Lógica – G-II, G-MI, G-II+ADE

Examen Final (**sólo Bloque LP**), 29 de Junio de 2018

Tiempo para el examen: 1 hora y 45 minutos

1. LP – Formalización / Teoría

1.1 - Formalizar en el lenguaje de la lógica proposicional

A. el siguiente **enunciado**:

- Proponemos la continuidad de Fernando Hierro si y sólo si España llega al menos a semifinales en el Mundial de Rusia y Fernando no ficha por ningún club durante el Mundial.
  - r: Proponemos la continuidad de Fernando Hierro
  - s: España llega al menos a semifinales en el Mundial de Rusia
  - t: Fernando ficha por algún club durante el Mundial
  - $r \Leftrightarrow (s \wedge \neg t)$

B. y la siguiente **argumentación**:

- No sé chino si no voy a la escuela de idiomas o trabajo en China una temporada. No tengo contactos con la Universidad de Pekín a menos que sepa chino y tenga el doctorado. Tengo contactos (con la Universidad de Pekín), aunque no tengo el doctorado. Por consiguiente, voy a la escuela de idiomas.
  - p: Sé chino
  - q: Voy a la escuela de idiomas
  - r: Trabajo en China una temporada
  - s: Tengo contactos con la Universidad de Pekín
  - t: Tengo el doctorado
  - No sé chino si no voy a la escuela de idiomas o trabajo en China una temporada.
    - $\neg q \vee r \Longrightarrow \neg p$
  - No tendré contactos con la Universidad de Pekín a menos que sepa chino y tenga el doctorado.
    - Saber chino y tener el doctorado, es condición necesaria para tener contactos con la Universidad de Pekín: $s \Longrightarrow p \wedge t$
    - O, si no sé chino o no tengo el doctorado, entonces no tengo contactos con la Universidad de Pekín: $\neg p \vee \neg t \Longrightarrow \neg s$
  - Tengo contactos (con la Universidad de Pekín), aunque no tengo el doctorado.
    - $s \wedge \neg t$

- Por consiguiente, voy a la escuela de idiomas.
    - q
        - $\{ \neg q \vee r \Longrightarrow \neg p,\ \ s \Longrightarrow p \wedge t,\ \ s \wedge \neg t \} \vDash q$

1.2 - Decir si las siguientes afirmaciones son **verdaderas** (V) o **falsas** (F), justificando brevemente la respuesta.

a. Una fórmula A es satisfacible sii existe (al menos) un modelo de dicha fórmula

- **Verdadera**: un **modelo** de una fórmula es una interpretación que satisface dicha fórmula; es decir, una interpretación que hace verdad la fórmula. Y una fórmula es **satisfacible** sii existe (al menos) una interpretación i tal que i(A) = V (es decir, una interpretación que la hace verdadera)

b. Dos fórmulas A y B son (lógicamente) equivalentes ($A \Longleftrightarrow B$, $A \equiv B$) sii para todo contramodelo de A i se cumple que i(A) = i(B)

- **Falsa**: dos fórmulas A y B son (lógicamente) **equivalentes** ($A \Longleftrightarrow B$, $A \equiv B$) sii para toda interpretación (sea modelo o contramodelo de A o de B) i se cumple que i(A) = i(B)

2. LP - Semántica

2.1 - Demostrar **con análisis semántico** que NO se cumple la siguiente relación de consecuencia lógica. Indicar de forma explícita y completa: (1) los pasos principales del procedimiento y (2) el resultado final obtenido.

$$\{ p \Longrightarrow \neg t,\ \ q \wedge s \Longrightarrow r,\ \ \neg(q \wedge r) \} \vDash q \wedge t \Longrightarrow \neg p \wedge s$$

(Nota: no pueden utilizarse ni las tablas de verdad, ni la deducción natural, ni el método de resolución)

Para demostrar que no se cumple la relación de consecuencia lógica es necesario encontrar al menos una interpretación de las proposiciones que haciendo verdaderas a las premisas, haga falsa la conclusión.

1)	$i(p \Longrightarrow \neg t) = V$	sii	(1.1) $i(p) = F$ o bien (1.2) $i(\neg t) = V$
2)	$i(q \wedge s \Longrightarrow r) = V$	sii	(2.1) $i(q \wedge s) = F$ o bien (2.2) $i(r) = V$
3)	$i(\neg(q \wedge r)) = V$	sii	(3.1) $i(q) = F$ o bien (3.2) $i(r) = F$
4)	$i(q \wedge t \Longrightarrow \neg p \wedge s) = F$	sii	(4.1) $i(q \wedge t) = V$ y (4.2) $i(\neg p \wedge s) = F$

Por la condición necesaria (4.1) quedan fijados los valores de verdad i(q) = i(t) = V.

Como i(q) = V, entonces (3.1) ya no se puede cumplir, por lo que necesariamente i(r) = F

Como i(t) = V, entonces (1.2) ya no se puede cumplir, por lo que necesariamente i(p) = F

Como i(p) = F, entonces para que se cumpla (4.2) es necesario que i(s) = F

Como i(s) = F, entonces (2.1) se cumple

Por tanto, con la interpretación i(q) = i(t) = V y i(p) = i(r) = i(s) = F tenemos un contramodelo de la argumentación, al conseguir verificar las condiciones 1), 2), 3) y 4).

2.2 - Introducir una modificación en la fórmula de la conclusión que haga que **sí se cumpla** la relación de consecuencia lógica y justificar el porqué.

Aunque hay infinitas soluciones posibles, una de ellas seria la siguiente:

Si eliminamos s de la conclusión, quedando la fórmula $q \wedge t \Longrightarrow \neg p$

no sería posible definir un contramodelo, puesto que la primera premisa impone que i(p) = F y eso entraría en contradicción con la necesidad de que i(¬p) = F para hacer falsa la conclusión.

Por tanto, sí se cumple la relación de consecuencia lógica entre ese conjunto de premisas y esta conclusión en particular.

3. LP - Deducción Natural

Demostrar mediante **deducción natural**, utilizando EXCLUSIVAMENTE reglas básicas (es decir, no está permitido utilizar NINGUNA regla derivada como Corte, Modus Tollens, De Morgan, etc…), la siguiente argumentación:

$$T [\neg(p \vee q)] \vdash \neg p \wedge \neg q$$

1.	$\neg(p \vee q)$	Premisa
2.	$\quad p$	Supuesto
3.	$\quad p \vee q$	Int ∨ 2
4.	$\quad (p \vee q) \wedge \neg(p \vee q)$	Int ∧ 3, 1
5.	$p \rightarrow (p \vee q) \wedge \neg(p \vee q)$	Int→ 1-3
6.	$\neg p$	Int¬ 5
7.	$\quad q$	Supuesto
8.	$\quad p \vee q$	Int∨ 7
9.	$\quad (p \vee q) \wedge \neg(p \vee q)$	Int ∧ 7, 1
10.	$q \rightarrow (p \vee q) \wedge \neg(p \vee q)$	Int→ 1-3
11.	$\neg q$	Int¬ 10
12.	$\neg p \wedge \neg q$	Int∧ 6, 11

4. LP – Forma Clausular y Resolución

4.1 - Obtener la **forma clausular** del siguiente conjunto de fórmulas:

$$\{ \ (p \wedge \neg q) \vee (p \wedge \neg r), \quad (\neg r \wedge s) \vee (r \wedge \neg s), \quad \neg q \Longrightarrow p, \quad p \Longrightarrow r, \quad r \Longrightarrow s \vee q \ \}$$

4.2 - Demostrar mediante **resolución** que el conjunto de cláusulas obtenido es insatisfacible (NOTA: considerar el papel de la **idempotencia** en el método de Resolución).

Transformación a forma clausular:

A1: $(p\wedge\neg q) \vee(p\wedge\neg r) \equiv$ (distributividad) $p\wedge(\neg q\vee\neg r)$ clausulas 1 y 2

A2: $(\neg r\wedge s) \vee(r\wedge\neg s) \equiv$(distributividad) $(\neg r \vee(r\wedge\neg s)) \wedge (s \vee(r\wedge\neg s)$ $\equiv$(distributividad)

$((\neg r \vee r)\wedge (\neg r \vee\neg s)) \wedge ((s\vee r) \wedge (s \vee\neg s)) \equiv$ (elim parantesis)

$(\neg r \vee r)\wedge (\neg r \vee\neg s) \wedge (s\vee r) \wedge (s \vee\neg s)$ clausulas 3,4,5,6

A3: $\neg q\rightarrow p \ \equiv$ (eliminación de $\rightarrow$) $\neg\neg q\vee p\equiv$ (elim $\neg\neg$) $q\vee p$ clausulas 7

A4: $p\rightarrow r\equiv$ (eliminación de $\rightarrow$)$\equiv\neg p\vee r$ clausula 8

A5: $r\rightarrow s\vee q\equiv$ (eliminación de $\rightarrow$)$\equiv \neg r\vee s\vee q$ clausula 9

C1: p	C2: $\neg q\vee\neg r$	C3: $\neg r\vee r$	C4: $\neg r\vee\neg s$	C5: $s\vee r$	C6: $s\vee\neg s$
C7: $q\vee p$	C8: $\neg p\vee r$	C9: $\neg r\vee s\vee q$			

Resolución:

R1: r (C1,C8)

R2: $\neg q$ (R1,C2)

R3: $\neg s$ (R1,C4)

R4: $\neg r\vee s$ (R2,C9)

R5: $\neg r$ (R3,R4)

R6: $\square$ (R5,R1)

(C3 Y C6 son tautologías que realmente no son útiles para la resolución)