Lógica – Grado en Ingeniería Informática, Grado en Matemáticas e Informática

8 de novbre de 2016

Evaluación de Lógica Proposicional

Ejercicio 1.1. Decir si las siguientes afirmaciones son verdaderas (V) o falsas (F), justificando adecuadamente la respuesta. (*1 punto*)

a. Una fórmula bien formada A se dice que es contradicción si existe al menos un contramodelo de dicha fórmula A.
   - **Falsa**
   - Una FBF A es una **contradicción** sii todas sus interpretaciones son contramodelos, por lo que no basta con que tenga al menos uno.

b. Una fórmula A es satisfacible sii existe (al menos) un modelo de dicha fórmula
   - **Verdadera**
   - Una fórmula es **satisfacible** sii existe (al menos) una interpretación i tal que i(A) = V, es decir, existe una interpretación que la satisface, y esto es un modelo.

c. B es consecuencia lógica de {A1,...,An} ({A1,...,An} ⊨ B) sii todas las interpretaciones de la fórmula A1 ∧ ... ∧ An → B la satisfacen
   - **Verdadera**
   - B es **consecuencia lógica** de {A1,...,An} sii la fórmula A1 ∧ ... ∧ An → B es válida (⊨ A1 ∧ ... ∧ An → B), y eso significa que todas sus interpretaciones la satisfacen

d. Dos fórmulas A y B son (lógicamente) equivalentes (A ⇔ B, A ≡ B) sii todos los contramodelos de A son también contramodelos de B
   - **Falsa**
   - Dos fórmulas A y B son (lógicamente) **equivalentes** sii para toda interpretación i se cumple que i(A) = i(B), por tanto no es suficiente que todos los contramodelos de A lo sean de B, sino que también todos los de B han de serlo de A.

Ejercicio 1.2. Para cada una de las siguientes fórmulas, indicar si es tautología, contingente o contradicción, justificando la respuesta. (*1 punto*)

a. $(p \rightarrow q) \vee r$

- ¿$\exists$ i t.q. $i(A) = F$?

  $i(A) = F$ sii $i(p \rightarrow q) = F$ e $i(r) = F$ sii $i(p) = V$, $i(q) = i(r) = F$

- ¿$\exists$ i t.q. $i(A) = V$?

  $i(A) = V$ sii $i(p \rightarrow q) = V$ o bien $i(r) = V$, y la interpretación $i(p) = i(q) = i(r) = V$ cumple ambas condiciones

- Por tanto, la fórmula es **contingente**

b. $\neg (p \vee q) \rightarrow \neg p \wedge \neg q$

- ¿$\exists$ i t.q. $i(A) = F$?

  $i(A) = F$ sii $i(\neg(p \vee q)) = V$, $i(p \vee q) = F$ sii $i(p) = F = i(q)$
  y también $i(\neg p \wedge \neg q) = F$, pero esto no es posible con los valores de verdad fijados anteriormente

- Así que la fórmula no tiene contramodelos y por tanto es **tautología**

c. $\neg (p \rightarrow q) \wedge (\neg p \vee q)$

- ¿$\exists$ i t.q. $i(A) = V$?

  $i(A) = V$ sii $i(\neg(p \rightarrow q)) = V$, $i(p \rightarrow q) = F$ sii $i(p) = V$ y $i(q) = F$

  y también $i(\neg p \vee q) = V$, pero esto no es posible con los valores de verdad fijados anteriormente

- Así que la fórmula no tiene modelos y por tanto es una **contradicción**

Ejercicio 2. Formalizar las siguientes frases o razonamientos en el lenguaje de la Lógica Proposicional, especificando el significado de cada símbolo usado.

1. Para ganar el partido Juan necesita no fallar el penalty. *(formalizar con una fórmula)*
2. La garantía caduca cuando han pasado dos años desde la compra o bien has abierto el aparato sin estar autorizado. *(formalizar con una fórmula)*
3. Si preparo carne compro vino tinto. No compro cerveza a no ser que prepare un aperitivo de embutidos. Sólo compro una de las dos bebidas. Por tanto, si compro cerveza es que no preparo carne. *(formalizar con premisas y conclusión)*

(*2 puntos*)

Soluciones:

1. p: "Juan gana el partido"
   q: "Juan falla el penalti"

   $$p \rightarrow \neg q$$

   Es bastante evidente que la palabra "necesita" expresa "es condición necesaria". La frase a formalizar se puede escribir como "No fallar el penalty es condición necesaria para que Juan gane el partido". Y esto siempre sa ha formalizado con la implicación de "p" a "¬q", no al revés (tampoco vale la doble implicación).

   Si lo estudiamos con las tablas de verdad en la cabeza vemos que ésta es la formalización correcta: NO se nos dice que si Juan no falla el penalty entonces gana el partido; Juan necesita no fallar, pero aún así nadie nos garantiza que finalmente gane el partido.
   De hecho, si hubiéramos escuchado y dado por buena esta frase, y nos hubiéramos despertado después de terminar el partido, al enterarnos que Juan ha ganado el partido DEDUCIRÍAMOS que no ha fallado el penalty (que el significado de la flecha tal y como está puesta aquí).

2. p: "la garantía caduca"
   q: "han pasado dos años desde la compra"
   r: "has abierto el aparto"
   s: "estás autorizado"

   $$q \vee (r \wedge \neg s) \rightarrow p$$

   Los dos sucesos mencionados son condiciones suficientes para que la garantía caduque, pero no son los únicos (podría haber más razones, como suele pasar: que el aparato se haya mojado son líquidos, etc.). Por tanto, NO son condiciones suficientes, y la doble implicación no vale aquí.

   El concepto de "estar autorizado" hay que formalizarlo también porque uno podría abrir el aparato previa autorización, y esto podría mantener la garantía.

3. p: "preparo carne"
   q: "compro vino tinto"
   r: "compro cerveza"
   s: "preparo un aperitivo de embutidos"

   $$\{ p \rightarrow q \,;\, r \rightarrow s \,;\, (q \wedge \neg r) \vee (\neg q \wedge r) \} \models r \rightarrow \neg p$$

La primera frase es fácil.

En la segunda no hay que equivocarse con la dirección de la implicación: lo normal es que NO compre cerveza, pero si la compro es porque preparo embutidos. Por lo tanto, que prepare embutidos es necesario para comprar cerveza.

En la tercera premisa hay que poner la disyunción EXCLUSIVA: está clarísimo que no voy a comprar ambas bebidas. Los que no lo han hecho es porque no se saben o no se apoyan en las tablas de verdad a la hora de formalizar.

La conclusión es fácil.

Hay que escribir el razonamiento de forma correcta, no sólo poniendo las fórmulas una tras otra, sino también organizarlas en forma de premisas y conclusión, utilizando correctamente la notación que expresa la relación de consecuencia lógica (esta notación no es la única).

Ejercicio 3. Demostrar con medios semánticos que el siguiente razonamiento no es correcto. Indicar de forma explícita y completa: (1) los pasos principales del procedimiento y (2) el resultado final obtenido.

Nota: no pueden utilizarse ni las tablas de verdad, ni la deducción natural, ni el método de resolución.

$$\{ p\to q , r\to s , \neg q\vee(r\wedge s) , t\wedge s \} \vDash r\wedge t\to\neg p$$

(*2 puntos*)

Solución:

$\{A_1, A_2, A_3, A_4\}\vDash B$

A_1: $p\to q$

A_2: $r\to s$

A_3: $\neg q\vee(r\wedge s)$

A_4: $t\wedge s$

B: $r\wedge t \to\neg p$

Vamos a buscar una interpretación que a la vez sea modelo de $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ y contramodelo de B.

1. En los contramodelos de B, $I(r\wedge t \to\neg p)=F$.

Eso requiere que $I(r\wedge t)=V$, y que $I(\neg p)=F$

Lo primero implica que **I(r)=V** e **I(t)=V**. Lo segundo implica que **I(p)=V**.

2. ¿Hay modelos de $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ en los cuales I(r)=V, I(t)=V y I(p)=V?

2.1) A_1. Como asumimos I(p)=V, necesitamos que **I(q)=V**

2.2) A_2. Como asumimos I(r)=V, necesitamos que **I(s)=V**

2.3) A_3. Como hemos requerido que I(r)=V y que I(s)=V es verdadera, A_3 es V.

2.4) A_4. Como asumimos I(t)=V y I(s)=V, A_4 es V

Es decir, la interpretación I(p)=V, I(q)=V, I(r)=V, I(s)=V y I(t)=V es modelo de $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ pero contramodelo de B.

Por tanto **no existe relación de consecuencia lógica.**

Ejercicio 4. Demostrar con deducción natural $q \rightarrow r \vdash (p \vee q) \rightarrow (p \vee r)$

(No se puede utilizar tablas de verdad, resolución ni análisis semántico) (*2 puntos*)

Solución:

- 1ª Forma : utilizando la regla de eliminación de la disyunción

1-	$q \rightarrow r$	premisa
2-	$p \vee q$	supuesto
3-	p	supuesto
4-	$p \vee r$	introducción $\vee$ 3
5	$p \rightarrow p \vee r$	introducción$\rightarrow$ 3,4
6-	q	supuesto
7-	r	modus ponens 6,1
8-	$p \vee r$	introducción $\vee$ 7
9-	$q \rightarrow p \vee r$	introducción$\rightarrow$ 6,8
10-	$p \vee r$	elim $\vee$ 2, 5, 9
11-	$p \vee q \rightarrow p \vee r$	introducción $\rightarrow$ 2,10

- 2ª Forma : por contradicción

1 -	$q \rightarrow r$	premisa
2 -	$p \vee q$	supuesto
3 -	$\neg(p \vee r)$	supuesto
4 -	$\neg p \wedge \neg r$	T. Intercambio 3 con $\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$
5 -	$\neg p$	elim $\wedge$ 4
6 -	q	corte 2,5
7 -	r	modus ponens 6,1
8 -	$\neg r$	elim $\wedge$ 4
9 -	$r \wedge \neg r$	int $\wedge$ 7,8
10 -	$\neg\neg(p \vee r)$	int $\neg$ 3, 9
11 -	$p \vee r$	elim $\neg$ 10
12 -	$(p \vee q) \rightarrow (p \vee r)$	int $\rightarrow$ 2, 11

- 3ª Forma : todavía más rápido:

1-	$q \rightarrow r$	premisa
2-	$p \vee q$	supuesto
3-	$\neg q \vee r$	Th intercambio 1 con $A \rightarrow B \equiv \neg A \vee B$
4-	$p \vee r$	corte 2,3
5-	$p \vee q \rightarrow p \vee r$	introducción $\rightarrow$ 2,4

NOTA: evidentemente puede haber muchas otras soluciones.

Ejercicio 5. Pasar a forma clausular, indicando cada paso y después utiliza el método de resolución por demostrar la siguiente argumentación:

$$T\ [\neg p \leftrightarrow q\ ,\ (r \wedge s) \vee (\neg r \wedge \neg s)\ ,\ p \rightarrow \neg(\neg q \wedge \neg r) \wedge \neg r]\ \vdash\ r \vee s \rightarrow s \wedge \neg p$$

(*2 puntos*)

Solución:

A1: $\neg p \leftrightarrow q$ es equivalente con (transformar $\leftrightarrow$ a $\rightarrow$)

$(\neg p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow \neg p)$ es equivalente con (transformar $A \rightarrow B$ a $\neg A \vee B$)

$(\neg\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee \neg p)$ es equivalente con (eliminar $\neg\neg$)

$(p \vee q) \wedge (\neg q \vee \neg p)$ en FNC;

FC_A1= $\{p \vee q, \neg q \vee \neg p\}$ clausulas 1 y 2

A2: $(r \wedge s) \vee (\neg r \wedge \neg s)$ es equivalente a (distributividad de $\vee$ a $\wedge$)

$((r \wedge s) \vee \neg r) \wedge ((r \wedge s) \vee \neg s)$ es equivalente a (distributividad de $\vee$ a $\wedge$ dos veces)

$((r \vee \neg r) \wedge (s \vee \neg r)) \wedge ((r \vee \neg s) \wedge (s \vee \neg s))$ en FNC,

FC_A2= $\{r \vee \neg r, s \vee \neg r, r \vee \neg s, s \vee \neg s\}$ clausulas 3, 4, 5, y 6

A3: $p \rightarrow \neg (\neg q \wedge \neg r) \wedge \neg r$ es equivalente a (transformar $A \rightarrow B$ a $\neg A \vee B$)

$\neg p \vee (\neg (\neg q \wedge \neg r) \wedge \neg r)$ es equivalente a (DeMorgan)

$\neg p \vee ((\neg\neg q \vee \neg\neg r) \wedge \neg r)$ es equivalente a (eliminar $\neg\neg$ dos veces)

$\neg p \vee ((q \vee r) \wedge \neg r)$ es equivalente a (distributividad de $\vee$ a $\wedge$))

$(\neg p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg r)$ es en FNC;

FC_A3= $\{\neg p \vee q \vee r, \neg p \vee \neg r\}$ clausulas 7 y 8

$\neg$B: $\neg (r \vee s \rightarrow s \wedge \neg p)$ es equivalente a (transformar $A \rightarrow B$ a $\neg A \vee B$)

$\neg (\neg (r \vee s) \vee (s \wedge \neg p))$ es equivalente a (DeMorgan)

$\neg\neg (r \vee s) \wedge \neg (s \wedge \neg p)$ es equivalente a (eliminar $\neg\neg$)

$(r \vee s) \wedge \neg (s \wedge \neg p)$ es equivalente a (DeMorgan)

$(r \vee s) \wedge (\neg s \vee \neg\neg p)$ es equivalente a (eliminar $\neg\neg$)

$(r \vee s) \wedge (\neg s \vee p)$ en FNC;

FC_¬B= $\{r \vee s, \neg s \vee p\}$ clausulas 9 y 10

Pasamos a la resolución:

Forma clausular: FC= $\{p \vee q, \neg q \vee \neg p, r \vee \neg r, s \vee \neg r, r \vee \neg s, s \vee \neg s, \neg p \vee q \vee r, \neg p \vee \neg r, r \vee s, \neg s \vee p\}$

C1 C2 C3 C4 C5 C6 C7 C8 C9 C10

R1: $s \vee s$ desde C4 con C9

R2: s idempotencia en R1

R3: p	desde C10 con R2
R4: $\neg q$	desde C2 con R3
R5: $q \vee r$	desde C7 con R3
R6: r	desde R5 con R4
R7: $\neg p$	desde C8 con R6
R8: $\square$	desde R7 con R3