LÓGICA: Evaluación de Lógica de Primer Orden

Grado en Ingeniería Informática, Grado en Matemáticas e Informática y Doble Grado en Ingeniería Informática y ADE

21 de diciembre de 2017

NOTAS IMPORTANTES:

* La duración del examen es de 110 minutos (1h y 50 minutos).
* Cada ejercicio en hojas diferentes.
* *Apellidos, Nombre* por este orden, *en cada hoja*

Ejercicio 1. Formalizar en Lógica de Primer Orden el siguiente razonamiento indicando el lenguaje empleado. También se pondrá de manifiesto el conocimiento implícito que sería necesario para poder analizar si el razonamiento es o no correcto, y que no se ha expresado en los enunciados.

> *Solamente las personas mayores de 18 años censadas en Cataluña pueden votar en las elecciones autonómicas del 21 de diciembre.*
>
> *Hay gerundenses cuya edad está entre los 16 y los 18 años.*
>
> *Todos los mayores de 16 años tienen DNI.*
>
> *Por tanto hay gerundenses mayores de 16 años que tienen DNI y no pueden votar el 21 de diciembre*

(2 puntos)

SOLUCIÓN:

Lenguaje:

- L = { M/2, C/1, V/1, G/1, DNI/1, a , b } con M, C, V, G, DNI símbolos de predicado y a y b símbolos de constante
- que en el dominio D = { personas , N } los símbolos se interpretan como

M(x,y) ≡ x es una persona que tiene más de y años	
C(x) ≡ x está censado en Cataluña	i(a) = 18 años
V(x) ≡ x puede votar el 21 de diciembre	i(b) = 16 años
G(x) ≡ x es de Gerona	
DNI(x) ≡ x tiene DNI	

Formalización:

> *Solamente las personas mayores de 18 años censadas en Cataluña pueden votar en las elecciones autonómicas del 21 de diciembre.*

$\forall x\ (\ V(x) \rightarrow M(x,a) \wedge C(x)\ )$

o bien $\neg\exists x\ (\ V(x) \wedge (\ \neg M(x,a) \vee \neg C(x)\ )$

> *Hay gerundenses cuya edad está entre los 16 y los 18 años.*

$\exists x\ (\ G(x) \wedge M(x,b) \wedge \neg M(x,a)\ )$

Todos los mayores de 16 años tienen DNI.

$\forall x\ (\ M(x,b) \rightarrow DNI(x)\ )$

Por tanto: *Hay gerundenses mayores de 16 años que tienen DNI y no pueden votar el 21 de diciembre*

$\exists x\ (\ G(x) \wedge M(x,b) \wedge DNI(x) \wedge \neg V(x)\ )$

PERO para poder averiguar si el razonamiento es o no correcto también hace falta la siguiente información:

Todos los vecinos de Gerona están censados en Cataluña

$\forall x\ (\ G(x) \rightarrow C(x)\ )$

<u>Otras soluciones</u>:

- En vez del predicado binario M(x,y) se pueden utilizar dos predicados unarios :

  $M(x) \equiv$ mayor de 18 años

  $M'(x) \equiv$ mayor de 16 años

mucho menos elegante y que no serviría para formalizar otras frases como por ejemplo, *Sólo los mayores de 14 años pueden ser juzgados y enviados a la cárcel*.

- Incluso un tercer predicado:

  $M''(x) \equiv$ con edad entre 16 y 18 años

Ejercicio 2. Demostrar mediante análisis semántico, en el dominio D = {0,1}, que no existe relación de consecuencia lógica en la siguiente argumentación, justificando adecuadamente todos los pasos.

$$\{\ \forall x(P(x) \rightarrow Q(x) \wedge \neg R(x)),\ \neg R(a) \rightarrow \exists x(S(x) \vee \neg P(x)\ \}\ \vDash\ \exists x(\neg P(x) \vee R(x))$$ *(2 puntos)*

SOLUCIÓN:

Elegimos un dominio de interpretación con dos elementos {0,1} e incluimos dos constantes en nuestro lenguaje {a,b} tal que i(a)=0, i(b)=1. Buscamos un contra-modelo de la argumentación, es decir una interpretación que haga verdaderas las premisas y falsa la conclusión:

$\boxed{1}$

$i(\forall x(P(x) \rightarrow Q(x) \wedge \neg R(x))) = V$ sii

- **y**
  - $x=a$
    $i(P(a) \rightarrow Q(a) \wedge \neg R(a)) = V$ sii
    - **o bien**
      - $i(P(a)) = F$
      - $i(Q(a) \wedge \neg R(a)) = V$ sii
        - **y**
          - **$i(Q(a)) = V$**
          - $i(\neg R(a)) = V$ sii **$i(R(a)) = F$**
  - $x=b$
    $i(P(b) \rightarrow Q(b) \wedge \neg R(b)) = V$ sii
    - **o bien**
      - $i(P(b)) = F$
      - $i(P(b) \wedge \neg R(b)) = V$ sii
        - **y**
          - **$i(Q(b)) = V$**
          - $i(\neg R(b)) = V$ sii **$i(R(b)) = F$**

$\boxed{2}$

$i(\neg R(a) \rightarrow \exists x(S(x) \vee \neg P(x)) = V$ sii

- **o bien**
  - $i(\neg R(a)) = F$ sii $i(R(a)) = V$
  - $i(\exists x(S(x) \vee \neg P(x)) = V$ sii
    - **o bien**
      - $x=a$
        $i(S(a) \vee \neg P(a)) = V$
        - **o bien**
          - **$i(S(a)) = V$**
          - $i(\neg P(a)) = V$ sii $i(P(a)) = F$
      - $x=b$
        $i(S(b) \vee \neg P(b)) = V$
        - **o bien**
          - $i(S(b)) = V$
          - $i(\neg P(b)) = V$ sii $i(P(b)) = F$

$\boxed{3}$ **i(∃x(¬P(x) ∨ R(x))) = F** sii

x=a
i(¬P(a) ∨ R(a)) = F
i(¬P(a)) = F sii **i(P(a)) = V**
y
i(R(a)) = F

y

x=b
i(¬P(b) ∨ R(b)) = F
i(¬P(b)) = F sii **i(P(b)) = V**
y
i(R(b)) = F

Analizamos los resultados obtenidos:

- Para que la conclusión sea falsa (3), obligatoriamente se tiene que cumplir que **i(P(a))=V** y **i(R(a))=F** y que **i(P(b))=V** y **i(R(b))=F**. Marcamos estas condiciones en verde.
- Para que la primera premisa sea verdadera (1), y sea compatible con las condiciones establecidas para que la conclusión sea falsa (3), se tiene que cumplir la opción en la que **i(Q(a))=V** y **i(R(a))=F** y además se tiene que cumplir la opción en la que **i(Q(b))=V** y **i(R(b))=F**. Marcamos estas condiciones en verde.
- Para que la segunda premisa sea verdadera (2), y sea compatible con las condiciones establecidas para la conclusión (3) y para la primera premisa (1), debe cumplirse por ejemplo la opción en la que **i(S(a))=V**. Marcamos estas condiciones en verde.

Es posible encontrar al menos un contra-modelo que hace verdaderas las premisas y falsa la conclusión, que corresponde a la siguiente interpretación: **i(P(a))=V**, **i(P(b))=V, i(Q(a))=V**, **i(Q(b))=V, i(R(a))=F, i(R(b))=F, i(S(a))=V**. El valor de verdad de i(S(b)) sería indiferente. Dado que hemos encontrado un contra-modelo, queda demostrado que no existe relación de consecuencia lógica en la argumentación.

Ejercicio 3. Demostrar la corrección de la siguiente estructura deductiva mediante deducción natural justificando cada paso: *(2 puntos)*

$$T\,[\ \exists x \forall y\,(\,P(y) \rightarrow Q(x)\,)\ ] \vdash \exists y P(y) \rightarrow \exists x Q(x)$$

SOLUCIÓN:

1.	$\exists x \forall y\,(\,P(y) \rightarrow Q(x)\,)$	premisa	
2.	$\exists y P(y)$	supuesto	
3.	$P(a^*)$	elim ∃ 2	a^* constante temporal
4.	$\forall y (P(y) \rightarrow Q(b^*))$	elim ∃ 1	b^* constante temporal **nueva** (1)
5.	$P(a^*) \rightarrow Q(b^*)$	elim ∀ 4	
6.	$Q(b^*)$	modus ponens 3, 5	
7.	$\exists x\, Q(x)$	intr ∃ 6	
8.	$\exists y P(y) \rightarrow \exists x Q(x)$	intr → 2, 7	se cierra el supuesto

(1) No puede ser a^*, puesto que esta constante ya se utilizó.

Evidentemente hay otras soluciones, pero la anterior es la más intuitiva.

Ejercicio 4. Obtener de forma detallada la forma clausular de la estructura deductiva [P1, P2] $\vdash$ Q:

P1: $\exists xA(x,y) \vee \forall zB(z) \rightarrow \neg\exists t\exists sC(t,s)$ *(2 puntos)*

P2: $\forall x\exists yA(x,y) \vee \neg\forall x\exists y(C(x,y) \rightarrow B(y))$

Q: $\forall x(A(x,x) \rightarrow (\neg\exists zB(z) \rightarrow \forall yC(x,y)))$

SOLUCIÓN:

$\exists xA(x,y) \vee \forall zB(z) \rightarrow \neg\exists t\exists s\, C(t,s)$

$\forall z\exists x(A(x,y) \vee B(z)) \rightarrow \forall t\forall s\neg C(t,s)$

$\exists z\forall x\forall t\forall s\, (A(x,y) \vee B(z) \rightarrow \neg C(t,s))$ Forma Prenex

$\exists y\exists z\forall x\forall t\forall s\, (A(x,y) \vee B(z) \rightarrow \neg C(t,s))$ Cierre existencial

$\exists y\exists z\forall x\forall t\forall s\, (\neg(A(x,y) \vee B(z)) \vee \neg C(t,s))$

$\exists y\exists z\forall x\forall t\forall s\, ((\neg A(x,y) \wedge \neg B(z)) \vee \neg C(t,s))$

$\exists y\exists z\forall x\forall t\forall s\, ((\neg A(x,y) \vee \neg C(t,s)) \wedge (\neg B(z) \vee \neg C(t,s)))$ Forma normal conjuntiva

$\forall x\forall t\forall s\, ((\neg A(x,a) \vee \neg C(t,s)) \wedge (\neg B(b) \vee \neg C(t,s)))$ Skolemización

$FC(P1) = \{\neg A(x,a) \vee \neg C(t,s), \neg B(b) \vee \neg C(t,s)\}$

$\forall x\exists y\, A(x,y) \vee \neg\forall x'\exists y'(C(x',y') \rightarrow B(y'))$

$\forall x\exists y\, A(x,y) \vee \exists x'\forall y'\neg(C(x',y') \rightarrow B(y'))$

$\exists x'\forall x\exists y\forall y'(A(x,y) \vee \neg(C(x',y') \rightarrow B(y')))$ Forma Prenex

$\exists x'\forall x\exists y\forall y'(A(x,y) \vee (C(x',y') \wedge \neg B(y')))$

$\exists x'\forall x\exists y\forall y'((A(x,y) \vee C(x',y')) \wedge (A(x,y) \vee \neg B(y')))$ Forma normal conjuntiva

$\forall x\forall y'((A(x,f(x)) \vee C(c,y')) \wedge (A(x,f(x)) \vee \neg B(y')))$ Skolemización

$FC(P2) = \{ A(x,f(x)) \vee C(c,y'), A(x,f(x)) \vee \neg B(y') \}$

$\neg\forall x\, (A(x,x) \rightarrow (\neg\exists zB(z) \rightarrow \forall yC(x,y)))$

$\neg\forall x\, (A(x,x) \rightarrow \forall y\exists z(\neg B(z) \rightarrow C(x,y)))$

$\neg\forall x\forall y\exists z\, (\neg A(x,x) \vee B(z) \vee C(x,y))$

$\exists x\exists y\forall z\, \neg\, (\neg A(x,x) \vee B(z) \vee C(x,y))$ Forma Prenex

$\exists x\exists y\forall z\, (A(x,x) \wedge \neg B(z) \wedge \neg C(x,y))$ Forma normal conjuntiva

$\forall z\, (A(d,d) \wedge \neg B(z) \wedge \neg C(d,e))$ Skolemización

$FC(\neg Q) = \{ A(d,d), \neg B(z), \neg C(d,e)\}$

La forma clausular de la estructura deductiva es la siguiente:

$FC = \{\neg A(x,a) \vee \neg C(t,s), \neg B(b) \vee \neg C(t,s), A(x,f(x)) \vee C(c,y'), A(x,f(x)) \vee \neg B(y'), A(d,d), \neg B(z), \neg C(d,e)\}$

Ejercicio 5. Demostrar usando el método de Resolución con UMG que el siguiente conjunto de cláusulas es insatisfacible: *(2 puntos)*

C1: A(f(y),y)
C2: A(a,x)
C3: D(x,y) ∨ ¬A(y,x)
C4: ¬D(x,y) ∨ B(y,f(y)) ∨ ¬A(x,x)
C5: ¬B(f(z),x) ∨ ¬A(f(z),a)

SOLUCIÓN:

Primero se renombran las variables para evitar, en la medida de lo posible, que a la hora de resolver dos cláusulas tengan variables con el mismo nombre.

C1: A(f(y1),y1)

C2: A(a,x2)

C3: D(x3,y3) ∨ ¬A(y3,x3)

C4: ¬D(x4,y4) ∨ B(y4,f(y4)) ∨ ¬A(x4,x4)

C5: ¬B(f(z5),x5) ∨ ¬A(f(z5),a)

Una posible secuencia de pasos es la siguiente:

C6:	D(y1,f(y1))	(C1,C3)	{ y3/f(y1), x3/y1 }
C7:	B(f(y1),f(f(y1))) ∨ ¬A(y1,y1)	(C6,C4)	{ x4/y1, y4/f(y1) }
C8:	¬A(y1,y1) ∨ ¬A(f(y1),a)	(C7,C5)	{ z5/y1, x5/f(f(y1)) }
C9:	¬A(f(a),a)	(C2,C8)	{ y1/a, x2/a }
C10:	CLAUSULA VACIA	(C1’,C9)	{ y1’/a }