Lógica – Grado en Ingeniería Informática, Grado en Matemáticas e Informática

26 de octubre de 2015

Examen de Lógica Proposicional

Ejercicio 1.1. Dadas las siguientes fórmulas, decir para cada una de ellas si es válida, contingente, contradicción o no es posible saber con certeza qué es, a partir de la información disponible sobre A, B y C (donde A, B y C son fórmulas bien formadas cualesquiera): *(0,5 puntos)*

	sabiendo que	*respuesta*
$A \vee \neg B$	*B es insatisfacible, A es una contradicción*	*VÁLIDA*
$(C \vee B) \rightarrow (C \vee A)$	*B es insatisfacible, C es contingente*	*VÁLIDA*
$\neg(A \vee \neg B) \wedge (C \rightarrow B)$	*B es válida, A es insatisfacible*	*VÁLIDA*
$\neg A \wedge (A \rightarrow (B \vee \neg A))$	*A es válida, B es insatisfacible*	*CONTRADICCIÓN*
$A \wedge (C \rightarrow (B \vee \neg A))$	*A es contingente, todo modelo de A es modelo de C*	*NO SE SABE*

Ejercicio 1.2. Decir si las siguientes afirmaciones son verdaderas (V) o falsas (F). Para las que sean verdaderas decir por qué, y para las que sean falsas escribir la correspondiente definición o teorema. *(2 puntos)*

Si $T[A1, A2, \ldots, An] \vdash B$ es correcta entonces $T[A2, \ldots, An, \neg B] \vdash \neg A1$ es correcta

VERDADERA

Si $T[A1, A2, \ldots, An] \vdash B$ es correcta entonces $\{A1, A2, \ldots, An, \neg B\}$ es insatisfacible. Como A1 es equivalente a $\neg\neg A1$, el conjunto $\{\neg\neg A1, A2, \ldots, An, \neg B\}$ también sería insatisfacible. Si $\{\neg\neg A1, A2, \ldots, An, \neg B\}$ es insatisfacible entonces $T[A2, \ldots, An, \neg B] \vdash \neg A1$ es correcta.

Supongamos que $T[A2, \ldots, An, \neg B] \vdash \neg A1$ NO es correcta. En ese caso, el conjunto $\{A2, \ldots, An, \neg B, \neg\neg A1\}$ sería satisfacible, es decir, habría al menos una interpretación que haría verdaderas a A1, A2, …, An y $\neg B$ (porque A1 es equivalente a $\neg\neg A1$) . Pero esto no es posible ya que $T[A1, A2, \ldots, An] \vdash B$ es correcta, y eso implica que $\{A1, A2, \ldots, An, \neg B\}$ es insatisfacible. Por tanto $T[A2, \ldots, An, \neg B] \vdash \neg A1$ tiene que ser correcta.

Una fórmula bien formada A se dice que es contingente si existe al menos un contramodelo de dicha fórmula A

FALSA

Una fórmula es contingente si tiene al menos un contramodelo y un modelo.

La fórmula $(p \lor q \rightarrow r) \leftrightarrow (p \lor (q \rightarrow r))$ es una tautología

FALSA

p	q	r	$p \lor q$	**$(p \lor q \rightarrow r)$**	$q \rightarrow r$	**$(p \lor (q \rightarrow r))$**	**$(p \lor q \rightarrow r) \leftrightarrow (p \lor (q \rightarrow r))$**
V	V	V	V	**V**	V	**V**	**V**
V	V	F	V	**F**	F	**V**	**F**
V	F	V	V	**V**	V	**V**	**V**
V	F	F	V	**F**	V	**V**	**F**
F	V	V	V	**V**	V	**V**	**V**
F	V	F	V	**F**	F	**F**	**V**
F	F	V	F	**V**	V	**V**	**V**
F	F	F	F	**V**	V	**V**	**V**

Como hay dos interpretaciones que hacen a la fórmula falsa, no es una tautología.

Si $A1 \land A2 \land \ldots \land An \land \neg B$ es insatisfacible, podemos afirmar que B es consecuencia lógica de A1, A2, …, An

VERDADERA

Si $A1 \land A2 \land \ldots \land An \land \neg B$ es insatisfacible entonces $T[A1, A2, \ldots, An] \vdash B$ es correcta. Como el cálculo deductivo basado en deducción natural es correcto y completo para la lógica proposicional, esto significa que $T[A1, A2, \ldots, An] \vDash B$, es decir, que B es consecuencia lógica de A1, A2, …, An.

Si B no fuera consecuencia lógica de A1, A2, …, An entonces existiría al menos una interpretación que haría verdaderas a A1, A2, …, An y falsa a B. Esa interpretación haría verdadera a la fórmula $A1 \land A2 \land \ldots \land An \land \neg B$, pero esto no es posible ya que dicha fórmula es insatisfacible. Por tanto, B tiene que ser consecuencia lógica de A1, A2, …, An.

Ejercicio 2. Formalizar en el lenguaje de la lógica proposicional *(1,5 puntos)*

a. el siguiente *enunciado*:

- Jugaremos al baloncesto sólo si somos al menos 6 amigos y el árbitro se presenta o manda un sustituto.

b. y la siguiente *argumentación*:

- No aprenderé a bailar salsa si no voy a clases de baile o tengo ascendencia latina. No ligaré con chicos a menos que sepa bailar salsa y me ponga mis mejores galas. He ligado, aunque no me he puesto de gala. Por tanto, he ido a clases de baile.

---

a)

- p: Jugaremos al baloncesto
- p: Somos al menos 6 amigos
- r: El árbitro se presenta
- s: Manda un sustituto
- $p \rightarrow q \wedge (r \vee s)$

b)

- p: Aprenderé a bailar salsa
- q: Voy a clases de baile
- r: Tengo ascendencia latina
- s: Ligaré con chicos
- t: Ponerme mis mejores galas

- No aprenderé a bailar salsa si no voy a clases de baile o tengo ascendencia latina.
  - $\neg q \vee r \rightarrow \neg p$
- No ligaré con chicos a menos que sepa bailar salsa y me ponga mis mejores galas.
  - Saber bailar salsa y ponerse las mejores galas es condición necesaria para ligar con chicos: $s \rightarrow p \wedge t$
  - O, si no se bailar salsa y no me pongo mis mejores galas, entonces no ligo con chicos: $\neg p \wedge \neg t \rightarrow \neg s$
- He ligado, aunque no me he puesto de gala.
  - $s \wedge \neg t$
- Por tanto, he ido a clases de baile.
  - q

Ejercicio 3. Comprobar si hay consecuencia lógica con medios semánticos distintos a la tabla de verdad (NO son válidos: el uso de deducción natural, resolución, transformar las formulas por equivalencias, o tablas de verdad).

$$\{ (p \rightarrow q) \rightarrow q \vee r\ ,\ r \vee p \rightarrow t \wedge q\ ,\ \neg\, t \wedge s \} \vDash\ s \rightarrow r$$

(2 puntos)

*) Búsqueda de contramodelo:

1. i(A3)=i(¬ t ∧ s)=V sii **i(t)=F** y **i(s)=V**
2. i(B)=i(s → r)=F sii **i(s)=V** y **i(r)=F**

(llegados a este punto, es trivial evaluar A2 y ver que sólo pueden tener interpretación verdadera con i(p)=F, y con esto, evaluar A1 y ver que sólo puede tener interpretación verdadera con i(q)=V)

3. i(A1)=i((p → q) → q ∨ r)=V sii i(p → q)=F o i(q ∨ r)=V,
   a. o bien, i(p → q)=F sii i(p)=V y i(q)=F
   b. o bien, i(q ∨ r)=V sii i(q)=V o i(r)=V,
   c. Como hemos dicho en el punto 2 que i(r)=F, tenemos que i(A1)=V sii i(q)=V o (i(p)=V y i(q)=F).
4. i(A2)=V sii
   a. O bien, i(r ∨ p)=F
      i. i(r ∨ p)=F sii i(r)=F y i(p)=F. Lo cual es compatible con 1 y 2.
   b. O bien, i(t ∧ q)=V
      i. i(t ∧ q)=V sii i(t)=V y i(q)=V. Lo cual no es posible por el punto 1.
      ii. Por lo tanto, i(r ∨ p)=F en 4.a y **i(p)=F;** y, por lo tanto **i(q)=V** en 3.c

Conclusión: No hay consecuencia lógica, como muestra el siguiente contramodelo:

i(p)=F , i(q)=V , i(r)=F , i(s)=V , i(t)=F

*) Tableau:

El tableau tiene ramas abiertas, no hay consecuencia lógica. La rama abierta marca el contramodelo: **i(p)=F, i(q)=V, i(r)=F, i(s)=V, i(t)= F**

```
                (p→q)  → q ∨ r (3)

                 r ∨ p → t ∧ q (6)

                    ¬ t ∧ s (1)

                   ¬(s → r) (2)
                        |
                       ¬ t
                        s
                        |
                        s
                       ¬ r
                /               \
 ¬ (p→q)(4)                      q ∨ r (5)
        |                         /   \
        p                        q      r×
       ¬ q                       |
      /    \                   /    \
¬(r ∨ p)   ( t ∧ q) ¬(r ∨ p)    ( t ∧ q)
|           |        |             |
¬r          t×       ¬r            t×
¬p×        q        ¬ p           q
```

Ejercicio 4. Demostrar con el cálculo **deducción natural** (y por tanto **sin utilizar** tablas de verdad, **ni** razonamientos semánticos **ni** el método de resolución) :

$$p \wedge q \rightarrow r \vee s \;\vdash\; (p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow s) \qquad \textit{(2 puntos)}$$

---

*) <u>1ª solución</u>:

1-	$(p \wedge q) \rightarrow (r \vee s)$	premisa
2-	$\quad\mid\ \neg((p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow s))$	supuesto
3-	$\quad\mid\ \neg(p \rightarrow r) \wedge \neg(q \rightarrow s)$	th intercambio 2 con $\neg(A\vee B) \equiv \neg A\wedge\neg B$
4-	$\quad\mid\ \neg(p \rightarrow r)$	elim $\wedge$ 3
5-	$\quad\mid\ \neg(q \rightarrow s)$	elim $\wedge$ 3
6-	$\quad\mid\ \neg(\neg p \vee r)$	th intercambio 4 con $A\rightarrow B \equiv \neg A\vee B$
7-	$\quad\mid\ p \wedge \neg r$	th intercambio 6 con $\neg(A\vee B) \equiv \neg A\wedge\neg B$ y $\neg\neg A \equiv A$
8-	$\quad\mid\ \neg(\neg q \vee s)$	th intercambio 5 con $A\rightarrow B \equiv \neg A\vee B$
9-	$\quad\mid\ q \wedge \neg s$	th intercambio 8 con $\neg(A\vee B) \equiv \neg A\wedge\neg B$ y $\neg\neg A \equiv A$
10-	$\quad\mid\ p$	elim $\wedge$ 7
11-	$\quad\mid\ q$	elim $\wedge$ 9
12-	$\quad\mid\ p \wedge q$	int $\wedge$ 10, 11
13-	$\quad\mid\ r \vee s$	modus ponens 12, 1
14-	$\quad\mid\ \neg r$	elim $\wedge$ 7
15-	$\quad\mid\ \neg s$	elim $\wedge$ 9
16-	$\quad\mid\ \neg r \wedge \neg s$	int $\wedge$ 14, 15
17-	$\quad\mid\ \neg(r \vee s)$	th intercambio 16 con $\neg A\wedge\neg B \equiv \neg(A\vee B)$
18-	$\neg\neg((p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow s))$	int $\neg$ 2, 13 , 17
19-	$(p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow s)$	elim $\neg$ 18

*) <u>2ª solución</u>:

1-	$(p \wedge q) \rightarrow (r \vee s)$	premisa
2-	$\neg(p \wedge q) \vee (r \vee s)$	th intercambio 4 con $A\rightarrow B \equiv \neg A\vee B$
3-	$\neg p \vee \neg q \vee r \vee s$	th intercambio 2 con De Morgan $\neg(A\wedge B) \equiv \neg A\vee\neg B$
4-	$(\neg p \vee r) \vee (\neg q \vee s)$	th intercambio 3 con $A\vee B \equiv B\vee A$
5-	$(p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow s)$	th intercambio 5 con $A\rightarrow B \equiv \neg A\vee B$, dos veces

Ejercicio 5. Demostrar que la siguiente estructura deductiva es correcta usando el método de resolución: *(2 puntos)*

$$T\,[\, t \rightarrow p \,,\, r \vee \neg r \rightarrow s \,,\, \neg\,(\,(p \wedge s\,) \vee q\,)\,] \;\vdash\; \neg p \vee \neg q \;\rightarrow\; \neg(p\vee q) \wedge \neg(t \vee \neg s)$$

---

*) Transformar a forma clausular:

A1. $t \rightarrow p$ ≡ (eliminación de $\rightarrow$) $\neg t \vee p$ (clausula 1)

A2. $r \vee \neg r \rightarrow s$ ≡ (eliminación de $\rightarrow$) $\neg(r \vee \neg r) \vee s$ ≡ (DeMorgan)

$(\neg\neg r \wedge \neg r) \vee s$ ≡ (elim $\neg\neg$) $(r \wedge \neg r) \vee s$ ≡ (distributividad)

$(\neg r \vee s) \wedge (r \vee s)$ (clausulas 2 y 3)

A3. $\neg\,(\,(p \wedge s\,) \vee q\,)$ ≡ $\neg\,(p \wedge s) \wedge \neg\, q$ ≡ (DeMorgan)

$(\neg\, p \vee \neg\, s) \wedge \neg\, q$ (clausulas 4 y 5)

¬C. $\neg\,(\neg p \vee \neg q \rightarrow \neg(p \vee q) \wedge \neg(t \vee \neg s))$ ≡ (eliminación de $\rightarrow$)

$\neg\,(\neg(\neg p \vee \neg q) \vee (\,\neg(p \vee q) \wedge \neg(t \vee \neg s)))$ ≡ (DeMorgan)

$\neg\,\neg(\neg p \vee \neg q) \wedge \neg\,(\,\neg(p \vee q) \wedge \neg(t \vee \neg s))$ ≡ (elim $\neg\neg$)

$(\neg p \vee \neg q) \wedge \neg\,(\,\neg(p \vee q) \wedge \neg(t \vee \neg s))$ ≡ (DeMorgan)

$(\neg p \vee \neg q) \wedge (\,\neg\,\neg\,(p \vee q) \vee \neg\neg(t \vee \neg s))$ ≡ (elim $\neg\neg$)

$(\neg p \vee \neg q) \wedge (\,p \vee q \vee t \vee \neg s)$ (clausulas 6 y7)

*) Resolución:

C1. $\neg t \vee p$

C2. $\neg r \vee s$

C3. $r \vee s$

C4. $\neg\, p \vee \neg\, s$

C5. $\neg\, q$

C6. $\neg p \vee \neg q$

C7. $p \vee q \vee t \vee \neg s$

C8. $p \vee t \vee \neg s$ desde C7 con C5 (corte)

C9. $p \vee p \vee \neg s$ desde C8 con C1 (corte)

C10. $p \lor \neg s$ desde C9 (idempotencia)

C11. $\neg s \lor \neg s$ desde C10 con C4 (corte)

C12. $\neg s$ desde C11(idempotencia)

C13. $s \lor s$ desde C2 con C3 (corte)

C14. s desde C13(idempotencia)

C15. $\square$ desde C12 con C14 (corte)