

Nombre y apellidos:

Número de matrícula:

- sólo una respuesta es correcta
- sólo puntuarán las respuestas con un razonamiento matemático, gráfico, etc.
- las respuestas incorrectas no restan puntos
- usar por favor bolígrafo, pluma o rotulador; no usar lápiz
- usar estas mismas hojas para hacer los cálculos, no usar ningún otro papel
- 60 min, 0.5 puntos cada problema

Las preactas se publicarán no más tarde del día 8 de junio y la revisión de examen será el 14 de junio a las 12:00 en la sala R1.



1. La piel es un material anisótropo de la clase límite ∞ /mm. El eje de orden infinito de la piel es perpendicular a la superficie de la misma. Las difusividades de un medicamento M a través de la piel (en los ejes convencionales) son $D_{11} = 3.1 \times 10^{-12} \text{ m/s}^2$ y $D_{33} = 6.1 \times 10^{-12} \text{ m/s}^2$. También se sabe que la difusión de una sustancia en cada una de las direcciones de los ejes convencionales está dada por la misma función que describe la difusión en un medio semi-infinito (Eq. 4.19 del texto), pero, lógicamente, con diferente difusividad en cada dirección. Para este medicamento se observa que el espesor de la capa límite en dirección perpendicular a la superficie es $\delta_{\text{perp}} = 6.7 \times 10^{-3} \text{ m}$. ¿Cuánto se habrá extendido M lateralmente (es decir, en direcciones paralelas a la superficie de la piel), si esta extensión se mide por el espesor de la correspondiente capa límite δ_{lat} en dirección lateral?

- 0.864 mm
- 0.533 mm
- 6.67 mm
- 2.11 mm
- 4.78 mm
- ninguna de las anteriores, la respuesta correcta es:



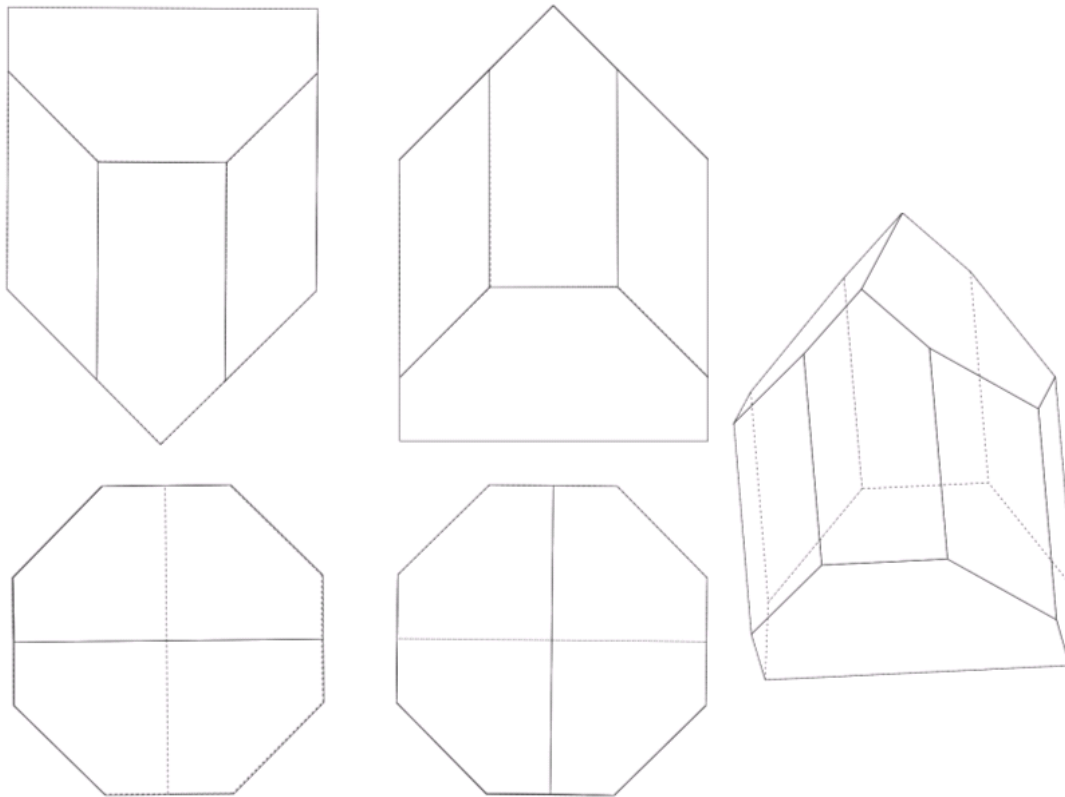
Sol.: puesto que la difusión obedece la misma ley en las tres direcciones convencionales, la única diferencia entre la dirección perpendicular (eje 3) y las laterales o transversales (ejes 1 y 2) es el valor diferente de la difusividad. Puesto que el espesor de la capa límite depende de la raíz cuadrada de la difusividad, la extensión lateral de M (espesor de la capa límite en dirección 1 o 2) será:

$$\delta_{\text{lat}} = \delta_{\text{perp}} \cdot \sqrt{\frac{D_{11}}{D_{33}}}$$

$$\delta_{\text{lat}} = 4.776 \times 10^{-3} \text{ m}$$



2. Un monocristal de un material cerámico tiene una estructura cristalina como la que se muestra en la figura. Determinar a qué clase cristalográfica pertenece.

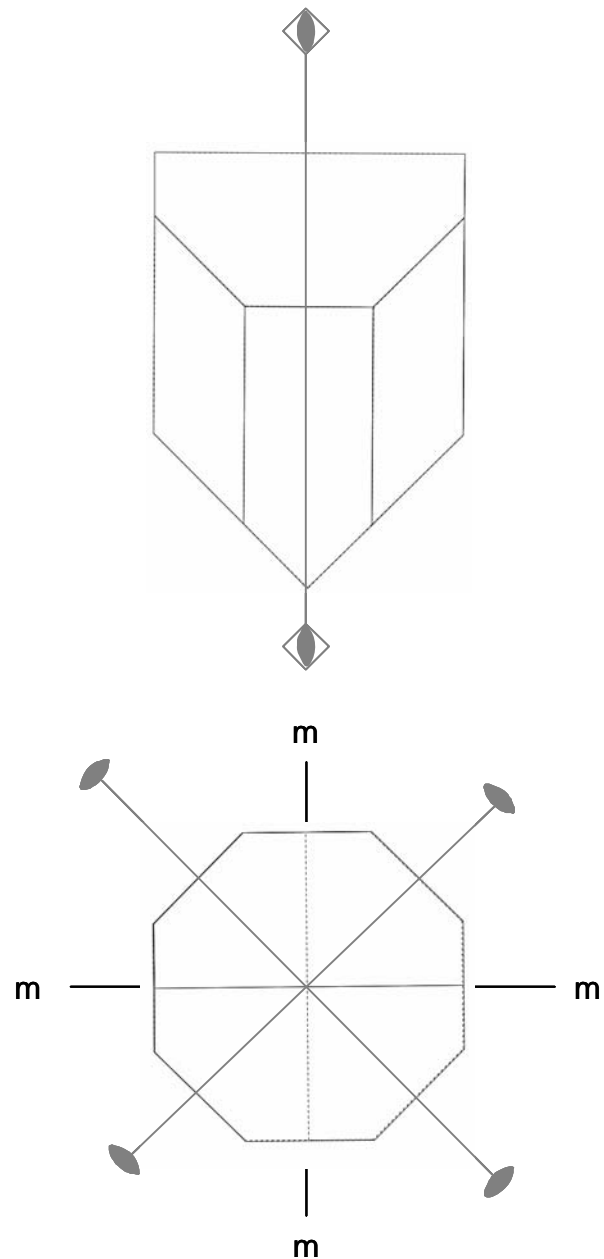


- $\bar{4}2m$
- $\bar{4}$
- 422
- $4/m$
- 4
- ninguna de las anteriores; la respuesta correcta es:



Sol.: Encontramos un eje cuaternario de inversión, dos ejes binarios y dos planos de reflexión, la clase es:

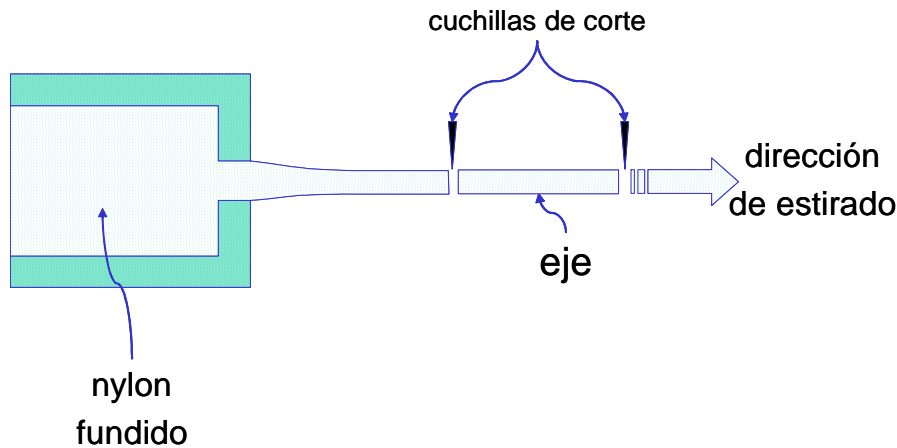
$\bar{4}2m$



▣ _____

▣ _____

3. Un proceso de fabricación en serie de ejes macizos de nylon, de sección circular, se basa en la pultrusión, que consiste en extrusión seguida de estiramiento axial y corte, como se ilustra en la figura. En este proceso el nylon sufre una deformación grande en la dirección de estirado, lo que modifica todas sus propiedades en esta dirección.



Las dimensiones del eje al terminar el proceso de pultrusión, a temperatura ambiente, son: radio $R = 0.03 \text{ m}$ y longitud $L = 0.15 \text{ m}$. En una aplicación la temperatura de uso del eje está $\Delta T = 120 \text{ K}$ por encima de la temperatura de fabricación. La deformación del nylon en función del incremento de temperatura, medido desde la temperatura de fabricación está dada por:

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \Delta T \underline{\underline{\alpha}}$$

donde los coeficientes de dilatación térmica (en los ejes convencionales) son conocidos: $\alpha_{11} = 5.5 \times 10^{-5} \text{ K}^{-1}$ y $\alpha_{33} = 1.5 \times 10^{-5} \text{ K}^{-1}$. Calcular el aumento relativo de volumen (incremento de volumen dividido entre el volumen inicial) del eje causado por este cambio de temperatura. Suponer pequeña deformación.

- 0.089
- 0.003942
- 0.00442
- 0.002142
- 0.015
- ninguna de las anteriores, la respuesta correcta es:



Sol.: el nylon procesado tiene un eje de orden infinito en la dirección de pultrusión. Este eje es el eje cartesiano 3, y el tensor de deformación es:

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \Delta T \begin{bmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{33} \end{bmatrix}$$

El aumento relativo de volumen, en pequeña deformación, está dado directamente por la traza del tensor deformación:

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\pi(R + \Delta R)^2(L + \Delta L) - \pi R^2 L}{\pi R^2 L} \approx \left(2 \frac{\Delta R}{R} + \frac{\Delta L}{L} \right) = 2\varepsilon_{11} + \varepsilon_{33} = \varepsilon_{ii} = (2\alpha_{11} + \alpha_{33}) \Delta T$$

$$(2\alpha_{11} + \alpha_{33}) \cdot \Delta T = 0.015$$



4. La divergencia de un campo tensorial de orden 2 definido como $\underline{\nabla} \cdot \underline{\omega}$ equivale, en notación de subíndices, a :

- $\delta_m \frac{\partial \omega_{mj}}{\partial x_m}$
- $\delta_m \frac{\partial \omega_{jm}}{\partial x_j}$
- $\delta_m \delta_j \frac{\partial \omega_{mj}}{\partial x_m}$
- $\delta_m \delta_k \frac{\partial \omega_{mk}}{\partial x_k}$
- $\frac{\partial \omega_{mj}}{\partial x_m}$
- ninguna de las anteriores, la respuesta correcta es :

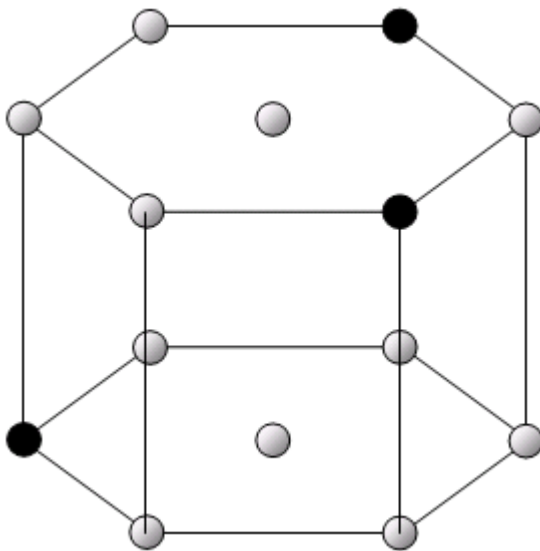


Sol : haciendo una contracción de índices como hemos visto en clase, resulta un tensor de primer orden:

$$(\delta_j \cdot \delta_i) \delta_m \frac{\partial \omega_{im}}{\partial x_j} = \delta_m \frac{\partial \omega_{jm}}{\partial x_j}$$



5. Determina los índices de Miller-Bravais (sistema hexagonal) de la forma a la que pertenece el plano que contiene los átomos marcados en negro en la figura.



- $\{\bar{2}111\}$
- $\{\bar{1}102\}$
- $\{22\bar{4}3\}$
- $\{0\bar{2}21\}$
- $\{1\bar{2}13\}$
- ninguna de las anteriores; la respuesta correcta es:



Sol.: Intersección en los ejes x, y, z : (3, -3/2, 1)

invertimos y resulta: 1/3 -2/3 1

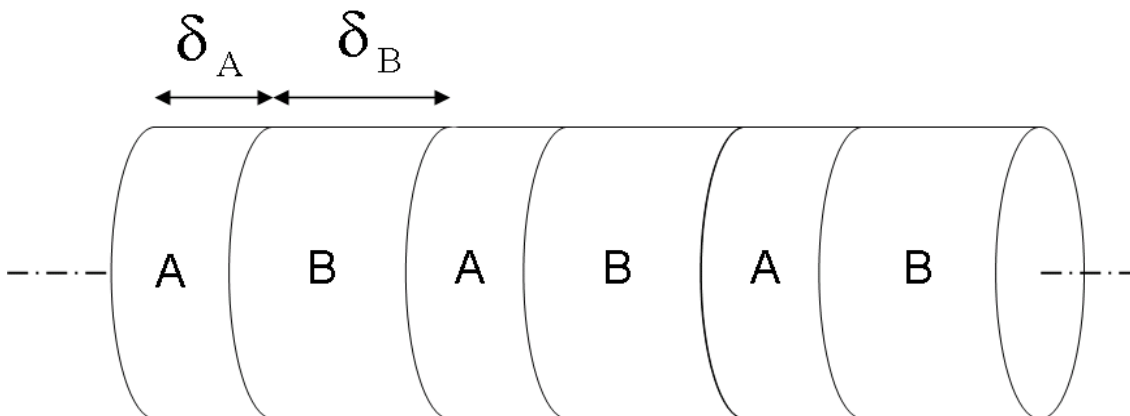
multiplicando por 3: (1 -2 3)

y añadiendo el cuarto índice (correspondiente al eje u), resulta la forma de planos:

$$\{1\bar{2}13\}$$



6. Un conductor M está compuesto de dos materiales A y B. B es isótropo en todas sus propiedades. Su resistividad es $\rho_B = 0.4 \text{ } \Omega \cdot \text{m}$. A pertenece a la clase 222 y sus resistividades eléctricas (expresadas en sus ejes convencionales) son: $\rho_{A_{11}} = 0.03 \text{ } \Omega \cdot \text{m}$, $\rho_{A_{22}} = 0.13 \text{ } \Omega \cdot \text{m}$ y $\rho_{A_{33}} = 0.89 \text{ } \Omega \cdot \text{m}$. A y B están dispuestos en láminas paralelas de espesores $\delta_A = 0.004 \text{ m}$ y $\delta_B = 0.01 \text{ m}$, como se indica en la figura. Las láminas de A están todas orientadas de igual manera y para todas ellas el eje convencional 2 del material A es paralelo al eje del cilindro. Determinar la conductividad del material compuesto M en la dirección del eje del cilindro.



- 4.238 S/m
- 0.584 S/m
- 1.478 S/m
- 3.377 S/m
- 3.087 S/m
- ninguna de las anteriores, la respuesta correcta es:



Sol.: en primer lugar obtenemos la resistividad del compuesto. La conductividad será la inversa de la resistividad que obtengamos.

Puesto que para la clase 222 (sistema ortorrómbico) la estructura de las propiedades de segundo orden simétricas es diagonal, y el eje convencional 2 del material A es paralelo al eje del cilindro, la única componente de la resistividad de A que influye en la conductividad pedida es la $\rho_{A22} = 0.13 \text{ W.m}$.

Los componentes A y B están eléctricamente en serie en la dirección pedida (a lo largo del eje del cilindro). Por tanto, la resistividad del compuesto en esta dirección será:

$$\rho_M = \frac{\delta_A}{\delta_A + \delta_B} \cdot \rho_{A22} + \frac{\delta_B}{\delta_A + \delta_B} \cdot \rho_B \quad \rho_M = 0.324 \text{ W.m}$$

El compuesto pertenece igualmente al sistema ortorrómbico y a la misma clase. El eje del cilindro es igualmente una de las tres direcciones principales del compuesto (y por supuesto de A). Por tanto la estructura de la resistividad del compuesto es también diagonal, y la resistividad en la dirección pedida es directamente el inverso de la resistividad calculada:

$$\sigma_M = \rho_M^{-1} \quad \sigma_M = 3.087 \text{ S/m}$$

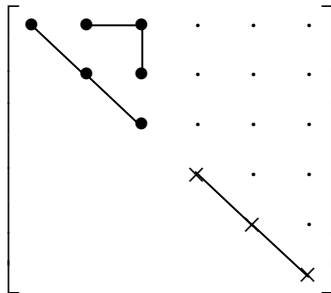


7. Una probeta cilíndrica de un material isótropo de longitud L_0 y diámetro D_0 , se somete a un estado de esfuerzo o tensión mecánica tal que las componentes τ_{i2} con $i = 1, 2, 3$ del tensor de esfuerzos τ son todas nulas. ¿Cuál será la nueva longitud de la probeta?

- $L_0(1 + \frac{1}{E} \tau_1 - \frac{\nu}{E} \tau_3)$
- $L_0(1 - \frac{\nu}{E} \tau_1 + \frac{1}{E} \tau_3)$
- $L_0(1 + \frac{\nu+1}{E} \tau_1)$
- $L_0(1 - \frac{\nu}{E} (\tau_1 + \tau_3))$
- $L_0(1 + \frac{\nu}{E} \tau_1 + \frac{1}{E} \tau_3)$
- ninguna de las anteriores; la correcta es :



Sol.: El material es isótropo y por tanto la estructura de su matriz de complianza elástica es (ver 02_01_02):



En notación de Voigt el vector deformación se calcula:

$$\vec{\epsilon} = \underset{\sim}{s} \vec{\tau}$$

$$\epsilon_i = s_{ij} \tau_j$$

De acuerdo con el enunciado, el vector esfuerzo es:

$$\vec{\tau} = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ 0 \\ \tau_3 \\ 0 \\ \tau_5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Los ejes para un material isótropo los podemos colocar como queramos, por ejemplo, haciendo coincidir la dirección 3 con el eje del cilindro. Multiplicando matriz por vector hallamos el vector deformación, del que nos interesará la componente ϵ_3 para hallar la longitud final de la probeta:

$$\vec{\epsilon} = \begin{bmatrix} s_{11} \tau_1 + s_{12} \tau_3 \\ s_{12} \tau_1 + s_{11} \tau_3 \\ s_{12} \tau_1 + s_{11} \tau_3 \\ 0 \\ s_{55} \tau_5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

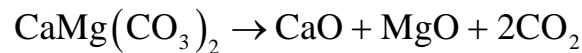
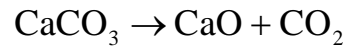
luego la longitud final es:

$$L_{\text{final}} = L_0(1 + \epsilon_3) = L_0(1 + s_{12} \tau_1 + s_{11} \tau_3)$$

$$L_{\text{final}} = L_0(1 - \frac{\nu}{E} \tau_1 + \frac{1}{E} \tau_3)$$



8. Para la fabricación por calcinación de un material cerámico (**M**) de composición (fracciones molares): $x_{\text{CaO}} = 0.48$, $x_{\text{MgO}} = 0.22$ y $x_{\text{SiO}_2} = 0.3$ se dispone de tres materias primas: caliza CaCO_3 (**A**), dolomita $\text{CaMg}(\text{CO}_3)_2$ (**B**), y sílice SiO_2 (**C**). A y B pierden CO_2 en la calcinación según las reacciones:



Calcular qué cantidad (en kg) de caliza (A) es necesaria para producir 1 kg de **M**.

Usar las masas atómicas con las cifras decimales que aparecen en el sistema periódico del libro de texto.

- 0.484 kg de CaCO_3 /kg de M
- 0.540 kg de CaCO_3 /kg de M
- 0.670 kg de CaCO_3 /kg de M
- 0.226 kg de CaCO_3 /kg de M
- 0.732 kg de CaCO_3 /kg de M
- ninguna de las anteriores, la respuesta correcta es:

Sol.: un modo de hacerlo es considerar CaO , CaOMgO y SiO_2 como componentes y calcular las masas (en kg) m_{CaO} , m_{CaOMgO} y m_{SiO_2} de estos componentes necesarias para obtener 1 kmol de **M. Este kmol de **M** contendrá x_{CaO} , x_{MgO} y x_{SiO_2} kmol de CaO , MgO y SiO_2 respectivamente. Con estas variables se cumple:**

$$x_{\text{CaO}} = \frac{m_{\text{CaO}}}{Mw_{\text{CaO}}} + \frac{m_{\text{CaOMgO}}}{Mw_{\text{CaOMgO}}} \quad x_{\text{MgO}} = \frac{m_{\text{CaOMgO}}}{Mw_{\text{CaOMgO}}} \quad x_{\text{SiO}_2} = \frac{m_{\text{SiO}_2}}{Mw_{\text{SiO}_2}}$$

de donde se puede despejar inmediatamente m_{CaO} :

$$x_{\text{CaO}} = \frac{m_{\text{CaO}}}{Mw_{\text{CaO}}} + x_{\text{MgO}} \Rightarrow m_{\text{CaO}} = (x_{\text{CaO}} - x_{\text{MgO}})Mw_{\text{CaO}}$$

$$m_{\text{CaO}} = (x_{\text{CaO}} - x_{\text{MgO}}) \cdot Mw_{\text{CaO}} \quad m_{\text{CaO}} = 14.581 \quad \text{kg de CaO para un kmol de M.}$$

Como la masa molecular de **M es** $Mw_M = x_{\text{CaO}} \cdot Mw_{\text{CaO}} + x_{\text{MgO}} \cdot Mw_{\text{MgO}} + x_{\text{SiO}_2} \cdot Mw_{\text{SiO}_2}$

$$Mw_M = 53.814$$

la masa de CaO necesaria para obtener 1 kg de **M será:** $m_{\text{CaO}} \cdot \frac{1}{Mw_M} = 0.271 \text{ kg de CaO}$

y por tanto, la cantidad de caliza (A) necesaria será: $m_{\text{CaO}} \cdot \frac{1}{Mw_M} \cdot \frac{Mw_{\text{CaCO}_3}}{Mw_{\text{CaO}}} = 0.484 \text{ kg}$

También puede razonarse considerando que el MgO proviene íntegramente de la dolomita, por tanto serán necesarios x_{MgO} kmol de dolomita para 1 kmol de M.

Además, cada kmol de dolomita aporta también un kmol de CaO. Por consiguiente, la caliza debe aportar de CaO sólo la diferencia hasta la especificación, es decir: $x_{\text{CaO}} - x_{\text{MgO}} = 0.26$ kmol de caliza. Esta cantidad $(x_{\text{CaO}} - x_{\text{MgO}}) \cdot M_{\text{wCaCO}_3} = 26.021$ kg de CaCO_3 es la necesaria para

obtener 1 kmol de M, cuya masa molecular es $M_{\text{wM}} = 53.814$. Por tanto, para 1 kg de M

serán necesarios $\frac{(x_{\text{CaO}} - x_{\text{MgO}}) \cdot M_{\text{wCaCO}_3}}{M_{\text{wM}}} = 0.484$ kg de caliza (A).



Problema 1

Nombre:

Número de matrícula:

El óxido de cerio, CeO_2 , es un material cerámico con estructura cristalográfica del tipo de la fluorita, y que forma soluciones sólidas con una gran variedad de agentes dopantes con el fin de aumentar su conductividad eléctrica. Uno de estos dopantes es el óxido de samario, Sm_2O_3 . En las soluciones sólidas $\text{CeO}_2\text{-Sm}_2\text{O}_3$ se mantiene:

- El número total de cationes en la estructura
- El tamaño de la celda

en los mismos valores que para la estructura del CeO_2 puro.

Las soluciones sólidas $\text{CeO}_2\text{-Sm}_2\text{O}_3$ se forman por sustitución de algunos de los iones Ce^{+4} por iones Sm^{+3} , manteniendo la neutralidad eléctrica del cristal.

Uno de los sistemas $\text{CeO}_2\text{-Sm}_2\text{O}_3$ que ha proporcionado valores más elevados para la conductividad eléctrica es el que presenta una composición molar del 10% de Sm_2O_3 en la solución sólida.

Sabiendo que :

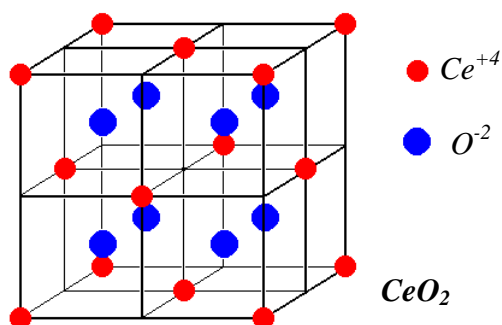
- Radios iónicos: $r_{\text{Ce}^{+4}} = 0.102 \times 10^{-9} \text{m}$; $r_{\text{Sm}^{+3}} = 0.113 \times 10^{-9} \text{m}$; $r_{\text{O}^{2-}} = 0.132 \times 10^{-9} \text{m}$
- Masas atómicas: $M_{\text{W}_{\text{Ce}}} = 140.1 \frac{\text{kg}}{\text{kmol}}$; $M_{\text{W}_{\text{Sm}}} = 150.4 \frac{\text{kg}}{\text{kmol}}$; $M_{\text{W}_{\text{O}}} = 16 \frac{\text{kg}}{\text{kmol}}$

y considerando todos los iones como esféricos, calcular.

- La densidad de la solución sólida $\text{CeO}_2\text{-Sm}_2\text{O}_3$, en kg/m^3
- El porcentaje (%) de iones Ce^{+4} que ha sido reemplazado por iones Sm^{+3} para obtener la solución sólida anterior ($\frac{\text{iones Ce}^{+4} \text{ sustituidos}}{\text{iones Ce}^{+4} \text{ iniciales}} \times 100$).

(3 puntos, 45 minutos)

Sol: El CeO_2 posee una estructura cristalina tipo fluorita donde los cationes Ce^{+4} ocupan las posiciones características de la red FCC (vértices y centros de caras), mientras que los iones O^{2-} se disponen en los ocho huecos tetraédricos de la celda.



Celda unitaria CeO_2

$$n^{\circ} \text{ de posiciones catiónicas} = n^{\circ} \text{ de } \text{Ce}^{+4} = 4$$

$$n^{\circ} \text{ de posiciones aniónicas} = n^{\circ} \text{ de } \text{O}^{2-} = 8$$

$$\text{neutralidad eléctrica} \Rightarrow \text{cargas positivas} = \text{cargas negativas}$$
$$4 \times 4 = 8 \times 2$$

Al formarse la solución sólida no se altera el tamaño de la celda, de forma que el parámetro de red, a , tiene el mismo valor que en la estructura del CeO_2 puro:

$$a = \frac{4 \times (r_{\text{Ce}^{+4}} + r_{\text{O}^{-2}})}{\sqrt{3}} = \frac{4 \times (0.102 \times 10^{-9} + 0.132 \times 10^{-9})}{\sqrt{3}} = 5.404 \times 10^{-10} \text{ m}$$

y el volumen de la celda unitaria de lado a será:

$$V = a^3 = (5.404 \times 10^{-10})^3 = 1.578 \times 10^{-28} \text{ m}^3$$

Por otra parte, y de acuerdo con el enunciado, la solución sólida se forma sustituyendo alguno de los iones Ce^{+4} por iones Sm^{+3} , pero manteniendo todas las posiciones catiónicas, lo que implica que para que se conserve la neutralidad eléctrica del cristal, deben aparecer vacantes aniónicas.

En la celda unitaria de la solución sólida se debe cumplir que:

$$n^\circ \text{ de posiciones catiónicas} = 4 = n^\circ \text{ de } \text{Ce}^{+4} + n^\circ \text{ de } \text{Sm}^{+3}$$

$$\text{Si llamamos } x = n^\circ \text{ Ce}^{+4} \Rightarrow n^\circ \text{ Sm}^{+3} = 4 - x$$

Como tiene que conservarse la neutralidad eléctrica \Rightarrow cargas positivas = cargas negativas

$$\text{cargas positivas} = 4x + 3(4 - x)$$

$$\text{cargas negativas} = n^\circ \text{ de } \text{O}^{-2} \times 2 \Rightarrow n^\circ \text{ O}^{-2} = \frac{x + 12}{2} = 0.5x + 6$$

Sólo falta, por lo tanto, conocer el valor de x para resolver las dos cuestiones que plantea el problema.

De los datos del enunciado sabemos que la composición molar del Sm_2O_3 en la solución sólida es del 10%, y los moles se relacionan con el número de átomos. Tomando como base de cálculo la celda unitaria, tendremos que:

$$\text{fracción molar de } \text{Sm}_2\text{O}_3 = \frac{\text{moles de } \text{Sm}_2\text{O}_3}{\text{moles de } \text{Sm}_2\text{O}_3 + \text{moles de } \text{CeO}_2} = \frac{\frac{4-x}{2}}{\frac{4-x}{2} + x} = 0.10 \Rightarrow x = 3.273$$

En la celda de la solución sólida hay por tanto:

$$n^\circ \text{ Ce}^{+4} = x = 3.273$$

$$n^\circ \text{ Sm}^{+3} = 4 - x = 0.727$$

$$n^\circ \text{ O}^{-2} = 7.636$$

Es inmediato calcular la densidad de la solución sólida (base de cálculo la celda unitaria):

$$\rho = \frac{\text{masa}}{\text{volumen}} = \frac{\text{masa}_{\text{Ce}} + \text{masa}_{\text{Sm}} + \text{masa}_{\text{O}}}{a^3} = \frac{3.273 \times Mw_{\text{Ce}} + 0.727 \times Mw_{\text{Sm}} + 7.636 \times Mw_{\text{O}}}{a^3} \times \frac{1}{6.023 \times 10^{26}}$$
$$= 7260.55 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

Y el porcentaje de iones Ce^{+4} que han sido reemplazados por iones Sm^{+3} será:

$$\frac{\text{iones } \text{Ce}^{+4} \text{ sustituidos}}{\text{iones } \text{Ce}^{+4} \text{ iniciales}} \times 100 = \frac{0.727}{4} \times 100 = 18.17\%$$



Problema 2

Nombre:

Número de matrícula:

Se ha sintetizado en el laboratorio un nuevo material semiconductor A y para identificar su estructura se llevan a cabo varios experimentos:

1. se mide la resistividad eléctrica de la muestra en un sistema de referencia cuyos ejes no están orientados como los ejes convencionales y se obtiene (escrita ρ como matriz):

$$\rho = \begin{pmatrix} 4.5 & 0 & 0 \\ 0 & 14.183 & 5.298 \\ 0 & 5.298 & 19.817 \end{pmatrix} \Omega.m$$

2. se someten las muestras de A a un estado de esfuerzo (o tensión mecánica) hidrostático y se observa que sí producen una señal eléctrica (dipolo macroscópico). El estado de tensión hidrostático es:

$$\underline{\underline{\tau}} = p\underline{\underline{\delta}}$$

3. cuando se prepara una muestra de A en forma de cubo, con las caras cortadas perpendicularmente a las direcciones principales de la conductividad, y se la somete a cualquier ensayo mecánico de tracción o compresión uniaxial sobre cualquier par de caras, se observa que el cubo se deforma sólo longitudinalmente y nunca a cortadura (cizalla).

Usando la información disponible,

- determinar las resistividades eléctricas principales del material (es decir, medidas en las direcciones de los ejes principales).
- determinar las direcciones de estos ejes principales del material, (es decir, dar vectores unitarios en estas direcciones expresados en el sistema de referencia en que se ha medido la resistividad eléctrica).
- basándose sólo en los resultados obtenidos en los dos apartados anteriores (sin usar la información dada en los puntos 2 y 3 del enunciado), determinar a qué sistema o sistemas cristalográficos puede pertenecer A.
- basándose además en la información dada en los puntos 2 y 3 del enunciado, determinar a qué clase o clases cristalográficas puede pertenecer A.
- expresar la resistividad eléctrica de A en los ejes convencionales del sistema al que pertenece la clase o clases cristalográficas obtenidas en el apartado anterior.

(45 minutos, 3 puntos)



Sol.: las direcciones principales y las resistividades principales se obtienen diagonalizando la matriz de resistividad. Los valores propios (resistividades principales) son:

$$\rho_{\text{principales}_{1,1}} = 4.5$$

$$\rho_{\text{principales}_{2,2}} = 23 \quad \text{W.m}$$

$$\rho_{\text{principales}_{3,3}} = 11$$

Y las direcciones principales están dadas por los vectores propios unitarios:

$$\delta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\delta_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.515 \\ 0.857 \end{pmatrix}$$

$$\delta_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -0.857 \\ 0.515 \end{pmatrix}$$

Por tanto, basándonos sólo en estos resultados (tres valores distintos para las resistividades principales), A puede ser triclinico, monoclinico u ortorrómbico.

Por otro lado, si A reacciona a esfuerzo (tensión mecánica) hidrostático, debe pertenecer a una de las diez clases polares, de las cuales sólo las siguientes pertenecen a los sistemas triclinico, monoclinico u ortorrómbico: **1, 2, m, mm2**.

Estas clases también aparecen directamente en la tabla de estructuras de propiedades de 1er orden (ver encabezamiento de la lista de estructuras para propiedades de 1er orden, pág. 7, 02_01_02.pdf).

Una tercera posibilidad es comprobar cuál de las cinco clases piezoeléctricas triclinicas, monoclinicas u ortorrómbicas producen una señal cuando se les aplica un esfuerzo hidrostático. Usando notación de Voigt, la estructura del esfuerzo hidrostático es:

$$\text{str}(\underline{\underline{p}}\delta) = \begin{bmatrix} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}$$

Realizando el producto (ley constitutiva) del efecto piezoeléctrico directo en notación de Voigt con las estructuras de los módulos piezoeléctricos de cada clase se obtiene: $\underline{\underline{P}} = \underline{\underline{d}} : \underline{\underline{\tau}} = \underline{\underline{d}} : \underline{\underline{p}}\delta$

clase 1:

$$\begin{bmatrix} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{bmatrix}$$

clase 2:

$$\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \bullet & \cdot & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \cdot & \bullet & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \bullet & \cdot & \bullet \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot \\ \bullet \\ \cdot \end{bmatrix}$$

clase m :

$$\begin{bmatrix} \bullet & \bullet & \bullet & \cdot & \bullet & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \bullet & \cdot & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \cdot & \bullet & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bullet \\ \bullet \\ \cdot \end{bmatrix}$$

clase 222 :

$$\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \bullet & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \bullet & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \bullet \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}$$

clase mm2 :

$$\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \bullet & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \bullet & \cdot & \cdot \\ \bullet & \bullet & \bullet & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \bullet \end{bmatrix}$$

Se comprueba que de estas cinco clases, la clase 222 (ortorrómbica) no produce señal eléctrica al someterla a esfuerzo hidrostático, y por tanto queda descartada.

Por último, la condición de responder sólo con deformación longitudinal a esfuerzo longitudinal uniaxial en cualquier eje implica que la estructura de la complianza elástica debe tener los bloques no diagonales vacíos (ver problema 09_02_02). Las estructuras para las cuatro clases que aún no han sido descartadas son:

$$\begin{bmatrix} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ & & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ & & & \bullet & \bullet & \bullet \\ & & & & \bullet & \bullet \\ & & & & & \bullet \end{bmatrix}$$

triclinicas (todas, y en particular, la clase 1) descartadas

$$\begin{bmatrix} \bullet & \bullet & \bullet & \cdot & \bullet & \cdot \\ & \bullet & \bullet & \cdot & \bullet & \cdot \\ & & \bullet & \cdot & \bullet & \cdot \\ & & & \bullet & \cdot & \bullet \\ & & & & \bullet & \cdot \\ & & & & & \bullet \end{bmatrix}$$

monoclinicas (todas, y en particular, las clases 2 y m) descartadas

$$\begin{bmatrix} \bullet & \bullet & \bullet & \cdot & \cdot & \cdot \\ & \bullet & \bullet & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & \bullet & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & \bullet & \cdot & \cdot \\ & & & & \bullet & \cdot \\ & & & & & \bullet \end{bmatrix}$$

ortorrómbicas (todas, y en particular, la clase mm2) aceptables, tienen vacíos los bloques fuera de la diagonal.

De estas cuatro clases restantes, la única que tiene los bloques no diagonales vacíos, y que por tanto es compatible con todos los datos experimentales disponibles, es la **mm2** (ortorrómbica) que es a la que debe pertenecer el material A.

Para el sistema ortorrómbico, los ejes convencionales coinciden con las direcciones principales. Por tanto, la resistividad eléctrica de A en los ejes convencionales del sistema es diagonal, con las resistividades principales en la diagonal.

Aunque no es necesario, puede comprobarse expresando la resistividad en el sistema definido por las direcciones principales. Para esto se usa la matriz L de transformación que contiene, por

filas, los vectores unitarios en las direcciones principales (vectores propios):

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.515 & 0.857 \\ 0 & -0.857 & 0.515 \end{pmatrix}$$

La resistividad expresada en estos nuevos ejes, que son los eje convencionales, es entonces:

$$L \cdot \rho \cdot L^T = \begin{pmatrix} 4.5 & 0 & 0 \\ 0 & 23 & 0 \\ 0 & 0 & 11 \end{pmatrix} \quad \text{W.m}$$

