Lógica – Grado en Ingeniería Informática, Grado en Matemáticas e Informática

Examen 8 de julio de 2015

Bloque Lógica de Primer Orden

Ejercicio 1. Formalizar en el lenguaje de la lógica de primer orden los siguientes enunciados: *(2,5 puntos)*

a) Todos los amigos de María estudian Lógica o estudian Estadística.
b) Ningún amigo de Pedro estudia Lógica.
c) Todos los amigos de Pedro estudian Estadística, pero solo los profesores de Estadística conocen las preguntas del examen.

A(x,y) ≡ x es amigo de y
E(x,y) ≡ x estudia y
P(x,y) ≡ x es profesor de y
C(x) ≡ x conoce las preguntas del examen

SOLUCIÓN:

a ≡ María   b ≡ Pedro   c ≡ Lógica   d=Estadística
a ≡ Portugal   b ≡ Brasil   c ≡ Colombia

a) $\forall x\, (A(x,a) \rightarrow (E(x,c) \vee E(x,d)))$

o bien

$\neg \exists x\, (A(x,a) \wedge \neg (E(x,c) \vee E(x,d)))$

b) $\neg \exists x\, (E(x,c) \wedge A(x, b))$

o bien

$\forall x\, (E(x,c) \rightarrow \neg A(x,b))$

c) $\forall x\, (A(x,b) \rightarrow E(x,d)) \wedge \forall y\, (C(y) \rightarrow P(y,d))$

o bien

$\forall x\, (A(x,b) \rightarrow E(x,d)) \wedge \neg \exists y\, (C(y) \wedge \neg P(y,d))$

Ejercicio 2. Sea L el lenguaje { R , a , b , c }, donde R(x,y) es un símbolo de predicado y a, b, c son constantes. Definir un contramodelo en un dominio de 3 elementos para demostrar lo siguiente:

(2,5 puntos)

$$\forall x \exists y\, R(x,f(y)) \not\models \exists y \forall x\, R(x,f(y))$$

Justificar adecuadamente la respuesta con un análisis semántico.

<u>Solución:</u>

En la lógica el orden de los cuantificadores es importante. Por ejemplo, que todo el mundo ame a alguien no implica que alguien sea amado por todo el mundo.

Para construir un contramodelo i hay que definir un dominio D, y dar los valores de la función f y el predicado R.

Una solución sencillo sería: dominio de i, D= {1,2,3}.

Interpretación i(a)=1, i(b)= 2, i(c)= 3.

Sea f la función de identidad: f(x) = x; entonces tenemos f(1) =1, f(2)=2, f(3)=3.

Se define R tal que R(x,y) es verdadero en el modelo si y solo si x=y. Entonces los valores de R son <1,1>, <2,2> y <3,3>. Por eso, R(a,a), R(b,b) y R(c,c) son verdaderos en i y otros átomes con R son falsos. Poer ejemplo. piensa en un dominio de egoistas donde todo el mundo se ama a sí mismo y a nadie más.

Ahora es evidente que en el modelo i la formula ∀x ∃y R(x,f(y)) es verdadera. Eso porque i(R(x,f(y)){x/a, y/a} = V, i(R(x,f(y)){x/b, y/b} = V y i(R(x,f(y)){x/c, y/c} = V: para cada sustitución por x se puede elegir una sustitución por y (=f(y)) tal que la fórmula sale verdadero.

Al contrario, la fórmula ∃y ∀x R(x,f(y)) es falsa en i. Con la substitución y/a, la fórmula R(b,a) es falsa; con la substitución y/b, la fórmula R(c,b) es falsa, y con la substitución y/c, la fórmula R(b,c) es falsa. Dado que no hay una substitución por y tal que R(x,f(y)) es verdadero para cada substitución por x, tenemos
i(∃y ∀x R(x,f(y))) = F

Tenemos por tanto un contramodelo que demuestra la proposición.

Ejercicio 3. Demostrar la fórmula $\exists x\,(q(x) \rightarrow p(f(a),x))$ a partir del conjunto de premisas

$$\{\ \forall x\,(\neg q(x) \vee r(x))\ ,\quad \forall x\,\exists z\,(\neg p(x,z) \rightarrow \neg r(z))\ \}$$

utilizando el cálculo de **Deducción Natural**. *(2,5 puntos)*

Solución

1.	$\forall x \exists z(\neg p(x,z)\rightarrow\neg r(z))$	premisa
2.	$\exists z(\neg p(f(a),z)\rightarrow\neg r(z))$	∀-elim (1)
3.	$\neg p(f(a),c)\rightarrow\neg r(c)$	∃-elim(2)
4.	$\quad\quad q(c)$	supuesto
5.	$\quad\quad \forall x(\neg q(x)\vee r(x))$	premisa
6.	$\quad\quad \neg q(c)\vee r(c)$	∃-elim(5)
7.	$\quad\quad \neg\neg q(c)$	intercambio(4)
8.	$\quad\quad r(c)$	corte(6,7)
9.	$\quad\quad \neg\neg r(c)$	intercambio(8)
10.	$\quad\quad \neg\neg p(f(a),c)$	MT(3,9)
11.	$\quad\quad p(f(a),c)$	¬-elim(10)
12.	$q(c)\rightarrow p(f(a),c)$	→-intro(4-11)
13.	$\exists x(q(x)\rightarrow p(f(a),x))$	∃-intro(12)

Ejercicio 4. Demuestra por resolución UMG (comenzando con la cláusula C7), que el siguiente conjunto de cláusulas es insatisfacible: *(2,5 puntos)*

C1: $\neg P(x) \vee \neg Q(y,z,w) \vee \neg R(x,w) \vee R(x,y)$

C2: $Q(a,f(b),f(c))$

C3: $Q(x,x,f(x))$

C4: $\neg Q(x,y,z) \vee R(x,z)$

C5: $P(a)$

C6: $\neg R(a,c) \vee \neg S(f(x))$

C7: $S(f(x)) \vee \neg P(x)$

SOLUCIÓN:

R1: $S(f(a))$	C7, C5 $\{x7/a\}$
R2: $\neg R(a, c)$	R1, C6 $\{x6/a\}$
R3: $\neg P(a) \vee \neg Q(c, z1, w1) \vee \neg R(a, w1)$	R2, C1 $\{x1/a, y1/c\}$
R4: $\neg Q(c, z1, w1) \vee \neg R(a, w1)$	R3, C5 $\{\}$
R5: $\neg R(a, f(c))$	R4, C3 $\{x3/c, z1/c, w1/f(c)\}$
R6: $\neg Q(a, y4, f(c))$	R5, C4 $\{x4/a, z4/f(c)\}$
R7: $\square$	R6, C2 $\{y4/f(b)\}$