Lógica – Grado en Ingeniería Informática , Grado en Matemáticas e Informática , Doble grado en Ingeniería Informática y ADE

20 de enero de 2017

Repesca de LP (Lógica Proposicional)

Ejercicio 1.1. Decir si las siguientes afirmaciones son verdaderas (V) o falsas (F). Es necesario justificar brevemente las respuestas.

(1 punto)

a) *Una fórmula bien formada A se dice que es contingente si existe al menos un modelo de dicha fórmula A.*
b) *La fórmula $(p \wedge q \rightarrow r) \leftrightarrow (p \wedge (q \rightarrow r))$ es una contradicción.*
c) *Una deducción [P1, P2, …, Pn] ⊢ C es correcta sii la forma clausular de $P1 \wedge P2 \wedge \ldots \wedge Pn \wedge \neg C$ es satisfacible.*
d) *$q \rightarrow (p \vee \neg p)$ es una fórmula tautológica.*

---

a) *Una fórmula bien formada A se dice que es contingente si existe al menos un modelo de dicha fórmula A.* *FALSO. Una fórmula es contingente si tiene al menos un modelo y un contramodelo.*

b) *La fórmula $(p \wedge q \rightarrow r) \leftrightarrow (p \wedge (q \rightarrow r))$ es una contradicción.* *FALSO.*

p	q	r	p∧q	p∧q→r	q→r	p∧(q→r)	(p∧q→r) ↔ (p∧(q→r))
F	F	F	F	**V**	V	**F**	**F**
F	F	V	F	**V**	V	**F**	**F**
F	V	F	F	**V**	F	**F**	**F**
F	V	V	F	**V**	V	**F**	**F**
V	F	F	F	**V**	V	**V**	**V**
V	F	V	F	**V**	V	**V**	**V**
V	V	F	V	**F**	F	**F**	**V**
V	V	V	V	**V**	V	**V**	**V**

Hemos comprobado que existen 4 modelos para la fórmula, con lo que no puede ser una contradicción.

c) *Una deducción [P1, P2, …, Pn] ⊢ C es correcta sii la forma clausular de $P1 \wedge P2 \wedge \ldots \wedge Pn \wedge \neg C$ es satisfacible.* *FALSO. Una deducción [P1, P2, …, Pn] |— C es correcta sii la forma clausular de $P1 \wedge P2 \wedge \ldots \wedge Pn \wedge \neg C$ es insatisfacible.*

d) *$q \rightarrow (p \vee \neg p)$ es una fórmula tautológica.* *VERDADERO.*

p	q	¬p	p∨¬p	q→ (p∨¬p)
F	F	V	V	**V**
F	V	V	V	**V**
V	F	F	V	**V**
V	V	F	V	**V**

No existe contramodelo al tratarse de una implicación en la que el consecuente siempre es verdadero.

Ejercicio 1.2. Formalizar en el lenguaje de la lógica proposicional *(1,5 puntos)*

a) el siguiente *enunciado*:

Es necesario que salga de casa y que entre en contacto con el virus para que me infecte.

b) la siguiente *argumentación*:

Iré a Paris si y solo si Marta viaja conmigo. Marta viajará conmigo o bien viajará a Barcelona. Marta no viajará a Barcelona. Luego no iré a Paris a no ser que Marta no viaje a Barcelona.

Solución:

a) Identificamos las proposiciones que hay en el enunciado:
   - Salgo de Casa: p
   - Entro en contacto con el virus: q
   - Me he infectado: r

   Identificamos las conectivas y formalizamos el razonamiento:

   $$\mathbf{r \rightarrow p \land q}$$

b) Identificamos las proposiciones que hay en el razonamiento:
   - Voy a París: p
   - Marta viaja conmigo: q
   - Marta viaja a Barcelona: r

   Formalizamos el razonamiento:

   $$\mathbf{\{\, p \leftrightarrow q,\ q \lor r,\ \neg r \,\} \vDash \neg p \lor \neg r}$$

   Alternativas a la conclusión:

   Si Marta viaja a Barcelona, no iré a Paris: $r \rightarrow \neg p$
   o también
   Marta no viaja a Barcelona es condición necesaria para ir a Paris: $p \rightarrow \neg r$

Ejercicio 2. Demostrar con medios semánticos, justificando adecuadamente los pasos dados y el resultado obtenido, lo siguiente:

a) Que NO se verifica la relación de consecuencia lógica en la siguiente argumentación (*2 puntos*)

$$\{ p \wedge (q \to r) \to q , r \vee \neg q , \neg p \} \vDash q \wedge r$$

b) Que SÍ puede verificarse la relación de consecuencia lógica cambiando total o parcialmente sólo una de las premisas (*0,5 puntos*)

Nota: no pueden utilizarse ni las tablas de verdad, ni la deducción natural, ni el método de resolución.

Solución:

a) Como $i(\neg p) = V$, entonces **$i(p) = F$.**

Al ser $i(p) = F$, ya se verifica que $i(p \wedge (q \to r) \to q) = V$, independientemente de los valores de verdad que adopten q y r.

Para que $i(r \vee \neg q) = V$, o bien $i(r) = V$ o bien $i(q) = F$ o ambos. Pero entonces, cualquier interpretación que asignase $i(q) = F$ cumpliría que $i(r \vee \neg q) = V$ y también que $i(q \wedge r) = F$, por lo que hay dos contramodelos que demuestran que no se cumple la relación de consecuencia lógica:

$i(p) = F, i(q) = F, i(r) = F$ y $i(p) = F, i(q) = F, i(r) = V$

b) Si reemplazamos la premisa **¬p** por **q**, la argumentación quedaría así:

$$\{ p \wedge (q \to r) \to q , r \vee \neg q, q \} \vDash q \wedge r$$

<u>Todas</u> las interpretaciones que hagan verdaderas las premisas, necesariamente han de cumplir que $i(q) = V$ y que $i(r) = V$, por lo que <u>para todas ellas</u> se cumple que $i(q \wedge r) = V$. Por tanto, sí se verifica la relación de consecuencia lógica.

Ejercicio 3. Demostrar con el cálculo de deducción natural y justificando cada paso:

$$T[\, p \rightarrow r \,,\, q \rightarrow r \,] \;\vdash\; (p \vee q) \rightarrow (r \vee s)$$ *(2,5 puntos)*

Solución:

1.	$p \rightarrow r$	premisa
2.	$q \rightarrow r$	premisa
3.	$(p \vee q)$	supuesto
4.	r	$E_{\vee\ 1,2,3}$
5.	$r \vee s$	$I_{\vee\ 4}$
6.	$(p \vee q) \rightarrow (r \vee s)$	$I_{\rightarrow\ 3,5}$

Solución alternativa:

1.	$p \rightarrow r$	premisa
2.	$q \rightarrow r$	premisa
3.	$(p \vee q)$	supuesto
4.	$\neg(r \vee s)$	supuesto
5.	$\neg r \wedge \neg s$	Intercambio 4, $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$
6.	$\neg r$	$E_{\wedge\ 5}$
7.	$\neg p$	MT $_{1,6}$
8.	q	Corte $_{3,7}$
9.	$\neg q$	MT $_{2,6}$
10.	$q \wedge \neg q$	$I_{\wedge\ 8,9}$
11.	$\neg\neg(r \vee s)$	$I_{\neg\ 4,10}$
12.	$(r \vee s)$	$E_{\neg\ 11}$
13.	$(p \vee q) \rightarrow (r \vee s)$	$I_{\rightarrow\ 3,12}$

Nota: Sería correcto también incluir como paso 11 la fórmula $\neg(r \vee s) \rightarrow q \wedge \neg q$ para posteriormente deducir $\neg\neg(r \vee s)$ como paso 12

Ejercicio 4. Demostrar, utilizando el método de resolución, que:

$$T[p \leftrightarrow \neg t,\ p \vee \neg(q \vee r),\ p \rightarrow s,\ \neg(q \vee s \rightarrow \neg r \wedge s)] \vdash s \wedge \neg t$$

(2,5 puntos)

Solución:

Hay que demostrar que el conjunto de fórmulas {A1, A2, A3, A4, ¬B} es insatisfacible deduciendo la clausula vacía. Transformamos cada fórmula a su forma normal conjuntiva:

A1: $p \leftrightarrow \neg t$

$(p \rightarrow \neg t) \wedge (\neg t \rightarrow p)$	$A \leftrightarrow B \equiv (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$
$(\neg p \vee \neg t) \wedge (\neg\neg t \vee p)$	$A \rightarrow B \equiv \neg A \vee B$
$(\neg p \vee \neg t) \wedge (t \vee p)$	$\neg\neg A \equiv A$
FC_A1= $\{ \neg p \vee \neg t, t \vee p \}$	cláusulas 1 y 2

A2: $p \vee \neg(q \vee r)$

$p \vee (\neg q \wedge \neg r)$	$\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$
$(p \vee \neg q) \wedge (p \vee \neg r)$	$A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$
FC_A2= $\{ p \vee \neg q, p \vee \neg r \}$	cláusulas 3 y 4

A3: $p \rightarrow s$

$\neg p \vee s$	$A \rightarrow B \equiv \neg A \vee B$
FC_A3= $\{ \neg p \vee s \}$	cláusula 5

A4: $\neg(q \vee s \rightarrow \neg r \wedge s)$

$\neg(\neg(q \vee s) \vee (\neg r \wedge s))$	$(A \rightarrow B) \equiv \neg A \vee B$
$\neg\neg(q \vee s) \wedge \neg(\neg r \wedge s)$	$\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$
$(q \vee s) \wedge \neg(\neg r \wedge s)$	$\neg\neg A \equiv A$
$(q \vee s) \wedge (\neg\neg r \vee \neg s)$	$\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$
$(q \vee s) \wedge (r \vee \neg s)$	$\neg\neg A \equiv A$
FC_A4= $\{ q \vee s, r \vee \neg s \}$	cláusulas 6 y 7

¬B: $\neg(s \wedge \neg t)$

$\neg s \vee \neg\neg t$	$\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$
$\neg s \vee t$	$\neg\neg A \equiv A$
FC_B= $\{ \neg s \vee t \}$	cláusula 8

Forma clausular de la estructura deductiva: $\{\neg p \vee \neg t, t \vee p, p \vee \neg q, p \vee \neg r, \neg p \vee s, q \vee s, r \vee \neg s, \neg s \vee t\}$

C1: $\neg p \vee \neg t$
C2: $t \vee p$
C3: $p \vee \neg q$
C4: $p \vee \neg r$
C5: $\neg p \vee s$
C6: $q \vee s$
C7: $r \vee \neg s$
C8: $\neg s \vee t$

R1: $\neg p \vee t$	C8 y C5
R2: $\neg p \vee \neg p$	R1 y C1
R3: $\neg r$	R2 y C4
R4: $\neg s$	C7 y R3
R5: q	R4 y C6
R6: $\neg q$	R2 y C3
$\square$	R5 y R6