Lógica (segundo bloque)

Grado en Ingeniería Informática, Grado en Matemáticas e Informática, Doble Grado en Ingeniería Informática y ADE

Examen Final, Convocatoria Extraordinaria, 28 de Junio de 2019

1. Formalización

Formalizar la siguiente argumentación utilizando un lenguaje de primer orden:

Supongamos conocidos los siguientes hechos acerca del número de aprobados de dos asignaturas A y B en una clase:

1. *Si todos los alumnos aprueban la asignatura A, entonces si nadie ha copiado, todos aprueban la asignatura B.*
2. *Si algún delegado de la clase aprueba A y B y no ha copiado, entonces todos los alumnos aprueban A.*
3. *Si nadie aprueba B, entonces ningún delegado aprueba A.*
4. *Si Pepe no aprueba B, entonces nadie aprueba B a menos que (él o ella) copie.*

Por tanto, si Pepe es un delegado y aprueba la asignatura A, entonces todos los alumnos aprueban las asignaturas A y B.

Lenguaje: Constantes = {a, b, p}, Símbolos de predicado = {AP/2, C/1, D/1}

AP(x,y): x aprueba la asignatura y

C(x): x ha copiado

D(x): x es delegado de clase

$$\forall x AP(x,a) \rightarrow (\neg \exists x C(x) \rightarrow \forall x AP(x,b))$$
$$\exists x\, (D(x) \wedge AP(x,a) \wedge AP(x,b) \wedge \neg C(x)) \rightarrow \forall y\, AP(y,a)$$
$$\neg \exists x AP(x,b) \rightarrow \neg \exists y (D(y) \wedge AP(y,a))$$
$$\neg AP(p,b) \rightarrow \forall x (C(x) \vee \neg AP(x,b))$$

$$D(p) \wedge AP(p,a) \rightarrow \forall x (AP(x,a) \wedge AP(x,b))$$

2. Semántica

Demostrar que **no existe** relación de **consecuencia lógica** en la siguiente argumentación, justificando adecuadamente todos los pasos.

$$\{\ \forall x(Q(x) \rightarrow P(x) \land \neg R(x)),\ \ \neg R(a) \rightarrow \exists x(S(x) \land \neg Q(x)\ \}\ \vDash \exists x(\neg Q(x) \land R(x))$$

Elegimos un dominio de interpretación con dos constantes {0,1} e incluimos dos constantes en nuestro lenguaje {a,b} tal que i(a)=0, i(b)=1. Buscamos un contra-modelo de la formula, es decir una interpretación que haga verdaderas las premisas y falsa la conclusión:

$\boxed{1}$ **$i(\forall x(Q(x) \rightarrow P(x) \land \neg R(x))) = V$** sii

y:

- x=a
  $i(Q(a) \rightarrow P(a) \land \neg R(a)) = V$ sii
  - o bien:
    - $i(Q(a)) = F$
    - $i(P(a) \land \neg R(a)) = V$ sii
      - y:
        - **$i(P(a)) = V$**
        - $i(\neg R(a)) = V$ sii **$i(R(a)) = F$**
- x=b
  $i(Q(b) \rightarrow P(b) \land \neg R(b)) = V$ sii
  - o bien:
    - $i(Q(b)) = F$
    - $i(P(b) \land \neg R(b)) = V$ sii
      - y:
        - **$i(P(b)) = V$**
        - $i(\neg R(b)) = V$ sii **$i(R(b)) = F$**

2

$i(\neg R(a) \rightarrow \exists x(S(x) \vee \neg Q(x)) = V$ sii

$i(\neg R(a)) = F$ sii $i(R(a)) = V$

o bien

$i(\exists x(S(x) \vee \neg Q(x)) = V$ sii

x=a

$S(a) \vee \neg Q(a) = V$

$i(S(a)) = V$

o bien

$i(\neg Q(a)) = V$ sii $i(Q(a)) = F$

o bien

x=b

$S(b) \vee \neg Q(b) = V$

$i(S(b)) = V$

o bien

$i(\neg Q(b)) = V$ sii $i(Q(b)) = F$

3

$i(\exists x(\neg Q(x) \vee R(x))) = F$ sii

x=a

$\neg Q(a) \vee R(a)) = F$

$i(\neg Q(a)) = F$ sii **$i(Q(a)) = V$**

y

$i(R(a)) = F$

y

x=b

$\neg Q(b) \vee R(b)) = F$

$i(\neg Q(b)) = F$ sii **$i(Q(b)) = V$**

y

$i(R(b)) = F$

Analizamos los resultados obtenidos:

- Para que la conclusión sea falsa (3), obligatoriamente se tiene que cumplir que **i(Q(a))=V** y **i(R(a))=F** y que **i(Q(b))=V** y **i(R(b))=F**. Marcamos estas condiciones en verde.
- Para que la primera premisa sea verdadera (1), y sea compatible con las condiciones establecidas para que la conclusión sea falsa (3), se tiene que cumplir la opción en la que **i(P(a))=V** y **i(R(a))=F** y además se tiene que cumplir la opción en la que **i(P(b))=V** y **i(R(b))=F**. Marcamos estas condiciones en verde.

- Para que la segunda premisa sea verdadera (2), y sea compatible con las condiciones establecidas para la conclusión (3) y para la primera premisa (1), debe cumplirse por ejemplo la opción en la que **i(S(a))=V**. Marcamos estas condiciones en verde.

Es posible encontrar al menos un contra-modelo que hace verdaderas las premisas y falsa la conclusión, que corresponde a la siguiente interpretación: **i(Q(a))=V**, **i(Q(b))=V, i(P(a))=V**, **i(P(b))=V, i(R(a))=F, i(R(b))=F, i(S(a))=V**. Dado que hemos encontrado un contra-modelo, queda demostrado que no existe relación de consecuencia lógica en la argumentación.

3. Deducción Natural

Demostrar la siguiente deducción con el cálculo de **deducción natural**, usando **solamente reglas básicas.**

$$T [\ \exists xP(x) \land \exists yQ(y), \forall zR(z) \land \forall wS(w)\ ] \vdash \exists x(P(x) \land Q(x)) \lor \forall x(R(x) \land S(x))$$

Solución:

1.	$\forall zR(z) \land \forall wS(w)$	premisa
2.	$\forall zR(z)$	E$\land$ 1
3.	$\forall wS(w)$	E$\land$ 1
4.	$R(x)$	E$\forall$ 2 {z/x}
5.	$S(x)$	E$\forall$ 3 {w/x}
6.	$R(x) \land S(x)$	I$\land$ 4,5
7.	$\forall x(R(x) \land S(x))$	I$\forall$ 6
8.	$\exists x(P(x) \land Q(x)) \lor \forall x(R(x) \land S(x))$	I$\lor$ 7

4. Transformación a Forma Clausular

Obtener el **conjunto de cláusulas** de la siguiente fórmula, detallando cada paso y cada Forma intermedia (e.g. Forma Prenex). Es obligatorio utilizar la **interdefinición de la doble implicación** en función de la implicación y la conjunción, antes de obtener la Forma Prenex (A):

A: $\exists xR(x,a) \leftrightarrow \forall xQ(x,f(y,b))$

$\exists xR(x,a) \leftrightarrow \forall xQ(x,f(y,b))$

$(\exists xR(x,a) \rightarrow \forall xQ(x,f(y,b))) \land (\forall xQ(x,f(y,b)) \rightarrow \exists xR(x,a))$ Def $\leftrightarrow$

Forma Prenex (A) =

$(\exists x_1R(x_1,a) \rightarrow \forall x_2Q(x_2,f(y,b))) \land (\forall x_3Q(x_3,f(y,b)) \rightarrow \exists x_4R(x_4,a))$ Renombrado

$(\forall x_1\forall x_2(R(x_1,a) \rightarrow Q(x_2,f(y,b)))) \land (\exists x_3\exists x_4(Q(x_3,f(y,b)) \rightarrow R(x_4,a))$ Distr $\rightarrow$ x4

$\forall x_1\forall x_2\exists x_3\exists x_4 ((R(x_1,a) \rightarrow Q(x_2,f(y,b))) \land (Q(x_3,f(y,b)) \rightarrow R(x_4,a)))$ Distr $\land$ x4

Cierre $\exists$ (A) =

$\exists y\forall x_1\forall x_2\exists x_3\exists x_4 ((R(x_1,a) \rightarrow Q(x_2,f(y,b))) \land (Q(x_3,f(y,b)) \rightarrow R(x_4,a)))$

Forma Normal Conjuntiva (A) =

$\exists y\forall x_1\forall x_2\exists x_3\exists x_4 (\neg R(x_1,a) \lor Q(x_2,f(y,b))) \land (\neg Q(x_3,f(y,b)) \lor R(x_4,a))$ Def $\rightarrow$ x2

Forma Normal de Skolem (A) =

$\forall x_1\forall x_2 (\neg R(x_1,a) \lor Q(x_2,f(c,b))) \land (\neg Q(g(x_1,x_2),f(c,b)) \lor R(h(x_1,x_2),a))$

Forma Clausular (A) =

$\{\neg R(x_1,a) \lor Q(x_2,f(c,b)), \neg Q(g(x_1,x_2),f(c,b)) \lor R(h(x_1,x_2),a)\}$

5. Resolución con UMG

Demostrar por **resolución con UMG** que la fórmula $\exists x(P(x) \rightarrow Q(x,f(x))$ es consecuencia lógica del siguiente conjunto de cláusulas:

C1: $Q(f(x),y) \lor \neg S(z) \lor \neg S(f(f(f(a))))$
C2: $P(f(z)) \lor s(z)$
C3: $\neg R(y,f(a)) \lor S(f(f(y))$
C4: $R(f(z),f(z)) \lor \neg Q(z,b)$
C5: $Q(a,b)$

Justificar cada paso indicando las cláusulas generadas y el UMG.

De la conclusión negada (y el renombrado) se obtienen las cláusulas
C6: $P(x6)$
C7: $\neg Q(x7,f(x7))$
Las variables de las otras cláusulas se renombran como es habitual:
C1: $Q(f(x1),y1) \lor \neg S(z1) \lor \neg S(f(f(f(a))))$
C2: $P(f(z2)) \lor s(z2)$
C3: $\neg R(y3,f(a)) \lor S(f(f(y3))$
C4: $R(f(z4),f(z4)) \lor \neg Q(z4,b)$
C5: $Q(a,b)$

Una posible **refutación** es:

R1:	$R(f(a),f(a))$	(C4,C5)	$\{ z4/a \}$
R2:	$S(f(f(f(a))))$	(R1,C3)	$\{ y3/f(a) \}$
R3:	$Q(f(x1),y1) \lor \neg S(z1)$	(C1,R2)	$\{ \}$
R4:	$Q(f(x1),y1)$	(R3,R2)	$\{ z1/f(f(f(a))) \}$
R5:	$\square$	(R4,C7)	$\{ x7/f(x1), y1/f(f(x1)) \}$