Lógica – Grado en Ingeniería Informática, Grado en Matemáticas e Informática

Examen 8 de julio de 2015

Bloque Lógica Proposicional

Ejercicio 1.1. Contestar las siguientes cuatro preguntas. Se **valorará** especialmente la **concisión** de las respuestas. *(1 punto)*

a) Demostrar, **sin utilizar tablas de verdad**, que las dos fórmulas siguientes son equivalentes:

$A \equiv p \rightarrow q \quad B \equiv \neg q \rightarrow \neg p$

b) Sea Γ = { A1, , … , An } y B otra fórmula en el Lenguaje Proposicional. Definir con precisión cada uno de los dos conceptos $\Gamma \models B$ y $\Gamma \vdash B$.

c) c.1 - Enunciar el teorema de intercambio, también conocido como teorema de sustitución.
c.2 - Poner un ejemplo de su utilización (dos líneas, tres como máximo).
c.3 - Explicar brevemente cómo se ha utilizado.

d) La forma clausular de una fórmula dada es equivalente a dicha fórmula. ¿Es verdadera esta afirmación? Justificar la respuesta brevemente.

Solución:

a) $A \equiv p \rightarrow q = F$ sii $p = V$ y $q = F$

$B \equiv \neg q \rightarrow \neg p = F$ sii $\neg q = V$ y $\neg p = F$ sii $q = F$ y $p = V$

tanto A como B son Falsos si y sólo si $p = V$ y $q = F$ Por tanto son equivalentes

b) $\Gamma \models B$ B es **consecuencia lógica** de Γ ≡

≡ para toda interpretación i tal que i(Ai) = V para todo Ai $\in \Gamma$ entonces i(B) = V

$\Gamma \vdash B$ B **se deduce** de Γ ≡

≡ existe una demostración en el cálculo deducción natural con Ai $\in \Gamma$ como premisas y B como última línea

c) Teorema de intercambio:

Sea A una formula y B1 una subfórmula de A, si:

$\vdash A$ (1)

$\vdash B1 \leftrightarrow B2$ (2)

A´ resulta de sustituir en A todas o algunas de las apariciones de B1 por B2 (3)

Entonces: $\vdash$ A´ (4)

Es decir, si A es un teorema (1), y B1 y B2 son equivalentes (2), entonces A', resultado de sustituir todas o algunas de las apariciones de B1 por B2, (3), también es teorema (4).

Es válido tanto para LP y LPO.

Ejemplo:

1. $\neg(\neg P \wedge S)$
2. $\neg\neg P \vee \neg S$ De Morgan 1
3. $P \vee \neg S$ Doble Negación 2, teorema de intercambio.

Como P y $\neg\neg$ P son equivalentes, el teorema de intercambio dice que en
$\neg\neg P \vee \neg S$ puede sustituir por $\neg\neg$ P por P.

d) en Lógica Proposicional las transformaciones para obtener la Forma Normal Conjuntiva (único paso para obtener la Forma Clausular)de la fórmula dada son equivalencias. Por tanto, en **LP** la Forma Clausular es equivalente a la fórmula dada,

PERO en Lógica de Primer Orden, el paso a Forma Normal de Skolem no preserva la semántica, aunque sí la satisfacibilidad. Por tanto, en **LPO** la Forma Clausular **NO** es equivalente a la fórmula dada.

Ejercicio 1.2. Formalizar en el lenguaje de la lógica proposicional:

a) Para que un número sea múltiplo de 10 es necesario que acabe en cero. Pero esta condición no es suficiente. *(0,5 puntos)*

b) Si no descargo la app *Whatsapp* no podré consultar la conversación en el grupo *Amigos*. Podré mirar ese grupo a no ser que el administrador del grupo no me haya incluido o no tenga batería. He podido acceder al grupo. Por tanto, tengo *Whatsapp,* estoy en el grupo *Amigos* y mi teléfono ni está estropeado ni descargado. *(1 punto)*

Solución:

a) un número es múltiplo de 10 $\equiv$ p

un número acaba en 0 $\equiv$ q

Para que un número sea múltiplo de 10 es necesario que acabe en cero:

$p \rightarrow q$

Para que un número sea múltiplo de 10 es suficiente que acabe en cero:

$q \rightarrow p$

Para que un número sea múltiplo de 10 es necesario que acabe en cero. Pero esta condición no es suficiente :

$$\boxed{(p \rightarrow q) \wedge \neg(q \rightarrow p)}$$

b) Teniendo en cuenta que diferentes frases en lenguaje natural de ese enunciado se pueden representar con un mismo símbolo de enunciado, puesto que tienen el mismo significado, y procurando poner estas frases en afirmativo:

- descargo la app whatsapp $\equiv$ tengo whatsapp $\longrightarrow$ p
- podré consultar la conversación en el grupo Amigos $\equiv$ podré mirar el grupo Amigos $\equiv$ $\equiv$ he podido acceder al grupo Amigos $\longrightarrow$ q
- el administrador del grupo Amigos me ha incluido $\equiv$ estoy en el grupo Amigos $\longrightarrow$ r
- mi teléfono tiene batería $\equiv$ mi teléfono no está descargado $\longrightarrow$ s
- mi teléfono está estropeado $\longrightarrow$ t

- Formalización:

- *Si no descargo la app Whatsapp no podré consultar la conversación en el grupo Amigos:*

  $\neg p \rightarrow \neg q$

- *Podré mirar ese grupo a no ser que el administrador del grupo no me haya incluido o no tenga batería:*

  que el administrador del grupo me haya incluido y tenga batería es Condición Necesaria para *poder mirar ese grupo:*

  $q \rightarrow r \wedge s$

  o también :

si *el administrador del grupo no me ha incluido o no tengo batería*
entonces *no podré mirar ese grupo*

$$\neg r \lor \neg s \rightarrow \neg q$$

fórmula que es equivalente a la anterior

- *He podido acceder al grupo Amigos:* q

- *Por tanto, tengo whatsapp, estoy en el grupo Amigos y mi teléfono ni está estropeado ni descargado:*

$$\vDash \; p \land r \land \neg t \land s$$

Ejercicio 2. Demostrar **con medios semánticos** que no se cumple la siguiente relación de consecuencia lógica. Indicar de forma explícita y completa: (1) los pasos principales del procedimiento y (2) el resultado final obtenido. *(2,5 puntos)*

$$\{ q \wedge r \to \neg p \ ,\ \neg(\neg r \to s \wedge t)\ ,\ \neg p \leftrightarrow (\neg r \wedge q) \ \} \ \vDash \ s \to p$$

(**No pueden utilizarse** ni las tablas de verdad, ni la deducción natural, ni el método de resolución)

Solución:

- *Recordatorio*: Un argumento con premisas {P1,..., Pn} y conclusión C es correcto sii [P1,..., Pn] ⊨ C (es decir, existe relación de consecuencia lógica entre las premisas y la conclusión)

Sea el argumento $\{ q \wedge r \to \neg p , \neg (\neg r \to s \wedge t) , \neg p \leftrightarrow (\neg r \wedge q) \} \vDash s \to p$, donde:

P1: $q \wedge r \to \neg p$

P2: $\neg (\neg r \to s \wedge t)$

P3: $\neg p \leftrightarrow (\neg r \wedge q)$

C: $s \to p$

Se trata de demostrar que no se cumple la relación de consecuencia lógica.

Por tanto, tratamos de definir un contramodelo del argumento. Es decir, buscamos interpretación i tal que

$i(C) = F \ \wedge \ i(Pj) = V \quad j = 1,2,3$

- $i(C) = i(s \to p) = F$ sii **$i(s) = V$** y **$i(p) = F$**

- $i(P3) = i(\neg p \leftrightarrow (\neg r \wedge q)) = V$ sii $i(\neg p) = i(\neg r \wedge q) = V$ ó $i(\neg p) = i(\neg r \wedge q) = F$
  como $i(p) = F$, entonces $i(\neg p) = V$, entonces
  $i(\neg r \wedge q) = V$ sii $i(\neg r) = V$ (**$i(r) = F$**) y **$i(q) = V$**

- $i(P1) = i(q \wedge r \to \neg p) = V$ se cumple porque $i(q \wedge r) = F$ y $i(\neg p) = V$

- $i(P2) = i(\neg (\neg r \to s \wedge t)) = V$ sii $i(\neg r \to s \wedge t) = F$ sii
  $i(\neg r) = V$ (que ya se cumple) y
  $i(s \wedge t) = F$ sii **$i(t) = F$**

En este caso, sí es posible definir un contramodelo del argumento:

$i(s) = V$ **$i(p) = F$** **$i(r) = F$** **$i(q) = V$** **$i(t) = F$**

Como conclusión, el argumento no es correcto, es decir, **no hay relación de consecuencia lógica**

Ejercicio 3. Demostrar mediante **deducción natural** *(2,5 puntos)*

$$T\ [\ p \rightarrow (q \vee \neg r)\ ,\ \neg r \leftrightarrow \neg t\ ,\ \neg(p \rightarrow \neg s) \rightarrow t\ ]\ \vdash\ p \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg s)$$

Solución:

1. $p \rightarrow (q \vee \neg r)$	premisa
2. $\neg r \leftrightarrow \neg t$	premisa
3. $\neg (p \rightarrow \neg s) \rightarrow t$	premisa
4. p	supuesto
5. $\neg q$	supuesto
6. $q \vee \neg r$	4 y 1 elim $\rightarrow$
7. $\neg r$	5, 6 corte
8. $\neg r \rightarrow \neg t$	2 elim. $\leftrightarrow$
9. $\neg t$	7, 8 elim $\rightarrow$
10. $\neg\neg (p \rightarrow \neg s)$	MT 3, 9
11. $p \rightarrow \neg s$	elim $\neg$, 10
12. $\neg s$	4, 11, elim $\rightarrow$
13. $\neg q \rightarrow \neg s$	5, 12 introd $\rightarrow$
14. $p \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg s)$	4, 13 introd $\rightarrow$

Ejercicio 4. Dado el siguiente conjunto de fórmulas: *(2,5 puntos)*

$\{ \neg((\neg p \rightarrow q) \rightarrow p) \ , \ \ \neg p \wedge \neg s \rightarrow \neg r \ , \ \ \neg(\neg r \wedge s) \}$

(a) Obtener la forma clausular del conjunto de formulas.

(b) Analizar mediante resolución si el conjunto de cláusulas es satisfacible o insatisfacible.

Solución:

(a) $\neg((\neg p \rightarrow q) \rightarrow p)$

$\neg(\neg(\neg p \rightarrow q) \vee p)$

$(\neg p \rightarrow q) \wedge \neg p$

$(p \vee q) \wedge \neg p$

$\neg p \wedge \neg s \rightarrow \neg r$

$\neg(\neg p \wedge \neg s) \vee \neg r$

$p \vee s \vee \neg r$

$\neg(\neg r \wedge s)$

$r \vee \neg s$

Forma clausular = $\{ p \vee q,\ \neg p,\ p \vee s \vee \neg r,\ r \vee \neg s \}$

(b) Resolución:

C1: $p \vee q$, C2: $\neg p$, C3: $p \vee s \vee \neg r$, C4: $r \vee \neg s$

Resolventes obtenidos del conjunto {C1, C2, C3, C4}

R1: q (C1,C2)

R2: $s \vee \neg r$ (C2,C3)

R3: $p \vee s \vee \neg s$ (C3,C4)

R4: $p \vee r \vee \neg r$ (C3,C4)

Ninguno de estos resolventes es la cláusula vacía y no estaban en el conjunto de partida, por lo que seguimos generando nuevos resolventes, ahora del conjunto: {C1, C2, C3, C4} ∪ {R1, R2, R3, R4}

R5: $s \vee \neg s$ (R2,C4)

R6: $r \vee \neg r$ (R2,C4)

R7: $p \vee r \vee \neg s$ (R3,C4)

Sigue sin deducirse la cláusula vacía, por lo que seguimos buscando nuevos resolventes, ahora del conjunto: {C1, C2, C3, C4, R1, R2, R3, R4} ∪ {R5, R6, R7}

Ya no pueden generarse resolventes nuevos y no hemos deducido la cláusula vacía, por lo que el conjunto de cláusulas es **satisfacible**.