Lógica – G-II, G-MI, G-II+ADE

Primera Prueba Parcial (**Bloque LP**), 26 de Octubre de 2018

Tiempo para el examen: 2 horas

1. Formalización (2 puntos)

Formalizar los siguientes enunciados o razonamientos en el lenguaje de la lógica proposicional:

a) Aunque iré al cine si me pagan la entrada y me llevan, será suficiente que vaya al cine y no me guste la película para que no me quede a cenar.

b) Las temperaturas suben a no ser que baje la contaminación y llueva o nieve. Si llueve pero no baja la contaminación, lo que sucede es que las temperaturas suben si no ocurre un milagro. Sólo ocurre un milagro si nieva. Por tanto, para que las temperaturas no suban es necesario que nieve.

a) Proposiciones:
P: voy al cine
Q: me pagan la entrada
R: me llevan (al cine)
S: me gusta la película
T: me quedo a cenar

$(Q \wedge R \rightarrow P) \wedge (P \wedge \neg S \rightarrow \neg T)$

b) Proposiciones:
P: las temperaturas suben
Q: baja la contaminación
R: llueve
S: nieva
T: ocurre un milagro

$\neg(Q \wedge (R \vee S)) \rightarrow P$
$R \wedge \neg Q \rightarrow (\neg T \rightarrow P)$ [o bien $R \wedge \neg Q \rightarrow (T \vee P)$]
$T \rightarrow S$

$\neg P \rightarrow S$

2. Teoría (1.5 puntos)

2.1 - Decir si las siguientes afirmaciones son **verdaderas** (V) o **falsas** (F), justificando brevemente la respuesta.

a) El símbolo q representa, entre otras cosas, un literal
b) Una fórmula insatisfacible no es consecuencia lógica de ningún conjunto de premisas
c) En un razonamiento correcto, la conclusión puede tener un contramodelo que sea modelo de alguna premisa

2.2 – Decir qué características tiene la fórmula de la izquierda a partir de la información proporcionada en la columna derecha. **Justificar** adecuadamente la respuesta.

a) $A \rightarrow B \land \neg A$ sabiendo que A es satisfacible y B es contingente
b) $C \lor \neg(C \lor D) \leftrightarrow \neg D$ sabiendo que C es contingente y D es válida

2.1

a) Verdadero porque un literal es una proposición o la negación de una proposición; como q es un símbolo de proposición, también es un literal (este "también" es lo que justifica el uso de "entre otras cosas" en el enunciado). Era necesario demostrar que se conocía esta simple demostración.
b) Falso: lo sería si el conjunto de premisas fuera a su vez insatisfacible.
c) Verdadero: lo que no puede tener es un contramodelo que sea modelo de TODAS las premisas; pero puede serlo de una premisa, con que sea contramodelo de otra

2.2

a) La fórmula es **contingente o insatisfacible** porque el modelo i que A seguramente tiene (porque es satisfacible) hace verdadera la parte izquierda de la implicación y falsa la parte derecha (por las propiedades de la conjunción); por tanto, i es un contramodelo de la fórmula. Si A, además de satisfacible, fuera válida (esto es compatible con la información proporcionada), la fórmula sería insatisfacible porque lo que acabamos de decir pasaría con todas las interpretaciones. Por tanto, juntando estos dos casos, la fórmula es contingente o insatisfacible. La información sobre B es irrelevante. La mayor dificultad en este ejercicio era que no sólo había que ver si se podía generar un modelo y un contramodelo, sino también darse cuenta de que A podría no tener contramodelos, y entonces el modelo de la fórmula podría no existir.
b) La fórmula es **contingente**. Seguramente existe un modelo i1 de C que también será modelo de D porque ésta es válida. Entonces, este modelo i1 hace verdad la parte izquierda de la doble implicación (por las propiedades de la disyunción) y falsa la parte derecha. Por tanto, i1 es un contramodelo de la fórmula (por las propiedades de la doble implicación). Por otro lado, también existe un contramodelo i2 de C, que sigue siendo un modelo de D. En este caso, la parte izquierda será falsa (por las propiedades de la negación y la disyunción) al igual que la parte derecha. Por tanto, i2 es un modelo de la fórmula. Al haber al menos un modelo y al menos un contramodelo se puede concluir que la fórmula es contingente.

3. Semántica (2 puntos)

Demostrar con **medios semánticos** que no existe la siguiente relación de consecuencia lógica. No se puede usar ni tablas de verdad, ni deducción natural, ni resolución.

$$\{ p \wedge r \rightarrow \neg q \wedge r \} \vDash p \rightarrow q \vee \neg r$$

SOLUCIÓN:

A:=p ∧ r → ¬q ∧ r B:=p → q ∨ ¬r

Para afirmar que no se da la relación de consecuencia lógica A⊨B, basta con encontrar una interpretación que haga a A verdadero y a B falso. Es más sencillo comenzar el análisis con B.

i(B)=f sii

i(p)=v y i(q ∨ ¬r)=f

Si i(q ∨ ¬r)=f, necesariamente i(q)=f y i(¬r) es falso.

Es decir, que la única manera de anular a B es haciendo **i(p)=v, i(q)=f, i(r)=v.** Si A fuera verdadero en esa circunstancia, podremos cabalmente decir que la relación de consecuencia lógicamente no existe.

Evaluación de A:=p ∧ r → ¬q ∧ r, bajo la interpretación i(p)=v, i(q)=f, i(r)=v

p	∧	r	→	¬q	∧	r
v		v	→	¬f	∧	v
	V		→	v	∧	v
	V		→		v	
			V			

Para la intrepretación i(p)=v, i(q)=f, i(r)=v, A es verdadero y B es falso. Por tanto, no existe relación de consecuencia lógica.

4. Deducción Natural (2 puntos)

Demostrar la siguiente deducción mediante **deducción natural** justificando cada paso:

$$T\ [p \vee \neg q \rightarrow r]\ \vdash\ \neg r \wedge p \rightarrow \neg q$$

(No se puede utilizar tablas de verdad, resolución ni análisis semántico)

Solución:

1: $p \vee \neg q \rightarrow r$ Premisa
2: $\neg r \wedge p$ Supuesto
3: q Supuesto
4: p $E_{\wedge 2}$
5: $p \vee \neg q$ $I_{\vee 4}$
6: r $E_{\rightarrow 1,5}$
7: $\neg r$ $E_{\wedge 2}$
8: $r \wedge \neg r$ $I_{\wedge 6,7}$
9: $q \rightarrow r \wedge \neg r$ $I_{\rightarrow 3,8}$
10: $\neg q$ $I_{\neg 9}$
11: $\neg r \wedge p \rightarrow \neg q$ $I_{\rightarrow 2,10}$

5. Forma Clausular y Resolución (2.5 puntos)

5.1 – Transformar el siguiente razonamiento en **forma clausular**:

$$T\ [\ p \vee \neg p \rightarrow q,\ \ r \rightarrow s, \neg((s \wedge q\ ) \vee t)\ ]\ \vdash\ \neg(\neg s \vee \neg t)\ \vee\ (\neg(s \vee t) \wedge \neg(r \vee \neg q))$$

5.2 - Demostrar usando el método de **resolución** que el siguiente conjunto de cláusulas es **insatisfacible**:

$$\{\ \ \neg p \vee q,\ \ p \vee \neg r,\ \ p \vee \neg q,\ \ q \vee r,\ \ \neg p \vee \neg s,\ \ \neg p \vee \neg q \vee s\ \ \}$$

*) Transformar a forma clausular:

A1. $p \vee \neg p \rightarrow q$ ≡ (eliminación de $\rightarrow$) $\neg(\ p \vee \neg p) \vee\ q$ ≡ (DeMorgan)

$(\neg\neg p \wedge \neg\ p) \vee\ q$ ≡ (elim $\neg\neg$) $(p \wedge \neg\ p) \vee\ q$ ≡ (distributividad)

$(\neg p \vee\ q) \wedge (p \vee\ q)$ (clausulas 1 y 2)

A2. $r \rightarrow s$ ≡ (eliminación de $\rightarrow$) $\neg r \vee\ s$ (clausulas 3)

A3. $\neg\ (\ (s \wedge q\ ) \vee t\ )$ ≡ $\neg\ (s \wedge q) \wedge \neg\ t$ ≡ (DeMopgan)

$(\neg\, s \vee \neg\, q) \wedge \neg\, t$ (clausulas 4 y 5)

¬C. $\neg\, (\neg(\neg s \vee \neg t) \vee (\, \neg(s \vee t) \wedge \neg(r \vee \neg q)))$

$\neg\, \neg(\neg s \vee \neg t) \wedge \neg\, (\, \neg(s \vee t) \wedge \neg(r \vee \neg q))$ ≡ (elim ¬¬)

$(\neg s \vee \neg t) \wedge \neg\, (\, \neg(s \vee t) \wedge \neg(r \vee \neg q))$ ≡ (DeMopgan)

$(\neg s \vee \neg t) \wedge (\, \neg\, \neg\, (s \vee t) \vee \neg\neg(r \vee \neg q))$ ≡ (elim ¬¬)

$(\neg s \vee \neg t) \wedge (\, s \vee t \vee r \vee \neg q)$ (clausulas 6 y7)

Resolución

R1. $p \vee r$ (C3,C4)

R2. p (C2,R1) + idempotencia

R3. $\neg q \vee s$ (C6,C3) + idempotencia

R4. $\neg s$ (C5, R2)

R5. $\neg q$ (R3, R4)

R6. $\neg p$ (C1, R5)

R7. $\square$ (R2, R6)