

**Lógica – Grado en Ingeniería Informática , Grado en Matemáticas e Informática ,
Grado en Administración de Empresas e Informática**

20 de diciembre de 2016

Evaluación de Lógica de Primer Orden

Ejercicio 1.1. Formalizar en Lógica de Primer Orden:

a) Sobre el dominio de las personas (0,75 puntos)

Las personas prudentes evitan las hienas. Ningún banquero peca de imprudente. Por tanto, ningún banquero deja de evitar las hienas.

b) Sobre el dominio de los números reales (0,25 puntos)

Hay un número que multiplicado por cualquier otro da siempre el mismo resultado.

SOLUCIÓN:

a) $P(x)$: x es prudente

$Q(x)$: x evita a las hienas

$R(x)$: x es banquero

$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)), \neg \exists x(R(x) \wedge \neg P(x)) \models \neg \exists x(R(x) \wedge \neg Q(x))$

o bien

$\neg \exists x(P(x) \wedge \neg Q(x)), \forall x(R(x) \rightarrow P(x)) \models \forall x(R(x) \rightarrow Q(x))$

b) $f(x, y)$ = resultado de multiplicar $x * y$

$\exists x \forall y (f(x, y) = a)$

Ejercicio 1.2. Si $P(f(y, a), y, f(x, g(b)))$ y $P(x, g(b), f(z, y))$ son unificables, hallar el Unificador de Máxima Generalidad, justificando en cualquier caso cada paso del algoritmo UMG

(1 punto)

Solución:

α	$A\alpha$	$B\alpha$	t_A, t_B
$\{\}$	$P(f(y, a), y, f(x, g(b)))$	$P(x, g(b), f(z, y))$	$f(y, a), x$
$\{x/f(y, a)\}$	$P(f(y, a), y, f(f(y, a), g(b)))$	$P(f(y, a), g(b), f(z, y))$	$y, g(b)$
$\{x/f(g(b), a), y/g(b)\}$	$P(f(g(b), a), g(b), f(f(g(b), a), g(b)))$	$P(f(g(b), a), g(b), f(z, g(b)))$	$f(g(b), a)$ z
$\{x/f(g(b), a), y/g(b), z/f(g(b), a)\}$	$P(f(g(b), a), g(b), f(f(g(b), a), g(b)))$	$P(f(g(b), a), g(b), f(f(g(b), a), g(b)))$	

UMG = $\{x/f(g(b), a), y/g(b), z/f(g(b), a)\}$

Ejercicio 2. Demostrar con medios semánticos que el siguiente razonamiento no es correcto utilizando un dominio de dos elementos:

$$\{ P(b) , \exists x (P(x) \wedge \neg Q(x,a)) , \forall x (P(x) \rightarrow \exists y Q(x,y)) \} \models \exists x Q(x,x) \quad (2 \text{ puntos})$$

Solución:

$$D=\{0,1\}, i(a)=0, i(b)=1.$$

$$i(\exists x Q(x,x))=F \text{ sii}$$

$$\{x/a\} i(Q(a,a))=F$$

Y además,

$$\{x/b\} i(Q(b,b))=F$$

$$i(P(b))=V$$

$$i(\exists x (P(x) \wedge \neg Q(x,a)))=V \text{ sii}$$

$$\{x/a\} i(P(a) \wedge \neg Q(a,a)) = V \text{ sii}$$

$$i(P(a))=V \text{ y además } i(Q(a,a))=F \text{ (tras descartar } i(Q(b,a))=F \text{ abajo)}$$

O bien,

$$\{x/b\} i(P(b) \wedge \neg Q(b,a))=V$$

$$i(P(b))=V \text{ y además } i(Q(b,a))=F \text{ (descartado más abajo)}$$

$$i(\forall x (P(x) \rightarrow \exists y Q(x,y)))=V \text{ sii}$$

$$\{x/a\} i(P(a) \rightarrow \exists y Q(a,y))=V \text{ sii}$$

$$i(P(a))=F$$

O bien,

$$i(\exists y Q(a,y))=V \text{ sii}$$

$$\{x/a\} i(Q(a,a))=V$$

O bien,

$$\{x/b\} i(Q(a,b))=V$$

Y además,

$$\{x/b\} i(P(b) \rightarrow \exists y Q(b,y))=V$$

$$i(P(b))=F$$

O bien,

$$i(\exists y Q(b,y))=V \text{ sii}$$

$$\{x/a\} i(Q(b,a))=V$$

O bien,

$$\{x/b\} i(Q(b,b))=V$$

No es consecuencia lógica, el contramodelo que lo demuestra es: $P_D(0)=V$, $P_D(1)=V$, $Q_D(0,1)=V$, $Q_D(1,0)=V$, $Q_D(0,0)=F$, $Q_D(1,1)=F$.

Ejercicio 3. Demostrar con el cálculo **deducción natural**:

$$T [\forall x \forall y (P(a,x) \rightarrow Q(y)), \exists x \neg R(x)] \vdash P(a,a) \rightarrow \exists x (Q(x) \wedge \neg R(x)) \quad (2 \text{ puntos})$$

Solución:

1. $\forall x \forall y (P(a,x) \rightarrow Q(y))$ premisa
2. $\exists x \neg R(x)$ premisa
3. $\neg R(b^*)$ $E_{\exists 2}$
4. $\forall y (P(a,a) \rightarrow Q(y))$ $E_{\forall 1} \{x/a\}$
5. $P(a,a) \rightarrow Q(b^*)$ $E_{\forall 4} \{y/b^*\}$
6. $P(a,a)$ supuesto
7. $Q(b^*)$ $E_{\rightarrow 5,6}$
8. $Q(b^*) \wedge \neg R(b^*)$ $I_{\wedge 11,12}$
9. $\exists x (Q(x) \wedge \neg R(x))$ $I_{\exists 8}$
10. $P(a,a) \rightarrow \exists x (Q(x) \wedge \neg R(x))$ $E_{\rightarrow 6,9}$

Ejercicio 4. Obtener la forma clausular de la siguiente estructura deductiva:

$$\{ \forall x(P(x,y) \rightarrow (R(a) \wedge \exists x S(x)) , \neg \forall x S(x) \wedge \exists y R(y) \} \quad \vdash \quad \exists x (\neg P(x,x) \wedge \forall y R(y)) \quad (2 \text{ puntos})$$

Solución:

$$\forall x(P(x,y) \rightarrow (R(a) \wedge \exists x S(x)))$$

$$\forall x(P(x,y) \rightarrow \exists z (R(a) \wedge S(z)))$$

$$\forall x \exists z (P(x,y) \rightarrow (R(a) \wedge S(z))) \quad (\text{prenex})$$

$$\exists y \forall x \exists z (P(x,y) \rightarrow (R(a) \wedge S(z))) \quad (\text{Cierre Existencial})$$

$$\exists y \forall x \exists z (\neg P(x,y) \vee (R(a) \wedge S(z)))$$

$$\exists y \forall x \exists z ((\neg P(x,y) \vee R(a)) \wedge (\neg P(x,y) \vee S(z))) \quad (\text{FNC})$$

$$\forall x ((\neg P(x,b) \vee R(a)) \wedge (\neg P(x,b) \vee S(f(x)))) \quad (\text{Skolem})$$

$$\{\neg P(x,b) \vee R(a), \neg P(x,b) \vee S(f(x))\} \quad (\text{FC})$$

$$\neg \forall x S(x) \wedge \exists y R(y)$$

$$\exists x \neg S(x) \wedge \exists y R(y)$$

$$\exists x (\neg S(x) \wedge \exists y R(y))$$

$$\exists x \exists y (\neg S(x) \wedge R(y)) \quad (\text{prenex})$$

$$(\neg S(c) \wedge R(d)) \quad (\text{Skolem})$$

$$\{\neg S(c), R(d)\} \quad (\text{FC})$$

Negando la conclusión:

$$\neg \exists x (\neg P(x,x) \wedge \forall y R(y))$$

$$\forall x \neg (\neg P(x,x) \wedge \forall y R(y))$$

$$\forall x (P(x,x) \vee \neg \forall y R(y))$$

$$\forall x (P(x,x) \vee \exists y \neg R(y))$$

$$\forall x \exists y (P(x,x) \vee \neg R(y)) \quad (\text{prenex})$$

$$\forall x (P(x,x) \vee \neg R(g(x))) \quad (\text{Skolem})$$

$$\{P(x,x) \vee \neg R(g(x))\} \text{FC}$$

Forma clausular es

$$\{ \neg P(x_1,b) \vee R(a), \neg P(x_2,b) \vee S(f(x_2)), \neg S(c), R(d), P(x_3,x_3) \vee \neg R(g(x_3)) \}$$

Ejercicio 5. Demostrar, mediante el método de resolución, que la siguiente estructura deductiva es correcta:

$$T[C_1, C_2, C_3, C_4, C_5] \vdash \exists x \forall y (P(x) \vee T(x, y))$$

$$C_1: Q(x) \vee R(x)$$

$$C_2: R(x) \vee P(x) \vee \neg Q(f(x))$$

$$C_3: R(x) \vee P(x) \vee T(x, y)$$

$$C_4: \neg R(x)$$

$$C_5: Q(a)$$

(2 puntos)

Solución:

Se renombran las variables:

$$C_1: Q(x_1) \vee R(x_1)$$

$$C_2: R(x_2) \vee P(x_2) \vee \neg Q(f(x_2))$$

$$C_3: R(x_3) \vee P(x_3) \vee T(x_3, x_3)$$

$$C_4: \neg R(x_4)$$

$$C_5: Q(a)$$

Se hace la forma clausular de la negación de la conclusión

$$C_6: \neg P(x_5)$$

$$C_7: \neg T(x_6, g(x_6))$$

Para que el conjunto sea insatisfacible debe existir una derivación que permita llegar a la cláusula vacía:

