

Tema 2

Circuitos Dinámicos de Primer Orden

“A nadie en su sano juicio se le habría ocurrido preparar entonces todos estos componentes (transistores, resistores y condensadores) a partir de un semiconductor, que además de no ser el mejor material para ello, era increíblemente caro”

**Jack Kilby, Co-Inventor del Circuito Integrado
Premio Nobel de Física, Año 2000**

1. Introducción
2. Circuitos Dinámicos de Primer y Segundo Orden
3. Circuitos Lineales de Primer Orden con Excitaciones en DC
4. Conectando Resistores No-Lineales a Condensadores y Bobinas
5. Circuitos de Primer Orden con Excitaciones Exponenciales

1. Introducción

En el Capítulo anterior se han estudiado circuitos formados a base de interconectar elementos resistivos¹. Estos circuitos *resistivos* quedan descritos mediante ecuaciones *algebraicas*, que pueden ser lineales o no-lineales dependiendo de la naturaleza de los componentes del circuito, pero en las que no aparece ningún operador diferencial ni integral.

De lo expuesto en los Capítulos anteriores sabemos ya que no existe ningún componente real que sea puramente resistivo. Pero si existiesen tales componentes, y si los conectáramos para construir un circuito resistivo puro, su respuesta dependería sólo de la *forma* de las excitaciones, y no del ritmo de cambio de éstas con el tiempo; esto es, si excitáramos tal ente ideal con una señal sinusoidal de 1 V obtendríamos la misma respuesta para una frecuencia de 1 Hz, o de 1 MHz, o de 1 GHz, ...

Por contra, el comportamiento de un circuito dinámico queda descrito mediante ecuaciones *diferenciales*, lo que hace que la respuesta dependa tanto de la forma como del ritmo de cambio de las excitaciones. Aunque la excitación mantenga su forma, la respuesta cambiaría al cambiar el ritmo de cambio de tal excitación.

Otra diferencia importante entre los circuitos resistivos y dinámicos es que los últimos tienen *memoria*. Esto significa que si aplicamos una excitación en un instante determinado, sea $t = 0$, la respuesta a partir de ese instante depende tanto de la propia excitación que estamos aplicando como de la “historia” del circuito, historia que se resume en forma de una energía “potencial” almacenada en el circuito justo antes de aplicar la excitación, en el instante $t = 0_-$.

Ya hemos dicho que los circuitos resistivos puros son entes ideales. Todo circuito real es dinámico. Sin embargo, en algunos circuitos, y dependiendo de las excitaciones a que les someta, los fenómenos dinámicos pueden ser irrelevantes por ocurrir a mucha más velocidad que las propias

¹ Denominamos resistivo a cualquier circuito formado por la interconexión de sólo componentes resistivos: resistores, fuentes controladas con funciones de control constantes y fuentes independientes de tensión e intensidad usadas para suministrar excitaciones.

excitaciones, permitiendo así el uso de una descripción algebraica aproximada para simplificar el problema.

Sea, por ejemplo, un circuito formado por dos resistores de carbón “iguales” conectados en serie con un generador de tensión. Idealmente, este circuito quedaría modelado por la conexión en serie de una fuente de tensión, representando al generador, y dos resistores lineales de la misma resistencia, representando a los resistores de carbón. Supongamos que el generador de tensión produce una forma de onda $v_s(t)$ cuadrada con período T . El modelo resistivo ideal preve que la respuesta $v_o(t)$ es una onda también cuadrada, del mismo período que la señal de entrada, y con la mitad de amplitud que ésta.

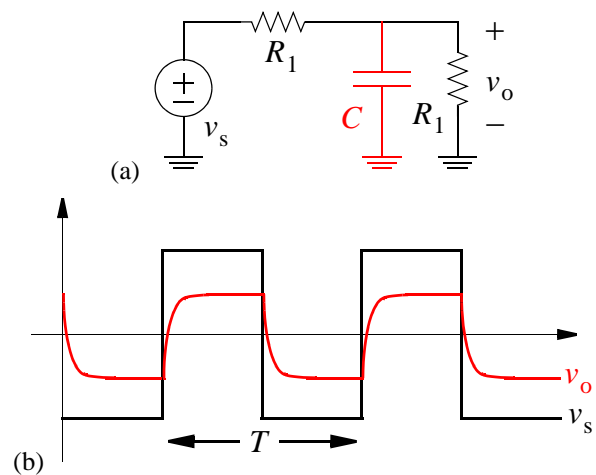


Figura 1 Parásitos dinámicos en un divisor de tensiones resistivo.

En el laboratorio podemos observar que esta predicción es buena mientras T sea lo suficientemente grande. Sin embargo, al disminuir T , notaremos que $v_o(t)$ se parece cada vez menos a una señal cuadrada, adoptando la forma que se muestra en la Figura 1(b). Veremos que la señal de salida se “resiste” a seguir los rápidos cambios que se producen en la de entrada; necesita algún tiempo para reaccionar. Esta “inercia” se debe a la presencia de parásitos dinámicos que no están contemplados en el modelo resistivo ideal.

Para explicar la nueva forma que observamos en el laboratorio necesitamos completar el modelo, añadiendo elementos que representen la acción de estos parásitos dinámicos. En primera aproximación podemos modelarlos mediante el condensador mostrado en la Figura 1(a). La presencia de este condensador justifica el que las transiciones entre el nivel alto y el bajo no sean instantáneas; y que sean tanto más notorias mientras menor sea T . En cualquier caso, si T llegara a ser muy pequeño, probablemente necesitaremos añadir otros condensadores y/o bobinas para modelar mejor el comportamiento real.

En el circuito del ejemplo anterior el comportamiento dinámico está producido por el condensador. De hecho la presencia de elementos almacenadores de energía, también denominados *reactivos* en el Capítulo 1, bobinas y/o condensadores, es una condición necesaria para que un circuito sea dinámico. Este Capítulo se dedica, pues, al estudio de circuitos que contengan elementos reactivos. Veremos que estos elementos reactivos son los responsables de que la respuesta de un circuito cambie al cambiar la frecuencia de la excitación, así como de guardar memoria de la evolución previa. Consideraremos sólo circuitos que contengan como máximo dos elementos reactivos, que supondremos lineales. Sin embargo, los restantes elementos de los circuitos bajo estudio podrán ser lineales o no-lineales.

2. Circuitos Dinámicos de Primer y Segundo Orden

Recordemos antes que nada las ecuaciones constitutivas de un condensador lineal y una bobina lineal, respectivamente,

$$\begin{array}{cc}
 \begin{array}{c} i_C \downarrow \\ + \\ v_C \\ - \\ C \end{array} & \boxed{C \frac{dv_C}{dt} = i_C} & \begin{array}{c} i_L \downarrow \\ + \\ v_L \\ - \\ L \end{array} & \boxed{L \frac{di_L}{dt} = v_L}
 \end{array} \quad (1)$$

Estas ecuaciones muestran que la intensidad que circula por el condensador y la tensión que cae en la bobina se obtienen derivando en el tiempo la tensión del condensador y la intensidad de la bobina, respectivamente. El hecho de que las variables eléctricas se relacionen en cada caso a través de una derivada temporal, induce comportamientos de tipo dinámico en los circuitos que se forman conectando condensadores y/o bobinas con subcircuitos resistivos, tales como los mostrados en la Figura 2, donde en cada caso el subcircuito resistivo se ha representado por una caja negra denominada genéricamente \aleph .

2.1. Circuitos de Primer Orden

Todo circuito que contenga un único elemento reactivo, sea bobina o condensador, y salvo en los casos triviales donde la influencia de tal elemento pueda descartarse por estar conectado en serie con una fuente ideal de intensidad o en paralelo con una fuente ideal de tensión, es un circuito dinámico de *primer orden*; esto es, un circuito cuyo comportamiento queda descrito mediante una ecuación diferencial de orden uno,

$$\Gamma \frac{dx}{dt} = -f[x(t), \varepsilon(t)] \quad (2)$$

donde $f(\bullet)$ es en general no-lineal y $\varepsilon(t)$ representa una señal de excitación que da cuenta de la posibilidad de que \aleph incluya una o varias fuentes independientes. Recuerde el lector que nos hemos limitado a considerar elementos reactivos lineales. Así pues, podemos formar un circuito dinámico de primer orden bien conectando un condensador lineal a una red resistiva de dos terminales – Figura 2(a) – o conectando una bobina lineal a una red resistiva con dos terminales – Figura 2(b). Suponga que la red resistiva de la Figura 2(a) es controlada por tensión y tal que $i = f[v(t), \varepsilon(t)]$; y que la de la Figura 2(b) es controlada por intensidad y tal que $v = f[i(t), \varepsilon(t)]$. En tal caso es sencillo obtener:

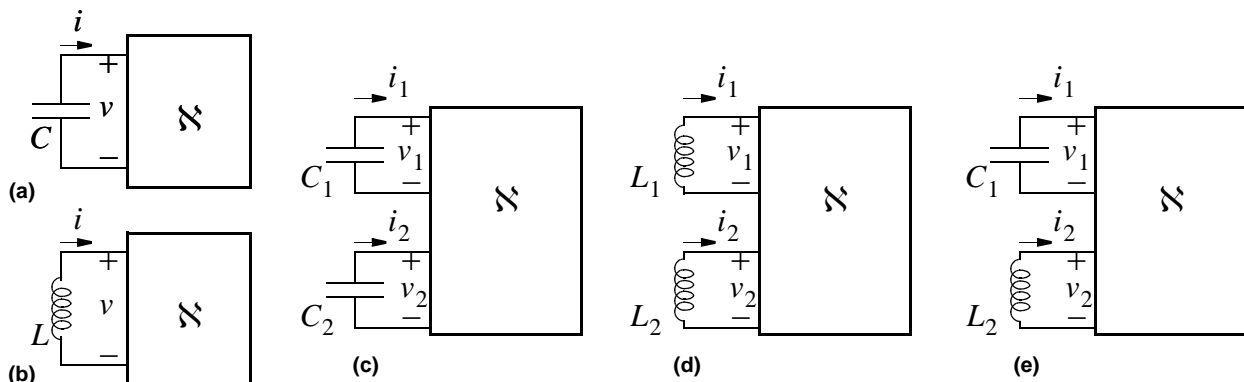


Figura 2 Representación conceptual de circuitos dinámicos de primer y segundo orden.

$$C \frac{dv}{dt} = -i = -f[v(t), \varepsilon(t)] \quad , \text{ para la Figura 2(a)}$$

$$L \frac{di}{dt} = -v = -f[i(t), \varepsilon(t)] \quad , \text{ para la Figura 2(b)}$$
(3)

que se corresponden con la forma genérica en (2). Descartamos de momento el que la red resistiva sea controlada por intensidad para el caso del condensador o por tensión para el de la bobina.

2.2. Circuitos de Segundo Orden

Los circuitos de *segundo orden* deben contener dos elementos almacenadores de energía: dos condensadores, dos bobinas, o un condensador y una bobina. Podemos formar, pues, circuitos de segundo orden conectado estos elementos en cualquiera de las configuraciones de las Figuras 2(c), (d) o (e). Suponiendo que el circuito resistivo de la Figura 2(c) es controlado por tensión, tal que;

$$i_1 = f_1(v_1, v_2, \varepsilon)$$

$$i_2 = f_2(v_1, v_2, \varepsilon)$$
(4)

que el de la Figura 2(d) es controlado por intensidad,

$$v_1 = f_1(i_1, i_2, \varepsilon)$$

$$v_2 = f_2(i_1, i_2, \varepsilon)$$
(5)

y que el de la Figura 2(e) tiene una descripción híbrida,

$$i_1 = f_1(v_1, i_2, \varepsilon)$$

$$v_2 = f_2(v_1, i_2, \varepsilon)$$
(6)

es sencillo obtener la siguiente descripción genérica válida para estos tres circuitos:

$$\Gamma_1 \frac{dx_1}{dt} = -f_1(x_1, x_2, \varepsilon)$$

$$\Gamma_2 \frac{dx_2}{dt} = -f_2(x_1, x_2, \varepsilon)$$
(7)

Se deja como ejercicio para el lector el relacionar los parámetros Γ_1 y Γ_2 de esta expresión genérica con las capacidades e inductancias de los circuitos de las Figuras 2(c), (d) y (e) respectivamente. Al igual que en los circuitos de primer orden descartamos de momento el considerar redes resistivas cuyas características estén controladas de manera diferente a las recogidas en (4), (5) y (6) respectivamente.

Conviene insistir en que la presencia de dos elementos almacenadores de energía es condición necesaria pero no suficiente para un comportamiento dinámico de segundo orden. Puede haber circuitos con dos elementos almacenadores de energía cuyo comportamiento queda descrito mediante una ecuación diferencial de orden uno; o incluso mediante una ecuación algebraica. En la Figura 3 se muestra un ejemplo de cada caso. En el circuito de la Figura 3(a) el comportamiento queda descrito mediante una ecuación diferencial de orden uno; y mediante una ecuación algebraica en el caso de la Figura 3(b).

En general, siempre que dos elementos reactivos de un mismo tipo aparezcan conectados en serie o en paralelo pueden ser sustituidos por un elemento reactivo equivalente, reduciéndose así el orden dinámico en uno. Por otra parte, si ese equivalente está conectado en serie con una fuente de intensidad o en paralelo con una fuente de tensión el comportamiento pasa a ser algebraico, aunque puede depender de la energía inicial almacenada en los elementos reactivos; esto es, aunque la dinámica desaparezca, la memoria puede conservarse.

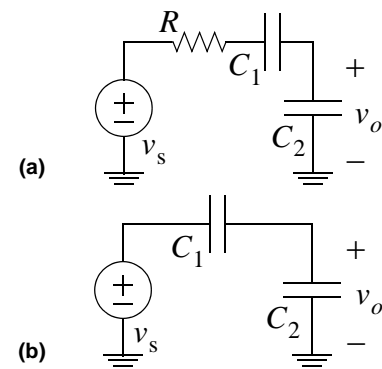


Figura 3 Ejemplos de circuitos con orden dinámico inferior a dos.

2.3. Conexión en Serie y en Paralelo de Elementos Reactivos Lineales

Ya hemos dicho que una característica distintiva de los circuitos que contienen elementos reactivos es que guardan memoria de su evolución previa. Matemáticamente esta memoria se asocia a las condiciones iniciales del sistema de ecuaciones diferenciales usado para describir el comportamiento del circuito. Sin embargo, la memoria de los elementos reactivos queda más claramente de manifiesto cuando se considera la forma integral de sus ecuaciones constitutivas.

Supongamos que en un condensador y en una bobina lineal, respectivamente, empezamos a “observar” el comportamiento del circuito a partir del instante $t = 0$, y que en el instante $t = 0_-$ el condensador tiene una tensión $v_C(0_-)$, mientras que la bobina tiene una intensidad $i_L(0_-)$ con las polaridades indicadas en la Figura 4(a). Integrando las expresiones en (1) a partir del instante $t = 0$ se obtienen las siguientes formas integrales para las ecuaciones constitutivas de una bobina y un condensador respectivamente:

$$\begin{aligned} i_L &= \frac{1}{L} \int_0^t v_L(\tau) \cdot d\tau + i_L(0_-) \\ v_C &= \frac{1}{C} \int_0^t i_C(\tau) \cdot d\tau + v_C(0_-) \end{aligned} \quad (8)$$

Desde el punto de vista circuital estas ecuaciones son equivalentes a las que se obtienen, respectivamente, con los circuitos de la Figura 4(b) donde se supone que los elementos reactivos están “relajados”; esto es, que no tienen energía almacenada. Lo interesante de estas formas integrales es que muestran explícitamente la memoria de los elementos. En el caso de la bobina, tal memoria se manifiesta como una fuente de intensidad constante $i_L(0_-)$; en el del condensador como una fuente de tensión constante $v_C(0_-)$.

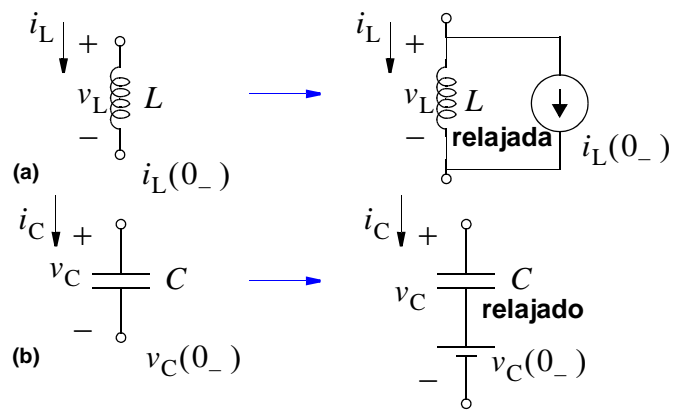


Figura 4 Representación circuital de condiciones iniciales en elementos reactivos.

Conexión en Condensadores en Paralelo

Consideremos el circuito de la Figura 5 formado por la conexión de N condensadores en paralelo,

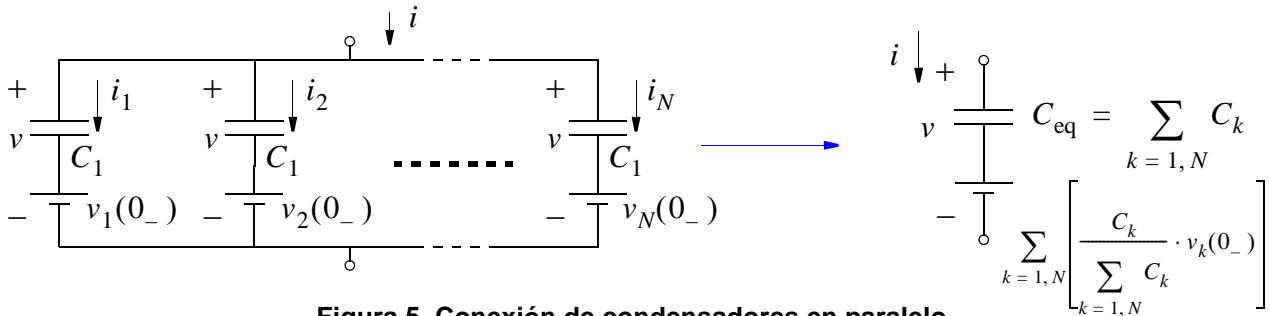


Figura 5 Conexión de condensadores en paralelo.

cada uno con su condición inicial y representado mediante su equivalente consistente en el condensador relajado conectado en serie con una fuente independiente de tensión. Al estar conectados en paralelo todos tienen la misma tensión v , aunque cada uno puede tener una tensión inicial distinta², mientras que la intensidad del conjunto es la suma de intensidades. Representando la ecuación constitutiva de cada condensador por la forma integral en (8), multiplicando cada expresión por la capacidad del correspondiente condensador, sumando las expresiones resultantes y aplicando la ley de Kirchhoff de las intensidades para obtener la intensidad total, resulta:

$$v \cdot \sum_{k=1, N} C_k = \int_0^t \sum_{k=1, N} i_k(\tau) \cdot d\tau + \sum_{k=1, N} [C_k \cdot v_k(0_-)] = \int_0^t i(\tau) \cdot d\tau + \sum_{k=1, N} [C_k \cdot v_k(0_-)] \quad (9)$$

de donde se obtiene:

$$v = \frac{1}{\sum_{k=1, N} C_k} \int_0^t i(\tau) \cdot d\tau + \sum_{k=1, N} \left[\frac{C_k}{\sum_{k=1, N} C_k} \cdot v_k(0_-) \right] \quad (10)$$

La conexión en paralelo de condensadores equivale, pues, a un condensador cuya capacidad es la suma de las capacidades de los condensadores componentes, y cuya tensión inicial es una

² Esto significa que los condensadores estaban físicamente separados antes del instante $t = 0$, en particular en el instante $t = 0_-$, y que la conexión en paralelo se establece justamente en $t = 0$.

combinación lineal de las tensiones iniciales de éstos componentes; cada tensión multiplicada por la capacidad correspondiente y dividida por la suma de todas las capacidades ³.

Aplicación

La técnica de análisis usada para el equivalente anterior se puede aplicar al cálculo de la variación de la tensión en el terminal común del circuito con N condensadores mostrado en la Figura 6. En este circuito cada condensador se carga a una tensión E_{k-} , $1 \leq k \leq N$ durante el tiempo que transcurre hasta el instante $t = -T$, y permanece cargado hasta el instante de tiempo $t = 0$. En este instante de tiempo se cambia la tensión en

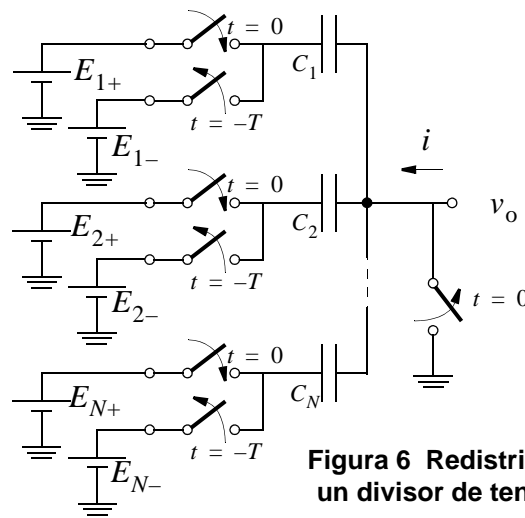


Figura 6 Redistribución de carga en un divisor de tensiones capacitivo.

los terminales libres de los condensadores, desde el valor E_{k-} , $1 \leq k \leq N$, hasta el valor E_{k+} , $1 \leq k \leq N$, al mismo tiempo que se deja el terminal común flotante. Al estar este terminal flotante, la intensidad total i es nula. Sin embargo, la intensidad en cada condensador no lo es, y el condensador k – esimo queda descrito por la siguiente ecuación constitutiva en forma integral,

$$E_{k+} - v_o = \frac{1}{C_k} \int_0^t i_k(\tau) \cdot d\tau + E_{k-} \quad , 1 \leq k \leq N \quad (11)$$

Multiplicando cada una de estas expresiones por la correspondiente capacidad C_k , sumando las N ecuaciones resultantes, y agrupando términos se obtiene,

$$\sum_{k=1, N} [C_k \cdot E_{k+}] - v_o \cdot \sum_{k=1, N} C_k = \int_0^t \sum_{k=1, N} i_k(\tau) \cdot d\tau + \sum_{k=1, N} [C_k \cdot E_{k-}] \quad (12)$$

De aquí y dado que la intensidad total es nula, se obtiene la siguiente expresión para v_o :

$$v_o = \frac{\sum_{k=1, N} [C_k \cdot (E_{k+} - E_{k-})]}{\sum_{k=1, N} C_k} \quad (13)$$

Conexión de Condensadores en Serie

En este caso, Figura 7, la intensidad es común a todos los condensadores mientras que la tensión del conjunto es la suma de las tensiones de los componentes. Usando de nuevo las formas integrales de

³ Físicamente esta tensión inicial equivalente no existe en el instante $t = 0_-$, ya que en ese instante los condensadores están aún desconectados y cada uno tiene una tensión distinta. La tensión equivalente se formaría justo tras conectar los condensadores, y como resultado de un proceso de redistribución de carga entre ellos. Idealmente este proceso se produce a velocidad infinitamente alta, instantáneamente, de manera que en $t = 0_+$ la tensión equivalente está ya formada. En cualquier caso, que la tensión equivalente esté definida en $t = 0_-$ o en $t = 0_+$ no cambia el resultado de los cálculos.

las ecuaciones constitutivas de los condensadores, sumando estas ecuaciones y sacando como factor común la integral de la intensidad se obtiene:

$$v = \sum_{k=1, N} v_k = \left[\sum_{k=1, N} \frac{1}{C_k} \right] \cdot \int_0^t i(\tau) \cdot d\tau + \sum_{k=1, N} v_k(0_-) \quad (14)$$

La conexión en serie de condensadores equivale, pues, a un condensador cuya capacidad se calcula a partir de las capacidades de los condensadores componentes como:

$$C_{eq} = \frac{1}{\sum_{k=1, N} \frac{1}{C_k}} \quad (15)$$

y cuya tensión inicial es la suma de las tensiones iniciales de éstos componentes.

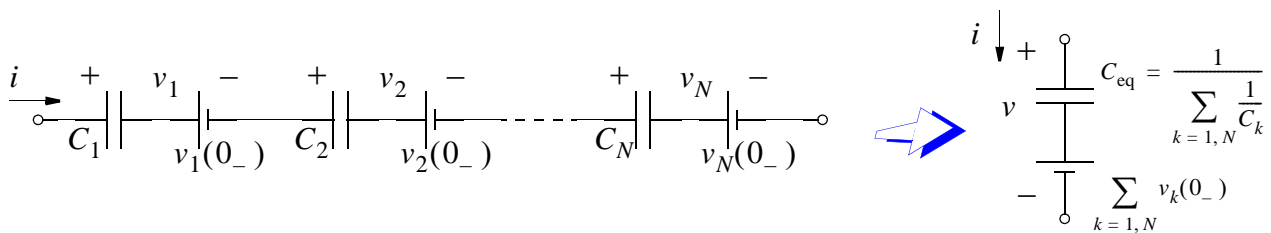


Figura 7 Conexión en condensadores en serie.

Conexión de Bobinas en Serie y en Paralelo

Los equivalentes de las bobinas se pueden derivar sin necesidad de cálculo observando la dualidad⁴ existente entre las ecuaciones constitutivas de condensadores y bobinas; en las bobinas la tensión juega el papel correspondiente a la tensión en los condensadores, y viceversa. Por tanto, para la conexión en serie de bobinas se obtiene,

$$L_{eq} = \sum_{k=1, N} L_k$$

$$i(0)_|_{eq} = \sum_{k=1, N} \left[\frac{L_k}{\sum L_k} \cdot i_k(0_-) \right] \quad (16)$$

mientras que para la conexión en paralelo de bobinas,

$$L_{eq} = \frac{1}{\sum_{k=1, N} \frac{1}{L_k}} \quad (17)$$

$$i(0)_|_{eq} = \sum_{k=1, N} i_k(0_-)$$

⁴ El concepto de dualidad aparece de forma reiterativa en este y otros Capítulos. Informalmente, diremos que dos circuitos son duales si están descritos mediante ecuaciones matemáticamente idénticas, aunque implicando variables físicas distintas. Por ejemplo, una conexión de N resistores lineales en paralelo es dual de una conexión de N resistores lineales en serie intercambiando resistencias por conductancias y tensiones por intensidades. También, una conexión de N bobinas en serie es dual de una conexión de N condensadores en paralelo intercambiando tensiones por intensidades y capacidades por inductancias. Asimismo, el circuito de la Figura 2(a) es dual del de la Figura 2(b) intercambiando capacidad por inductancia y tensión por intensidad.

3. Circuitos Lineales de Primer Orden con Excitaciones en DC

Supongamos que el circuito resistivo \mathcal{N} de la Figura 2 contiene únicamente resistores lineales, fuentes controladas lineales y fuentes independientes constantes. Su característica $i - v$ es, por tanto, una función *afín*⁵, y el comportamiento del circuito se puede representar bien por el equivalente Thévenin de la Figura 8(a) o por el equivalente Norton de la Figura 8(b), cuyas características $i - v$ coinciden si $J_f = E_f/R$.

Aunque los dos circuitos pueden ser analizados usando tanto el equivalente Thévenin como el Norton, conviene usar aquél para el condensador, y el otro para la bobina. En tal caso, los comportamientos dinámicos de los circuitos de la Figura 8 quedan descritos por las siguientes ecuaciones diferenciales de primer orden, respectivamente,

$$C \frac{dv}{dt} = i = -\frac{v - E_f}{R} \quad , \text{ para la Figura 8(a)} \quad (18)$$

$$L \frac{di}{dt} = v = -R \cdot (i - J_f) \quad , \text{ para la Figura 8(b)}$$

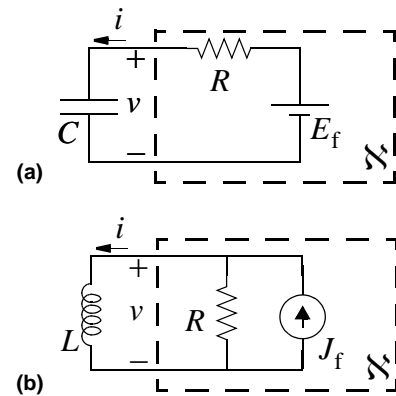


Figura 8 Circuitos dinámicos lineales de primer orden.

Nuestro objetivo es estudiar la solución de estas ecuaciones a partir del instante $t = 0$. Esta solución es una forma de onda, de tensión $v(t)$ para el circuito de la Figura 8(a) y de intensidad $i(t)$ para el de la Figura 8(b), cuyo cálculo requiere el valor de la condición inicial de la correspondiente variable. Pensando en términos de excitaciones y de respuestas, la forma de onda que pretendemos obtener define la respuesta de cualquiera de los circuitos mostrados en la Figura 9(a) y (b) para las excitaciones en DC mostradas en cada caso. Por una parte, la excitación aplicada mientras $t < 0$ crea un *estado* inicial en el elemento almacenador de energía, estado que se manifiesta en la forma de onda obtenida para $t > 0$; por otra parte, la excitación aplicada mientras $t > 0$ influye obviamente también en dicha forma de onda. La respuesta del circuito tiene por lo tanto dos componentes:

- una debida al estado inicial del elemento almacenador de energía, llamada *respuesta al estado*,
- otra debida a la excitación que se está aplicando al circuito en el intervalo temporal donde se está midiendo su respuesta, llamada *respuesta a la entrada*.

3.1. Solución General: Respuesta al Estado y Respuesta a la Entrada

Las dos expresiones mostradas en (18) se pueden representar mediante la siguiente ecuación genérica de primer orden,

$$\Gamma \frac{dx}{dt} = -m \cdot (x - X_f) \quad (19)$$

con $t \geq 0$ y $x(0_-) \equiv X_0$

⁵ Afín es una función del tipo $f(x) = a \cdot x + b$, esto es, una línea recta que no pasa por el origen.

De los cursos de matemáticas sabemos que la solución de una ecuación de este tipo puede calcularse sumando la solución general de la homogénea y una solución particular de la no-homogénea para obtener,

$$x(t) = X_f + (X_0 - X_f) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (20)$$

donde τ es la constante de tiempo de la solución, dada por la siguiente ecuación,

$$\tau = \frac{\Gamma}{m} = \begin{cases} R \cdot C & , \text{ para la Figura 9(a)} \\ \frac{L}{R} & , \text{ para la Figura 9(b)} \end{cases} \quad (21)$$

La expresión (20) muestra que, efectivamente, la respuesta *completa* de un circuito lineal de primer orden excitado con fuentes de DC depende tanto del estado inicial X_0 como de la entrada aplicada X_f . Separando la parte de la respuesta completa debida al estado y la debida a la entrada obtenemos, respectivamente,

$$\begin{aligned} x_{\text{estado}}(t) &= X_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} & , \text{ para } t \geq 0 \\ x_{\text{entrada}}(t) &= X_f \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) & , \text{ para } t \geq 0 \end{aligned} \quad (22)$$

Note el lector que la constante de tiempo τ es un parámetro positivo y, por tanto, que las funciones exponenciales anteriores son decrecientes. La primera de estas expresiones muestra que, a partir del estado inicial X_0 , el circuito se relaja y $x_{\text{estado}}(t)$ decrece tendiendo asintóticamente hacia $x_{\text{estado}}(t) = 0$ a un ritmo de cambio tanto más rápido mientras menor sea la constante de tiempo τ ,

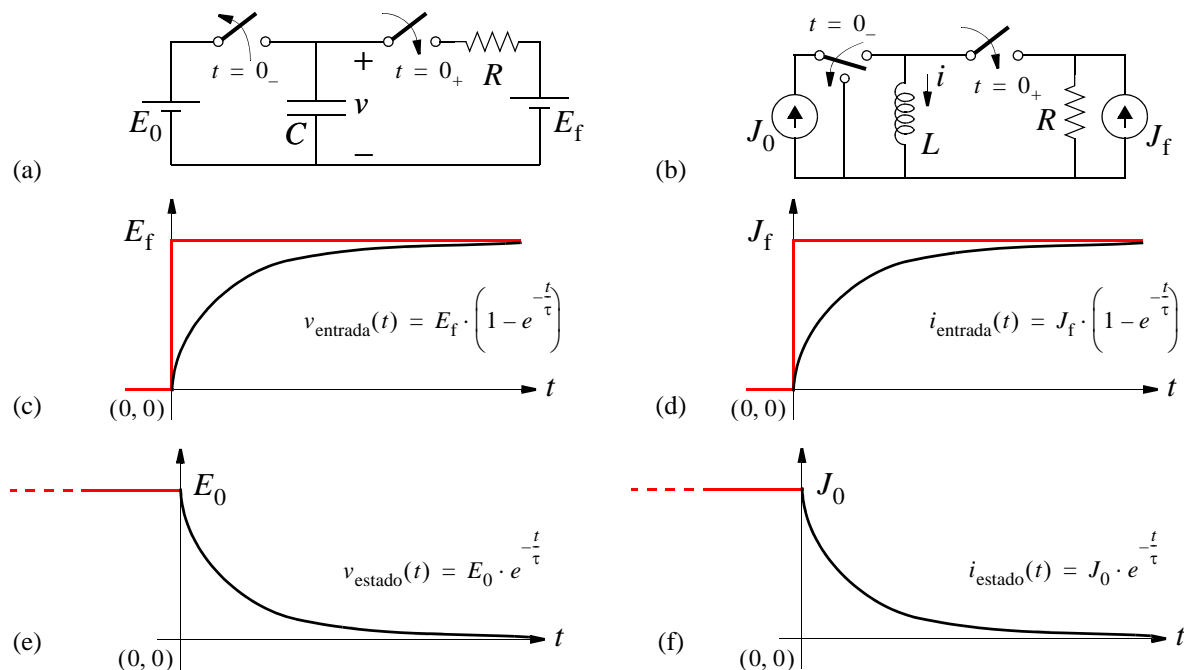


Figura 9 Respuestas al estado y a la entrada para circuitos de primer orden con excitaciones de DC.

$$\lim[x_{\text{estado}}(t)]|_{t \rightarrow \infty} = 0$$

$$\frac{d}{dt}x_{\text{estado}}(t) = -\frac{x_{\text{estado}}(t)}{\tau} \quad (23)$$

Por otra parte, en su respuesta a la entrada, y partiendo de $x_{\text{entrada}}(t) = 0$, el circuito tiende, también asintóticamente, hasta el valor de la excitación de DC X_f a un ritmo tanto más rápido mientras menor sea la constante de tiempo τ .

$$\lim[x_{\text{entrada}}(t)]|_{t \rightarrow \infty} = X_f$$

$$\frac{d}{dt}x_{\text{entrada}}(t) = \frac{X_f \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}}{\tau} \quad (24)$$

Las formas de onda mostradas en las Figuras 9(c), (d), (e) y (f) ilustran estos comportamientos para el circuito capacitivo y el inductivo respectivamente.

3.2. Otras Respuestas Asociadas a los Circuitos de Primer Orden

En los circuitos de primer orden resulta de interés conocer no sólo como varía la variable dinámica “principal” x , sino también la derivada de la misma. Para el circuito capacitivo, esta derivada define la intensidad que circula por el condensador y la resistencia (ver Figura 10) y por tanto la caída de tensión en esta última,

$$v_R = i \cdot R = C \frac{dv}{dt} \cdot R \equiv \frac{\Gamma dx}{mdt} \quad (25)$$

Para el inductivo, la derivada define la caída de tensión en la bobina y la resistencia (ver Figura 10) y por tanto la intensidad que circula por esta última,

$$i_R = \frac{v}{R} = \frac{1}{R} \left(L \frac{di}{dt} \right) \equiv \frac{\Gamma dx}{mdt} \quad (26)$$

En ambas ecuaciones anteriores hemos tenido en cuenta (21) para la expresión en el miembro de la derecha. Usando la variable genérica y para representar a cualquiera de las dos en (25) y (26), y sustituyendo $x(t)$ por su solución dada en (20) se obtiene,

$$y(t) = \frac{\Gamma dx}{mdt} = (X_f - X_0) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (27)$$

solución a la que se puede llegar de forma más directa observando a partir de (19) que en cada caso es $y = -(x - X_f)$. Examinando (27) en comparación con (20) y (22) podemos hacer las siguientes observaciones:

- En la variable derivada $y(t)$, la respuesta al estado se relaja al mismo ritmo que el de la variable $x(t)$, aunque su signo es contrario para preservar las leyes de Kirchhoff.
- La respuesta a la entrada de la variable derivada se relaja hasta cero, en lugar de crecer hasta X_f , al ritmo marcado por las constantes de tiempo.

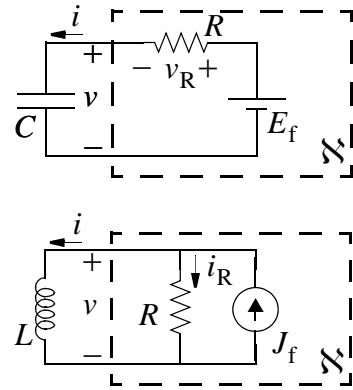


Figura 10 Respuestas derivadas.

Esta última observación indica un comportamiento bien distinto en la variable principal y la derivada. Más adelante veremos que estas diferencias provocan que, al excitar con una señal multi-frecuencia, la salida medida en la variable principal contenga versiones atenuadas de las componentes de alta frecuencia, mientras la medida en la variable derivada contiene versiones atenuadas de las componentes de baja frecuencia.

3.3. Solución con Resistencias Negativas

Supongamos ahora que los resistores lineales de los circuitos de la Figura 8 y la Figura 9 tienen resistencia negativa. Un sencillo análisis muestra que el comportamiento dinámico de ambos circuitos se puede representar mediante la siguiente ecuación genérica:

$$\Gamma \frac{dx}{dt} = m \cdot (x - X_f) \quad (28)$$

con $t \geq 0$ y $x(0_-) \equiv X_0$

donde $m = |1/R|$ para el circuito capacitivo y $m = |R|$ para el inductivo; en cualquier caso m es parámetro positivo y la única diferencia respecto a (19) está, por tanto, en el signo de la derivada. Esta diferencia se puede subsanar cambiando la variable t por $t' = -t$, lo que permite aprovechar la solución obtenida anteriormente resultando,

$$x(t') = X_f + (X_0 - X_f) \cdot e^{-\frac{t'}{\tau}} \quad (29)$$

con $\tau = \Gamma/m$. Nótese que, salvo la variable temporal, esta forma de onda es idéntica a la obtenida previamente y expresada en (20). Recuérdese que la variable temporal de (29) se obtiene mediante un cambio de signo a partir de la de (20). Esto significa que si fuésemos capaces de hacer correr el tiempo “hacia atrás” y observáramos la evolución de los circuitos de resistencia negativa a medida que la variable temporal t' aumenta, veríamos exactamente el mismo comportamiento que para los circuitos de resistencia positiva con el tiempo corriendo “hacia delante”, esto es con la variable t aumentando.

Pero es obvio que no podemos hacer correr el tiempo hacia atrás, que la evolución la tenemos que ver respecto a la variable t , y que para ello hay que deshacer el cambio de variables anterior. Con ello obtenemos,

$$x(t) = X_f + (X_0 - X_f) \cdot e^{\frac{t}{\tau}} \quad (30)$$

que, aunque similar a (20), contiene exponenciales positivas en lugar de las negativas observadas para resistencias positivas.

Desglosando las componentes de la ecuación anterior podemos formular las siguientes observaciones relativas a la respuesta de los circuitos de primer orden con resistencia negativa:

- la respuesta al estado,

$$x_{\text{estado}}(t) = X_0 \cdot e^{\frac{t}{\tau}},$$

diverge exponencialmente a partir del estado inicial X_0 , tanto más rápidamente mientras menor sea la constante de tiempo;

- la respuesta a la entrada,

$$x_{\text{entrada}}(t) = X_f \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right),$$

diverge también a partir de $x_{\text{entrada}}(t) = 0$, y alejándose del valor X_f tanto más rápidamente mientras menor sea la constante de tiempo.

Las formas de onda correspondientes a este caso se muestran en la Figura 11 para el circuito capacitivo y para el inductivo. Observe que en trazo discontinuo hemos incluido también las hipotéticas formas que se obtendrían si hiciéramos correr el tiempo hacia atrás, situación en la que $x_{\text{estado}}(t)$ se relajaría hasta el valor cero, y $x_{\text{entrada}}(t)$ crecería hasta el valor X_f .

3.4. Constantes de Tiempo Positivas y Negativas

Es interesante observar que la respuesta para resistencia positivas y negativas pueden representarse por la misma ecuación (20) siempre y cuando se redefina la constante de tiempo de acuerdo con la siguiente ecuación,

$$\tau = \begin{cases} \frac{\Gamma}{m} > 0 & , \text{ para resistencia positiva} \\ -\frac{\Gamma}{m} < 0 & , \text{ para resistencia negativa} \end{cases} \quad (31)$$

donde debemos recordar que m lo hemos definido de forma que es un parámetro siempre positivo y que Γ también es siempre positivo pues nos limitamos a considerar condensadores con capacidad positiva y bobinas con inductancia positiva. Así pues, el cambio del signo de la resistencia repercute sólo en un cambio del signo de la constante de tiempo. Pero, como hemos visto anteriormente, este

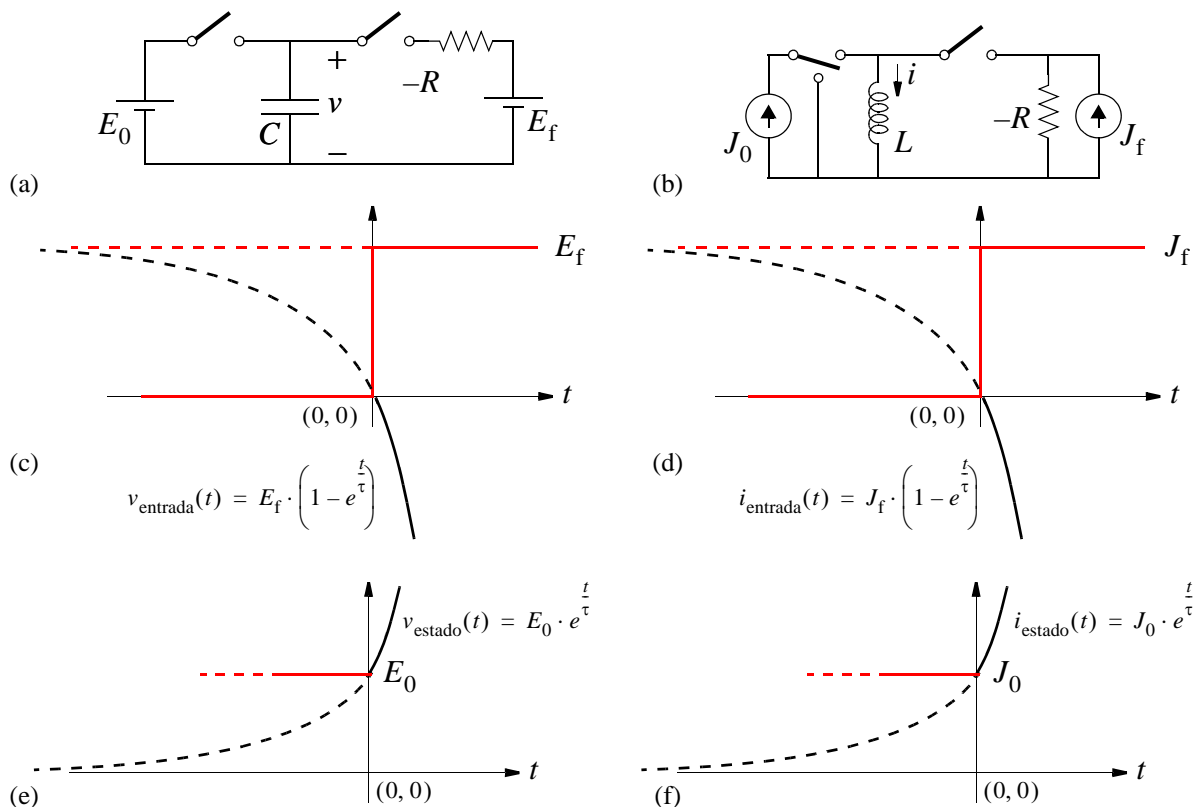


Figura 11 Respuestas al estado y a entradas de DC para circuitos con resistencias negativas.

cambio de signo da lugar a diferencias de comportamiento más que notables; los circuitos con constantes de tiempo positivas responden con exponenciales decrecientes a las excitaciones de DC, mientras que aquellos con constantes de tiempo negativas responden con exponenciales crecientes.

3.5. Rutas Dinámicas y Puntos de Equilibrio

Fijemos de nuevo nuestra atención en las ecuaciones (19) y (28), que se pueden representar genéricamente como,

$$\Gamma \frac{dx}{dt} = \mp m \cdot (x - X_f) \quad (32)$$

con $t \geq 0$ y $x(0_-) \equiv X_0$

donde el signo negativo se aplica al caso de resistencia positiva y el positivo al de resistencia negativa. Observe que el miembro de la derecha de la expresión de arriba define la derivada y, por tanto, la razón de variación temporal de la variable x ; razón esta última que cambia con el valor de x .

Para adquirir una noción gráfica de este cambio podemos representar el miembro de la derecha de la ecuación (32) frente a x . Esto corresponde a una línea recta, tal como se muestra en la Figura 12, donde se han dibujado por separado la recta correspondiente al signo menos en (32), y la correspondiente al signo más.

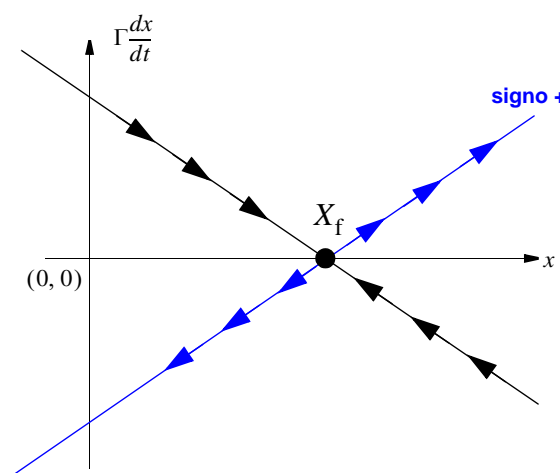


Figura 12 Ilustrando la evolución dinámica alrededor de puntos de equilibrio estables e inestables.

La representación de la Figura 12 es de gran interés para proporcionarnos una idea cualitativa sobre el comportamiento dinámico del circuito. En relación con esta figura son pertinentes las siguientes observaciones:

- La variable x y su derivada deben cambiar con el tiempo de modo que satisfagan en todo instante la ecuación de la recta definida por el miembro de la derecha de (32) con su correspondiente signo; de otro modo no serían una solución de la ecuación. Brevemente, diremos que en su evolución dinámica, la variable x sigue una ruta, llamada *ruta dinámica*, definida por la tal recta.
- La evolución dinámica tiene un punto de referencia en el punto $x = X_f$; el punto donde la ruta dinámica corta al eje de abscisas. Este punto se denomina *punto de equilibrio* porque en él la derivada es nula y, por tanto, si nos colocáramos exactamente sobre él, el sistema permanecería en reposo.
- Alrededor del punto de equilibrio, la evolución de la variable x será hacia valores que hagan crecer $|x - X_f|$, en el caso de que la derivada sea positiva; o hacia valores que hagan decrecer este módulo, si la derivada es negativa. Esta información está contenida en la dirección indicada por las flechas superpuestas a la Figura 12. Nótese que la evolución converge hacia este punto para el caso de resistencia negativa, y diverge de él en el otro caso.
- Si tras situarnos sobre el punto de equilibrio perturbamos ligeramente el valor de x , haciendo $x = X_f \pm \varepsilon$ donde ε es un infinitésimo, el sistema vuelve al equilibrio sólo en el caso de resistencia positiva, y se aleja de él en caso contrario. En el caso de resistencia positiva, o de

constante de tiempo positiva, el equilibrio es por tanto *estable*; mientras que en el de resistencia negativa, o constante de tiempo negativa, el equilibrio es *inestable*.

4. Conectando Resistores No-Lineales a Condensadores y Bobinas

Los resultados y conceptos introducidos en la sección anterior son de utilidad para estudiar la evolución dinámica de circuitos como los mostrados en la Figura 13, donde los elementos reactivos están conectados a resistores cuyas características $i-v$ no varían con el tiempo. Suponiendo que el resistor conectado al condensador es controlado por tensión, tal que $i = f(v)$, y que el conectado a la bobina es controlado por intensidad, tal que $v = f(i)$, se obtiene la siguiente ecuación genérica para el comportamiento dinámico de los dos circuitos,

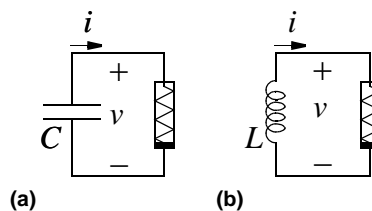


Figura 13 Circuitos dinámicos de primer orden invariables con el tiempo.

$$\Gamma \frac{dx}{dt} = -f(x) \quad \text{con} \quad t \geq 0 \quad \text{y} \quad x(0_-) \equiv X_0 \quad (33)$$

donde x es la tensión en el caso del condensador y la intensidad en el caso de la bobina.

A diferencia del caso tratado en la Sección previa donde $f(x)$ era una función afín, la ecuación (33) sólo admite solución analítica para algunas funciones no-lineales; pero estos casos son ciertamente especiales y, a nuestros propósitos renunciaremos, aunque sin rigor matemático, a encontrar la solución analítica salvo que aproximemos la función no-lineal mediante otra que contenga exclusivamente tramos rectos. Sí podemos, sin embargo, resolver la ecuación numéricamente y sin necesidad de aproximar la función no-lineal, aspecto éste que dejaremos para una sección posterior. En cualquier caso, como paso previo al cálculo aproximado o numérico de la solución, conviene definir un conjunto de conceptos cualitativos que resultan de gran utilidad para comprender el comportamiento dinámico.

4.1. Conceptos Cualitativos

Consideremos a modo de ejemplo la característica no-lineal mostrada en la Figura 14.

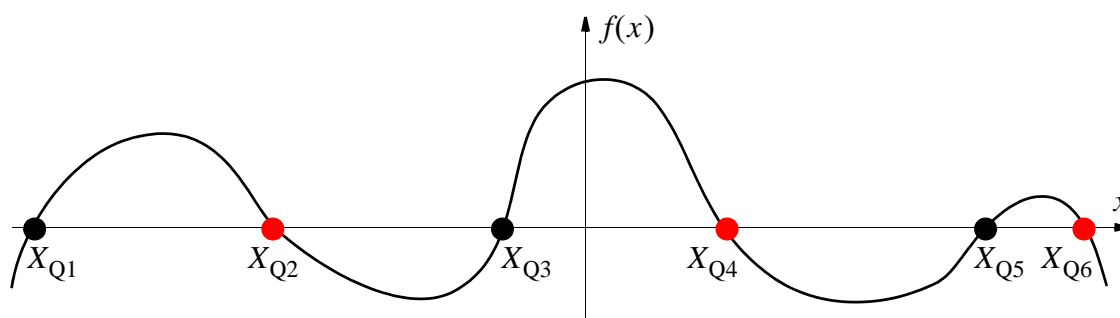


Figura 14 Ejemplo de característica no-lineal.

Puntos de Equilibrio

Son los puntos donde la característica intersecta al eje horizontal, y por tanto donde $f(x) = 0$. En la característica usada como ejemplo, los puntos de equilibrio están marcados con un círculo bien negro o rojo. A partir de (33) vemos que la derivada es nula en estos puntos. Por tanto, si x se hace

coincidir exactamente con uno de ellos, el circuito permanecerá en reposo y el valor de x se mantendrá constante.

Estabilidad de los Puntos de Equilibrio

En el párrafo anterior hemos afirmado que x permanece constante en el caso de coincidir *exactamente* con un punto de equilibrio. Sin embargo, tal coincidencia exacta no es posible en la práctica debido a la existencia de distintos tipos de perturbaciones. Por ello, más que estudiar lo que ocurre en el caso de que x coincida exactamente con un punto de equilibrio, sea $x = X_Q$, nos interesa estudiar el comportamiento dinámico para valores de x dentro de un entorno de dicho punto, esto es para $x \in [X_Q - \varepsilon, X_Q + \varepsilon]$, donde ε es un número pequeño y positivo. Supongamos que ε es lo suficientemente pequeño para que la característica no-lineal se pueda aproximar por su tangente en el punto $x = X_Q$; entonces

$$f(x) \cong \pm m \cdot (x - X_Q) \quad (34)$$

donde m es el valor absoluto de la tangente en el punto y el signo más corresponde al caso de que la tangente tenga pendiente positiva mientras que el menos es para el caso donde la tangente tiene pendiente negativa. Con esto la ecuación (33), que rige el comportamiento dinámico del circuito, se puede aproximar dentro del citado intervalo por,

$$\Gamma \frac{dx}{dt} = -f(x) \approx \mp m \cdot (x - X_Q) \quad , \text{ para } x \in [X_Q - \varepsilon, X_Q + \varepsilon] \quad (35)$$

Comparando esta ecuación con (32), y recordando las consideraciones de la Sección 3.5., podemos afirmar que x *converge* hacia el punto de equilibrio si la pendiente de $f(x)$ en dicho punto es positiva, y *diverge* de él si la pendiente es negativa. Los puntos donde la pendiente es positiva son, por tanto estables, y los otros inestables. Sobre la característica usada como ejemplo en la Figura 14, la estabilidad o inestabilidad la podemos simbolizar mediante flechas convergentes hacia o divergentes desde los punto de equilibrio – ver Figura 15.

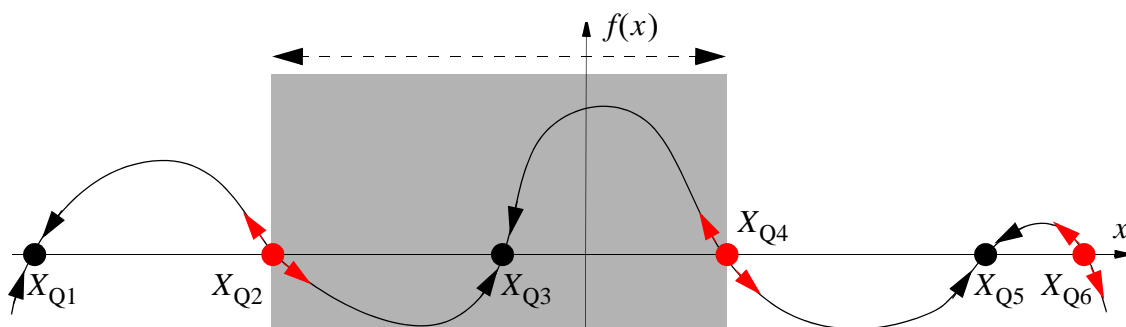


Figura 15 Comportamiento dinámico local alrededor de los puntos de equilibrio.

Intervalos de Atracción de los Puntos de Equilibrio Estables

Los puntos de equilibrio son referentes para el comportamiento dinámico; en cada instante de tiempo, la evolución dinámica o bien se dirige hacia algún punto de equilibrio estable o bien se aleja de alguno inestable. Para cada punto de equilibrio estable existe un conjunto asociado de valores de x a partir de los cuales la ruta dinámica converge hacia el punto; la identificación de estas *regiones de atracción* nos ayuda a comprender mejor la evolución dinámica. A los propósitos de tal identificación, recuerde el lector que estamos considerando funciones $f(x)$ univaluadas en x – controladas por tensión para el caso capacitivo y por intensidad para el inductivo. Por tanto, los

puntos de equilibrio se producirán siempre en una estricta secuencia...-estable-inestable-estable-inestable-estable-..., donde cada punto estable está rodeado de dos inestables. Cada punto estable tiene pues un intervalo abierto ⁶ de atracción cuyos límites coinciden con la localización de los puntos inestables adyacentes. Sobre la Figura 15 se ha indicado el intervalo de atracción para el punto estable X_{Q3} .

Ruta Dinámica

De todo lo anterior es obvio que a partir de un valor inicial X_0 la evolución dinámica se dirigirá hacia el punto de equilibrio estable cuyo intervalo de atracción incluye a X_0 . Si no existe ningún punto estable, existirá uno inestable y la evolución divergerá de él. Definimos como ruta dinámica al trozo de la característica no-lineal recorrido mientras x se mueve desde un punto inicial acercándonos hacia un punto de equilibrio estable, o alejándose de uno inestable. En la Figura 16 se ilustran distintas rutas dinámicas para la característica del ejemplo y partiendo de distintos puntos iniciales.

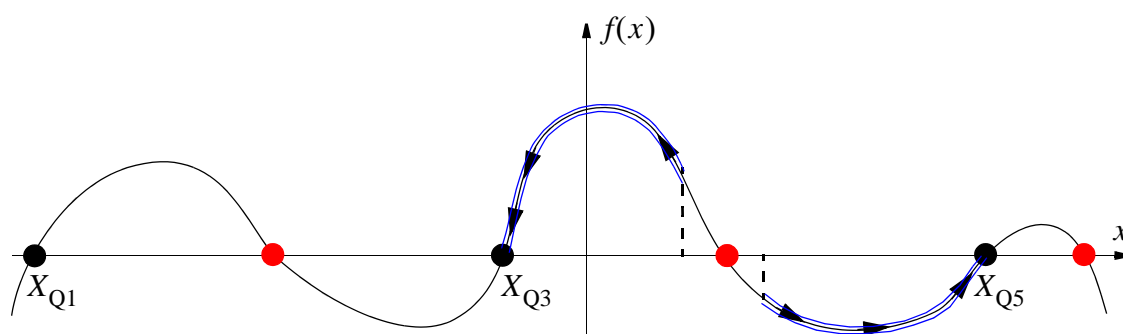


Figura 16 Ilustrando el concepto de ruta dinámica.

4.2. Solución Analítica para Funciones Lineales a Tramos

En el Capítulo anterior ya vimos que la aproximación de una función no-lineal mediante un conjunto de tramos rectos conectados permite resolver analíticamente circuitos resistivos que contengan resistores con características no-lineales. De igual modo, en el caso de circuitos dinámicos, la aproximación lineal a tramos de $f(x)$ en (33) nos permite obtener soluciones analíticas para la forma de onda $x(t)$. Para ello aprovecharemos los resultados obtenidos en el caso donde $f(x)$ es una función afín.

Supongamos que, por el procedimiento que sea, hemos obtenido una función lineal a tramos (LT) que aproxima a $f(x)$; dejamos pues de lado el problema asociado al cálculo de esa función aproximada. Cada tramo de esta función, sea el tramo k -ésimo, tiene un intervalo de definición, $[\Delta_k, \Delta_{k+1}]$, una pendiente $\pm m_k$, y un punto de corte con el eje horizontal X_{Qk} que puede estar incluido en el intervalo de definición del tramo o fuera de dicho intervalo. La Figura 17 contempla toda la casuística posible dependiendo de que este punto esté o no incluido en el intervalo de definición del tramo, y del signo de la pendiente del tramo.

Estos datos definen completamente al tramo, que quedará descrito mediante la siguiente función afín,

$$f(x)|_k = \pm m_k \cdot (x - X_{Qk}) \quad (36)$$

⁶ Abierto significa que el intervalo no incluye a sus límites.

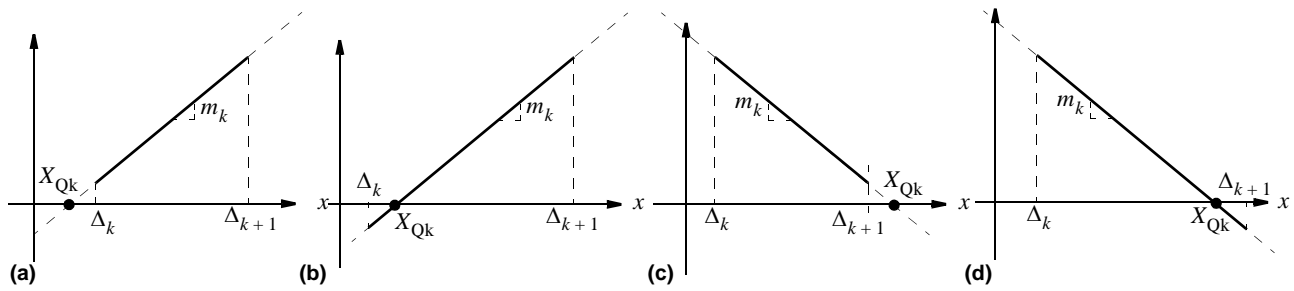


Figura 17 Casuística para la solución de circuitos dinámicos con características lineales a tramos.

Por tanto, siempre que estemos dentro de dicho tramo, esto es en tanto en cuanto $x \in [\Delta_k, \Delta_{k+1}]$, el comportamiento dinámico del circuito queda descrito por,

$$\Gamma \frac{dx}{dt} = -f(x)|_k = \mp m_k \cdot (x - X_{Qk}) \quad , \text{ para } x \in [\Delta_k, \Delta_{k+1}] \quad (37)$$

Esta ecuación no es nueva para el lector; dado un punto inicial situado dentro del tramo, $X_0 \in [\Delta_k, \Delta_{k+1}]$, y suponiendo este punto inicial se alcanza en el instante T_k no debemos dudar al afirmar que la solución converge hacia el valor de equilibrio X_{Qk} ⁷, o diverge de él, dando lugar a la siguiente forma de onda,

$$x(t)|_k = X_{Qk} + (X_0 - X_{Qk}) \cdot e^{-\frac{(t-T_k)}{\tau_k}} \quad , \text{ para } t > T_k \quad (38)$$

donde τ_k es la constante de tiempo asociada al tramo, un parámetro cuyo módulo es $|\tau_k| = \Gamma/m_k$ y cuyo signo coincide con el de la pendiente del tramo.

La ecuación (38) es la única necesaria para encontrar la solución analítica de la forma de onda asociada a la evolución dinámica de un circuito de primer orden con característica lineal a tramos. Esta solución consiste de un conjunto de ecuaciones con la forma genérica (38) conectadas entre sí, una por cada tramo de la ruta dinámica por la que transcurra la evolución del circuito y cada una con sus correspondientes valores de parámetros y su correspondiente instante de tiempo inicial. El procedimiento para encontrar la solución sería el siguiente:

- Dibujar la ruta dinámica e identificar los tramos por los que discurre.
- Identificar el tramo correspondiente al punto inicial y escoger $T_k = 0$ como instante inicial.
- Extraer la constante de tiempo y el valor de equilibrio del tramo; sustituir estos valores en (38); añadir esta ecuación a las calculadas anteriormente para otros tramos, si las hubiera. Si el equilibrio de este tramo es estable y real, el proceso de cálculo de la forma de onda se da por concluido.
- En otro caso:
 - identificar el siguiente tramo de la ruta dinámica,
 - tomar para X_0 el valor del punto que define la frontera entre este siguiente tramo y el anterior,
 - usar (38) para calcular el instante de tiempo en que la ruta dinámica alcanza este punto frontera y tomar para T_k el valor de este instante,
 - ir al punto anterior.

⁷ Nótese que el punto de intersección con el eje horizontal puede no estar incluido en el intervalo de definición del tramo. Si el punto está incluido en el tramo se dice que el correspondiente estado de equilibrio es “real”; de otro modo se dice que el estado de equilibrio es “virtual”.

Aplicación

Aplicaremos el procedimiento anterior al cálculo de la evolución dinámica del circuito de la Figura 18, con la característica $i-v$ mostrada en la misma figura. Hay tres puntos de equilibrio: dos virtuales (ver nota ⁷ a pie de página), uno estable E_{Q2} y otro inestable E_{Q1} ; y uno real estable, E_{Q0} .

Partiendo del punto inicial X_0 se obtiene la ruta dinámica mostrada en la figura, que discurre por los tres tramos hasta alcanzar el punto de equilibrio real y estable situado en $x = E_{Q0}$.

Mientras que la ruta discurre sobre el tramo 2 se obtiene,

$$v(t)|_2 = E_{Q2} + (V_0 - E_{Q2}) \cdot e^{-\frac{t}{\tau_2}}, \quad \text{para } v \geq \Delta_2 \quad (39)$$

donde $\tau_2 = C/G_2$. Definamos T_2 como el instante de tiempo en el que se alcanza la frontera del tramo; este instante se calcula haciendo $v(t)|_2 = \Delta_2$ en la expresión anterior y despejando para obtener,

$$T_2 = -\tau_2 \cdot \ln \frac{\Delta_2 - E_{Q2}}{V_0 - E_{Q2}} = \tau_2 \cdot \ln \frac{V_0 - E_{Q2}}{\Delta_2 - E_{Q2}} \quad (40)$$

En este instante se pasa al tramo 1 con una condición inicial $v = \Delta_2$ y mientras que ruta dinámica discurre por él se obtiene,

$$v(t)|_1 = E_{Q1} + (\Delta_2 - E_{Q1}) \cdot e^{-\frac{t - T_2}{\tau_1}}, \quad \text{para } \Delta_1 \leq v < \Delta_2 \quad (41)$$

donde $\tau_1 = -C/G_1$. Este ocurrirá hasta el instante T_1 en el que se alcanza la frontera del tramo, instante que se calcula haciendo $v(t)|_1 = \Delta_1$ en la expresión anterior y despejando para obtener,

$$T_1 - T_2 = -\tau_1 \cdot \ln \frac{\Delta_1 - E_{Q1}}{\Delta_2 - E_{Q1}} = |\tau_1| \cdot \ln \frac{\Delta_1 - E_{Q1}}{\Delta_2 - E_{Q1}} \quad (42)$$

En este instante se pasa al tramo 0 con una condición inicial $v = \Delta_1$ y se tiende asintóticamente hacia el equilibrio de acuerdo con la siguiente ecuación:

$$v(t)|_0 = E_{Q0} + (\Delta_1 - E_{Q0}) \cdot e^{-\frac{t - T_1}{\tau_0}}, \quad \text{para } v < \Delta_1 \quad (43)$$

donde $\tau_0 = C/G_0$.

En resumen, la forma de onda de tensión vendrá dada por la siguiente expresión compuesta:

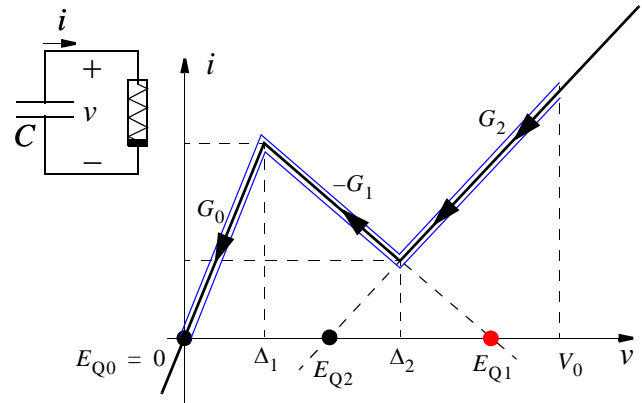


Figura 18 Condensador lineal conectado a un resistor LT tipo diodo túnel.

$$v(t) = \begin{cases} E_{Q2} + (V_0 - E_{Q2}) \cdot e^{-\frac{t}{C/G_2}} & , \text{ para } 0 \leq t \leq T_2 \\ E_{Q1} + (\Delta_2 - E_{Q1}) \cdot e^{\frac{t-T_2}{C/G_1}} & , \text{ para } T_2 \leq t \leq T_1 \\ E_{Q0} + (\Delta_1 - E_{Q0}) \cdot e^{\frac{t-T_1}{C/G_0}} & , \text{ para } T_1 \leq t \leq \infty \end{cases} \quad (44)$$

4.3. Caso de Resistores Multivaluados en la Variable de Estado

En los apartados previos de esta Sección hemos supuesto que los resistores no-lineales usados en la Figura 13 son controlados por tensión para el caso capacitivo y por intensidad para el inductivo. Sin embargo, hay circuitos de interés práctico donde el resistor no-lineal es sólo controlado por intensidad, tal que $v = g(i)$ siendo $g(\bullet)$ una función no invertible, en el caso capacitivo; o sólo controlado por tensión, tal que $i = g(v)$ siendo $g(\bullet)$ una función no invertible, en el caso inductivo. Por ejemplo, si conectamos un condensador a un diodo de cuatro capas, o si conectamos una bobina a un diodo túnel, tal como se ilustra en la Figura 19, donde notamos que la característica de la izquierda es sólo controlada por intensidad mientras que la de la derecha es sólo controlada por tensión.

En un caso como éste, la descripción dinámica dada en (33) no es válida porque la función $f(\bullet)$, que sería la inversa de $g(\bullet)$, no existe. En lugar de ello debemos trabajar con las siguientes descripciones alternativas,

$$\begin{aligned} C \frac{di}{dt} &= -\frac{i}{\frac{d}{di}g(i)} & , \text{ para el circuito capacitivo} \\ L \frac{dv}{dt} &= -\frac{v}{\frac{d}{dv}g(v)} & , \text{ para el circuito inductivo} \end{aligned} \quad (45)$$

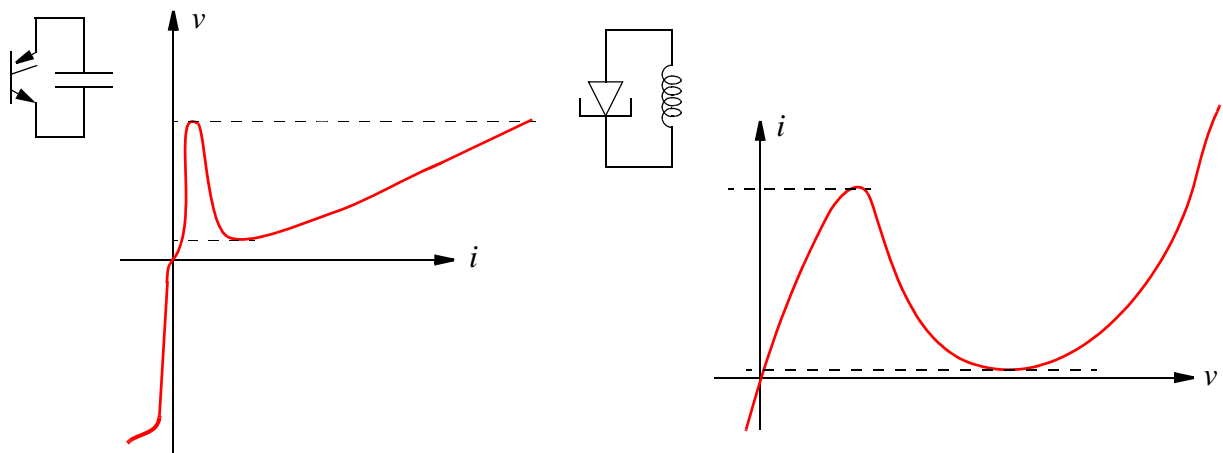


Figura 19 Conexión de elementos reactivos a resistores con características multivaluadas en la variable de estado.

que se obtienen haciendo la derivada temporal de los dos miembros de la correspondiente ecuación característica, usando la regla de derivación en cadena y agrupando términos. Por ejemplo, en el caso del circuito capacitivo,

$$v = g(i) \quad (46)$$

derivando respecto al tiempo ambos miembros de esta ecuación, y usando la regla de derivación en cadena,

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}g(i) = \frac{d}{di}g(i) \cdot \frac{di}{dt} \quad (47)$$

multiplicando ambos términos de esta ecuación por C y teniendo en cuenta la ecuación constitutiva del condensador $i = C(dv/dt)$, es inmediato obtener la expresión en (45) para el circuito capacitivo. De forma análoga se obtiene la del inductivo.

Nótese que las dos ecuaciones en (45) formulan la evolución dinámica en función de la correspondiente variable de control de la característica; intensidad, en vez de tensión como en las secciones previas, para el condensador, y tensión, en vez de intensidad, para la bobina. Sin embargo, los puntos de equilibrio, donde se anulan las derivadas en (45), siguen correspondiendo a intensidad nula para el condensador, y a tensión nula para la bobina. Por otra parte, la estabilidad de los puntos de equilibrio se sigue rigiendo por el mismo criterio ya que, recuérdese, el criterio de estabilidad se refiere a propiedades de carácter local: son estables aquellos puntos donde la característica resistiva tiene pendiente positiva, esto es, donde la resistencia del equivalente en pequeña señal sea positiva; y son inestables aquellos donde la característica resistiva tiene pendiente negativa y, por tanto, la resistencia del equivalente en pequeña señal es negativa.

Como en los casos tratados en las secciones previas, allí donde la pendiente del resistor sea positiva, la ruta dinámica convergerá hacia el eje de tensiones (lugar geométrico donde $i = 0$) en el caso capacitivo, y hacia el eje de intensidades (lugar geométrico donde $v = 0$) en el inductivo. Sin embargo, las expresiones (45) no proporcionan toda la información necesaria para dibujar la ruta dinámica si ésta discurre por un tramo de la característica del resistor donde la derivada, esto es la resistencia equivalente, cambia de signo. Por ejemplo, así sucede cuando la ruta dinámica alcanza los punto marcados con trazo discontinuo en la Figura 20, donde la derivada de $g(\bullet)$ es nula y, por tanto, la derivada temporal de la correspondiente variable, intensidad en el caso capacitivo y tensión en el inductivo, es infinita. En estas condiciones no tenemos la información necesaria para saber por dónde continuará la ruta dinámica. Matemáticamente, puesto que la derivada es infinitamente grande, podemos anticipar un discontinuidad de salto en la variable: intensidad en el condensador y tensión en la bobina. De hecho un modelo más completo nos confirma que, efectivamente, alrededor de los puntos donde la derivada de $g(\bullet)$ es nula, la intensidad en el caso capacitivo y la tensión en el inductivo cambian muy rápidamente, tan rápidamente que prácticamente la ruta dinámica experimenta una discontinuidad de salto hasta la siguiente rama con pendiente positiva de la característica del resistor; en este “salto” la otra variable del correspondiente elemento reactivo, tensión en el caso capacitivo e intensidad en el inductivo, prácticamente se mantiene constante. Este modelo más completo lo estudiaremos en el siguiente Capítulo; mientras tanto, podemos simplemente postular que en los puntos donde la derivada se anula la ruta dinámica saltará manteniendo la tensión constante en el caso del condensador, o la intensidad en el de la bobina, hasta alcanzar la siguiente rama de la característica. Estos saltos se ilustran en las rutas dinámicas dibujadas en la Figura 20. Nótese que el hecho de que en el “salto” se mantenga constante la tensión del condensador o la intensidad de la bobina tiene una justificación física clara a la luz de las

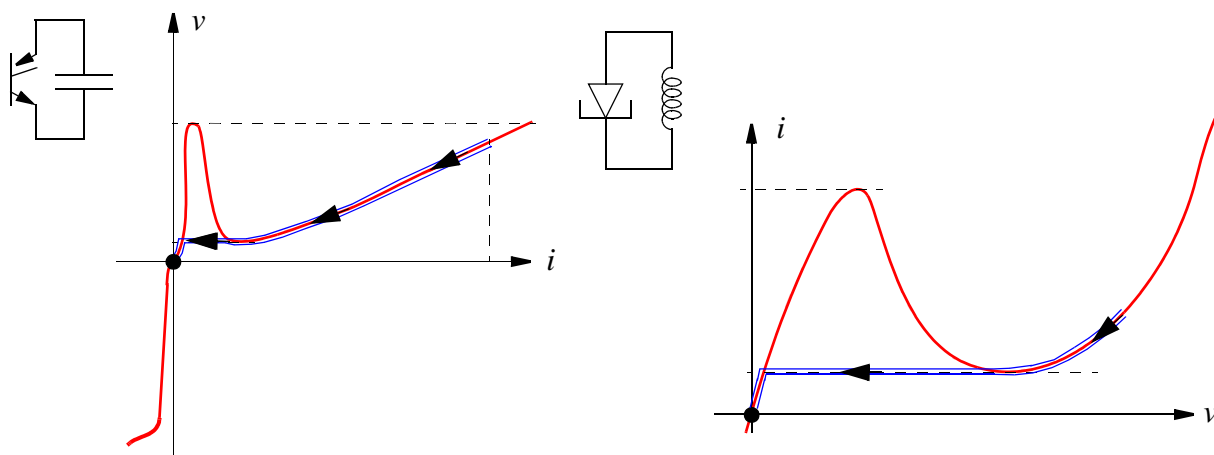


Figura 20 Fenómenos de salto en las rutas dinámicas de circuitos dinámicos de primer orden.

correspondientes ecuaciones constitutivas de estos elementos,

$$i = C \frac{dv}{dt} \quad v = L \frac{di}{dt} \quad (48)$$

La primera de estas ecuaciones nos hace ver que toda discontinuidad de la tensión del condensador se traduce en una intensidad infinita; esto es, haría falta un aporte infinito de carga eléctrica para cambiar instantáneamente la tensión del condensador, lo que es físicamente imposible. Del mismo modo haría falta un aporte infinito de flujo magnético para cambiar instantáneamente la intensidad de la bobina.

Una vez dilucidado por la vía del postulado el problema del cálculo de la ruta dinámica, conviene puntualizar para acabar esta sección que la aproximación lineal a tramos también puede usarse en este caso para obtener la forma de onda solución dentro de cada tramo, y por procedimientos idénticos a los descritos en la Sección 4.2.

4.4. Bi-estable, Astable y Mono-estable

Los circuitos dinámicos no-lineales de primer orden son importantes porque fundamentan y permiten comprender la operación de distintos bloques de interés práctico en circuitos y sistemas electrónicos. Por ejemplo, los circuitos usados para almacenar información en computadores electrónicos digitales, o algunos circuitos usados para generar señales y/o relojes. La presente Sección estudia estos bloques sólo en el caso de que el elemento reactivo sea un condensador; el elemento reactivo puede también ser una bobina, pero este caso es dual del anterior y se deja a los lectores como ejercicio. En la Figura 21 se muestran características resistivas idealizadas para tres circuitos capacitivos no-lineales de primer orden, respectivamente: bi-estable, astable y mono-estable.

- Un bi-estable, característica resistiva de la Figura 21(a), tiene un punto de equilibrio inestable, donde $v = E_{QT}$, que separa a dos puntos de equilibrio estables, donde $v = E_{QL}$ y $v = E_{QH}$ respectivamente.
- Un astable, característica resistiva de la Figura 21(b), tiene también un punto de equilibrio inestable, donde $v = E_{QT}$, que separa también a dos puntos de equilibrio estables, donde $v = E_{QL}$ y $v = E_{QH}$ respectivamente. Sin embargo, a diferencia del bi-estable, los puntos de equilibrio estables son ahora virtuales debido a que la característica resistiva no es controlada por tensión sino por intensidad.

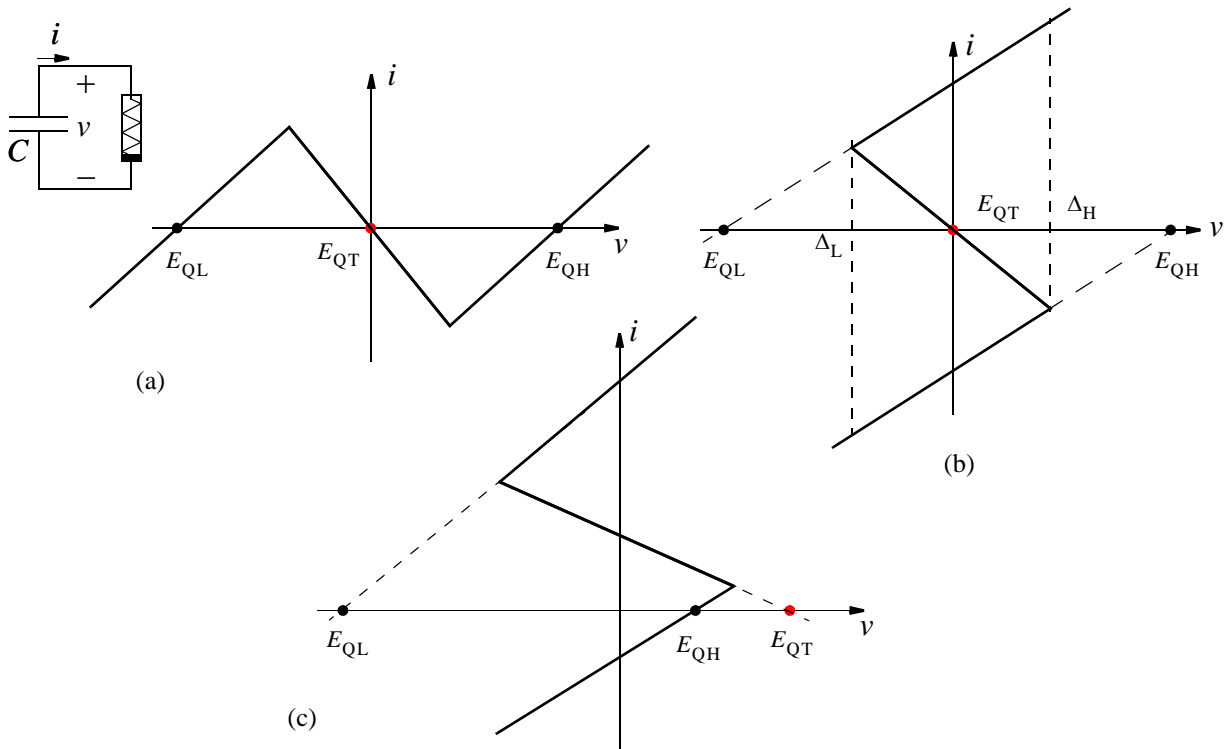


Figura 21 Modelos ideales de primer orden para bi-estables, estables y mono-estables basados en condensadores.

- Un mono-estable, característica resistiva de la Figura 21(c), tiene un punto de equilibrio estable real, donde $v = E_{QH}$, otro estable virtual donde $v = E_{QL}$, y uno inestable también virtual donde $v = E_{QT}$. Como en el caso del astable, la característica resistiva del mono-estable es controlada por intensidad.

5. Circuitos de Primer Orden con Excitaciones Exponenciales

Retomemos el caso donde el circuito resistivo \mathcal{N} de la Figura 2 contiene sólo elementos lineales y fuentes independientes, pero suponiendo que estas fuentes independientes incluyen generadores de señal. Los dos circuitos se pueden representar genéricamente por los equivalentes mostrados en la Figura 22, donde en cada caso identificamos una excitación, $\varepsilon(t)$, y dos respuestas, $x(t)$ e $y(t)$. Estas respuestas se relacionan con la excitación mediante las siguientes ecuaciones diferenciales respectivamente,

$$\begin{aligned}\tau \frac{d}{dt}x(t) + x(t) &= \varepsilon(t) \\ \tau \frac{d}{dt}y(t) + y(t) &= \tau \frac{d}{dt}\varepsilon(t)\end{aligned}\quad (49)$$

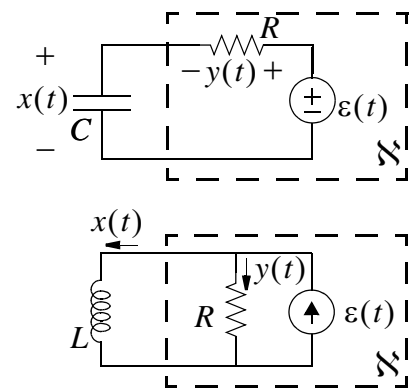


Figura 22 Circuitos lineales de primer orden excitados con señal.

donde τ es la constante de tiempo definida en (21). Estas ecuaciones anticipan que, para la misma excitación, el comportamiento será bien distinto dependiendo de dónde se tome la salida. Observamos que la señal $x(t)$ es “sensible” directamente a la excitación, mientras que $y(t)$ es “sensible” a la derivada de la excitación.

5.1. Excitaciones Exponenciales

Por razones de conveniencia matemática que quedarán claras más adelante supongamos que la excitación es del tipo,

$$\varepsilon(t) = a \cdot e^{s \cdot t} \quad (50)$$

donde a y s son números reales independientes del tiempo.

Cálculo de la Solución

Para esta señal de excitación, $\varepsilon(t)$, y dadas unas condiciones iniciales $x(0)$ o $y(0)$ sabemos que la solución de las ecuaciones en (49), como la de cualquier otra ecuación diferencial lineal, está dada por la suma de dos componentes:

- la solución general de la ecuación homogénea,
- una solución particular de la in homogénea.

Basándonos en los resultados en las secciones previas del Capítulo, la primera se puede expresar como,

$$\left. \begin{matrix} x(t) \\ y(t) \end{matrix} \right\} = k \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (51)$$

igual para los dos casos. Respecto a la segunda, nótese que las funciones exponenciales tienen la notable propiedad de que la estructura matemática de la derivada es la misma que la de la función, esto es,

$$\frac{d}{dt}(a \cdot e^{s \cdot t}) = s \cdot a \cdot e^{s \cdot t} \quad (52)$$

En consecuencia podemos postular que la solución particular de la inhomogénea es del tipo,

$$\left. \begin{matrix} x(t) \\ y(t) \end{matrix} \right\} = b \cdot e^{s \cdot t} \quad (53)$$

donde obviamente el parámetro b debe escogerse para satisfacer la correspondiente ecuación diferencial, lo que implica respectivamente,

$$\begin{aligned} x(t) &\rightarrow b \cdot (s \cdot \tau + 1) = a \\ y(t) &\rightarrow b \cdot (s \cdot \tau + 1) = a \cdot s \cdot \tau \end{aligned} \quad (54)$$

Con esto, la solución de las ecuaciones en (49) queda como,

$$\boxed{\begin{aligned} x(t) &= k \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{1}{s \cdot \tau + 1} a \cdot e^{s \cdot t} \\ y(t) &= k \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{s \cdot \tau}{s \cdot \tau + 1} a \cdot e^{s \cdot t} \end{aligned}} \quad (55)$$

donde el coeficiente k deben escogerse para satisfacer la condición inicial; esto es, tal que,

$$\boxed{\begin{aligned} x(0) &= k + b = k + \frac{1}{s \cdot \tau + 1} a \\ y(0) &= k + b = k + \frac{s \cdot \tau}{s \cdot \tau + 1} a \end{aligned}} \quad (56)$$

Del resultado mostrado en (55) podemos extraer dos conclusiones de gran importancia práctica:

- La respuesta tiene dos componentes con dependencias temporales bien distintas,
 - en una de ellas la variación temporal es independiente de la de la entrada, está fijada por la constante de tiempo del circuito, a esta componente se la denomina parte *natural* de la respuesta;
 - en la otra la variación temporal es la misma que la de la entrada, aunque con distinto coeficiente, esta componente es la parte *forzada* de la respuesta.

Nótese que respuesta natural y respuesta forzada son conceptos distintos de los de respuesta al estado y respuesta a la entrada. Aunque tengamos condiciones iniciales nulas, (56) nos dice que k es distinto de cero; esto es, la respuesta a la entrada contiene en sí una parte natural, cuya variación temporal está marcada por la constante de tiempo del circuito, y una forzada, cuya variación temporal está marcada por la propia entrada. De hecho esto se observa ya en (22), donde la respuesta a la entrada contiene una componente exponencial (natural) y una componente constante forzada por la excitación también constante usada en aquel caso.

- La amplitud de la parte forzada de la respuesta se calcula a partir de la de la entrada mediante un sencillo cálculo algebraico consistente en multiplicar esta última amplitud por una función racional $H(s)$, respectivamente,

$$b = H(s) \cdot a = \begin{cases} \frac{1}{s \cdot \tau + 1} a & , \text{ para } x(t) \\ \frac{s \cdot \tau}{s \cdot \tau + 1} a & , \text{ para } y(t) \end{cases} \quad (57)$$

que es independiente de a , y dependiente sólo de la “frecuencia” s de la señal de entrada y de la constante de tiempo del circuito.

Cálculo Directo de la Respuesta Forzada

La función racional $H(s)$ anterior se obtiene directamente a partir de la ecuación diferencial que describe el circuito mediante el siguiente procedimiento:

- Substitúyase el operador diferencial por la “frecuencia” s ,

$$\frac{d}{dt} \rightarrow s \quad (58)$$

- Substitúyase la variable respuesta $x(t)$ o $y(t)$ por su amplitud, y la variable excitación $\varepsilon(t)$ por la suya,

Con esto la ecuación diferencial se ha transformado en una ecuación algebraica.

- Agrúpanse términos en ambos miembros de esta ecuación algebraica sacando como factor común la amplitud de la respuesta y la excitación, respectivamente, para obtener,

$$D(s) \cdot b = N(s) \cdot a \quad (59)$$

- Calcúlese la función racional como,

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \quad (60)$$

Más adelante veremos que dado cualquier circuito dinámico relajado, sin energía inicial almacenada, con componentes sólo lineales, y tras escoger una excitación particular del circuito y una respuesta, podemos encontrar una función racional del tipo descrito arriba que caracteriza completamente el comportamiento del circuito para esa excitación y esa respuesta. Además esa

función racional la podemos calcular sin necesidad de resolver, ni siquiera de plantear, la ecuación diferencial del circuito. De hecho podemos trabajar con el circuito como si se tratara de uno resistivo, tratando bobinas y condensadores como resistores lineales con las siguientes “resistencias” equivalentes,

$$\begin{aligned} R_{\text{equivalente}} \equiv Z(s) &= \frac{1}{C \cdot s} & , \text{ para el condensador} \\ R_{\text{equivalente}} \equiv Z(s) &= L \cdot s & , \text{ para la bobina} \end{aligned} \quad (61)$$

Es obvio que estos parámetros no son realmente resistencias, aunque sus dimensiones son Ω , pues sus valores dependen de la variable “frecuencial” s . Sin embargo se pueden usar como tales, aunque para distinguirlas de las resistencias propiamente dichas conviene llamarlas *impedancias*. A las inversas de las impedancias se las llama, por otra parte, *admitancias* para distinguirlas de las conductancias.

Ejercicio

Para los circuitos de la Figura 22, calcúlense las respectivas funciones $H(s)$ usando las impedancias y admitancias de condensadores y bobinas. En el caso del circuito capacitivo la entrada es tensión, la salida es tensión y la transformación entrada-salida es una división de tensión que en el caso de que la salida sea $x(t)$ da,

$$H(s) = \frac{Z(s)|_C}{R + Z(s)|_C} = \frac{\frac{1}{C \cdot s}}{R + \frac{1}{C \cdot s}} = \frac{1}{s \cdot \tau + 1} \quad (62)$$

mientras que si es $y(t)$,

$$H(s) = \frac{R}{R + Z(s)|_C} = \frac{R}{R + \frac{1}{C \cdot s}} = \frac{s \cdot \tau}{s \cdot \tau + 1} \quad (63)$$

En el inductivo la entrada es intensidad, la salida es intensidad y la transformación entrada-salida es una división de intensidad que para $x(t)$ da,

$$H(s) = \frac{R}{R + Z(s)|_L} = \frac{R}{R + L \cdot s} = \frac{1}{s \cdot \tau + 1} \quad (64)$$

mientras que para $y(t)$ da,

$$H(s) = \frac{Z(s)|_L}{R + Z(s)|_L} = \frac{L \cdot s}{R + L \cdot s} = \frac{s \cdot \tau}{s \cdot \tau + 1} \quad (65)$$