Lógica – Grado en Ingeniería Informática, Grado en Matemáticas e Informática, Doble grado en Ingeniería Informática y ADE

20 de enero de 2017

Repesca de LPO (Lógica de Primer Orden)

Ejercicio 1.1. Formalizar el siguiente razonamiento en el lenguaje de la Lógica de Primer Orden, sobre el dominio de los habitantes del Sistema Solar:

> *No hay marciano que no sea verde o naranja. Los marcianos verdes son todos primos entre sí, mientras que no se da lo mismo entre los marcianos naranjas. El primo del primo de un marciano es primo de ese marciano. Hay un marciano naranja que es primo de un marciano verde. Por tanto, todos los marcianos verdes son primos de algún marciano naranja.*

(1,5 puntos)

Solución:

m(_): ser un marciano (Nota: este predicado es necesario porque el domino no se limita a los marcianos)

v(_): ser verde

n(_): ser naranja

p(_,_): que los dos argumentos son primos entre sí

$\neg\exists x(m(x) \land \neg(v(x) \lor n(x)))$

$\forall x\forall y(m(x)\land m(y) \land v(x) \land v(y) \rightarrow p(x,y)) \land \exists x\exists y(m(x) \land m(y) \land n(x) \land n(y) \land \neg p(x,y))$

$\forall x\forall y\forall z(m(x) \land p(x,y) \land p(y,z) \rightarrow p(x,z))$

$\exists x\exists y(m(x) \land m(y) \land v(x) \land n(y) \land p(x,y))$

$\forall x(m(x) \land v(x) \rightarrow \exists y(m(y) \land n(y) \land p(x,y)))$

Ejercicio 1.2. Calcular, si es posible, el UMG entre los siguientes dos átomos. Detallar tanto el procedimiento como el resultado final.

A = p(g(x), g(y), f(a,z))   B = p(y, z, f(x, g(z)))

(0,5 puntos)

Solución:

α	Aα	Bα	t_A	t_B	n. lig.
{}	p(g(x),g(y),f(a,z))	p(y,z,f(x,g(z)))	g(x)	y	y/g(x)
{y/g(x)}	p(g(x),g(g(x)),f(a,z))	p(g(x),z,f(x,g(z)))	g(g(x))	z	z/g(g(x))
{y/g(x),z/g(g(x))}	p(g(x),g(g(x)),f(a,g(g(x))))	p(g(x),g(g(x)),f(x,g(g(g(x)))))	a	x	x/a
{y/g(a),z/g(g(a)),x/a}	p(g(a),g(g(a)),f(a,g(g(a))))	p(g(a),g(g(a)),f(a,g(g(g(a)))))	a	g(a)	FALLO

Los átomos no son unificables.

Ejercicio 2. Demostrar con medios semánticos que el siguiente razonamiento no es correcto utilizando un dominio de dos elementos:

$\{ \exists x (P(x) \to Q(x,a)),\ P(a), \neg R(b), \forall x (Q(x,a) \to R(b)) \} \vDash \forall x (P(x) \to R(x))$ *(2 puntos)*

Solución:

D = {0,1}, i(a) = 0, i(b) = 1

A1: i(∃x(P(x) → Q(x,a))) = V sii {x/a} i(P(a) → Q(a,a)) = V o {x/b} i(P(b) → Q(b,a)) = V sii

i(P(a)) = F o i(Q(a,a)) = V o i(P(b)) = F o i(Q(b,a)) = V A1a o A1b o A1c o A1d

A2: **i(P(a)) = V** A2

A3: i(¬R(b)) = V sii **i(R(b)) = F** A3

A4: i(∀x(Q(x,a) → R(b)))=V sii {x/a} i(Q(a,a) → R(b)) = V y {x/b} i(Q(b,a) → R(b)) = V sii

[i(Q(a,a)) = F o i(R(b)) = V] y [i(Q(b,a)) = F o i(R(b)) = V] [A4a o A4b] y [A4c o A4d]

B: i(∀x(P(x) →R(x))) = F sii {x/a} i(P(a) → R(a)) = F o {x/b} i(P(b) → R(b)) = F sii

[i(P(a)) = V y i(R(a)) = F] o [i(P(b)) = V y i(R(b)) = F] [Ba y Bb] o [Bc y Bd]

Discusión: A2 entra en conflicto con A1a, por lo que A1a queda descartado; A3 entra en conflicto con A4b y A4d, por lo que quedan descartados A4b y A4d.

Por tanto, ahora tenemos: A1: (A1b o A1c o A1d) con A4: (A4a y A4c)

Pero A4a entra en conflicto con A1b y A4c con A1d, por lo que quedan descartados A1b y A1d.

Por tanto, ahora tenemos:

A1c, A2, A3, A4a, A4c: i(P(b)) = F, i(P(a)) = V, i(R(b)) = F, i(Q(a,a)) = F, i(Q(b,a)) = F

Pero Bc entra en conflicto con A1c, por lo que queda descartada la opción [Bc y Bd]. Entonces tenemos desde B: i(P(a)) = V y i(R(a)) = F

Ba coincide con A2 y podemos definir en la interpretación de R que i(R(a)) = F

Por tanto, no hay relación de consecuencia lógica puesto que el siguiente contramodelo, por ejemplo, lo demuestra:

$i(P^1)=\{<0>=>V, <1>=>F \}$

$i(Q^2)=\{ <0,0>=>F, <0,1>=>V, <1,0>=>F, <1,1>=>V\}$

$i(R^1)=\{<0>=>F, <1>=>F\}$

O en una notación alternativa:

i(P(0)) = V, i(P(1)) = F

i(Q(0,0)) =F, i(Q(0,1)) = V, i(Q(1,0)) = F, i(Q(1,1)) = V

i(R(0)) = F, i(R(1)) = F

Ejercicio 3. Demostrar la siguiente deducción con el cálculo de deducción natural, **usando solamente reglas básicas y la regla de corte**:

$$T\ [\ \exists x(P(x) \wedge R(x)),\ \forall z(P(z) \rightarrow Q(z) \vee S(z)),\ \forall y\neg(R(y) \wedge Q(y))\ ]\ \vdash\ \exists x\, S(x)$$

(2 puntos)

Solución:

1.	$\exists x(P(x) \wedge R(x))$	prem
2.	$P(a) \wedge R(a)$	E∃(1)
3.	$P(a)$	E∧(2)
4.	$R(a)$	E∧(2)
5.	$\forall z(P(z) \rightarrow Q(z) \vee S(z))$	prem
6.	$P(a) \rightarrow Q(a) \vee S(a)$	E∀(5)
7.	$Q(a) \vee S(a)$	mp(3,6)
8.	$\forall y\neg(R(y) \wedge Q(y))$	prem
9.	$\neg(R(a) \wedge Q(a))$	E∀(8)
10.	$\quad Q(a)$	supuesto
11.	$\quad R(a) \wedge Q(a)$	I∧(4,10)
12.	$\quad (R(a) \wedge Q(a)) \wedge \neg(R(a) \wedge Q(a))$	I∧(9,11)
13.	$\neg Q(a)$	I¬(10,12)
14.	$S(a)$	corte (7,13)
15.	$\exists x\, S(x)$	I∃(14)

Nota1: Sería correcto también incluir como paso 13 la fórmula $Q(a) \rightarrow (R(a) \wedge Q(a)) \wedge \neg(R(a) \wedge Q(a))$, para posteriormente deducir $\neg Q(a)$

Nota2: Si se dan pasos de deducción utilizando algo distinto a las reglas básicas o la regla de corte se quitan 0,8 puntos

Ejercicio 4. Obtener la forma clausular de la siguiente estructura deductiva $T[A_1, A_2] \vdash B$

A_1: $\forall x\, P(x) \rightarrow \forall y\, Q(z,y) \vee R(a)$

A_2: $\forall y\, \neg R(y) \rightarrow \exists y\, P(a,y)$

B: $\exists x\, \forall y\, P(x,y)$ *(2 puntos)*

$A_1 \equiv \forall x\, P(x) \rightarrow \forall y\, Q(z,y) \vee R(a)$

$\exists x\, (P(x) \rightarrow \forall y\, Q(z,y) \vee R(a))$

$\exists x\, (P(x) \rightarrow \forall y\, (Q(z,y) \vee R(a)))$

$\exists x\, \forall y\, (P(x) \rightarrow Q(z,y) \vee R(a))$

$\exists x\, \forall y\, (\neg P(x) \vee Q(z,y) \vee R(a))$

$\exists z\, \exists x\, \forall y\, (\neg P(x) \vee Q(z,y) \vee R(a))$

$\Rightarrow$ $FC(A_1) = \{ \neg P(b) \vee Q(c,y) \vee R(a) \}$

$A_2 \equiv \forall y\, \neg R(y) \rightarrow \exists y\, P(a,y)$

$\exists y\, (\neg R(y) \rightarrow \exists y\, P(a,y))$

$\exists y\, (\neg R(y) \rightarrow \exists v\, P(a,v))$

$\exists y\, \exists v\, (\neg R(y) \rightarrow P(a,v))$

$\exists y\, \exists v\, (R(y) \vee P(a,v))$

$\Rightarrow$ $FC(A_2) = \{ R(d) \vee P(a,e) \}$

$B \equiv \exists x\, \forall y\, P(x,y)$

$\neg B \equiv \neg \exists x\, \forall y\, P(x,y)$

$\forall x\, \exists y\, \neg P(x,y)$

$\Rightarrow$ $FC(\neg B) = \{ \neg P(x,f(x)) \}$

Forma clausular de la estructura deductiva:

$FC = \{ \neg P(b) \vee Q(c,y) \vee R(a)\, ,\, R(d) \vee P(a,e)\, ,\, \neg P(x,f(x)) \}$

Ejercicio 5. Demostrar por resolución con UMG si el siguiente conjunto de cláusulas es insatisfacible:

C1: $P(x) \lor Q(y) \lor \neg R(x, a)$

C2: $\neg P(a) \lor \neg Q(b)$

C3: $R(f(x), x)$

C4: $S(x) \lor \neg P(f(x))$

C5: $\neg Q(g(x, y)) \lor S(y)$

C6: $\neg S(a)$ *(2 puntos)*

C1: $P(x1) \lor Q(y1) \lor \neg R(x1, a)$

C2: $\neg P(a) \lor \neg Q(b)$

C3: $R(f(x3), x3)$

C4: $S(x4) \lor \neg P(f(x4))$

C5: $\neg Q(g(x5, y5)) \lor S(y5)$

C6: $\neg S(a)$

R1: $P(f(a)) \lor Q(y1)$	C1, C3 $\{x1/f(a), x3/a\}$
R2: $Q(y1) \lor S(a)$	R1, C4 $\{x4/a\}$
R3: $Q(y1)$	R2, C6 $\{\}$
R4: $S(y5)$	R3, C5 $\{y1/g(x5, y5)\}$
R5: $\square$	R4, C6 $\{y5/a\}$