Lógica (primer bloque)

Grado en Ingeniería Informática, Grado en Matemáticas e Informática, Doble Grado en Ingeniería Informática y ADE

Primer Parcial, 30 de Octubre de 2019 - Duración del examen: 2 horas

1. Teoría (**2 puntos**)

(A) Para cada una de las siguientes preguntas o afirmaciones indicar la respuesta correcta. No es necesario justificar la respuesta. (**1 punto**)

(1) Es posible tener un razonamiento (también llamado argumento) correcto con una premisa que sea falsa para toda interpretación. (**Puntos: bien:+0.2, mal:-0.2, no contestada: 0**)

(a) Verdadero

(b) Falso

(2) Si una fórmula se deduce de la teoría básica de un sistema (T[ ]), es decir, sin premisas, es que dicha fórmula es...: (**+0.2, -0.07, 0**)

(a) Un supuesto

(b) Una contradicción

(c) Un axioma

(d) Una tautología

(3) Supongamos una teoría básica ampliada con un conjunto de premisas A1, A2... An. En virtud del teorema de la deducción, sabemos que si al añadir una fórmula A a dicha teoría conseguimos deducir B, es decir, T [A1, A2, …, An, A] ⊢ B , entonces podemos decir que: (**+0.2, -0.07, 0**)

(a) T [A1, A2, …, An, B] ⊢ A

(b) T [A1, A2, …, An] ⊢ A → B

(c) T [A1, A2, …, An, A, B] ⊢ C (donde C es una fórmula insatisfacible)

(d) T [A1, A2, …, An, A] ⊢ C (donde C es una fórmula insatisfacible)

(4) ¿Cuál de las fórmulas equivale a la siguiente dada?: $p \lor q \land r \leftrightarrow q \rightarrow \neg r$ (**+0.2, -0.07, 0**)

(a) $((p \lor (q \land r)) \leftrightarrow q) \rightarrow (\neg r)$

(b) $((p \lor q) \land r) \leftrightarrow q) \rightarrow (\neg r)$

(c) $(p \lor (q \land r)) \leftrightarrow (q \rightarrow (\neg r))$

(d) $(p \lor ((q \land r) \leftrightarrow q)) \rightarrow (\neg r)$

(5) Determinar si la siguiente frase es verdadera o falsa: “Una fórmula bien formada A se dice que es contradicción si existe al menos un contramodelo de dicha fórmula A”. (**+0.2, -0.2, 0**)

(a) Verdadero

(b) Falso

(B) Contestar a las siguientes preguntas **justificando la respuesta**. (1 punto)

(1) Determinar si la siguiente frase es verdadera o falsa: “Dos fórmulas A y B son (lógicamente) equivalentes ($A \Leftrightarrow B$, $A \equiv B$) sii todos los contramodelos de A son también contramodelos de B”. Justificar la respuesta (**máximo: 0.3 puntos**)

En general es falso porque también se necesita que todos los modelos de A sean modelos de B

(2) Sabiendo que B es una fórmula válida (tautología) y que todo modelo de A es modelo de C, ¿qué se puede decir de la siguiente fórmula? $A \rightarrow (B \rightarrow A \land B \land \neg C)$ (**máximo: 0.4 puntos**)

En todas las interpretaciones en las que A es verdadero la fórmula resulta ser falsa por el valor de verdad de C; en cambio, en las interpretaciones en las que A es falso la fórmula resulta ser verdadera. Por tanto, la fórmula es equivalente a ¬A y por tanto será válida si A es insatisfacible, insatisfacible si A es válida y contingente si A es contingente.

(3) Sabiendo que la fórmula $A \rightarrow B$ es contingente y A es una tautología, ¿qué se puede decir de B? (**máximo: 0.3 puntos**)

Si B fuera válida $A \rightarrow B$ también sería válida; si B fuera insatisfacible, $A \rightarrow B$ también sería insatisfacible; por tanto, B tiene que ser contingente, y $A \rightarrow B$ resulta ser equivalente a B.

~~1.4. Un sistema es ..... si cualquier fórmula que se puede deducir a partir de un conjunto de fórmulas es también consecuencia lógica de dichas fórmulas. Es decir, que si : (**+0.1, -0.025, 0**)~~

~~a) Correcto SOLIDO~~

~~b) Completo~~

~~c) Decidible~~
~~d) Estupendo~~

~~1.5. La fórmula ¬A2 nunca es consecuencia lógica de {A1,A2,A3} (**+0.1, -0.025, 0**)~~
~~a) Falso (lo es si las premisas son insatisfacibles)~~
~~b) Verdadero~~

~~1.7 Sabiendo que A es válida, y que B y C tienen los mismos modelos , ¿qué se puede decir de la siguiente fórmula? ¬(B ∨ ¬A) ⟶ (C ⟶ ¬A) (**+0.1, -0.025, 0**)~~
~~a) Que es contradicción~~
~~b) Que es válida o tautología~~
~~c) Que es contingente~~
~~d) No hay información suficiente~~

~~1.9 Supongamos que B es deducible de A, entonces...: (**+0.1, -0.025, 0**)~~
~~a) Es seguro que B es un teorema~~
~~b) Es seguro que A es un teorema~~
~~c) a y b son correctas~~
~~d) a y b son incorrectas~~

~~1.13 Determina si la siguiente frase es verdadera o falsa: «Si T[A1, A2, …, An] ⊢ B es correcta entonces T[A2, …, An, ¬B] ⊢ ¬A1 es correcta» (**máximo: 0.1p**)~~
~~Copiado de Examen LP 15-16. A Víctor le gusta porque es la única algo difícil.~~
~~**Verdadera.** Si T[A1, A2, …, An] ⊢ B es correcta entonces {A1, A2, …, An, ¬B} es insatisfacible. Como A1 es equivalente a ¬¬A1, el conjunto {¬¬A1, A2, …, An, ¬B} también sería insatisfacible. Si {¬¬A1, A2, …, An, ¬B} es insatisfacible entonces T[A2, …, An, ¬B] ⊢ ¬A1 es correcta.~~

2. Formalización (**2.5 puntos**)

Formalizar en el lenguaje de la Lógica Proposicional la siguiente argumentación:

1. Para que pueda irme de vacaciones tengo que aprobar todo y tener dinero.
2. Que sea YouTuber no es ni necesario ni suficiente para que tenga dinero.
3. Si no me voy de vacaciones pero lo apruebo todo me haré YouTuber a no ser que mi madre me descubra.

4. Solo si mi madre no me descubre y tengo dinero me iré de vacaciones y subiré vídeos a YouTube.
5. Por tanto, para que pueda ser YouTuber sin que mi madre me descubra tengo que irme de vacaciones.

Usamos los siguientes símbolos de proposición:
- v: “me voy de vacaciones”
- a: “apruebo todo”
- d: “tengo dinero”
- t: “soy YouTuber”
- m: “mi madre me descubre”

Notamos que:
- El significado de todos estos símbolos es una oración referida a un individuo concreto (“yo”), por lo que no se trata de afirmaciones generales.
- En la siguiente solución algunos símbolos se usan para indicar conceptos que, al menos literalmente, no son idénticos: por ejemplo t se usa también para “subo vídeos a YouTube” y “me hago youtuber”.

Primera premisa:

$v \rightarrow a \land d$

Las palabras “tengo que” dicen que la segunda parte de la frase es condición necesaria para que se cumpla lo dicho en la primera.

Segunda premisa:

$(t \land d) \lor (t \land \neg d) \lor (\neg t \land d) \lor (\neg t \land \neg d)$

Esta formalización puede parecer muy sorprendente pero no hace otra cosa que representar el hecho de que puedo ser youtuber con o sin dinero, y puedo no serlo con o sin dinero. La fórmula final es una tautología porque esta afirmación no nos dice nada sobre el dinero que yo tenga ni sobre mi condición de youtuber.

Tercera premisa:

$\neg m \rightarrow (\neg v \land a \rightarrow t)$ o bien $(\neg v \land a \rightarrow t \lor m)$

Ambas fórmulas son equivalentes; en la segunda se considera que el “a no ser que” solo se refiere al hecho de hacerme youtuber.

Cuarta premisa:

$v \land t \rightarrow \neg m \land d$

Se expresa que lo primero es condición necesaria para lo segundo.

Conclusión:

$t \wedge \neg m \to v$

3. Semántica (**2.5 puntos**)

Demostrar con análisis semántico que NO se cumple la siguiente relación de consecuencia lógica. Indicar de forma explícita y completa: (1) los pasos principales del procedimiento y (2) el resultado final obtenido.

$$\{ p \wedge \neg p \to r \vee \neg t,\ q \to (p \vee q \to s) \wedge \neg r,\ p \leftrightarrow \neg s,\ r \vee \neg r \to q \} \vDash q \wedge (p \vee \neg s)$$

Como siempre, nuestro objetivo es ver si es posible encontrar una interpretación que haga, al mismo tiempo, todas las premisas verdaderas y la conclusión falsa.

A1: $p \wedge \neg p \to r \vee \neg t$

$i(p \wedge \neg p) = F$ en toda interpretación; entonces $i(A1) = V$ para toda interpretación. En este caso no se nos da ningún dato sobre las proposiciones porque A1 es una tautología.

A2: $i(q \to (p \vee q \to s) \wedge \neg r) = V$ sii

$i(q)=F$ o $i((p \vee q \to s) \wedge \neg r)=V$ sii $i(q)=F$ o $[i(p \vee q \to s)=V$ y $i(\neg r)=V]$ sii

$i(q)=F$ o $[\{i(p \vee q)=F$ o $i(s)=V\}$ y $i(\neg r)=V]$ sii

$i(q)=F$ o $[\{[i(p)=F$ y $i(q)=F]$ o $i(s)=V\}$ y $i(r)=F]$

Caso 2.1 Caso 2.2 Caso 2.3

A3: $i(p \leftrightarrow \neg s) = V$ sii $[i(p)=V$ y $i(\neg s)=V]$ o $[i(p)=F$ y $i(\neg s)=F]$

sii $[i(p)=V$ y $i(s)=F]$ o $[i(p)=F$ y $i(s)=V]$

Caso 3.1 Caso 3.2

A4: $i(r \vee \neg r \to q) = V$ sii $i(r \vee \neg r)=F$ o $i(q)=V$ sii $[i(r)=F$ y $i(\neg r)=F]$ o $i(q)=V$

sii $[i(r)=F$ y $i(r)=V]$ o $i(q)=V$

Caso 4.1 Caso 4.2

Pero el Caso 4.1 es imposible porque las dos condiciones son contradictorias; entonces tenemos que $i(q) = V$, que corresponde al Caso 4.2.

B: i(q ∧ (p ∨ ¬s)) = F sii i(q)=F o i(p ∨ ¬s)=F sii i(q)=F o [i(p)=F y i(¬s)=F)]
sii i(q)=F o [i(p)=F y i(s)=V)]
Caso B.1 Caso B.2

Desde A4 tenemos que i(q) = V, o que entra en conflicto con el Caso B.1; entonces tenemos que se dará el Caso B.2: i(p)=F e i(s)=V (compatible con el Caso 3.1)

I(q)=V entra en conflicto con los casos 2.1 y 2.2 pero es compatible con el Caso 2.3.
B.2 i(p)=F y i(s)=V es compatible con el Caso 2.3, pero 2.3 necesita también que i(r)=F.
Tenemos ahora restricciones sobre las proposiciones p, q, r y s, y ninguna restricción sobre la proposición t.

Conclusión:
La interpretación i(p)=F, i(q)=V, i(r)=F, i(s)=V, i(t)=V (pero t podría ser F también) hace las premisas verdaderas y la conclusión falsa, demostrando que NO hay relación de consecuencia lógica.

4. Deducción Natural (**3 puntos**)

Demostrar con deducción natural los siguientes argumentos. ~~Se permite utilizar únicamente las 10 reglas de inferencia básicas y las siguientes reglas derivadas: Modus Tollens, Transitividad, y Regla de Corte. NO se permite utilizar teorema del intercambio con equivalencias, por ejemplo, la aplicación de las Leyes de De Morgan.~~

4.1 T[ ] ⊢ p∨q → (¬q → p)
(usando solo reglas básicas, y reglas derivadas una vez como mucho)

4.2 T[¬((p→ r)∨q)] ⊢ ¬(p→ r) ∧ ¬q
(usando solo reglas básicas)

4.3 T[p ∧ q → r, r → s, (r ↔ s) → r, (p ∧ q) ∨ (¬((r ∧ ¬s) ∨ (¬r ∧ s)))] ⊢ s
(se permite usar todas las reglas básicas y derivadas, así como el teorema del intercambio y las equivalencias)

4.1

Usando una vez la regla de corte:

1	$p \lor q$	supuesto
2	$\neg q$	supuesto
3	p	corte (1,2)
4	$(\neg q \rightarrow p)$	I→ 2,3
5	$p \lor q \rightarrow (\neg q \rightarrow p)$	I→ 1,4

También hay soluciones más complejas que solo usan reglas básicas:

1	$p \lor q$	supuesto
2	$\neg q$	supuesto
3	$\neg p$	supuesto
4	p	supuesto
5	$p \land \neg p$	I∧3,4
6	$p \rightarrow p \land \neg p$	I→4-5
7	q	supuesto
8	$q \land \neg q$	I∧2,7
9	$\neg(p \land \neg p)$	supuesto
10	$\neg(p \land \neg p) \rightarrow q \land \neg q$	I→9 (con la fórmula del paso 8)
11	$\neg\neg(p \land \neg p)$	I¬10

12	$p \land \neg p$	E¬11
13	$q \rightarrow p \land \neg p$	I→7-12
14	$p \land \neg p$	E∨1,6,13
15	$\neg p \rightarrow p \land \neg p$	I→3-14
16	$\neg\neg p$	I¬15
17	p	E¬16
18	$\neg q \rightarrow p$	I→2-17
19	$p \lor q \rightarrow (\neg q \rightarrow p)$	I→1-19

4.2

1	$\neg((p \rightarrow r) \lor q)$	premisa
2	$(p \rightarrow r)$	supuesto
3	$(p \rightarrow r) \lor q$	I∨2
4	$((p \rightarrow r) \lor q) \land \neg((p \rightarrow r) \lor q)$	I∧1,3
5	$\neg(p \rightarrow r)$	I¬2,4
		(en algunos grupos lo hacemos en dos pasos)
6	q	supuesto
7	$(p \rightarrow r) \lor q$	I∨6
8	$((p \rightarrow r) \lor q) \land \neg((p \rightarrow r) \lor q)$	I∧1,7
9	$\neg q$	I¬6,8
10	$\neg(p \rightarrow r) \land \neg q$	I∧5,9

4.3

1	$p \wedge q \rightarrow r$	premisa
2	$r \rightarrow s$	premisa
3	$(r \leftrightarrow s) \rightarrow r$	premisa
4	$(p \wedge q) \vee (\neg((r \wedge \neg s) \vee (\neg r \wedge s)))$	premisa
5	$(p \wedge q) \vee (\neg(r \wedge \neg s) \wedge \neg(\neg r \wedge s))$	T.I. $(\neg(A \vee B) \leftrightarrow \neg A \wedge \neg B)$
6	$(p \wedge q) \vee ((\neg r \vee \neg\neg s) \wedge (\neg\neg r \vee \neg s))$	T.I. $(\neg(A \wedge B) \leftrightarrow \neg A \vee \neg B)$ (2 veces)
7	$(p \wedge q) \vee ((\neg r \vee s) \wedge (r \vee \neg s))$	T.I. $(\neg\neg A \leftrightarrow A)$ (2 veces)
8	$(p \wedge q) \vee ((r \rightarrow s) \wedge (s \rightarrow r))$	T.I. $(\neg A \vee B \leftrightarrow A \rightarrow B)$ (2 veces)
9	$(p \wedge q) \vee (r \leftrightarrow s)$	T.I. $((A \leftrightarrow B) \leftrightarrow ((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)))$
10	r	E$\vee$9,1,3
11	s	E$\rightarrow$2,10