Lógica – G-II, G-MI, G-II+ADE

Repesca (**Bloque LP**), 23 de Enero de 2019

Tiempo para el examen: 2 horas

1. Formalización (2 puntos)

1.1 **Formalizar** la siguiente argumentación en lógica proposicional indicando el significado de cada proposición y de forma que haya relación de **consecuencia lógica** (es decir, que la argumentación resulte ser correcta) (1.5 puntos):

El fin de semana me voy de fiesta siempre y cuando haya entregado el trabajo antes
Lo entrego a no ser que mis compañeros sean unos vagos
O mis compañeros son trabajadores o yo me cambio de grupo (pero no ambas cosas)
Por tanto, si no me tengo que cambiar de grupo… Fiestaaaaaaaa!!!!

p: El fin de semana me voy de fiesta
q: Entrego el trabajo antes del fin de semana
r: Mis compañeros son trabajadores
s: Me cambio de grupo

$p \rightarrow q,\ q \rightarrow \neg r,\ (r \vee s) \wedge \neg(r \wedge s) \vDash \neg s \rightarrow p$

1.2 **Formalizar** el siguiente enunciado en lógica proposicional indicando el significado de cada proposición (0.5 puntos):

Basta con romper el sello para perder la garantía, pero también la pierdo si se me cae al suelo

p: romper el sello
q: perder la garantía
r: caerse al suelo

$(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow q)$

2. Teoría (2 puntos)

2.1. Indicar si las siguientes afirmaciones son **correctas** o **incorrectas**, **justificando** la respuesta **en todos los casos** (0.5 puntos cada una).

a. Dadas las fórmulas A1, A2, A3 y B, si existe una interpretación que satisface tanto A1, A2, A3, y al mismo tiempo es contramodelo de ¬B, podemos saber si B es, o no es, consecuencia lógica de A1, A2 y A3

INCORRECTA. TODAS las interpretaciones que satisfagan A1, A2 y A3, tienen que satisfacer B (no es suficiente sólo con una, que al ser contramodelo de ¬B, satisface B), para que B sea consecuencia lógica de A1, A2 y A3. Por lo que no podemos saber si es o no consecuencia lógica.

b. La interpretación i(p) = V, i(q) = F e i(r) = V, satisface el siguiente conjunto de fórmulas: $\{\, p \vee q \rightarrow r,\ p \rightarrow q \vee r,\ p \wedge q \rightarrow r \,\}$

CORRECTA.
$i(p \vee q \rightarrow r) = sig_{\rightarrow}(sig_{\vee}(i(p), i(q)), i(r)) = sig_{\rightarrow}(sig_{\vee}(V, F), V) = sig_{\rightarrow}(V, V) = V$
$i(p \rightarrow q \vee r) = sig_{\rightarrow}(i(p), sig_{\vee}(i(q), i(r)) = sig_{\rightarrow}(V, sig_{\vee}(F, V)) = sig_{\rightarrow}(V, V) = V$
$i(p \wedge q \rightarrow r) = sig_{\rightarrow}(sig_{\wedge}(i(p), i(q)), i(r)) = sig_{\rightarrow}(sig_{\wedge}(V, F), V) = sig_{\rightarrow}(F, V) = V$

c. Sabiendo que C es tautología, la fórmula $\neg C \wedge B \leftrightarrow B \vee C$ también lo es

INCORRECTA. ¬C es siempre falsa, por lo que ¬C ∧ B también será falsa. Mientras que B∨C siempre será verdadera. Así la fórmula siempre será falsa y, por tanto, contradicción o insatisfacible.

2.2. Indicar si hay algún **fallo** en la siguiente demostración por **deducción natural** y **decir dónde** (0.5 puntos).

$T\,[\, p \rightarrow q \,] \vdash q \rightarrow p$

1.	$p \rightarrow q$	premisa
2.	p	supuesto
3.	q	elim $\rightarrow$ (1,2)
4.	$q \rightarrow p$	intro $\rightarrow$ (2-3)

PASO 4 INCORRECTO. A(Supuesto), B |= B → A no es la regla de introducción de la →

3. Semántica (2 puntos)

Decidir si existe o no relación de consecuencia lógica en el siguiente esquema argumental, utilizando **medios semánticos** y **justificando** adecuadamente los pasos dados y el resultado obtenido.

$$\{\ r \wedge s \rightarrow r\ ,\ s \vee p \rightarrow r\ ,\ r \wedge p \rightarrow q\ \} \vDash\ p \wedge q \rightarrow r \vee s$$

Solución

$$\{\ \underbrace{r \wedge s \rightarrow t}_{A_1},\ \underbrace{s \vee p \rightarrow r}_{A_2},\ \underbrace{t \wedge p \rightarrow q}_{A_3}\ \} \vDash\ \underbrace{p \wedge q \rightarrow r \vee s}_{B}$$

$$\{A_1, A_2, A_3\} \nvDash B \iff \exists\ \mathcal{I}(i(A_j)=v\ \forall j\ \wedge i(B)=F)$$

Podemos afirmar que no existe relación de consecuencia lógica si existe al menos una interpretación bajo la cual las fórmulas A_j son verdaderas y B es falsa.

Buscando dicha interpretación, observamos que la única manera de falsar B es:

$i(p \wedge q \rightarrow r \vee s)=F$ sii $i(p \wedge q)=V$ y $i(r \vee s)=F$

$i(p)=V$ y $i(q)=V$ y $i(r)=F$ y $i(s)=F$

Es decir, sólo existen dos interpretaciones capaces de hacer B falso: i1 tal que i1(p)=V, i1(q)=V, i1(r)=F, i1(s)=F, i1(t)=F, e i2 tal que i2(p)=V, i2(q)=V, i2(r)=F, i2(s)=F, i2(t)=V.

¿Son verdaderas las tres fórmulas A_1, A_2, A_3 bajo alguna de dichas interpretaciones?

A_1) $r \wedge s \rightarrow t$

$F \wedge F \rightarrow t$ es **verdadero** para cualquier interpretación de t

A_2) $s \vee p \rightarrow r$

$F \vee V \rightarrow F$ es **falso**

A_2) $t \wedge p \rightarrow q$

$t \wedge V \rightarrow V$ es **verdadero** para cualquier interpretación de t

Por tanto, podemos afirmar que:

$$\{\ r \wedge s \rightarrow r\ ,\ s \vee p \rightarrow r\ ,\ r \wedge p \rightarrow q\ \} \vDash\ p \wedge q \rightarrow r \vee s$$

4. Deducción Natural (2 puntos)

Demostrar la corrección del siguiente razonamiento usando el método de **Deducción Natural**. Solo se pueden usar **reglas básicas**, con la excepción de **una única aplicación** del Teorema de Intercambio con una de las **Leyes de De Morgan**.

$$T\ [\ q\rightarrow s,\ \neg s\rightarrow(\neg p\rightarrow s),\ r\wedge\neg t\rightarrow q\vee\neg p,\ \neg t\ ]\vdash(p\rightarrow q)\rightarrow(r\rightarrow s\vee t)$$

1.	$q\rightarrow s$	premisa
2.	$\neg s\rightarrow(\neg p\rightarrow s)$	premisa
3.	$r\wedge\neg t\rightarrow q\vee\neg p$	premisa
4.	$\neg t$	premisa
5.	$p\rightarrow q$	supuesto
6.	r	supuesto
7.	$r\wedge\neg t$	$\wedge$intro(4,6)
8.	$q\vee\neg p$	$\rightarrow$elim(3,7)
9.	$\neg(s\vee t)$	supuesto
10.	$\neg s\wedge\neg t$	intercambio(9) $(\neg(A\vee B)\Leftrightarrow\neg A\wedge\neg B)$
11.	$\neg s$	$\wedge$elim(10)
12.	$\neg p\rightarrow s$	$\rightarrow$elim(2,11)
13.	s	$\vee$elim(1,8,12)
14.	$s\wedge\neg s$	$\wedge$intro(11,13)
15.	$\neg(s\vee t)\rightarrow s\wedge\neg s$	$\rightarrow$intro(9-14)
16.	$\neg\neg(s\vee t)$	$\neg$intro(15)
17.	$s\vee t$	$\neg$elim(16)
18.	$r\rightarrow s\vee t$	$\rightarrow$intro(6-17)
19.	$(p\rightarrow q)\rightarrow(r\rightarrow s\vee t)$	$\rightarrow$intro(5-18)

5. Paso a Forma Clausular y Resolución (2 puntos)

5.1 Transformar el siguiente razonamiento en **forma clausular**, indicando los pasos principales del procedimiento (1.5p).

$$\{ (p \land q) \lor r \rightarrow s,\ \ t \leftrightarrow p \land q \} \vDash (s \lor t) \land (\neg r \lor q)$$

$(p \land q) \lor r \rightarrow s$
$\neg((p \land q) \lor r) \lor s$
$(\neg(p \land q) \land \neg r) \lor s$
$((\neg p \lor \neg q) \land \neg r) \lor s$
$(s \lor \neg p \lor \neg q) \land (s \lor \neg r)$
Cláusulas: $\{s \lor \neg p \lor \neg q,\ s \lor \neg r\}$

$t \leftrightarrow p \land q$
$(p \land q \rightarrow t) \land (t \rightarrow p \land q)$
$(\neg(p \land q) \lor t)) \land (\neg t \lor (p \land q))$
$(\neg p \lor \neg q \lor t) \land (\neg t \lor p) \land (\neg t \lor q)$
Cláusulas: $\{\neg p \lor \neg q \lor t,\ \neg t \lor p,\ \neg t \lor q\}$

$\neg ((s \lor t) \land (\neg r \lor q))$
$\neg (s \lor t) \lor \neg(\neg r \lor q)$
$(\neg s \land \neg t) \lor (r \land \neg q)$
$((\neg s \land \neg t) \lor r) \land ((\neg s \land \neg t) \lor \neg q)$
$(r \lor \neg s) \land (r \lor \neg t) \land (\neg q \lor \neg s) \land (\neg q \lor \neg t)$
Cláusulas: $\{r \lor \neg s,\ r \lor \neg t,\ \neg q \lor \neg s,\ \neg q \lor \neg t\}$

5.2 Demostrar usando el método de **Resolución** que la fórmula $p \land q \land r$ es deducible del siguiente conjunto de cláusulas (0.5p):

$$\{ \neg p \lor q,\ \ \neg q \lor r,\ \ p \lor \neg r,\ \ p \lor q \lor r \}$$

Hay que comprobar la insatisfacibilidad de las cláusulas:

C1: $\neg p \lor q$
C2: $\neg q \lor r$
C3: $p \lor \neg r$
C4: $p \lor q \lor r$
C5: $\neg p \lor \neg q \lor \neg r$ (transformando $\neg(p \land q \land r)$)

R1: (C1,C2) = $\neg p \lor r$
R2: (R1,C4) = $q \lor r$
R3: (R2,C2) = r

R4: (R3,C3) = p
R5: (R4,C1) = q
R6: (R5,C5) = ¬p ∨ ¬r
R7: (R6,R3) = ¬p
R8: (R7,R4) = []