Lógica – Grado en Ingeniería Informática, Grado en Matemáticas e Informática

Examen 5 de julio de 2016

Bloque Lógica de Primer Orden

Ejercicio 1. Formalizar en el lenguaje de la lógica de primer orden los siguientes enunciados:

a) No todo fruto seco tiene cascara.
b) A nadie le gusta el garbanzo si es un fruto seco.
c) A Berto le gustan los frutos secos solo si no tienen cascara.

Solución:

$S(x) \equiv$ x es un fruto seco

$C(x) \equiv$ x tiene cascara

$G(x,y) \equiv$ a x le gusta y

$a \equiv$ Berto

$b \equiv$ garbanzo

a) No todo fruto seco tiene cascara.

- $\neg \forall x(S(x) \rightarrow C(x))$
- $\exists x(S(x) \wedge \neg C(x))$

b) A nadie le gusta el garbanzo si es un fruto seco.

- $S(b) \rightarrow \neg \exists x(G(x,b))$
- $\exists x(G(x,b)) \rightarrow \neg S(b)$

c) A Berto le gustan los frutos secos solo si no tienen cascara.

- $\forall x(G(a,x) \wedge S(x) \rightarrow \neg C(x))$
- $\forall x(C(x) \rightarrow \neg (G(a,x) \wedge S(x)))$
- $\neg \exists x(G(a,x) \wedge S(x) \wedge C(x))$

Ejercicio 2. Definir una interpretación que demuestre, sobre D = {5,7}, si la siguiente argumentación es consecuencia lógica. Justifica la respuesta mediante el desarrollo completo de la interpretación de fórmulas.

$$\{ \neg P(a) , \neg Q(a,b) \wedge \neg Q(b,a) , \forall x(Q(x,x) \rightarrow P(x)) \} \ |=? \ \forall x \forall y \neg Q(x,y)$$

Solución:

$$\{ \underset{A1}{\neg P(a)} , \underset{A2}{\neg Q(a,b) \wedge \neg Q(b,a)} , \underset{A3}{\forall x(Q(x,x) \rightarrow P(x))} \} \ |=? \ \underset{B}{\forall x \forall y \neg Q(x,y)}$$

*) Buscamos una interpretación I tal que $I(A_1) = I(A_2) = I(A_3) = V$ y $I(B) = F$

*) El lenguaje en que está coinstruída la argumentación es:

a , b símbolos de constantes

P símbolo de predicado unario

Q símbolo de predicado binario

*) El dominio de I es, como sugiere el enunciado D = {5,7}

$\boxed{I(a) = 5}$, $\boxed{I(b) = 7}$ por ejemplo

*) $I(A_1) = I(\neg P(a)) = V \longrightarrow I(P(a)) = F \longrightarrow P_D(I(a)) = F$ $\boxed{P_D(5) = F}$

*) $I(A_2) = I(\neg Q(a,b) \wedge \neg Q(b,a)) = V$ $I(\neg Q(a,b)) = V$ y $\boxed{Q_D(5,7) = F}$

$I(\neg Q(b,a)) = V$ $\boxed{Q_D(7,5) = F}$

*) $I(A_3) = I(\forall x(Q(x,x) \rightarrow P(x))) = V$

x = a $I(Q(a,a) \rightarrow P(a)) = V$ como $I(P(a)) = F$ $I(Q(a,a)) = F$ $\boxed{Q_D(5,5) = F}$

x = b $I(Q(b,b) \rightarrow P(b)) = V$ (1)

*) falta por determinar $Q_D(7,7)$ y $P_D(7)$

*) $I(B) = I(\forall x \forall y \neg Q(x,y)) = F$ $\exists x \exists y Q(x,y) = V$ (2)

Tomamos $\boxed{Q_D(7,7) = V}$ y $\boxed{P_D(7) = V}$

*) Hemos encontrado una interpretación con las condiciones buscadas: $P_D = \{7\}$, $Q_D = \{ (7,7) \}$

⇒ Queda probado que no es consecuencia lógica

Ejercicio 3.

a) Demostrar mediante **deducción natural**:

$$T\,[\,\neg \forall x\,(P(x) \wedge Q(x))\,] \vdash \exists x\,\neg P(x) \vee \exists y\,\neg Q(y)$$

b) Si en la demostración anterior se ha utilizado el teorema o regla de intercambio, decir en qué líneas de la demostración se utilizó, y para alguna de esas utilizaciones del teorema de intercambio decir cuáles son las equivalencias aplicadas.

---

a) <u>1ª solución</u>: utilizando la regla eliminación de la disyunción

1.	$\neg \forall x\,(P(x) \wedge Q(x))$	premisa
2.	$\exists x\,\neg(P(x) \wedge Q(x))$	$\neg \forall x\,A(x) \equiv \exists x\,\neg A(x)$
3.	$\exists x\,(\neg P(x) \vee \neg Q(x))$	De Morgan 2 + th intercambio
4.	$\neg P(a) \vee \neg Q(a)$	elim $\exists$ 3, a constante nueva
5.	$\quad\mid\ \neg P(a)$	supuesto
6.	$\quad\mid\ \exists x\,\neg P(x)$	int $\exists$ 5
7.	$\quad\mid\ \exists x\,\neg P(x) \vee \exists y\,\neg Q(y)$	int $\vee$ 6
8.	$\quad\mid\ \neg Q(a)$	supuesto
9.	$\quad\mid\ \exists y\,\neg Q(y)$	int $\exists$ 8
10.	$\quad\mid\ \exists x\,\neg P(x) \vee \exists y\,\neg Q(y)$	int $\vee$ 9
11.	$\exists x\,\neg P(x) \vee \exists y\,\neg Q(y)$	elim $\vee$ 4, 5-7, 8-10

a) <u>2ª solución</u>: mediante contradicción

1.	$\neg \forall x\,(P(x) \wedge Q(x))$	premisa
2.	$\exists x\,\neg(P(x) \wedge Q(x))$	$\neg \forall x\,A(x) \equiv \exists x\,\neg A(x)$
3.	$\exists x\,(\neg P(x) \vee \neg Q(x))$	De Morgan 2 + th intercambio
4.	$\neg P(a) \vee \neg Q(a)$	elim $\exists$ 3, a constante nueva
5.	$\quad\mid\ \neg(\exists x\,\neg P(x) \vee \exists y\,\neg Q(y))$	supuesto
6.	$\quad\mid\ \neg\exists x\,\neg P(x) \wedge \neg\exists y\,\neg Q(y)$	De Morgan 5
7.	$\quad\mid\ \forall x\,P(x) \wedge \forall y\,Q(y)$	$\neg\exists x\,A(x) \equiv \forall x\,\neg A(x)$ + doble negación + ...
8.	$\quad\mid\ \forall x\,P(x)$	elim $\wedge$ 7
9.	$\quad\mid\ P(a)$	elim $\forall$ 8
10.	$\quad\mid\ \neg Q(a)$	corte 4,9
11.	$\quad\mid\ \forall y\,Q(y)$	elim $\wedge$ 7
12.	$\quad\mid\ Q(a)$	elim $\forall$ 11
13.	$\neg\neg(\exists x\,\neg P(x) \vee \exists y\,\neg Q(y))$	int $\neg$ 5, 10, 12
14.	$\exists x\,\neg P(x) \vee \exists y\,\neg Q(y)$	elim $\neg$ 13

b) **Teorema de intercambio**:

<u>1ª versión</u>:

Sea A una formula y B1 una subfórmula de A, si:

$T \vdash A$ (1)

$\vdash B1 \leftrightarrow B2$ (2)

A´ resulta de sustituir en A todas o algunas de las apariciones de B1 por B2 (3)

Entonces: $T \vdash A'$ (4)

<u>2ª versión</u>: exactamente igual a la anterior, pero en el lenguaje español o castellano:

Sea A una formula y B1 una subfórmula de A, si:

(1) A es un teorema en una teoría T

(2) B1 es una subfórmula de A

(3) Si se sustituyen en A todas o algunas de las apariciones de B1 por otra fórmula equivalente B2,

Entonces, la fórmula resultante A' también es un teorema en la teoría T

En ambas soluciones se ha utilizado el teorema de intercambio al pasar de la línea 2 a la 3:

2.- $\exists x \neg (P(x) \wedge Q(x))$

2.- $\exists x\, B1$ con $B1 \equiv \neg (P(x) \wedge Q(x))$

como $B1 \equiv \neg (P(x) \wedge Q(x))$ es equivalente a $B2 \equiv \neg P(x) \vee \neg Q(x)$, De Morgan

3.- $\exists x\, B2$

3.- $\exists x (\neg P(x) \vee \neg Q(x))$

Ejercicio 4. Demostrar por Resolución con UMG que la fórmula ¬E(s(a),s(s(a))) se deduce a partir del siguiente conjunto de cláusulas:

C1: N(a)

C2: ¬N(x) ∨ N(s(x))

C3: ¬N(x) ∨ ¬E(a,s(x))

C4: ¬N(x) ∨ ¬N(y) ∨ ¬E(s(x),s(y)) ∨ E(x,y)

C5: E(f(x,a),x)

C6: E(s(f(x,s(y))),f(s(x),s(y))

Solución:

Se trata de algunos de los axiomas de la aritmética de Peano, donde la constante a representa el número 0, la función s representa el "sucesor", la función f representa la suma, el predicado N representa el concepto de "ser un número natural", y el predicado E representa la igualdad.

La afirmación que se pide demostrar es que 1 no es igual a 2.

Negando la conclusión se obtiene una nueva cláusula

C0: E(s(a),s(s(a)))

A continuación se renombran todas las variables para evitar, en la medida de lo posible, problemas con la resolución.

C1: N(a)

C2: ¬N(x2)vN(s(x2))

C3: ¬N(x3)v¬E(a,s(x3))

C4: ¬N(x4)v¬N(y4)v¬E(s(x4),s(y4))vE(x4,y4)

C5: E(f(x5,a),x5)

C6: E(s(f(x6,s(y6))),f(s(x6),s(y6))

La refutación es la siguiente:

C7:	¬N(a)v¬N(s(a))vE(a,s(a))	(C0,C4)	{ x4/a, y4/s(a) }
C8:	¬N(s(a))vE(a,s(a))	(C7,C1)	{ }
C9:	¬N(a)vE(a,s(a))	(C8,C2)	{ x2/a }
C10:	E(a,s(a))	(C9,C1)	{ }
C11:	¬N(a)	(C10,C3)	{ x3/a }
C12:	□	(C11,C1)	{ }