Lógica – Grado en Ingeniería Informática , Grado en Matemáticas e Informática , Grado en Administración de Empresas e Informática

20 de diciembre de 2016

Evaluación de Lógica de Primer Orden

Ejercicio 1.1. Formalizar en Lógica de Primer Orden:

a) Sobre el dominio de las personas *(0,75 puntos)*

Las personas prudentes evitan las hienas. Ningún banquero peca de imprudente. Por tanto, ningún banquero deja de evitar las hienas.

b) Sobre el dominio de los números reales *(0,25 puntos)*

Hay un número que multiplicado por cualquier otro da siempre el mismo resultado.

SOLUCIÓN:

a) P(x): x es prudente

Q(x): x evita a las hienas

R(x): x es banquero

$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)), \neg\exists x(R(x) \wedge\neg P(x)) \models \neg\exists x(R(x) \wedge\neg Q(x))$

o bien

$\neg\exists x(P(x) \wedge\neg Q(x)), \forall x(R(x) \rightarrow P(x)) \models \forall x(R(x) \rightarrow Q(x))$

b) f(x, y) = resultado de multiplicar x * y

$\exists x\forall y(f(x, y) = a)$

Ejercicio 1.2. Si P(f(y, a), y, f(x, g(b))) y P(x, g(b), f(z, y)) son unificables, hallar el Unificador de Máxima Generalidad, justificando en cualquier caso cada paso del algoritmo UMG

(*1 punto*)

Solución:

α	Aα	Bα	t_A, t_B
{}	P(f(y, a), y, f(x, g(b)))	P(x, g(b), f(z, y))	f(y, a), x
{x/f(y, a)}	P(f(y, a), y, f(f(y, a), g(b)))	P(f(y, a), g(b), f(z, y))	y, g(b)
{x/f(g(b), a), y/g(b)}	P(f(g(b), a), g(b), f(f(g(b), a), g(b)))	P(f(g(b), a), g(b), f(z, g(b)))	f(g(b), a), z
{x/f(g(b), a), y/g(b), z/f(g(b), a)}	P(f(g(b), a), g(b), f(f(g(b), a), g(b)))	P(f(g(b), a), g(b), f(f(g(b), a), g(b)))	

UMG = {x/f(g(b), a), y/g(b), z/f(g(b), a)}

Ejercicio 2. Demostrar con medios semánticos que el siguiente razonamiento no es correcto utilizando un dominio de dos elementos:

$\{ P(b) ,\ \exists x (P(x) \wedge \neg Q(x,a)) ,\ \forall x (P(x) \rightarrow \exists y\, Q(x,y)) \} \vDash \exists x\ Q(x,x)$ *(2 puntos)*

<u>Solución</u>:

D={0,1}, i(a)=0, i(b)=1.

i(∃x Q(x,x))=F sii

  {x/a} **i(Q(a,a))=F**

  Y además,

  {x/b} **i(Q(b,b))=F**

i(P(b))=V

i(∃x (P(x) ∧ ¬Q(x,a)))=V sii

  {x/a} i(P(a) ∧ ¬Q(a,a)) = V sii

    i(P(a))=V y además i(Q(a,a))=F (tras descartar ~~i(Q(b,a))=F~~ abajo)

  O bien,

  {x/b} i(P(b) ∧ ¬Q(b,a))=V

    i(P(b))=V y además ~~i(Q(b,a))=F~~ (descartado más abajo)

i(∀x (P(x) → ∃x Q(x,y))))=V sii

  {x/a} i(P(a) → ∃y Q(a,y))=V sii

    ~~i(P(a))=F~~

    O bien,

    i(∃yQ(a,y))=V sii

      {x/a} ~~i(Q(a,a))=V~~

      O bien,

      {x/b} **i(Q(a,b))=V**

  Y además,

  {x/b} i(P(b) → ∃y Q(b,y))=V

    ~~i(P(b))=F~~

    O bien,

    i(∃yQ(b,y))=V sii

      {x/a} **i(Q(b,a))=V**

      O bien,

      {x/b} ~~i(Q(b,b))=V~~

No es consecuencia lógica, el contramodelo que lo demuestra es: $P_D(0)$=V, $P_D(1)$=V, $Q_D(0,1)$=V, $Q_D(1,0)$=V, $Q_D(0,0)$=F, $Q_D(1,1)$=F.

Ejercicio 3. Demostrar con el cálculo **deducción natural**:

$$T\ [\ \forall x \forall y\ (P(a,x) \rightarrow Q(y)),\ \exists x\ \neg R(x)\ ]\ |\!\!\longrightarrow\ P(a,a) \rightarrow \exists x\ (Q(x) \wedge \neg R(x))$$ *(2 puntos)*

Solución:

1. $\forall x \forall y\ (P(a,x) \rightarrow Q(y))$ premisa
2. $\exists x\ \neg R(x)$ premisa
3. $\neg R(b^*)$ $E_{\exists 2}$
4. $\forall y\ (P(a,a) \rightarrow Q(y))$ $E_{\forall 1\ \{x/a\}}$
5. $P(a,a) \rightarrow Q(b^*)$ $E_{\forall 4\ \{y/b^*\}}$
6. $P(a,a)$ supuesto
    7. $Q(b^*)$ $E_{\rightarrow 5,6}$
    8. $Q(b^*) \wedge \neg R(b^*)$ $I_{\wedge 11,12}$
    9. $\exists x\ (Q(x) \wedge \neg R(x))$ $I_{\exists 8}$
10. $P(a,a) \rightarrow \exists x\ (Q(x) \wedge \neg R(x))$ $E_{\rightarrow 6,9}$

Ejercicio 4. Obtener la forma clausular de la siguiente estructura deductiva:

$\forall x(P(x,y) \rightarrow (R(a) \wedge \exists x S(x))$, $\neg\forall x S(x) \wedge \exists y R(y)$ } $\quad$ |– $\exists x (\neg P(x,x) \wedge \forall y\, R(y))$ (*2 puntos*)

Solución:

$\forall x(P(x,y) \rightarrow (R(a) \wedge \exists x S(x))$

$\forall x(P(x,y) \rightarrow \exists z\, (R(a) \wedge S(z))$

$\forall x\, \exists z\, (P(x,y) \rightarrow (R(a) \wedge S(z))$ (prenex)

$\exists y\, \forall x\, \exists z\, (P(x,y) \rightarrow (R(a) \wedge S(z))$ (Cierre Existencial)

$\exists y\, \forall x\, \exists z\, (\neg P(x,y) \vee (R(a) \wedge S(z))$

$\exists y\, \forall x\, \exists z\, ((\neg P(x,y) \vee R(a)) \wedge (\neg P(x,y) \vee S(z))$ (FNC)

$\forall x\, ((\neg P(x,b) \vee R(a)) \wedge (\neg P(x,b) \vee S(f(x)))$ (Skolem)

$\{\neg P(x,b) \vee R(a), \neg P(x,b) \vee S(f(x))\}$ (FC)

$\neg\forall x S(x) \wedge \exists y R(y)$

$\exists x \neg S(x) \wedge \exists y R(y)$

$\exists x(\neg S(x) \wedge \exists y R(y))$

$\exists x \exists y(\neg S(x) \wedge R(y))$ (prenex)

$(\neg S(c) \wedge R(d))$ (Skolem)

$\{\neg S(c), R(d)\}$ (FC)

Negando la conclusión:

$\neg\exists x\, (\neg P(x,x) \wedge \forall y\, R(y))$

$\forall x \neg\, (\neg P(x,x) \wedge \forall y\, R(y))$

$\forall x(P(x,x) \vee \neg\forall y\, R(y))$

$\forall x(P(x,x) \vee \exists y \neg R(y))$

$\forall x\, \exists y(P(x,x) \vee \neg R(y))$ (prenex)

$\forall x\, (P(x,x) \vee \neg R(g(x)))$ (Skolem)

$\{P(x,x) \vee \neg R(g(x))\}$FC

Forma clausular es

$\{ \neg P(x1,b) \vee R(a), \neg P(x2,b) \vee S(f(x2)), \neg S(c), R(d), P(x3,x3) \vee \neg R(g(x3)) \}$

Ejercicio 5. Demostrar, mediante el método de resolución, que la siguiente estructura deductiva es correcta: $T[C_1, C_2, C_3, C_4\, C_5] \;\vert\!\!\!— \;\exists x \forall y(P(x) \vee T(x,y))$

C_1: $Q(x) \vee R(x)$
C_2: $R(x) \vee P(x) \vee \neg Q(f(x))$
C_3: $R(x) \vee P(x) \vee T(x, y)$ *(2 puntos)*
C_4: $\neg R(x)$
C_5: $Q(a)$

<u>Solución</u>:

Se renombran las variables:

C_1: $Q(x_1) \vee R(x_1)$
C_2: $R(x_2) \vee P(x_2) \vee \neg Q(f(x_2))$
C_3: $R(x_3) \vee P(x_3) \vee T(x_3, x_3)$
C_4: $\neg R(x_4)$
C_5: $Q(a)$

Se hace la forma clausular de la negación de la conclusión

C_6: $\neg P(x_5)$
C_7: $\neg T(x_6, f(x_6))$

Para que el conjunto sea insatisfacible debe existir una derivación que permita llegar a la cláusula vacía:

C_2: $R(x_2) \vee P(x_2) \vee \neg Q(f(x_2))$ C_6: $\neg P(x_5)$

$\{x_2/x_5\}$

R_1: $R(x_5) \vee \neg Q(f(x_5))$ C_4: $\neg R(x_4)$

$\{x_5/x_4\}$

R_2: $\neg Q(f(x_4))$ C_1: $Q(x_1) \vee R(x_1)$

$\{x_1/f(x_4)\}$

R_3: $R(f(x_4))$ C'_4: $\neg R(x_7)$

$\{x_7/f(x_4)\}$

R_4: $\square$