Lógica – G-II, G-MI, G-II+ADE

Examen Final, 29 de Junio de 2018

Tiempo para el examen: 2 horas y 30 minutos

1. LP – Formalización / Teoría (1,2 puntos)

1.1 - **Formalizar** en el lenguaje de la lógica proposicional esta **argumentación**:

- No sé chino si no voy a la escuela de idiomas o trabajo en China una temporada. No tengo contactos con la Universidad de Pekín a menos que sepa chino y tenga el doctorado. Tengo contactos (con la Universidad de Pekín), aunque no tengo el doctorado. Por consiguiente, voy a la escuela de idiomas.
    - p: Sé chino
    - q: Voy a la escuela de idiomas
    - r: Trabajo en China una temporada
    - s: Tengo contactos con la Universidad de Pekín
    - t: Tengo el doctorado
    - No sé chino si no voy a la escuela de idiomas o trabajo en China una temporada.
        - $\neg q \vee r \Rightarrow \neg p$
    - No tendré contactos con la Universidad de Pekín a menos que sepa chino y tenga el doctorado.
        - Saber chino y tener el doctorado, es condición necesaria para tener contactos con la Universidad de Pekín: $s \Rightarrow p \wedge t$
        - O, si no sé chino o no tengo el doctorado, entonces no tengo contactos con la Universidad de Pekín: $\neg p \vee \neg t \Rightarrow \neg s$
    - Tengo contactos (con la Universidad de Pekín), aunque no tengo el doctorado.
        - $s \wedge \neg t$
    - Por consiguiente, voy a la escuela de idiomas.
        - q

      $\{ \neg q \vee r \Rightarrow \neg p,\ \ s \Rightarrow p \wedge t,\ \ s \wedge \neg t \} \models q$

1.2 - Decir si la siguiente afirmación es **verdadera** o **falsa**, justificando brevemente la respuesta.

Dos fórmulas A y B son (lógicamente) equivalentes ($A \Longleftrightarrow B$, $A \equiv B$) sii para todo contramodelo de A i se cumple que i(A) = i(B)

- **Falsa**: dos fórmulas A y B son (lógicamente) **equivalentes** ($A \Longleftrightarrow B$, $A \equiv B$) sii para toda interpretación (sea modelo o contramodelo de A o de B) i se cumple que i(A) = i(B)

2. LP - Semántica (1,2 puntos)

Demostrar **con análisis semántico** que NO se cumple la siguiente relación de consecuencia lógica. Indicar de forma explícita y completa: (1) los pasos principales del procedimiento y (2) el resultado final obtenido.

$$\{ p \Longrightarrow \neg t,\quad q \wedge s \Longrightarrow r,\quad \neg(q \wedge r) \} \models q \wedge t \Longrightarrow \neg p \wedge s$$

(Nota: no pueden utilizarse ni las tablas de verdad, ni la deducción natural, ni el método de resolución)

Para demostrar que no se cumple la relación de consecuencia lógica es necesario encontrar al menos una interpretación de las proposiciones que haciendo verdaderas a las premisas, haga falsa la conclusión.

1)	$i(p \Longrightarrow \neg t) = V$	sii	(1.1) $i(p) = F$ o bien (1.2) $i(\neg t) = V$
2)	$i(q \wedge s \Longrightarrow r) = V$	sii	(2.1) $i(q \wedge s) = F$ o bien (2.2) $i(r) = V$
3)	$i(\neg(q \wedge r)) = V$	sii	(3.1) $i(q) = F$ o bien (3.2) $i(r) = F$
4)	$i(q \wedge t \Longrightarrow \neg p \wedge s) = F$	sii	(4.1) $i(q \wedge t) = V$ y (4.2) $i(\neg p \wedge s) = F$

Por la condición necesaria (4.1) quedan fijados los valores de verdad i(q) = i(t) = V.

Como i(q) = V, entonces (3.1) ya no se puede cumplir, por lo que necesariamente i(r) = F

Como i(t) = V, entonces (1.2) ya no se puede cumplir, por lo que necesariamente i(p) = F

Como i(p) = F, entonces para que se cumpla (4.2) es necesario que i(s) = F

Como i(s) = F, entonces (2.1) se cumple

Por tanto, con la interpretación i(q) = i(t) = V y i(p) = i(r) = i(s) = F tenemos un contramodelo de la argumentación, al conseguir verificar las condiciones 1), 2), 3) y 4).

3. LP - Deducción Natural (1,3 puntos)

Demostrar mediante **deducción natural**, utilizando **exclusivamente** reglas básicas (es decir, no está permitido utilizar **ninguna** regla derivada como Corte, Modus Tollens, De Morgan, etc…), la siguiente argumentación:

$$T\,[\,\neg(p \vee q)\,] \vdash \neg p \wedge \neg q$$

1.	$\neg(p \vee q)$	Premisa
2.	$\quad p$	Supuesto
3.	$\quad p \vee q$	Int $\vee$ 2
4.	$\quad (p \vee q) \wedge \neg(p \vee q)$	Int $\wedge$ 3, 1
5.	$p \rightarrow (p \vee q) \wedge \neg(p \vee q)$	Int$\rightarrow$ 1-3
6.	$\neg p$	Int$\neg$ 5
7.	$\quad q$	Supuesto
8.	$\quad p \vee q$	Int$\vee$ 7
9.	$\quad (p \vee q) \wedge \neg(p \vee q)$	Int $\wedge$ 7, 1
10.	$q \rightarrow (p \vee q) \wedge \neg(p \vee q)$	Int$\rightarrow$ 1-3
11.	$\neg q$	Int$\neg$ 10
12.	$\neg p \wedge \neg q$	Int$\wedge$ 6, 11

4. LP – Forma Clausular y Resolución (1,3 puntos)

4.1 - Obtener la **forma clausular** del siguiente conjunto de fórmulas:

$$\{\ p \wedge (\neg q \vee \neg r),\quad (\neg r \wedge s) \vee (r \wedge \neg s),\quad \neg q \Longrightarrow p,\quad p \Longrightarrow r,\quad r \Longrightarrow s \vee q\ \}$$

4.2 - Demostrar por **resolución** que el conjunto obtenido es **insatisfacible**.

Transformar a forma clausular:

A1: $p \wedge (\neg q \vee \neg r)$ clausulas 1 y 2

A2: $(\neg r \wedge s) \vee (r \wedge \neg s) \equiv$(distributividad)

$(\neg r \vee (r \wedge \neg s)) \wedge (s \vee (r \wedge \neg s)) \equiv$(distributividad)

$((\neg r \vee r) \wedge (\neg r \vee \neg s)) \wedge ((s \vee r) \wedge (s \vee \neg s)) \equiv$ (elim parantesis)

$(\neg r \vee r) \wedge (\neg r \vee \neg s) \wedge (s \vee r) \wedge (s \vee \neg s)$ clausulas 3,4,5,6

A3: $\neg q \rightarrow p \equiv$ (eliminación de $\rightarrow$) $\neg\neg q \vee p \equiv$ (elim $\neg\neg$) $q \vee p$ clausulas 7

A4: $p \rightarrow r \equiv$ (eliminación de $\rightarrow$) $\equiv \neg p \vee r$ clausula 8

A5: $r \rightarrow s \vee q \equiv$ (eliminación de $\rightarrow$) $\equiv \neg r \vee s \vee q$ clausula 9

C1: p	C2: $\neg q \vee \neg r$	C3: $\neg r \vee r$	C4: $\neg r \vee \neg s$	C5: $s \vee r$
C6: $s \vee \neg s$	C7: $q \vee p$	C8: $\neg p \vee r$	C9: $\neg r \vee s \vee q$	

Resolución:

R1: r	(C1,C8)
R2: $\neg q$	(R1,C2)
R3: $\neg s$	(R1,C4)
R4: $\neg r \vee s$	(R2,C9)
R5: $\neg r$	(R3,R4)
R6: $\square$	(R5,R1)

(C3 Y C6 son tautologías que realmente no se usan en la resolución)

5. LPO – Formalización (1,0 puntos)

Formalizar el razonamiento en el lenguaje de la Lógica de Primer Orden:

- Si nadie me paga no tengo dinero. O tengo dinero o no puedo comprar ninguna camiseta. Hay una camiseta que me gusta, y que me haría contento ponerme, pero no la tengo a no ser que la compre. Para ponerse una prenda de ropa es necesario tenerla. Una camiseta es una prenda de ropa. Por tanto no estoy contento a no ser que mi primo me pague.

  La constante 'a' significa "yo"; la constante 'b' significa "mi primo"

paga(x,y)	significa "x paga a y"
dinero(x)	significa "x tiene dinero"
compra(x,y)	significa "x compra y"
camiseta(x)	significa "x es una camiseta"
gusta(x,y)	significa "x le gusta a y"
pone(x,y)	significa "x se pone y"
tiene(x,y)	significa "x tiene y"
prenda(x)	significa "x es una prenda de ropa"
contento(x)	significa "x está contento"

- Si nadie me paga no tengo dinero.

$$\neg \exists x \text{ paga}(x,a) \Longrightarrow \neg \text{dinero}(a)$$

- O tengo dinero o no puedo comprar ninguna camiseta.

$$\text{dinero}(a) \vee \neg \exists x \, (\text{camiseta}(x) \wedge \text{compra}(a,x))$$

- Hay una camiseta que me gusta, y que me haría contento ponerme, pero no la tengo a no ser que la compre.

$$\exists x(\text{camiseta}(x) \wedge \text{gusta}(x,a) \wedge (\text{pone}(a,x) \Longrightarrow \text{contento}(a)) \wedge (\neg \text{compra}(a,x) \Longrightarrow \neg \text{tiene}(a,x)))$$

- Para ponerse una prenda de ropa es necesario tenerla.

$$\forall x \, \forall y \, (\text{prenda}(x) \Longrightarrow (\text{pone}(y,x) \Longrightarrow \text{tiene}(y,x)))$$

- Una camiseta es una prenda de ropa.

$$\forall x \, (\text{camiseta}(x) \Longrightarrow \text{prenda}(x))$$

- Por tanto no estoy contento a no ser que mi primo me pague.

$$\vDash \quad \neg \text{contento}(a) \vee \text{paga}(b,a)$$

NOTAS: ¡no hay una única camiseta en el mundo! Si pone “no me compro ninguna camiseta” y “hay una camiseta” queda evidente que no puedo introducir una constante ‘c’ que significa “una camiseta”.

6. LPO - Semántica (1,0 puntos)

Demostrar con **análisis semántico** que el siguiente razonamiento NO es correcto.

$$\{ \ \forall x \forall y \, (p(x,y) \vee \neg q(y,y)), \ \exists x q(a,x), \ \ \forall x \, (p(x,b) \Longrightarrow r(x)) \ \} \ \vDash \ r(b)$$

Necesitamos una interpretación i que haga verdaderas todas las premisas y, a la vez, falsa la conclusión. El dominio será { 0, 1 } con i(a) = 0 e i(b) = 1.

(1) i($\forall x \forall y$ (p(x,y) $\vee$ $\neg$q(y,y))) = V sii

(1.1) i($\forall y$ (p(a,y) $\vee$ $\neg$q(y,y))) = V sii

(1.1.1) i(p(a,a) $\vee$ $\neg$q(a,a)) = V sii

(1.1.1.1) i(p(a,a)) = V o bien (1.1.1.2) i(q(a,a)) = F

y también

(1.1.2) i(p(a,b) $\vee$ $\neg$q(b,b)) = V sii

(1.1.2.1) i(p(a,b)) = V o bien (1.1.2.2) i(q(b,b)) = F

y también

(1.2) i($\forall y$ (p(b,y) $\vee$ $\neg$q(y,y))) = V sii

(1.2.1) i(p(b,a) $\vee$ $\neg$q(a,a)) = V sii

(1.2.1.1) i(p(b,a)) = V o bien (1.2.1.2) i(q(a,a)) = F

y también

(1.2.2) i(p(b,b) ∨ ¬q(b,b)) = V sii

(1.2.2.1) i(p(b,b)) = V o bien (1.2.2.2) i(q(b,b)) = F

(2) i(∃xq(a,x)) = V sii

(2.1) i(q(a,a)) = V o bien (2.2) i (q(a,b)) = V

(3) i(∀x (p(x,b)⟹r(x))) = V sii

(3.1) i(p(a,b) ⟹ r(a)) = V sii

(3.1.1) i(p(a,b)) = F o bien (3.1.2) i(r(a)) = V

y también

(3.2) i(p(b,b) ⟹ r(b)) = V sii

(3.2.1) i(p(b,b)) = F o bien (3.2.2) i(r(b)) = V

(4) i(r(b)) = F

Después de haber explicitado las condiciones, lo siguiente es ver si son compatibles (es decir, si existe esta i).

- La condición (4) es incompatible con (3.2.2); al ser la primer obligatoria, eliminamos (3.2.2)
- Ahora (3.2.1) es obligatoria, y es incompatible con (1.2.2.1); eliminamos (1.2.2.1)
- Ahora (1.2.2.2) es obligatoria

Entonces un posible contraejemplo (no el único) es i tal que

- i(p(a,a)) = i(p(a,b)) = i(p(b,a)) = V; i(p(b,b)) = F
- i(q(a,a)) = i(q(a,b)) = i(q(b,a)) = V; i(q(b,b)) = F
- i(r(a)) = V; i(r(b)) = F

7. LPO – Deducción Natural (1,0 puntos)

Demostrar la siguiente deducción con el cálculo de **Deducción Natural**, justificando adecuadamente cada paso:

$$T\ [\ \forall x\exists y\ P(x,f(y)) \lor \neg\exists xQ(x),\quad \exists x\forall y(P(x,f(y)) \Longrightarrow R(y)),\quad P(b,f(a))\ ]$$

$$\vdash\ Q(b) \Longrightarrow \exists xR(x)$$

1.	∀x∃y P(x,f(y)) ∨ ¬∃xQ(x)	premisa
2.	∃x∀y(P(x,f(y)) → R(y))	premisa
3.	P(b,f(a))	premisa
4.	Q(b)	supuesto

5. $\exists x Q(x)$ — introducción ∃x línea 4
6. $\neg\neg\exists x Q(x)$ — Intercambio línea 5 ($A \Leftrightarrow \neg\neg A$)
7. $\forall x \exists y\, P(x,f(y))$ — corte 1,6
8. $\forall y (P(a^*,f(y)) \rightarrow R(y))$ — elim ∃ línea 2 x/a*
9. $\exists y\, P(a^*,f(y))$ — elim ∀ línea 7 x/a*
10. $P(a^*,f(b^*))$ — elim ∃ línea 9 y/b*
11. $P(a^*,f(b^*)) \rightarrow R(b^*)$ — elim ∀ línea 8 y/b*
12. $R(b^*)$ — elim → líneas 10,11
13. $\exists x R(x)$ — introducción ∃x línea 12
14. $Q(b) \rightarrow \exists x R(x)$ — introd → líneas 3,13

8. LPO – Forma Clausular (0,8 puntos)

Obtener la **forma clausular** de la siguiente estructura deductiva T[P1] □ C. Indicar los pasos principales del proceso de transformación y el resultado final.

$$P1: \quad \forall x(\exists y M(x,y) \Longrightarrow (R(x,y) \vee S(a)))$$
$$C: \quad \exists x P(x) \Longrightarrow (M(c,y) \wedge Q(z))$$

P1.

$\forall x(\exists y M(x,y) \rightarrow (R(x,y) \vee S(a))$

$\forall x(\exists y M(x,y) \rightarrow (R(x,z) \vee S(a))$

$\forall x \forall y(M(x,y) \rightarrow (R(x,z) \vee S(a))$

$\forall x \forall y(\neg M(x,y) \vee R(x,z) \vee S(a))$ (forma prenex)

$\exists z\, \forall x \forall y(\neg M(x,y) \vee R(x,z) \vee S(a))$ (CE)

$\forall x \forall y(\neg M(x,y) \vee R(x,b) \vee S(a))$ (FNC)

$\{\neg M(x,y) \vee R(x,b) \vee S(a)\}$ FC

¬C.

$\neg(\exists x P(x) \rightarrow (M(c,y) \wedge Q(z)))$

$\exists x P(x) \wedge \neg(M(c,y) \wedge Q(z))$

$\exists x P(x) \wedge (\neg M(c,y) \vee \neg Q(z))$

$\exists x(P(x) \wedge (\neg M(c,y) \vee \neg Q(z)))$ (forma prenex)

$\exists y \exists x(P(x) \wedge (\neg M(c,y) \vee \neg Q(z)))$

$\exists z \exists y \exists x(P(x) \wedge (\neg M(c,y) \vee \neg Q(z)))$ (CE)

$P(d) \wedge (\neg M(c,e) \vee \neg Q(i))$ (FS)

$\{P(d), \neg M(c,e) \vee \neg Q(i)\}$ (FC)

$\{\ \neg M(x,y) \lor R(x,b) \lor S(a),\ \ \neg P(d),\ \ \neg M(c,e) \lor \neg Q(i)\ \}$

9. LPO – Resolución con UMG (1,2 puntos)

Demostrar, mediante el método de **resolución con UMG**, que la siguiente estructura deductiva es correcta:

$$T[C_1, C_2, C_3, C_4, C_5] \vdash \exists x \forall y(\neg Q(x,y) \land \neg R(x))$$

C_1: $R(x) \lor P(x) \lor \neg S(f(x))$

C_2: $R(x) \lor P(x) \lor \neg Q(f(x),y)$

C_3: $\neg P(x)$

C_4: $\neg R(x)$

C_5: $\neg S(a)$

Se renombran las variables:

C_1: $R(x_1) \lor P(x_1) \lor S(f(x_1))$

C_2: $R(x_2) \lor P(x_2) \lor \neg Q(f(x_2),y_2)$

C_3: $\neg S(a)$

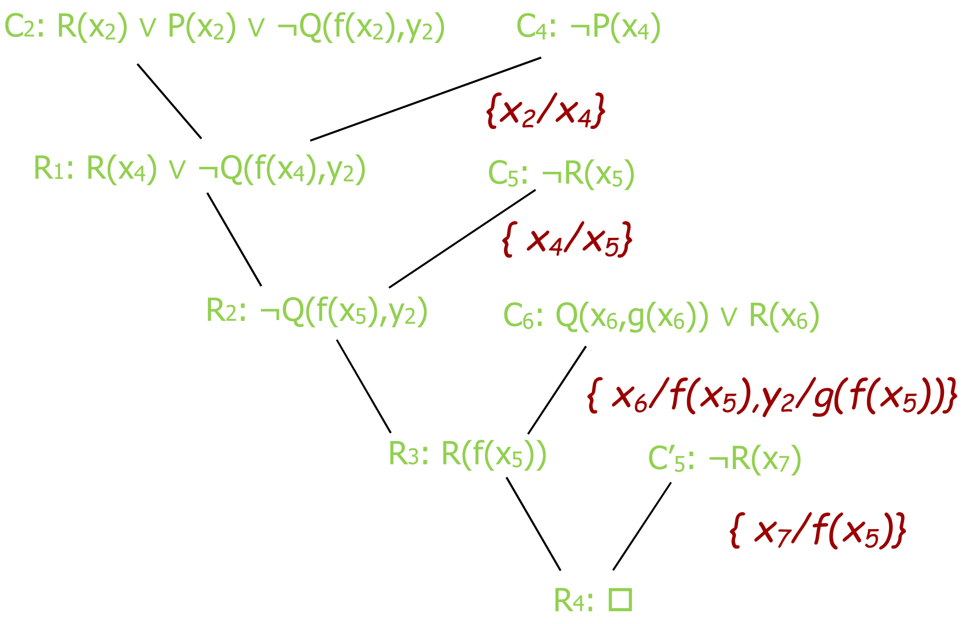
C_4: $\neg P(x_4)$

C_5: $\neg R(x_5)$

Se hace la forma clausular de la negación de la conclusión

C_6: $Q(x_6,g(x_6)) \lor R(x_6)$

Para que el conjunto sea insatisfacible debe existir una derivación que permita llegar a la cláusula vacía:



Hemos encontrado la cláusula vacía $\square$, luego el conjunto de cláusulas es insatisfacible. La estructura deductiva es correcta.