Lógica – Grado en Ingeniería Informática, Grado en Matemáticas e Informática

20 de enero de 2016

Repesca de LPO (Lógica de Primer Orden)

Ejercicio 1.1. Formalizar en un lenguaje de primer orden los siguientes enunciados: *(1 punto)*

a) No existen políticos que no mientan alguna vez.

b) Sólo los socios o familiares de Juan tendrán un cargo en el ayuntamiento.

---

a) Lenguaje: $P(x) \equiv$ x es político

$M(x) \equiv$ x miente alguna vez

$$\neg \exists x(P(x) \wedge \neg M(x))$$

b) $S(x,y) \equiv$ x es socio de y

$F(x,y) \equiv$ x es familiar de y

$C(x) \equiv$ x tiene un cargo en el ayuntamiento

$$\forall x\,(C(x) \rightarrow S(x, a) \vee F(x, a))$$

Ejercicio 1.2. Determinar si son unificables los siguientes pares de fórmulas atómicas, encontrando, si existe, el unificador de máxima generalidad (umg) y detallando el proceso de obtención del umg. *(1 punto)*

a) A: P(g(x), x, g(t), t)   B: P(y, h(z), z, b)   siendo x, y, z, t variables y h, g funciones

b) A: Q(h(x), g(x, z), z)   B: Q(h(t), g(y, h(y)), t)   siendo x, y, z, t variables y g, h funciones

---

a) A: P(g(x), x, g(t), t)   B: P(y, h(z), z, b)   siendo x, y, z, t variables y h, g funciones

s = {y/g(x)}

As: P(g(x), x, g(t), t)   Bs: P(g(x), h(z), z, b)

s = {y/g(h(z)), x/h(z)}

As: P(g(h(z)), h(z), g(t), t)   Bs: P(g(h(z)), h(z), z, b)

s = {y/g(h(g(t))), x/h(g(t)), z/g(t)}

As: P(g(h(g(t))), h(g(t)), g(t), t)   Bs: P(g(h(g(t))), h(g(t)), g(t), b)

s = {y/g(h(g(b))), x/h(g(b)), z/g(b), t/b}

As: P(g(h(g(b))), h(g(b)), g(b), b)   Bs: P(g(h(g(b))), h(g(b)), g(b), b)

A y B son unificables y s = {y/g(h(g(b))), x/h(g(b)), z/g(b), t/b} es su UMG

b) A: Q(h(x), g(x, z), z)   B: Q(h(t), g(y, h(y)), t)   siendo x, y, z, t variables y g, h funciones

s = {t/x}

As: Q(h(x), g(x, z), z)   Bs: Q(h(x), g(y, h(y)), x)

s = {t/x, y/x}

As: Q(h(x), g(x, z), z)   Bs: Q(h(x), g(x, h(x)), x)

s = {t/x, y/x, z/h(x)}

As: Q(h(x), g(x, h(x)), h(x))   Bs: Q(h(x), g(x, h(x)), x)

La discordancia (x, h(x)) no tiene solución, por lo que A y B no son unificables

Ejercicio 2. *(2 puntos)*

a) Definir el concepto de **consecuencia lógica** en Lógica de Primer Orden (con precisión y sin rollo innecesario).

b) Averiguar si la fórmula $Q(a,b) \lor Q(c,c)$ es o no consecuencia lógica del siguiente conjunto:

$$\{\ \exists x P(x),\ \ \forall y(\ P(y) \to Q(a,y)\ )\ \}$$

---

a) *(0,5 puntos)* Varias definiciones de consecuencia lógica, todas correctas:

- B es **consecuencia lógica** de $\{ A_1, A_2, \dots, A_n \}$, $\mathbf{\{ A_1, \dots, A_n \} \models B}$ sii
  sii para toda interpretación **i** tal que $i(A_1) = i(A_2) = \dots = i(A_n) = V$ entonces $i(B) = V$

o con el lenguaje español:

- una fórmula (conclusión) es consecuencia lógica de un conjunto de fórmulas (premisas) sii
  sii toda interpretación que hace verdaderas las premisas hace también verdadera la conclusión.

o de otra forma:

- una fórmula (conclusión) es consecuencia lógica de un conjunto de fórmulas (premisas) sii
  sii todo modelo del conjunto de premisas es también modelo de la conclusión.

b) *(1,5 puntos)* Llamamos $A_1 \equiv \exists x\, P(x)$

$A_2 \equiv \forall y\ (\ P(y) \to Q(a,y)\ )$

$B \equiv Q(a,b) \lor Q(c,c)$

- Buscamos un contramodelo, es decir i tal que $i(A_1) = i(A_2) = V$ y $i(B) = F$
- Tomamos como dominio $D = \{1,2,3\}$, por ejemplo
- $\boxed{i(a) = 1}$ $\boxed{i(b) = 2}$ $\boxed{i(c) = 3}$ por ejemplo
- $i(B) = i(\ Q(a,b) \lor Q(c,c)\ ) = F$ $\boxed{i(Q(a,b)) = i(Q(c,c)) = F}$
- $i(A_2) = i(\ \forall y\ (\ P(y) \to Q(a,y)\ )\ ) = V$ sii

$i(\ P(a) \to Q(a,a)\ ) = V$ sii $i(P(a)) = F$ ó $i(Q(a,a)) = V$ (1)

y $i(\ P(b) \to Q(a,b)\ ) = V$ sii $\boxed{i(P(b)) = F}$ ó $\cancel{i(Q(a,b)) = V}$

y $i(\ P(c) \to Q(a,c)\ ) = V$ sii $i(P(c)) = F$ ó $i(Q(a,c)) = V$ (2)

- $i(A_1) = i(\ \exists x\ P(x)\ ) = V$ sii $i(P(a)) = V$ ó $\cancel{i(P(b)) = V}$ ó $i(P(c)) = V$ (3)
- para hacer compatibles (1), (2) y (3) elegimos $\boxed{i(P(a)) = V}$ y $\boxed{i(Q(a,a)) = V}$

- los demás valores de $i(Q(x,y))$ pueden ser V o F $\Rightarrow$ hay unos cuantos contramodelos con ese dominio y las interpretaciones de a, b y c antes fijadas

$\Rightarrow$ se ha encontrado un contramodelo $\Rightarrow$ **NO es consecuencia lógica**

Ejercicio 3. Demostrar la corrección de la siguiente estructura deductiva mediante el cálculo de **deducción natural,** justificando adecuadamente cada paso: *(2 puntos)*

$$T[[\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)), \forall x(Q(x) \rightarrow R(x) \vee S(x)), \exists x(\neg R(x) \wedge \neg S(x))] \vdash \exists x\, \neg P(x)$$

1.–	$\exists x(\neg R(x) \wedge \neg S(x))$	premisa
2.–	$\neg R(a) \wedge \neg S(a)$	
3.-	$\neg S(a)$	
4.–	$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$	premisa
5.-	$P(a) \rightarrow Q(a)$	
6.-	$P(a)$	supuesto
7.-	$Q(a)$	modus ponens 6, 5
8.-	$\forall x(Q(x) \rightarrow R(x) \vee S(x))$	premisa
9.-	$Q(a) \rightarrow R(a) \vee S(a)$	
10.-	$R(a) \vee S(a)$	
11.-	$R(a)$	corte 3, 10
12.-	$\neg R(a)$	elim $\wedge$ 2
13.-	$R(a) \wedge \neg R(a)$	
14.-	$\neg P(a)$	
15.-	$\exists x\, \neg P(x)$	

Ejercicio 4. Obtener la forma clausular de la estructura deductiva T[C1, C2] $\vdash$ Q: *(2 puntos)*

C1: $\exists y \forall x \exists z \forall w \exists v(\neg A(x,y,z) \rightarrow B(f(w,v)) \wedge C(y))$

C2: $\forall x(D(x) \rightarrow \neg \forall y A(y,a,g(b)) \vee \exists y F(x,y))$

Q: $\forall x E(x) \rightarrow C(x)$

(x,y,z,v,w son variables; a,b son constantes; f,g funciones; A,B,C,D,E,F predicados)

Solucion:

C1: es en forma prenex
C1: no tiene variables libres, nada por cierre existencial
C1: FNC: $\neg\neg A(x,y,z) \vee (B(f(w,v)) \wedge C(y))$ (eliminación de $\rightarrow$)
$A(x,y,z) \vee (B(f(w,v)) \wedge C(y))$ (eliminación de $\neg\neg$)
$(A(x,y,z) \vee B(f(w,v))) \wedge (A(x,y,z) \vee C(y))$ (distributivitat de $\vee$ a ⍰ y)
C1: Skolemizacion (tenemos en las formulas: constantes a,b, funciones f,g):
$\forall x\, \forall w\, (A(x,c,h(x)) \vee B(f(w,f'(x,w)))) \wedge (A(x,c,h(x)) \vee C(c))$ (dos clausulas)

C2: poner en forma prenex:
$\forall x(D(x) \rightarrow \neg\forall y A(y,a,g(b)) \vee \exists z\, F(x,z))$ (renombrar la segunda variable y)
$\forall x(D(x) \rightarrow \exists y \neg A(y,a,g(b)) \vee \exists z\, F(x,z))$ (Interdefinición de cuantificadores)
$\forall x \exists y\, (D(x) \rightarrow \neg A(y,a,g(b)) \vee \exists z\, F(x,z))$ (distribución de conectivas)
$\forall x \exists y \exists z\, (D(x) \rightarrow \neg A(y,a,g(b)) \vee F(x,z))$ (distribución de conectivas)
C2: no tiene variables libres, nada por cierre existencial
C2: FNC: $(\neg D(x) \vee \neg A(y,a,g(b)) \vee \exists z\, F(x,z))$ (eliminación de $\rightarrow$)
C1: Skolemizacion (tenemos en las formulas: constantes a,b,c funciones f,g,h,f'):
$\forall x\, \exists z\, (\neg D(x) \vee \neg A(f''(x),a,g(b)) \vee F(x,f'''(x)))$ (una sola clausula)

Negar la conclusión:
$\neg$Q: forma prenex:
$\neg(\forall z\, E(z) \rightarrow C(x))$ (renombrar la primer variable x)
$\neg(\exists z\, (E(z) \rightarrow C(x)))$ Distribución de conectivas respecto a cuantificadores
$\forall z \neg\, (E(z) \rightarrow C(x))$ Interdefinición de cuantificadores:
$\neg$Q: cierre existencial
$\exists x\, \forall z \neg\, (E(z) \rightarrow C(x))$
$\neg$Q: FNC: $\neg\, (\neg E(z) \vee C(x))$ eliminación de $\rightarrow$
$E(z) \wedge \neg C(x)$ (DeMorgan)
$\neg$Q: Skolemizacion: $\forall z\, (E(z)$ ⍰ $\neg C(d))$ (2 clausulas)

Forma clausular:
$\{ A(x,c,h(x)) \vee B(f(w,f'(x,w))), A(x,c,h(x)) \vee C(c), \neg D(x) \vee \neg A(f''(x),a,g(b)) \vee F(x,f'''(x)), E(z), \neg C(d)\}$

Ejercicio 5. Demostrar que el siguiente conjunto es insatisfacible utilizando el método de **resolución con umg**:

C1 : P(f(x)) ∨ ¬Q(x) ∨ R(x)
C2 : ¬P(f(x)) ∨ S(g(y), y)
C3 : P(y) ∨ R(y) ∨ ¬S(y, g(y))
C4 : Q(x) ∨ R(y)
C5 : ¬S(x, y)
C6 : ¬R(x) *(2 puntos)*

Solución:

Renombrado de variables:

C1 : P(f(x1)) ∨ ¬Q(x1) ∨ R(x1)

C2 : ¬P(f(x2)) ∨ S(g(y2), y2)

C3 : P(y3) ∨ R(y3) ∨ ¬S(y3, g(y3))

C4 : Q(x4) ∨ R(y4)

C5 : ¬S(x5, y5)

C6 : ¬R(x6)

Resolución:

R1: P(f(x1)) ∨ ¬Q(x1)	C1,C6 {x6/x1}
R2: Q(x4)	C4,C6’ {x6’/y4}, siendo C6’: ¬r(x6’)
R3: P(f(x1))	R1,R2 {x4/x1}
R4: S(g(y2),y2)	R3,C2 {x2/x1}
R5: □	R4,C5 {x5/g(y2), y5/y2}

(C6 se usa dos veces con su correspondiente renombrado y C3 no se usa)