Lógica (examen final)

Grado en Ingeniería Informática, Grado en Matemáticas e Informática, Doble Grado en Ingeniería Informática y ADE

Convocatoria Extraordinaria, 28 de Junio de 2019. Duración: 2 horas y 45 minutos

---

PRIMER BLOQUE (LP)

1. Formalización y Teoría (2.5 puntos)

Ejercicio 1.1 Responder y justificar la respuesta allá donde se indique.

1. La fórmula $p \rightarrow \neg q \land r$ equivale a la fórmula $p \rightarrow (\neg q \land r)$: ¿verdadero o falso? Justificar la respuesta.

2. La fórmula $p \land q$ …

   a) Está en forma normal conjuntiva
   b) Está en forma normal disyuntiva
   c) Las dos primeras respuestas (a) y (b) son ciertas
   d) Ni (a) ni (b) son ciertas.

3. Sean dos fórmulas bien formadas cualesquiera A y B. Se sabe de ellas que tienen los mismos modelos. ¿Qué podemos afirmar de la fórmula $A \land \neg B$?

   a) Que es válida (tautología)
   b) Que es contingente
   c) Que es contradicción
   d) Que no es posible afirmar con certeza ninguna de las anteriores

4. La siguiente fórmula $(p \land q) \lor r \rightarrow (\neg r \rightarrow (p \land q))$. Justificar la respuesta.

   a) Es una tautología
   b) Es una contradicción
   c) Es contingente

1.1.1 a. La implicación lógica es la conectiva dominante en esta fórmula.

1.1.2 c.

1.1.3 c. Es una contradicción.

1.1.4 a. Lo cual puede verificarse construyendo la tabla de verdad siguiente:

r	p	q	A: (p ∧ q)∨ r	B: (¬r → (p ∧ q))	A → B
f	f	f	v	v	v
f	f	v	v	v	v
f	v	f	v	v	v
f	v	v	f	f	v
v	f	f	v	v	v
v	f	v	f	f	v
v	v	f	v	v	v
v	v	v	f	f	v

Ejercicio 1.2. Formalizar el siguiente argumento en el lenguaje de la Lógica Proposicional, especificando el significado de cada símbolo usado.

Si el cántaro de leche es bueno y no se me cae, tendré buena mantequilla. Si tengo buena mantequilla podré venderla y tener huevos. Si tengo huevos, tendré gallinas. Si tengo gallinas, las venderé y me compraré un vestido e iré al baile. Se me cae el cántaro de leche. Por tanto, no iré al baile.

1.2) Cabe pensar diferentes formalizaciones. Una de ellas podría ser formalizado con las siguientes proposiciones:

p:= el cántaro de lecho es bueno
q:= se cae el cántaro de leche
r:= tener mantequilla
s:= tener huevos
t:= tener gallinas
u:= comprar un vestido e ir al baile

Siendo el razonamiento:

$$\{p \wedge \neg q \rightarrow r,\ r \rightarrow s,\ s \rightarrow t,\ t \rightarrow u,\ q\} \vDash \neg u$$

El razonamiento es una falacia, ya que nada impide que vaya al baile. Aunque el antecedente de una implicación lógica (→) sea falso, el consecuente puede ser verdadero.

2. Semántica (2.5 puntos)

Decidir si existe o no relación de consecuencia lógica en el siguiente esquema argumental, utilizando **medios semánticos** y justificando adecuadamente los pasos dados y el resultado obtenido.

$$\{\ p \leftrightarrow \neg s,\ q \rightarrow r \wedge t,\ \neg(\neg r \vee p \rightarrow r \wedge \neg s)\ \} \vDash p \rightarrow t \vee q$$

Un argumento con premisas $\{A_1, ..., A_n\}$ y conclusión B es correcto si y solo si $[A_1,..., A_n] \vDash B$, es decir, si existe relación de consecuencia lógica entre las premisas y la conclusión.

Sea el argumento $\{p \leftrightarrow \neg s,\ q \rightarrow r \wedge t,\ \neg(\neg r \vee p \rightarrow r \wedge \neg s)\} \vDash p \rightarrow t \vee q$, donde:

A1: $p \leftrightarrow \neg s$

A2: $q \rightarrow r \wedge t$

A3: $\neg (\neg r \vee p \rightarrow r \wedge \neg s)$

B: $p \rightarrow t \vee q$

En el ejercicio se ha de razonar que no se cumple la relación de consecuencia lógica. Para ello, se busca un contramodelo del argumento, esto es, una interpretación I tal que,

$$i(B) = F \wedge i(A_j) = V \qquad j = 1,2,3$$

$i(B) = i(p \rightarrow t \vee q) = F$ sii $\mathbf{i(p) = V}$ y $i(t \vee q) = F$ sii $\mathbf{i(t) = F}$ y $\mathbf{i(q) = F}$

$i(A_1) = i(p \leftrightarrow \neg s) = V$ sii $i(p) = i(\neg s) = V$ ó $i(p) = i(\neg s) = F$
como $i(p) = V$ $i(\neg s) = V$ y $\mathbf{i(s) = F}$

$i(A_2) = i(q \rightarrow r \wedge t) = V$ ya se cumple, puesto que $i(q) = F$

$i(A_3) = i(\neg(\neg r \vee p \rightarrow r \wedge \neg s)) = V$ sii $i(\neg r \vee p \rightarrow r \wedge \neg s) = F$ sii

$i(\neg r \lor p) = V$ que ya se cumple pues dado que $i(p) = V$
y $i(r \land \neg s) = F$ como $i(\neg s) = V$ debe ser **$i(r) = F$**

$\Rightarrow$ Sí es posible definir un contramodelo:

$i(q) = F, i(p) = V, i(s) = F, i(r) = F, i(t) = F$

Por tanto el argumento no es correcto y podemos decir que no existe relación de consecuencia lógica.

3. Deducción Natural (2.5 puntos)

Demostrar la siguiente deducción mediante **deducción natural** justificando cada paso:

$$T [\neg p \lor q , q \lor r \rightarrow s , \neg r \rightarrow p] \vdash \neg t \rightarrow s$$

1.	$\neg p \lor q$	premisa
2.	$q \lor r \rightarrow s$	premisa
3.	$\neg r \rightarrow p$	premisa
4.	$\quad \neg t$	supuesto
5.	$\quad \neg\neg r \lor p$	Teorema de Intercambio en 3 con la equivalencia $A \rightarrow B \Leftrightarrow \neg A \lor B$
6.	$\quad r \lor p$	Teorema de Intercambio en 5 con la equivalencia $A \Leftrightarrow \neg\neg A$
7.	$\quad q \lor r$	regla derivada de corte 1,6
8.	$\quad s$	Modus Ponens 2,7
9.	$\neg t \rightarrow s$	cerrar el supuesto de la línea 4: introd $\rightarrow$(4,8)

4. Transformación a Forma Clausular (2.5 puntos)

Calcular la **forma clausular** del siguiente conjunto de fórmulas.

F1: $(p \rightarrow (q \land \neg r)) \land (s \leftrightarrow \neg q)$
F2: $t \leftrightarrow (\neg p \land \neg s)$
F3: $s \rightarrow t$

Se obtienen las siguientes cláusulas:

C1:	$\neg p \lor q$	(de F1)
C2:	$\neg p \lor \neg r$	(de F1)
C3:	$\neg s \lor \neg q$	(de F1)
C4:	$q \lor s$	(de F1)
C7:	$\neg t \lor \neg p$	(de F2)
C8:	$\neg t \lor \neg s$	(de F2)
C9:	$p \lor s \lor t$	(de F2)
C10:	$\neg s \lor t$	(de F3)

1. Formalización (2.5 puntos)

Formalizar la siguiente argumentación utilizando un lenguaje de primer orden:

Supongamos conocidos los siguientes hechos acerca del número de aprobados de dos asignaturas A y B en una clase:

1. *Si todos los alumnos aprueban la asignatura A, entonces si nadie ha copiado, todos aprueban la asignatura B.*
2. *Si algún delegado de la clase aprueba A y B y no ha copiado, entonces todos los alumnos aprueban A.*
3. *Si nadie aprueba B, entonces ningún delegado aprueba A.*
4. *Si Pepe no aprueba B, entonces nadie aprueba B a menos que (él o ella) copie.*

Por tanto, si Pepe es un delegado y aprueba la asignatura A, entonces todos los alumnos aprueban las asignaturas A y B.

Lenguaje: Constantes = {a, b, p}, Símbolos de predicado = {AP/2, C/1, D/1}
AP(x,y): x aprueba la asignatura y
C(x): x ha copiado
D(x): x es delegado de clase

$\forall x AP(x,a) \rightarrow (\neg \exists x C(x) \rightarrow \forall x AP(x,b))$
$\exists x\, (D(x) \land AP(x,a) \land AP(x,b) \land \neg C(x)) \rightarrow \forall y\, AP(y,a)$
$\neg \exists x AP(x,b) \rightarrow \neg \exists y (D(y) \land AP(y,a))$
$\neg AP(p,b) \rightarrow \forall x (C(x) \lor \neg AP(x,b))$

$D(p) \land AP(p,a) \rightarrow \forall x (AP(x,a) \land AP(x,b))$

2. Deducción Natural (2.5 puntos)

Demostrar la siguiente deducción con el cálculo de **deducción natural**, usando **solamente reglas básicas.**

$T\,[\,\exists xP(x) \land \exists yQ(y),\ \forall zR(z) \land \forall wS(w)\,] \vdash \exists x(P(x) \land Q(x)) \lor \forall x(R(x) \land S(x))$

Solución:

1.	$\forall zR(z) \land \forall wS(w)$	premisa
2.	$\forall zR(z)$	E$\land$ 1
3.	$\forall wS(w)$	E$\land$ 1
4.	$R(x)$	E$\forall$ 2 {z/x}
5.	$S(x)$	E$\forall$ 3 {w/x}
6.	$R(x) \land S(x)$	I$\land$ 4,5
7.	$\forall x(R(x) \land S(x))$	I$\forall$ 6
8.	$\exists x(P(x) \land Q(x)) \lor \forall x(R(x) \land S(x))$	I$\lor$ 7

3. Transformación a Forma Clausular (2.5 puntos)

Obtener el **conjunto de cláusulas** de la siguiente fórmula, detallando cada paso y cada Forma intermedia (e.g. Forma Prenex).

A: $\exists xR(x,a) \rightarrow \forall xQ(x,f(y,b))$

$\exists xR(x,a) \rightarrow \forall xQ(x,f(y,b))$

Forma Prenex (A) =

$\exists x_1R(x_1,a) \rightarrow \forall x_2Q(x_2,f(y,b))$ Renombrado

$\forall x_1\forall x_2(R(x_1,a) \rightarrow Q(x_2,f(y,b)))$ Distr $\rightarrow$

Cierre $\exists$ (A) =

$\exists y\forall x_1\forall x_2\,(R(x_1,a) \rightarrow Q(x_2,f(y,b)))$

Forma Normal Conjuntiva (A) =

$\exists y\forall x_1\forall x_2\,(\neg R(x_1,a) \lor Q(x_2,f(y,b)))$ Def $\rightarrow$

Forma Normal de Skolem (A) =

$\forall x_1\forall x_2\,(\neg R(x_1,a) \lor Q(x_2,f(c,b)))$

Forma Clausular (A) =

$\{\,\neg R(x_1,a) \lor Q(x_2,f(c,b))\,\}$

4. Resolución con UMG (2.5 puntos)

Demostrar por **resolución con UMG** que la fórmula $\exists x(P(x) \rightarrow Q(x,f(x)))$ es consecuencia lógica del siguiente conjunto de cláusulas:

C1: $Q(f(x),y) \vee \neg S(z) \vee \neg S(f(f(f(a))))$
C2: $P(f(z)) \vee S(z)$
C3: $\neg R(y,f(a)) \vee S(f(f(y))$
C4: $R(f(z),f(z)) \vee \neg Q(z,b)$
C5: $Q(a,b)$

Justificar cada paso indicando las cláusulas generadas y el UMG.

De la conclusión negada (y el renombrado) se obtienen las cláusulas
C6: $P(x6)$
C7: $\neg Q(x7,f(x7))$
Las variables de las otras cláusulas se renombran como es habitual:
C1: $Q(f(x1),y1) \vee \neg S(z1) \vee \neg S(f(f(f(a))))$
C2: $P(f(z2)) \vee s(z2)$
C3: $\neg R(y3,f(a)) \vee S(f(f(y3))$
C4: $R(f(z4),f(z4)) \vee \neg Q(z4,b)$
C5: $Q(a,b)$

Una posible **refutación** es:

R1:	$R(f(a),f(a))$	(C4,C5)	$\{ z4/a \}$
R2:	$S(f(f(f(a))))$	(R1,C3)	$\{ y3/f(a) \}$
R3:	$Q(f(x1),y1) \vee \neg S(z1)$	(C1,R2)	$\{ \}$
R4:	$Q(f(x1),y1)$	(R3,R2)	$\{ z1/f(f(f(a))) \}$
R5:	$\square$	(R4,C7)	$\{ x7/f(x1), y1/f(f(x1)) \}$