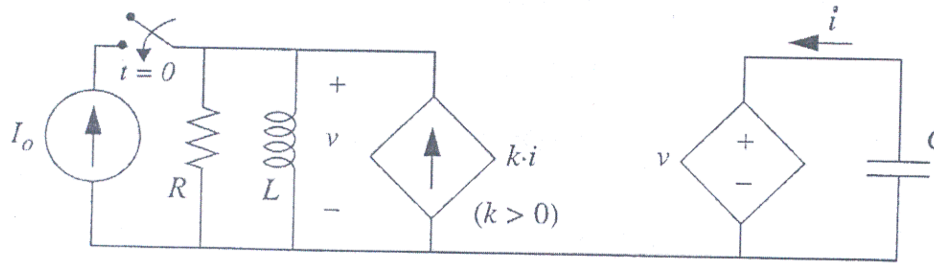
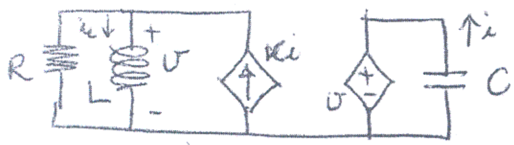
Dic 03/04

9.-
Bol. 3

P1.- Considere que en el circuito de la figura la llave lleva abierta el tiempo suficiente como para que se haya alcanzado un estado estacionario.



1.a) Determine la intensidad y la caída de tensión en el condensador y en la bobina un instante antes de cerrar la llave ($t = 0^-$). Razone la respuesta.



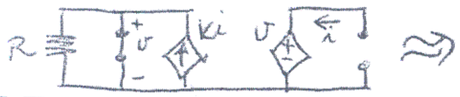
$K>0, \quad t<0$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{v}{R} + i_L = Ki \\ v = L\frac{di_L}{dt} \; ; \; i = -C\frac{dv}{dt} \end{array}\right\} \frac{L}{R}\frac{di_L}{dt} + i_L = -KLC\frac{d^2 i_L}{dt^2}$$

$$KLC\frac{d^2 i_L}{dt^2} + \frac{L}{R}\frac{di_L}{dt} + i_L = 0$$

$$s_{1,2} = \frac{1}{2KLC}\left[-\frac{L}{R} \pm \sqrt{\left(\frac{L}{R}\right)^2 - 4KLC}\right] \Longrightarrow$$ Si $K>0$, $s_{1,2}$ están en el semiplano izqdo. $\Rightarrow$ Sistema estable $\Rightarrow$ Efectivamente se llega al estacionario

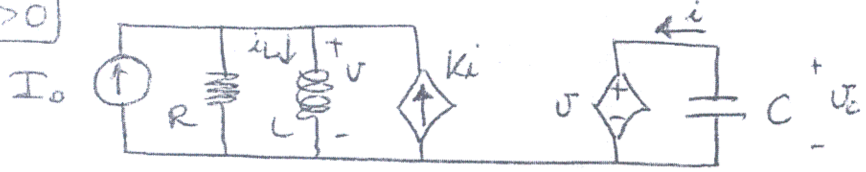
En $t=0^-$, si se ha alcanzado el estacionario:



$\approx\!>$ $\boxed{\begin{array}{l|l} v_L(0^-) = 0 & i_C(0^-) = 0 \\ i_L(0^-) = 0 & v_C(0^-) = 0 \end{array}}$

1.b) Suponiendo que en $t = 0$ se cierra la llave, determine la ecuación diferencial que rige el comportamiento de la intensidad en la bobina para $t>0$.

$\boxed{t>0}$



con $K>0$; $i_L(0^-)=0$; $v_C(0^-)=0$

$$\left.\begin{array}{l} I_o + Ki = \frac{v}{R} + i_L \\ v = L\frac{di_L}{dt} \\ i = -C\frac{dv}{dt} \end{array}\right\} \quad I_o - KLC\frac{d^2 i_L}{dt^2} = \frac{L}{R}\frac{di_L}{dt} + i_L$$

$$\boxed{KLC\frac{d^2 i_L}{dt^2} + \frac{L}{R}\frac{di_L}{dt} + i_L = I_o}$$

con $i_L(0^-)=0$
$i_L(0^-)=0$

1.c) Determine el tipo de respuesta para $t > 0$ en función de k.
¿Qué diferencias habría en el comportamiento si k pudiera tomar valores negativos?

Partiendo de la ec. diferencial anterior:

$$kLC s^2 + \frac{L}{R} s + 1 = 0 \Longrightarrow s_{1,2} = \underbrace{\frac{1}{2kLC}}_{>0} \left[-\frac{L}{R} \pm \underbrace{\sqrt{\left(\frac{L}{R}\right)^2 - 4kLC}}_{} \right]$$

Si $k>0 \longrightarrow$

$$\left(\frac{L}{R}\right)^2 = 4kLC \longrightarrow k = \frac{L}{4R^2C}$$

- Si $0 < k < \frac{L}{4R^2C} \Longrightarrow s_{1,2}$ reales distintas y en semiplano izqdo $\Longrightarrow$ Respuesta sobreamortiguada
- Si $k = \frac{L}{4R^2C} \Longrightarrow s_{1,2}$ reales e iguales y en semiplano izqdo $\Longrightarrow$ Respuesta críticamente amortiguada
  $\left(s_{1,2} = -\frac{\cancel{L}}{2k\cancel{L}RC} = -\frac{1}{2R\cancel{C}} \frac{4R^{\cancel{2}}\cancel{C}}{L} = -\frac{2R}{L} \right)$
- Si $k > \frac{L}{4R^2C} \Longrightarrow s_{1,2}$ complejas conjugadas y con parte real negativa (semiplano izqdo) $\Longrightarrow$ Respuesta subamortig.

En cualquiera de los casos anteriores tendríamos que las exponenciales convergerían a 0 para $t \to \infty$ y $i_L(\infty) = I_0$. Se anularía la componente natural de $i_L(t)$ y sólo quedaría componente forzada.

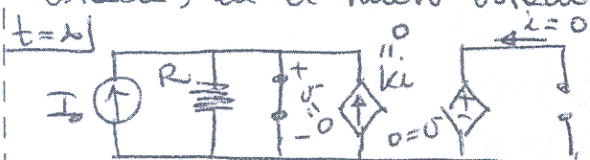
- Si $k<0 \longrightarrow s_{1,2} = \underbrace{\frac{1}{2kLC}}_{<0} \left[-\frac{L}{R} \pm \underbrace{\sqrt{\left(\frac{L}{R}\right)^2 - 4kLC}}_{>0} \right] \Longrightarrow$ Una de las raíces está en el semiplano derecho y el sistema sería INESTABLE

[Nótese que si $k=0$, la dinámica sería de 1er orden para $i_L(t)$

I_0  $\left(\frac{L}{R}\frac{di_L}{dt} + i_L = I_0 \right)$]

1.d) Determine la energía almacenada en la bobina y en el condensador cuando se haya llegado al nuevo estado estacionario (asumiendo $k > 0$).

Dado que si $k>0$, independientemente del tipo de respuesta, ésta es estable, en el nuevo estacionario



$+v_C(\infty) = 0$
$-$

$i_L(\infty) = I_0$

$$\boxed{E_L(\infty) = \frac{1}{2} L I_0^2}$$

$$\boxed{E_C(\infty) = \frac{1}{2} C \cancel{v_C^2(\infty)}_{0} = \boxed{0}}$$