa "x tiene y"
prenda(x)	significa "x es una prenda de ropa"
contento(x)	significa "x está contento"

- Si nadie me paga no tengo dinero.

$$\neg \exists x\ paga(x,a) \Rightarrow \neg dinero(a)$$

- O tengo dinero o no puedo comprar ninguna camiseta.

$$dinero(a) \lor \neg\exists x\ (camiseta(x) \land compra(a,x))$$

- Hay una camiseta que me gusta, y que me haría contento ponerme, pero no la tengo a no ser que la compre.

$$\exists x(camiseta(x) \land gusta(x,a) \land (pone(a,x) \Rightarrow contento(a)) \land (\neg compra(a,x) \Rightarrow \neg tiene(a,x)))$$

- Para ponerse una prenda de ropa es necesario tenerla.

$$\forall x\ \forall y\ (prenda(x) \Rightarrow (\ pone(y,x) \Rightarrow tiene(y,x)\ )$$

- Una camiseta es una prenda de ropa.

$$\forall x \text{ (camiseta}(x) \Longrightarrow \text{prenda}(x) \text{)}$$

- Por tanto no estoy contento a no ser que mi primo me pague.

$$\vDash \quad \neg\text{contento}(a) \lor \text{paga}(b,a)$$

NOTAS: ¡no hay una única camiseta en el mundo! Si pone “no me compro ninguna camiseta” y “hay una camiseta” queda evidente que no puedo introducir una constante ‘c’ que significa “una camiseta”.

1.2 – Aplicar el algoritmo de **Unificación** a la siguiente pareja de átomos.

α	Aα	Bα	Nueva ligadura
{ }	P(f(x),w,g(a,z),z)	P(z,f(z),x,b)	

α	Aα	Bα	Nueva ligadura
{ }	P(f(x),w,g(a,z),z)	P(z,f(z),x,b)	z/f(x)
{z/f(x)}	P(f(x),w,g(a,f(x)),f(x))	P(f(x),f(f(x)),x,b)	w/f(f(x))
{z/f(x), w/f(f(x))}	P(f(x),f(f(x)),g(a,f(x)),f(x))	P(f(x),f(f(x)),x,b)	Fallo: x aparece en g(a,f(x))

2. LPO - Semántica

Demostrar por **Medios Semánticos** que el siguiente razonamiento NO es correcto, usando un dominio de **al menos 3 elementos**.

$$\{ \ \forall x \forall y\ (p(x,y) \vee \neg q(y,y)),\ \ \exists x q(a,x),\ \ \forall x\ (p(x,b) \Longrightarrow r(x))\ \} \vDash\ r(b) \vee r(c)$$

Necesitamos una interpretación i que haga verdaderas todas las premisas y, a la vez, falsa la conclusión. El dominio será { 0, 1, 2 } con i(a) = 0, i(b) = 1 e i(c) = 2.

(1) i(∀x∀y (p(x,y) ∨ ¬q(y,y))) = V sii

(1.1) i(∀y (p(a,y) ∨ ¬q(y,y))) = V sii

(1.1.1) i(p(a,a) ∨ ¬q(a,a)) = V sii
(1.1.1.1) i(p(a,a)) = V o bien (1.1.1.2) i(q(a,a)) = F
y también
(1.1.2) i(p(a,b) ∨ ¬q(b,b)) = V sii
(1.1.2.1) i(p(a,b)) = V o bien (1.1.2.2) i(q(b,b)) = F
y también
(1.1.3) i(p(a,c) ∨ ¬q(c,c)) = V sii
(1.1.3.1) i(p(a,c)) = V o bien (1.1.3.2) i(q(c,c)) = F

y también

(1.2) i(∀y (p(b,y) ∨ ¬q(y,y))) = V sii

(1.2.1) i(p(b,a) ∨ ¬q(a,a)) = V sii
(1.2.1.1) i(p(b,a)) = V o bien (1.2.1.2) i(q(a,a)) = F
y también
(1.2.2) i(p(b,b) ∨ ¬q(b,b)) = V sii
(1.2.2.1) i(p(b,b)) = V o bien (1.2.2.2) i(q(b,b)) = F
y también
(1.2.3) i(p(b,c) ∨ ¬q(c,c)) = V sii
(1.2.3.1) i(p(b,c)) = V o bien (1.2.3.2) i(q(c,c)) = F

y también

(1.3) i(∀y (p(c,y) ∨ ¬q(y,y))) = V sii

(1.3.1) i(p(c,a) ∨ ¬q(a,a)) = V sii
(1.3.1.1) i(p(c,a)) = V o bien (1.3.1.2) i(q(a,a)) = F
y también
(1.3.2) i(p(c,b) ∨ ¬q(b,b)) = V sii
(1.3.2.1) i(p(c,b)) = V o bien (1.3.2.2) i(q(b,b)) = F
y también
(1.3.3) i(p(c,c) ∨ ¬q(c,c)) = V sii
(1.3.3.1) i(p(c,c)) = V o bien (1.3.3.2) i(q(c,c)) = F

(2) i(∃xq(a,x)) = V sii

(2.1) i(q(a,a)) = V o bien (2.2) i (q(a,b)) = V o bien (2.3) i (q(a,c)) = V

(3) i(∀x (p(x,b)⟹r(x))) = V sii

(3.1) i(p(a,b) ⟹ r(a)) = V sii

(3.1.1) i(p(a,b)) = F o bien (3.1.2) i(r(a)) = V

y también

(3.2) i(p(b,b) ⟹ r(b)) = V sii

(3.2.1) i(p(b,b)) = F o bien (3.2.2) i(r(b)) = V

y también

(3.3) i(p(c,b) ⟹ r(c)) = V sii

(3.3.1) i(p(c,b)) = F o bien (3.3.2) i(r(c)) = V

(4) i(r(b)∨r(c)) = F sii

(4.1) i(r(b)) = F y también (4.2) i(r(c)) = F

Después de haber explicitado las condiciones, lo siguiente es ver si son compatibles (es decir, si existe esta i).

- La condición (4.1) es incompatible con (3.2.2); al ser la primer obligatoria, eliminamos (3.2.2)
- La condición (4.2) es incompatible con (3.3.2); al ser la primer obligatoria, eliminamos (3.3.2)
- Ahora (3.2.1) es obligatoria, y es incompatible con (1.2.2.1); eliminamos (1.2.2.1)
- Ahora (1.2.2.2) es obligatoria
- Ahora (3.3.1) es obligatoria, y es incompatible con (1.3.2.1); eliminamos (1.3.2.1)
- Ahora (1.3.2.2) es obligatoria

Entonces un posible contraejemplo (no el único) es i tal que

- i(p(a,a)) = i(p(a,b)) = i(p(a,c)) = i(p(b,a)) = i(p(b,c)) = i(p(c,a)) = i(p(c,c)) = V
- i(p(b,b)) = i(p(c,b)) = F
- i(q(a,a)) = i(q(a,b)) = i(q(a,c)) = V
- i(q(b,a)) = i(q(b,b)) = i(q(b,c)) = i(q(c,a)) = i(q(c,b)) = i(q(c,c)) = F
- i(r(a)) = V; i(r(b)) = i(r(c)) = F

3. LPO – Deducción Natural

Demostrar la siguiente deducción con el cálculo de **Deducción Natural**, justificando adecuadamente cada paso:

T [∀x∃y P(x,f(y)) ∨ ¬∃xQ(x), ∃x∀y(P(x,f(y)) ⟹ R(y)), P(b,f(a))]

⊢ Q(b) ⟹ ∃xR(x)

1. ∀x∃y P(x,f(y)) ∨ ¬∃xQ(x) premisa
2. ∃x∀y(P(x,f(y)) → R(y)) premisa

3.	P(b,f(a))	premisa
4.	Q(b)	supuesto
	5. ∃xQ(x)	introducción ∃x línea 4
	6. ¬¬∃xQ(x)	Intercambio línea 5 (A ⟺ ¬¬A)
	7. ∀x∃y P(x,f(y))	corte 1,6
	8. ∀y(P(a*,f(y)) → R(y))	elim ∃ línea 2 x/a*
	9. ∃y P(a*,f(y))	elim ∀ línea 7 x/a*
	10. P(a*,f(b*))	elim ∃ línea 9 y/b*
	11. P(a*,f(b*)) → R(b*)	elim ∀ línea 8 y/b*
	12. R(b*)	elim → líneas 10,11
	13. ∃xR(x)	introducción ∃x línea 12
14.	Q(b)→ ∃xR(x)	introd → líneas 3,13

4. LPO – Forma Clausular

Obtener la **forma clausular** de la siguiente estructura deductiva T[P1, P2] ⊢ C. Indicar los pasos principales del proceso de transformación y el resultado final.

P1 : $\forall x(P(x) \lor \neg\exists y(Q(y) \land R(x,y))) \lor \neg\forall x S(x)$

P2 : $\forall x(\exists y M(x,y) \Longrightarrow (R(x,y) \lor S(a)))$

C : $\exists x P(x) \Longrightarrow (M(c,y) \land Q(z))$

P1.

∀x(P(x) ∨ ¬∃y(Q(y) ∧ R(x,y))) ∨ ¬∀xS(x)

∀x(P(x) ∨ ∀y¬(Q(y) ∧ R(x,y))) ∨ ¬∀xS(x)

∀x∀y(P(x) ∨ ¬(Q(y) ∧ R(x,y))) ∨ ¬∀xS(x)

∀x∀y(P(x) ∨ ¬Q(y) ∨ ¬R(x,y))) ∨ ¬∀xS(x)

∀x∀y(P(x) ∨ ¬Q(y) ∨ ¬R(x,y))) ∨ ¬∀zS(z) (renombrar)

∀x∀y(P(x) ∨ ¬Q(y) ∨ ¬R(x,y))) ∨ ∃z¬S(z)

∀x∀y∃z(P(x) ∨ ¬Q(y) ∨ ¬R(x,y)) ∨ ¬S(z)) (forma prenex)

∀x∀y(P(x) ∨ ¬Q(y) ∨ ¬R(x,y) ∨ ¬S(f(x,y))) FS, FNC

{P(x) ∨ ¬Q(y) ∨ ¬R(x,y) ∨ ¬S(f(x,y))} FC

P2.

∀x(∃yM(x,y)→ (R(x,y) ∨ S(a))

∀x(∃yM(x,y)→ (R(x,z) ∨ S(a))

∀x∀y(M(x,y)→ (R(x,z) ∨ S(a))

∀x∀y(¬M(x,y) ∨ R(x,z) ∨ S(a)) (forma prenex)

$\exists z\ \forall x\forall y(\neg M(x,y) \lor R(x,z) \lor S(a))$ (CE)

$\forall x\forall y(\neg M(x,y) \lor R(x,b) \lor S(a))$ (FNC)

$\{\neg M(x,y) \lor R(x,b) \lor S(a)\}$ FC

¬C.
$\neg(\exists xP(x) \rightarrow (M(c,y) \land Q(z)))$

$\exists xP(x) \land \neg(M(c,y) \land Q(z))$

$\exists xP(x) \land (\neg M(c,y) \lor \neg Q(z))$

$\exists x(P(x) \land (\neg M(c,y) \lor \neg Q(z)))$ (forma prenex)

$\exists y\exists x(P(x) \land (\neg M(c,y) \lor \neg Q(z)))$

$\exists z\exists y\exists x(P(x) \land (\neg M(c,y) \lor \neg Q(z)))$ (CE)

$P(d) \land (\neg M(c,e) \lor \neg Q(i))$ (FS)

$\{P(d), \neg M(c,e) \lor \neg Q(i)\}$ (FC)

$\{\ P(x) \lor \neg Q(y) \lor \neg R(x,y) \lor \neg S(f(x,y)),\ \neg M(x,y) \lor R(x,b) \lor S(a),\ \neg P(d),\ \neg M(c,e) \lor \neg Q(i)\ \}$

5. LPO – Resolución con UMG

Demostrar, mediante el método de **resolución con UMG**, que la siguiente estructura deductiva es correcta:

$$T[C_1, C_2, C_3, C_4, C_5] \vdash \exists x\forall y(\neg Q(x,y) \land \neg R(x))$$

C_1: $R(x) \lor P(x) \lor \neg S(f(x))$
C_2: $R(x) \lor P(x) \lor \neg Q(f(x),y)$
C_3: $\neg P(x)$
C_4: $\neg R(x)$
C_5: $\neg S(a)$

Se renombran las variables:

C_1: $R(x_1) \lor P(x_1) \lor S(f(x_1))$
C_2: $R(x_2) \lor P(x_2) \lor \neg Q(f(x_2),y_2)$
C_3: $\neg S(a)$
C_4: $\neg P(x_4)$
C_5: $\neg R(x_5)$

Se hace la forma clausular de la negación de la conclusión

C_6: $Q(x_6,g(x_6)) \lor R(x_6)$

Para que el conjunto sea insatisfacible debe existir una derivación que permita llegar a la cláusula vacía:

C_2: $R(x_2) \vee P(x_2) \vee \neg Q(f(x_2),y_2)$ C_4: $\neg P(x_4)$

$\{x_2/x_4\}$

R_1: $R(x_4) \vee \neg Q(f(x_4),y_2)$ C_5: $\neg R(x_5)$

$\{x_4/x_5\}$

R_2: $\neg Q(f(x_5),y_2)$ C_6: $Q(x_6,g(x_6)) \vee R(x_6)$

$\{x_6/f(x_5), y_2/g(f(x_5))\}$

R_3: $R(f(x_5))$ C'_5: $\neg R(x_7)$

$\{x_7/f(x_5)\}$

R_4: $\square$

Hemos encontrado la cláusula vacía $\square$, luego el conjunto de cláusulas es insatisfacible. La estructura deductiva es correcta.