Lógica – Grado en Ingeniería Informática, Grado en Matemáticas e Informática

Examen 5 de julio de 2016

Bloque Lógica Proposicional

Ejercicio 1.1.

a) Demostrar, sin usar tablas de verdad, que las dos fórmulas siguientes no son equivalentes:

$$p \wedge \neg q \rightarrow \neg p, \qquad \neg(p \wedge q) \vee \neg q$$

b) Justificar adecuadamente la verdad o falsedad de la siguiente afirmación: "Si el conjunto de fórmulas {A1, A2} es insatisfacible, entonces el conjunto {¬A1, ¬A2} es satisfacible"

Solución:

a) Si no son equivalentes significa que existe al menos una interpretación que es modelo de una y contramodelo de la otra. Para facilitar la identificación de tal interpretación se podrían poner ambas fórmulas en forma clausular:

$$p \wedge \neg q \rightarrow \neg p \equiv \neg(p \wedge \neg q) \vee \neg p \equiv \neg p \vee q \vee \neg p \equiv \neg p \vee q$$

$$\neg(p \wedge q) \vee \neg q \equiv \neg p \vee \neg q \vee \neg q \equiv \neg p \vee \neg q$$

Se ve fácilmente que la interpretación $i(p) = i(q) = V$ es modelo de la primera fórmula y contramodelo de la segunda, por lo que no son equivalentes.

b) Si la afirmación fuese correcta, no podría satisfacerse la premisa y no satisfacerse la conclusión. Es decir, no podría existir un conjunto de fórmulas {A1, A2} insatisfacible tal que {¬A1, ¬A2} no fuese satisfacible. Pero con el ejemplo trivial del conjunto {p, ¬p}, que es insatisfacible, se ve que el conjunto {¬p, p} no es satisfacible. Por tanto, la afirmación es falsa.

Ejercicio 1.2. Formalizar en el lenguaje de la lógica proposicional:

a) Sólo si estudio y no sigo la Eurocopa, sacaré el curso adelante. Si no saco el curso, no podré irme de vacaciones. O me voy de vacaciones o no podré estudiar más. Por tanto, si me voy de vacaciones es que no he seguido la Eurocopa.

b) Si copio en el examen, suspenderé, salvo si no me pillan.

Solución :

a) p: estudio q: sigo la Eurocopa r: saco el curso s: me voy de vacaciones

$r \to p \wedge \neg q$, $\neg r \to \neg s$, $s \vee \neg p$ $\therefore$ $s \to \neg q$

b) p: copio en el examen q: suspendo r: me pillan

$r \wedge p \to q$ (o bien $p \wedge \neg q \to \neg r$)

Ejercicio 2. Demostrar que no existe relación de consecuencia lógica en la siguiente argumentación, justificando adecuadamente todos los pasos.

$$\{\neg p \to q \lor r,\ \neg(q \land s),\ s \lor \neg q \to \neg r\} \vDash p \lor \neg r$$

(Nota: No pueden utilizarse tablas de verdad para llevar a cabo la demostración).

Solución:

$$\{\underbrace{\neg p \to q \lor r}_{A_1},\ \underbrace{\neg(q \land s)}_{A_2},\ \underbrace{s \lor \neg q \to \neg r}_{A_3}\} \vDash \underbrace{p \lor \neg r}_{B}$$

*) Buscamos una interpretación i tal que $i(A_1) = i(A_2) = i(A_3) = V$ y $i(B) = F$

*) $i(B) = i(p \lor \neg r) = F \longrightarrow \boxed{i(p) = F}$ y $\boxed{i(r) = V}$

*) $i(A_1) = i(\neg p \to q \lor r) \longrightarrow i(A_1) = V$
$i(\neg p) = V$, $i(q \lor r) = V$

*) $i(A_3) = i(s \lor \neg q \to \neg r) = V \longrightarrow i(s \lor \neg q) = F \longrightarrow \boxed{i(s) = F}$ y $\boxed{i(q) = V}$
$i(\neg r) = F$

*) $i(A_2) = i(\neg(q \land s))$ con $i(q \land s) = F$ ($i(s) = F$) es $i(A_2) = V$

Por tanto, la interpretación $i(p) = i(s) = F$ $i(q) = i(r) = V$ es la interpretación buscada

$\Rightarrow$ NO se cumple la relación de consecuencia lógica.

Ejercicio 3. Demostrar con el cálculo **deducción natural** (justificando cada paso y utilizando solamente reglas básicas):

$$T\,[\,p \wedge s\,,\, p \wedge \neg q\,,\, s \leftrightarrow q \wedge r\,] \;\vdash\; \neg (p \vee r)$$

(*Nota*: No se pueden utilizar tablas de verdad, ni razonamientos semánticos ni el método de resolución)

Solución:

1. $p \wedge s$	Premisa
2. $p \wedge \neg q$	Premisa
3. $s \leftrightarrow q \wedge r$	Premisa
4. $p \vee r$	Supuesto
5. p	E$\wedge$ (1)
6. s	E$\wedge$ (1)
7. $\neg q$	E$\wedge$ (2)
8. $s \rightarrow q \wedge r$	E$\leftrightarrow$ (3)
9. $q \wedge r$	MP (6,8)
10. q	E$\wedge$ (9)
11. $q \wedge \neg q$	I$\wedge$ (7,10)
12. $p \vee r \rightarrow q \wedge \neg q$	I$\rightarrow$ (4,11)
13. $\neg (p \wedge r)$	I$\neg$ (12)

Otra posible solución:

1. $p \wedge s$	Premisa
2. $p \wedge \neg q$	Premisa
3. $s \leftrightarrow q \wedge r$	Premisa
4. p	E$\wedge$ (1)
5. s	E$\wedge$ (1)
6. $\neg q$	E$\wedge$ (2)
7. $s \rightarrow q \wedge r$	E$\leftrightarrow$ (3)
8. $q \wedge r$	MP (5,7)
9. q	E$\wedge$ (8)
10. $q \wedge \neg q$	I$\wedge$ (6,9)
11. $\neg (p \vee r)$	ECQ Ex Contradictione Quodlibet: $\dfrac{A \wedge \neg A}{B}$ de una contradicción se sigue cualquier cosa

Ejercicio 4. Demostrar que la siguiente estructura deductiva es correcta usando el método de resolución:

$$T\ [\ (\neg p\wedge q) \vee (p\wedge\neg q)\ ,\ p \rightarrow q\vee r\ ,\ r \rightarrow \neg(s \rightarrow p)\ ,\ \neg r \rightarrow s\ ]\ \vdash\ s\wedge\neg p$$

Solución:

$$T\ [\ \underset{A1}{(\neg p\wedge q) \vee (p\wedge\neg q)}\ ,\ \underset{A2}{p \rightarrow q\vee r}\ ,\ \underset{A3}{r \rightarrow \neg(s \rightarrow p)}\ ,\ \underset{A4}{\neg r \rightarrow s}\ ]\ \vdash\ \underset{B}{s\wedge\neg p}$$

[A1, A2, A3, A4] $\vdash$ B sii { A1, A2, A3, A4, ¬B } es insatisfacible

sii de { A1, A2, A3, A4, ¬B } se deduce la cláusula vacía por resolución

*) Forma clausular:

A1: $(\neg p\wedge q) \vee (p\wedge\neg q) \equiv_{\text{(distributividad)}} (\neg p \vee (p\wedge\neg q)) \wedge (q \vee (p\wedge\neg q))$

$\equiv_{\text{(distributividad)}} ((\neg p \vee p)\wedge (\neg p \vee\neg q)) \wedge ((q\vee p) \wedge (q \vee\neg q)) \equiv$

$\equiv_{\text{(elim paréntesis)}} (\neg p \vee p)\wedge (\neg p \vee\neg q) \wedge (q\vee p) \wedge (q \vee\neg q)$ cláusulas 1,2,3,4

A2: $p\rightarrow q\vee r \equiv_{\text{(eliminación }\rightarrow)} \neg p \vee q\vee r$ cláusula 5

A3: $r \rightarrow \neg(s \rightarrow p) \equiv_{\text{(eliminación }\rightarrow)} \neg r \vee \neg(\neg s \vee p)$

$\equiv_{\text{(DeMorgan)}} \neg r \vee (s \wedge \neg p) \equiv_{\text{(distributividad)}} (\neg r \vee s) \wedge (\neg r \vee \neg p)$ cláusulas 6 y 7

A4: $\neg r \rightarrow s \equiv_{\text{(eliminación }\rightarrow)} \neg\neg r \vee s \equiv_{\text{(elim }\neg\neg)} r\vee s$ cláusula 8

¬B: $\neg(s\wedge\neg p) \equiv_{\text{(DeMorgan)}} \neg s \vee \neg\neg p \equiv_{\text{(elim }\neg\neg)} \neg s\vee p$ cláusula 9

*) Resolución:

C1: $\neg p \vee p$	C2: $\neg p \vee\neg q$	C3: $q\vee p$	C4: $q \vee\neg q$	
C5 : $\neg p \vee q\vee r$	C6: $\neg r \vee s$	C7: $\neg r \vee \neg p$	C8: $r\vee s$	C9: $\neg s\vee p$

C10: $s\vee s$ desde C6 con C8

C11: s (idempotencia)

C12: p desde C11 con C9

C13: $\neg q$ desde C12 con C2

C14: $q\vee r$ desde C12 con C5

C15: $\neg r$ desde C12 con C7

C16: r desde C14 con C13

C17: $\square$ desde C15 con C16