ELECTROMAGNETISMO Septiembre 2012- Original

INSTRUCCIONES: El examen consta de dos partes: Teoría (7ptos) y Problemas (3ptos). Para aprobar es necesario, pero no suficiente, obtener al menos 3ptos en la parte de Teoría y 1,5ptos en la de Problemas. **MATERIAL:** Calculadora no programable.

TEORIA: Conteste a las siguientes preguntas. Procure ser claro y conciso, utilece la carilla de una hoja como máximo para cada pregunta.

1. Entre las placas de un condensador cilíndrico de radios a y b (a<b) e indefinido en la dirección Z, existe un campo eléctrico de la forma

$$\mathbf{E} = A \operatorname{sen} \varphi/2 \cos(\omega t)\, \mathbf{u}_\rho$$

¿Existen cargas libres en la región entre conductores? En caso afirmativo determine la carga por unidad de longitud.

¿Se puede expresar el campo **E** como gradiente de un escalar? ¿Existe campo magnético?

2.- Explique el principio físico que describe la siguiente expresión y explique el significado físico de cada uno de los términos

$$\int_V \mathbf{E}' \cdot \mathbf{J} dV = \frac{d}{dt} \int_V \frac{1}{2} (\mathbf{D} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H})\, dV + \int_V \frac{\mathbf{J}^2}{\gamma} dV + \oint (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{s}$$

3.-Corriente de desplazamiento. Fundamento, expresión y significado físico.

PROBLEMAS. Elija un problema de entre los dos propuestos. (sólo se corregirá un problema. Si un alumno hace los dos, sólo se corregirá el primero)

PROBLEMA 1: Considere un array de infinitas láminas conductoras situadas en el plano $Z = 0$. Cada lámina tiene una anchura $a/2$ en la dirección X y una longitud infinita en la dirección Y. Las láminas se encuentran alternativamente a potencial $+V$ y $-V$. Encontrar el potencial en la región $z > 0$ (3 puntos).

PROBLEMA 2: Calcular el potencial en el interior del recinto de la figura, sabiendo que se verifica $V(x, y) = 0$ para $y = 0$; $V(x, y) = 0$ para $y = b$ y

$$\left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_{x=0} = 0 \qquad y \qquad \left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_{x=a} = E_o$$

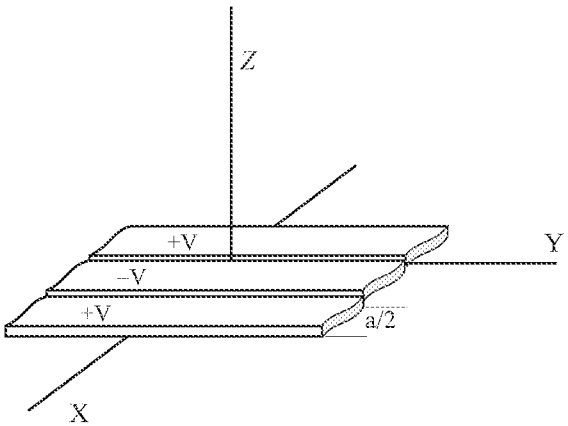

Figura 1

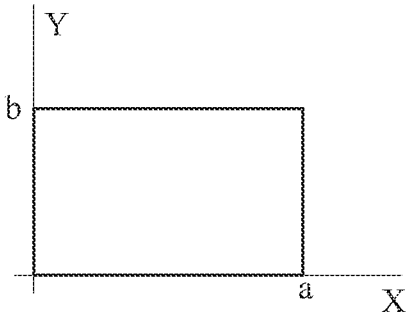

Figura 2

FORMULARIO

(1) Operaciones diferenciales vectoriales

Gradiente

$$\nabla U = \frac{\partial U}{\partial x}\mathbf{u}_x + \frac{\partial U}{\partial y}\mathbf{u}_y + \frac{\partial U}{\partial z}\mathbf{u}_z \quad ; \quad \nabla U = \frac{\partial U}{\partial \rho}\mathbf{u}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial U}{\partial \varphi}\mathbf{u}_\varphi + \frac{\partial U}{\partial z}\mathbf{u}_z$$

$$\nabla U = \frac{\partial U}{\partial r}\mathbf{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \theta}\mathbf{u}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial U}{\partial \varphi}\mathbf{u}_\varphi$$

Divergencia

$$\nabla\cdot\mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad ; \quad \nabla\cdot\mathbf{A} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho A_\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 A_r\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\theta}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}$$

Rotacional

$$\nabla\times\mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{u}_x & \mathbf{u}_y & \mathbf{u}_z \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} \quad ; \quad \nabla\times\mathbf{A} = \frac{1}{\rho}\begin{vmatrix} \mathbf{u}_\rho & \rho\mathbf{u}_\varphi & \mathbf{u}_z \\ \partial/\partial\rho & \partial/\partial\varphi & \partial/\partial z \\ A_\rho & \rho A_\varphi & A_z \end{vmatrix}$$

$$\nabla\times\mathbf{A} = \frac{1}{r^2\sin\theta}\begin{vmatrix} \mathbf{u}_r & r\mathbf{u}_\theta & (r\sin\theta)\mathbf{u}_\varphi \\ \partial/\partial r & \partial/\partial\theta & \partial/\partial\varphi \\ A_\rho & rA_\theta & (r\sin\theta)A_\varphi \end{vmatrix}$$

(2) Ecuación de los potenciales

$$\nabla^2\mathbf{A} - \mu_o\varepsilon_o\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla\left(\nabla\cdot\mathbf{A} + \mu_o\varepsilon_o\frac{\partial\phi}{\partial t}\right) = -\mu_o\mathbf{J}$$

$$\nabla^2\phi + \frac{\partial\phi}{\partial t}(\nabla\cdot\mathbf{A}) = -\frac{\rho}{\varepsilon_o}$$

(3) Desarrollo de Fourier

$$F(x) = a_o/2 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos(n\pi x/L) + b_n\sin(n\pi x/L)\right]$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} F(x)\cos(n\pi x/L)\ dx \quad ; \quad b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} F(x)\sin(n\pi x/L)\ dx$$

(4) Ecuación de Laplace en c. cartesianas

$$\nabla^2\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} \quad ; \quad k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = 0$$

$$k_x^2 > 0 \Rightarrow \quad X = A_1\exp(k_x x) - A_2\exp(-k_x x) = A_3\sinh k_x x + A_4\cosh k_x x$$

$$k_x^2 < 0 \Rightarrow \quad X = A_1\exp(j\,|k_x|\,x) - A_2\exp(-j\,|k_x|\,x) = A_3\sin(|k_x|\,x) + A_4\cos(|k_x|\,x)$$

$$k_x^2 = 0 \Rightarrow \quad X = A_1 x + A_2$$

(4) Ecuación de Laplace en c. cilíndricas

$$\nabla^2\phi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{r\partial\phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} \quad ; \quad k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = 0$$

(a) Simetría axial con invarianza longitudinal

$$\phi = k_1 \ln r + k_2$$

(b) Invarianza longitudinal

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} = 0$$

$$\phi = \left(C_1 r^n + C_2 r^{-n}\right)\left(A_1 \cos n\varphi + A_2 \operatorname{sen} n\varphi\right)$$

o bien , si $n = 0$

$$\phi = \left(k_1 \ln r + k_2\right)\left(A_1 \varphi + B_2\right)$$

(c) Simetría axial

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0$$

$$\phi = \left(B_1 J_0(kr) + B_2 N_0(kr)\right)\left(A_1 \cosh kz + A_2 \sinh kz\right)$$

ó

$$\phi = \left(C_1 I_0(kr) + C_2 K_0(kr)\right)\left(D_1 \cos kz + D_2 \operatorname{sen} kz\right)$$

(6) **Ecuación de Laplace en c. esféricas**

$$\triangle\phi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\operatorname{sen}\theta \frac{\partial \phi}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2}$$

(a) Simetría alrededor de z

$$\phi = \left(A_1 r^n + A_2 r^{-(n+1)}\right) P_n(\cos\theta)$$

(b) Asimetría total

$$\phi = \left(B_1 r^n + B_2 r^{-(n+1)}\right)\left(A_1 \cos m\varphi + A_2 \operatorname{sen} m\varphi\right) P_n^m(\cos\theta)$$

– –

Funciones de Bessel de primera especie y orden cero

$$J_o(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (x/2)^{2m}}{(m!)^2}$$

$$N_o(x) = \frac{2}{\pi}\ln\left(\frac{\gamma x}{2}\right) J_o(x) - \frac{2}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m (x/2)^{2m}}{(m!)^2}\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots \frac{1}{m}\right)$$

Funciones de Bessel modificadas o de argumento imaginario

$$I_o(x) = J_o(jx) \qquad ; \qquad K_o(x) = N_o(jx)$$

Polinominos de Legendre

$$P_m(\cos\theta) = \frac{1}{2^m m!}\left[\frac{d}{d(\cos\theta)}\right]^m \left(\cos^2\theta - 1\right)^m$$

$$\begin{aligned}
P_o(\cos\theta) &= 1 \\
P_1(\cos\theta) &= \cos\theta \\
P_2(\cos\theta) &= \frac{1}{2}(3\cos^2\theta - 1) \\
P_3(\cos\theta) &= \frac{1}{2}(5\cos^3\theta - 3\cos\theta)
\end{aligned}$$