Lógica – Grado en Ingeniería Informática, Grado en Matemáticas e Informática

21 de diciembre de 2015

Examen de Lógica de Primer Orden

Ejercicio 1. Formalizar en lógica de primer orden sobre el dominio de las personas la siguiente argumentación:

> *Algunos políticos son corruptos. Sólo a las personas a las que nunca han votado son honradas. A Manolo le ha votado alguien. Por tanto Manolo es un corrupto.*

Nota: Entiéndase honrado como lo opuesto a corrupto *(3 puntos)*

Solución

P(x) : x es un político

Q(x) : x es corrupto

R(x, y) : x vota a y

a : Manolo

$\exists x(P(x) \land Q(x))$, $\forall x(\neg Q(x) \rightarrow \neg \exists y R(y, x))$, $\exists x\, R(x, a)$ $\models$ $Q(a)$

Ejercicio 2. Demostrar con medios semánticos que el siguiente razonamiento no es correcto. Justificar adecuadamente todos los pasos.

$$\{\ \forall x\ (\ p(x)\rightarrow q(a,x)\ )\ ,\ \exists y\ p(y)\ \}\ \vDash\ q(a,a)$$

Los AND y los OR indican cuál es la relación entre dos condiciones en el mismo nivel (por ejemplo (1.1) y (1.2) tienen que darse las dos a la vez).

Al haber un símbolo de constante elegimos un dominio con dos elementos {0,1} y añadimos otra constante b, y la interpretación I que buscamos será tal que I(a) = 0, I(b) = 1.

Las condiciones sobre las cláusulas son

(1) $I(\forall x(p(x)\rightarrow q(a,x))) = V$ sii

AND (1.1) $I(p(a)\rightarrow q(a,a)) = V$ sii

OR (1.1.1) $I(p(a)) = F$

OR (1.1.2) $I(q(a,a)) = V$

AND (1.2) $I(p(b)\rightarrow q(a,b)) = V$ sii

OR (1.2.1) $I(p(b)) = F$

OR (1.2.2) $I(q(a,b)) = V$

(2) $I(\exists z p(z)) = V$ sii

OR (2.1) $I(p(a)) = V$

OR (2.2) $I(p(b)) = V$

(3) $I(q(a,a)) = F$

La condición (3) es necesaria, y excluye (1.1.2); por lo tanto, la condición (1.1.1) se vuelve necesaria.

La condición (1.1.1) excluye (2.1), haciendo que (2.2) se vuelva necesaria.

La condición (2.2) excluye (1.2.1), haciendo que (1.2.2) se vuelva necesaria.

No hay más contradicciones.

Una de las interpretaciones contraejemplo puede ser

I(a) = 0

I(b) = 1

I(p) = { 1 }   (es verdadero si y sólo si su argumento es 1)

I(q) = { (0,1), (1,0), (1,1) }

Posibles simplificaciones

- Cambiar q por un predicado de un argumento (la conclusión sería q(a))
- Segunda premisa: quitar el cuantificador (por ejemplo, p(b))

Ejercicio 3. Demostrar, mediante el método de resolución, que la siguiente estructura deductiva es correcta: $T[C_1, C_2, C_3, C_4] \vdash \exists x\,(\neg Q(x) \wedge \neg R(x))$

C_1: $R(x) \vee P(x) \vee S(x)$

C_2: $R(x) \vee P(x) \vee \neg Q(f(x))$

C_3: $\neg P(x)$

C_4: $\neg R(x)$

Se renombran las variables:

C_1: $R(x_1) \vee P(x_1) \vee S(x_1)$
C_2: $R(x_2) \vee P(x_2) \vee \neg Q(f(x_2))$
C_3: $\neg P(x_3)$
C_4: $\neg R(x_4)$

Se hace la forma clausular de la negación de la conclusión
C_5: $Q(x_5) \vee R(x_5)$

La cláusula C_1 se puede simplificar al ser $S(x_1)$ un literal puro.

Para que el conjunto sea insatisfacible debe existir una derivación que permita llegar a la cláusula vacía:

C_2: $R(x_2) \vee P(x_2) \vee \neg Q(f(x_2))$ C_3: $\neg P(x_3)$

$\{x_2/x_3\}$

R_1: $R(x_3) \vee \neg Q(f(x_3))$ C_4: $\neg R(x_4)$

$\{x_3/x_4\}$

R_2: $\neg Q(f(x_4))$ C_5: $Q(x_5) \vee R(x_5)$

$\{x_5/f(x_4)\}$

R_3: $R(f(x_4))$ C'_4: $\neg R(x_6)$

$\{x_6/f(x_4)\}$

R_4: $\square$

Hemos encontrado la cláusula vacía □, luego el conjunto de cláusulas es insatisfacible. La estructura deductiva es correcta.