# Lógica (repesca segundo bloque)

Grado en Ingeniería Informática, Grado en Matemáticas e Informática, Doble Grado en Ingeniería Informática y ADE

24 de Enero de 2020, 9:00h - Duración del examen: 1 hora y 45 minutos

## 1. Formalización y Teoría (**2.5 puntos**)

1.1 **Formalizar** el siguiente razonamiento en el lenguaje de la Lógica de Primer Orden (**1.5 puntos**).

*Los franceses hablan francés. Los españoles no son franceses. Algunos españoles hablan francés, aunque no todos. Hay amistades entre franceses y españoles. Por tanto, algunos amigos de algún francés que hablan francés no son franceses.*

F(x): x es francés

H(x): x habla francés

E(x): x es español

A(x,y): x es amigo de y

$\forall x(F(x) \rightarrow H(x))$

$\forall x(E(x) \rightarrow \neg F(x))$

$\exists x(E(x) \land H(x)) \land \exists x(E(x) \land \neg H(x))$

$\exists x \exists y(E(x) \land F(y) \land A(x,y))$

$\vdash \exists x((\exists y(F(y) \land A(x,y)) \land H(x) \land \neg F(x))$

1.2 Decir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, **justificando la respuesta** (**1.0 puntos**).

(a) En una refutación dirigida a partir de seis cláusulas iniciales C1...C6, en las que las cláusulas C1...C4 corresponden al conjunto Soporte y las cláusulas C5 y C6 corresponden al conjunto Objetivo, la cláusula C7 obtenida como primer resolvente no puede resultar de resolver C5 con C6.

Falso. La refutación dirigida limita el uso de las cláusulas del conjunto Soporte y no del conjunto Objetivo.

(b) Dado un conjunto de fórmulas {A1,...,An} y una fórmula B, B es consecuencia lógica de {A1,...,An} $\models$ B sii Todo modelo de {A1,...,An} es también modelo de B

Verdadero, es la definición de consecuencia lógica.

(c) Para que una fórmula esté en Forma Normal de Skolem son requisitos necesarios: i) el que sólo haya cuantificadores universales y ii) que la matriz de la fórmula pueda estar en forma normal conjuntiva o forma normal disyuntiva.

Falso. Para que una fórmula esté en Forma Normal de Skolem son requisitos necesarios: i) el que sólo haya cuantificadores universales y ii) que la matriz de la fórmula pueda estar en forma normal conjuntiva.

## 2. Semántica (**2.5 puntos**)

Demostrar con **medios semánticos** que el siguiente razonamiento **no es correcto** sobre el dominio D={5,6,7}. Justificar adecuadamente todos los pasos.

$$\forall y \exists x\, P(y,x) \models \exists x \forall y\, P(y,x)$$

i(∀y∃xP(y,x))=V sii

{y/a} i(∃xP(a,x))=V sii

{x/a} i(P(a,a)=V

o bien

{x/b} i(P(a,b)=V

o bien

{x/c} i(P(a,c)=V

y además

{y/b} i(∃xP(b,x))=V

{x/a} i(P(b,a)=V

o bien

{x/b} i(P(b,b)=V

o bien

{x/c} i(P(b,c)=V

y además

{y/c} i(∃xP(c,x))=V

{x/a} i(P(c,a)=V
o bien
{x/b} i(P(c,b)=V
o bien
{x/c} i(P(c,c)=V

i(∃x∀yP(y,x))=F sii

{x/a} i(∀yP(y,a))=F

{y/a} i(P(a,a)=F)
o bien
{y/b} i(P(b,a)=F)
o bien
{y/c} i(P(c,a)=F)

y además
{x/b} i(∀yP(y,b))=F

{y/a} i(P(a,b)=F)
o bien
{y/b} i(P(b,b)=F)
o bien
{y/c} i(P(c,b)=F)

y además
{x/c} i(∀yP(y,c))=F

{y/a} i(P(a,c)=F)
o bien
{y/b} i(P(b,c)=F)
o bien
{y/c} i(P(c,c)=F)

El siguiente contramodelo demuestra que no se cumple la consecuencia lógica:

D={5,6,7}
i(a)=5
i(b)=6
i(c)=7

| | | |
|---|---|---|
| Pd(5,5)=V | Pd(5,6)=F | Pd(5,7)=F |
| Pd(6,5)=F | Pd(6,6)=V | Pd(6,7)=F |
| Pd(7,5)=F | Pd(7,6)=F | Pd(7,7)=V |

## 3. Paso a Forma Clausular y Unificación (**2.5 puntos**)

3.1 Encontrar, si existe, el **unificador de máxima generalidad** (**UMG**) de los siguientes pares de átomos A y B (x, y, z, v, w, t son símbolos de variable). Indicar en cada paso (cada línea de la tabla) el **unificador α** obtenido hasta el momento (nota: **no la ligadura**) y la **aplicación de α a A y B** (**1.0 puntos**).

| **α** | **Aα** | **Bα** |
|---|---|---|
| { } | P( g(a,f(y)), f(x), x ) | P( g(z,f(z)), f(f(z)), z ) |
| {z/a} | P( g(a,f(y)), f(x), x ) | P( g(a,f(a)), f(f(a)), a ) |
| {y/a, z/a} | P( g(a,f(a)), f(x), x ) | P( g(a,f(a)), f(f(a)), a ) |
| {y/a, z/a, x/f(a)} | P( g(a,f(a)), f(f(a)), f(a) ) | P( g(a,f(a)), f(f(a)), a ) |
| **fallo**: la discordancia es a y f(a) y no tiene solución NO SON UNIFICABLES | | |

| **α** | **Aα** | **Bα** |
|---|---|---|
| { } | Q( y, z, x, f(y,z) ) | Q ( w, t, g(a,w), f(t, g(a, v))) |
| {y/w} | Q ( w, z, x, f(w,z) ) | Q ( w, t, g(a,w), f(t, g(a, v))) |
| {y/w, z/t} | Q ( w, t, x, f(w,t) ) | Q ( w, t, g(a,w), f(t, g(a, v))) |
| {y/w, z/t, x/g(a,w)} | Q ( w, t, g(a,w), f(w,t) ) | Q (w, t, g(a,w), f(t, g(a, v))) |
| {y/t, z/t, x/g(a,t), w/t} | Q ( t, t, g(a,t), f(t,t) ) | Q ( t, t, g(a,t), f(t, g(a, v))) |
| {y/g(a,v), z/g(a,v), x/g(a,g(a,v)), w/g(a,v), t/g(a,v)} ESTE ES EL UMG | Q ( g(a,v), g(a,v), g(a,g(a,v)), f(g(a,v),g(a,v)) ) | Q ( g(a,v), g(a,v), g(a,g(a,v)), f(g(a,v), g(a,v))) |

3.2 Obtener la **forma clausular** de la siguiente estructura deductiva: [P1, P2] ⊦ Q, indicando los pasos principales del procedimiento (**1.5 puntos**).

P1: $\forall x\,(A(x) \wedge \exists y\,(B(y,x) \vee E(y)) \rightarrow D(x))$

P2: $\exists x\,(\exists y\,(B(y,x) \wedge \neg C(y,x)) \rightarrow C(y,a))$

Q: $\exists x\,(\neg A(x) \vee \forall y\,(B(y,x) \wedge D(y)))$

P1: $\forall x \forall y\,(A(x) \wedge (B(y,x) \vee E(y)) \rightarrow D(x))$ forma prenex

$\forall x \forall y\,(A(x) \wedge (B(y,x) \vee E(y)) \rightarrow D(x))$ cierre existencial: no hay cambios

$\forall x \forall y\,((\neg A(x) \vee \neg B(y,x) \vee D(x)) \wedge (\neg A(x) \vee \neg E(y) \vee D(x)))$ FNC

$\forall x \forall y\,((\neg A(x) \vee \neg B(y,x) \vee D(x)) \wedge (\neg A(x) \vee \neg E(y) \vee D(x)))$ FNS: no hay cambios

P2: $\exists x\,(\exists z(B(z,x) \wedge \neg C(z,x)) \rightarrow C(y,a))$ renombrado de variable ligada

$\exists x \forall z\,(B(z,x) \wedge \neg C(z,x) \rightarrow C(y,a))$ forma prenex

$\exists y \exists x \forall z\,(B(z,x) \wedge \neg C(z,x) \rightarrow C(y,a))$ cierre existencial

$\exists y \exists x \forall z\,(\neg B(z,x) \vee C(z,x) \vee C(y,a))$ FNC

$\forall z\,(\neg B(z,b) \vee C(z,b) \vee C(c,a))$ FNS

Q: $\neg \exists x\,(\neg A(x) \vee \forall y\,(B(y,x) \wedge D(y)))$ negada

$\forall x \exists y\, \neg(\neg A(x) \vee (B(y,x) \wedge D(y)))$ forma prenex

$\forall x \exists y\, \neg(\neg A(x) \vee (B(y,x) \wedge D(y)))$ cierre existencial: no hay cambios

$\forall x\,(A(x) \wedge (\neg B(f(x),x) \vee \neg D(f(x))))$ FNS

FC: $\{\neg A(x) \vee \neg B(y,x) \vee D(x),\ \neg A(x) \vee \neg E(y) \vee D(x),\ \neg B(z,b) \vee C(z,b) \vee C(c,a),\ A(x),\ \neg B(f(x),x) \vee \neg D(f(x))\}$

## 3. Resolución con UMG (**2.5 puntos**)

Demostrar que el siguiente conjunto de cláusulas es insatisfacible mediante **resolución con UMG**, indicando en cada paso el unificador empleado:

C1: ¬P(x,y) v ¬S(x,x,f(b))

C2: ¬P(x,y) v R(b,x) v S(b, x,f(y))

C3: ¬Q(x) v P(x,y) v P(f(a),f(b))

C4: ¬R(b,x) v ¬R(y,x)

C5: ¬T(x,y,a) v ¬S(y,x,z)

C6: Q(f(x)) v Q(y)

C7: T(f(a),b, x)

C8: S(f(x),x,b)

C9: $P(a,b)$

Renombrar variables: C1 tiene $x_1$ y $y_1$, C2 tiene $x_2$, $y_2$ etc:

C1: $\neg P(x_1,y_1) \vee \neg S(x_1,x_1,f(b))$

C2: $\neg P(x_2,y_2) \vee R(b,x_2) \vee S(b, x_2,f(y_2))$

C3: $\neg Q(x_3) \vee P(x_3,y_3) \vee P(f(a),f(b))$

C4: $\neg R(b,x_4) \vee \neg R(y_4,x_4)$

C5: $\neg T(x_5,y_5,a) \vee \neg S(y_5,x_5,z_5)$

C6: $Q(f(x_6)) \vee Q(y_6)$

C7: $T(f(a),b, x_7)$

C8: $S(f(x_8),x_8,b)$

C9: $P(a,b)$

| | |
|---|---|
| R1: $\neg S(b,f(a),z_5)$ | C5 con C7 y UMG $\{x_5/f(a), y_5/b, x_7/a\}$ |
| R2: $\neg P(f(a),y_2) \vee R(b, f(a))$ | R1 con C2 y UMG $\{x_2/f(a), z_5/f(y_2)\}$ |
| R3: $\neg R(b,x_4)$ | factorización en C4: $\{y_4/b\}$ |
| R4: $\neg P(f(a),y_2)$ | R2 con R3 y UMG $\{x_4/f(a)\}$ |
| R5: $\neg Q(x_3) \vee P(x_3,y_3)$ | R4 con C3 y UMG $\{y_2/f(b)\}$ |
| R6: $\neg Q(f(a))$ | R4 con R5 y UMG $\{x_3/f(a),y_2/y_3\}$ |
| R7: $Q(f(x_6))$ | R6 con C6 y UMG $\{ y_6/f(a)\}$ |
| R8: $\square$ | R6 con R7 y UMG $\{x_6/a\}$ |