

# 3

## Circuitos Dinámicos de Segundo Orden

Con lápiz y papel, usando elementos ideales, podemos concebir un circuito cuyo comportamiento quede descrito exactamente mediante una ecuación diferencial de primer orden. Pero cuando pasemos nuestro diseño desde el papel al laboratorio, usando componentes reales, notaremos que las ecuaciones de primer orden no explican todos los comportamientos que observamos al experimentar con el circuito. Especialmente, a altas frecuencias aparecen diferencias muy grandes respecto a lo previsto por nuestras ecuaciones ideales. Algunos de estas diferencias las podemos explicar incrementando el orden dinámico de nuestros modelos. O lo que es lo mismo, añadiendo elementos dinámicos al circuito que habíamos concebido sobre el papel. Descubriremos de esta manera que la dinámica de segundo orden es mucho más variada y amena que la de primer orden. Y, nuestra curiosidad nos llevará a preguntarnos si algunos de los nuevos comportamientos que surgen de nuestros cálculos no pueden ser controlados y aprovechados. Por ejemplo, ¿podemos filtrar mejor usando dos componentes dinámicos en lugar de uno sólo? La búsqueda de la respuesta a preguntas como éstas nos llevará a montar en el laboratorio circuitos que contengan dos componentes dinámicos. Y comprobaremos que con ellos podemos hacer cosas de interés. Claro que también notaremos que aparecen comportamientos, sobre todo a alta frecuencia, que no se pueden explicar mediante una ecuación diferencial de segundo orden. Pero esto será objeto de otro tema.

### 1. Introducción

### 2. Resonadores de Segundo Orden

### 3. Respuesta al Estado

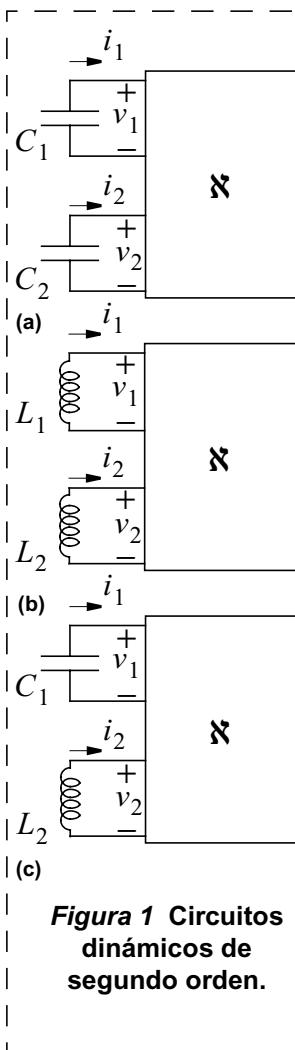
### 4. Tipos de Respuesta

### 5. Respuesta a una Entrada de DC

---

## 1. Introducción

En el Capítulo anterior ya anticipamos que una condición necesaria, aunque no suficiente, para que un circuito tenga dinámica de segundo orden es que incluya dos elementos almacenadores de energía, o lo que es lo mismo dos elementos *reactivos*; éstos pueden ser dos condensadores, dos bobinas, o un condensador y una bobina. Estos tres casos se ilustran en la Fig. 1, donde los elementos reactivos se muestran conectados a un



circuito *resistivo*  $\mathcal{N}$ ; esto es, a un circuito que puede contener sólo resistores, fuentes controladas de tipo resistivo y fuentes independientes.

Tal como anticipamos en el Capítulo anterior, suponiendo que el circuito resistivo de la Fig. 1(a) es controlado por tensión, que el de la Fig. 1(b) es controlado por intensidad, y que el de la Fig. 1(c) tiene una descripción híbrida<sup>i</sup>, se obtiene la siguiente ecuación dinámica válida para los tres circuitos:

$$\begin{aligned}\Gamma_1 \frac{dx_1}{dt} &= -f_1[x_1, x_2, \varepsilon(t)] \\ \Gamma_2 \frac{dx_2}{dt} &= -f_2[x_1, x_2, \varepsilon(t)]\end{aligned}\quad (4.1)$$

donde el significado de los parámetros  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$ , y de las funciones  $f_1[\bullet]$  y  $f_2[\bullet]$  quedó explicado en el Capítulo anterior.

Como vemos, (4.1) consiste en dos ecuaciones de primer orden. Note, sin embargo, que estas ecuaciones no son independientes, pues la derivada de la variable  $x_1$  depende tanto de esta variable como de la variable  $x_2$ ; y lo mismo ocurre con la derivada de  $x_2$ . La situación la podemos resumir afirmando que las ecuaciones están acopladas. Este acoplo hace que el comportamiento dinámico “global” sea de segundo orden.

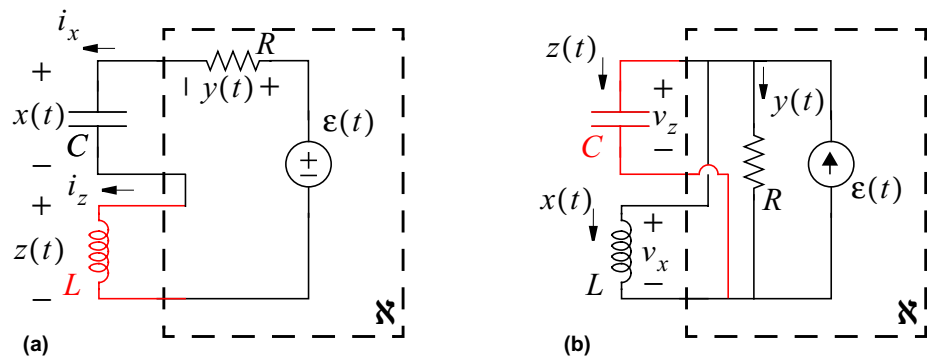
Mientras no indiquemos lo contrario, consideraremos sólo el caso en el que  $\mathcal{N}$  contiene exclusivamente *resistores lineales*; esto es, en el que  $\mathcal{N}$  consiste en la interconexión de resistores lineales, fuentes controladas resistivas lineales y fuentes independientes. Estudiaremos primero la respuesta al estado, luego la respuesta a la entrada con excitaciones de DC y, finalmente, la respuesta a la entrada con excitaciones sinusoidales. Veremos que la dinámica de segundo orden produce mucha mayor riqueza de comportamientos que la de primer orden. En el Capítulo introduciremos también conceptos de gran importancia práctica como *frecuencia de resonancia*, *factor de calidad* y *coeficiente de amortiguamiento*. Los distintos conceptos y resultados presentados en el Capítulo se ilustrarán mediante simulaciones del comportamiento dinámico de circuitos de segundo orden realizadas con el programa MATLAB/SIMULINK.

## 2. Resonadores de Segundo Orden

Supongamos para empezar que a los circuitos tratados en la Sección 3 del Capítulo anterior les añadimos un elemento dinámico; respectivamente un inductor al circuito resistivo y un condensador al inductivo. Esto nos da

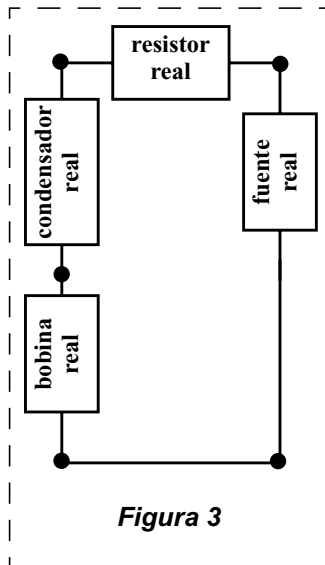
i. Recuérdese que control por tensión significa que ambas intensidades están dadas como funciones de las tensiones, aunque estas funciones pueden no ser invertibles; control por intensidad significa que las tensiones están dadas como funciones de las intensidades; y control híbrido significa que una tensión y una intensidad están dadas como funciones de la otra intensidad y la otra tensión.

**Figura 2** Circuitos lineales de segundo orden excitados con señal.



los circuitos mostrados en la Fig. 2, donde el elemento añadido en cada caso se ha dibujado en rojo.

Estos circuitos de la Fig. 2, formados por la interconexión de elementos ideales, pueden ser modelos de primer orden de otros formados por la conexión de *componentes reales* con la misma topología. Por ejemplo, el circuito de la Fig. 3, realizado conectando componentes físicos reales de los que se compran en las tiendas de componentes electrónicos, puede ser modelado en primera aproximación por el circuito ideal mostrado en la Fig. 2(a). Note que ambos circuitos son topológicamente idénticos, y que en el de la Fig. 2(a) cada elemento corresponde a un componente de la Fig. 3; el elemento condensador lineal al componente condensador; el elemento bobina lineal al componente bobina, etc.



**Figura 3**

Los circuitos de la Fig. 2 pueden corresponder también a modelos de segundo orden de circuitos reales que contengan un único componente dinámico. Por ejemplo, la bobina añadida en la Fig. 2(a) puede dar cuenta de los fenómenos inductivos que aparecen al circular corriente por los terminales del dispositivo usado para realizar el condensador. Igualmente, el condensador añadido en la Fig. 2(b) puede dar cuenta de los fenómenos capacitivos parásitos que aparecen entre las espiras del devanado empleado para construir la bobina.

Sea cual sea su origen físico, la presencia de un elemento condensador conectado a un elemento bobina puede dar lugar a la aparición del fenómeno de *resonancia eléctrica*, que no puede darse en un circuito que contenga un sólo elemento dinámico. De hecho al circuito de la Fig. 2(a) se le conoce como resonador LC serie, y al de la Fig. 2(b) como resonador LC paralelo. Algunos textos también se refieren al primero como circuito anti-resonante y al segundo como circuito resonante. La resonancia eléctrica es un fenómeno similar a la resonancia mecánica que se observa en un sistema formado por una “masa” sujeta al extremo de un muelle elástico<sup>ii</sup>. Sabemos que un sistema de este tipo es capaz de *oscilar* con una frecuencia característica, llamada *frecuencia de resonancia*, que es función del valor de la constante elástica del resorte y del valor de la propia masa. Igualmente, los resonadores eléctricos pueden oscilar a una frecuencia de resonancia que es función de los valores de la autoinducción y de la

capacidad. Estas oscilaciones *naturales*, intrínsecas y características del sistema, se manifiestan en ausencia de una señal de excitación, cuando simplemente dejamos que el sistema responda a una cierta cantidad de energía que, por cualquier procedimiento, introduzcamos en él. Por ejemplo, estirando el resorte desde su posición de equilibrio; o cargando el condensador con una cierta tensión. También se manifiestan, aunque de otro modo, cuando *forzamos* el sistema mediante una excitación exterior. En este caso, si la excitación es *armónica*, y hacemos variar su frecuencia, notaremos que a medida que la frecuencia de la excitación se acerca a la frecuencia de resonancia del sistema, la respuesta se amplifica cada vez más, alcanzando un valor máximo cuando ambas frecuencias “coinciden”<sup>iii</sup>. Si los resonadores fuesen ideales, sin pérdidas, la amplificación que se produciría al coincidir ambas frecuencias sería infinita. En la práctica puede llegar a ser muy “grande”<sup>iv</sup>. Y acarrear consecuencias desastrosas, como por ejemplo en el bien conocido caso del puente que se derrumba bajo la excitación armónica producida por el paso rítmico de una compañía de soldados. Pero en Electrónica la resonancia tiene muchas aplicaciones prácticas. Por ejemplo, sin resonancia sería imposible “sintonizar” las emisoras de radio difusión. Cuando fijamos el dial por ejemplo a 792kHz estamos haciendo que un circuito resonador de nuestro radio-receptor resuene con la señal de radio que viene a 792kHz, y no con otra, razón por la cual captamos la correspondiente emisora y no otra.

## 2.1. Descripción de Estado

Los comportamientos dinámicos de los circuitos de la Fig. 2 quedan descritos respectivamente mediante los siguientes sistemas de ecuaciones,

$$\left. \begin{aligned} C \frac{dx}{dt} &= i_z \\ L \frac{di_z}{dt} &= -x - i_z \cdot R + \varepsilon(t) \end{aligned} \right|_{\text{Figura 2(a)}} \quad \left. \begin{aligned} L \frac{dx}{dt} &= v_z \\ C \frac{dv_z}{dt} &= -x - v_z \cdot G + \varepsilon(t) \end{aligned} \right|_{\text{Figura 2(b)}} \quad (4.2)$$

donde  $G = 1/R$ . Estas ecuaciones muestran claramente la dualidad existente entre ambos circuitos, que ya se había puesto de manifiesto en el Capítulo anterior. Recuerde el lector que dualidad significa descripciones matemáticas idénticas, aunque intercambiando intensidades por tensiones, resistencias por conductancias e inductancias por capacidades.

- ii. Del mismo modo que los circuitos reales se aproximan por interconexiones de elementos ideales para su estudio, en mecánica los sistemas reales se aproximan por entes ideales. Por ejemplo, los muelles se consideran como entes perfectamente elásticos y sin masa, y la “masa” se considera como un ente rígido. En realidad, la “masa” tiene una cierta elasticidad, y el resorte tiene una cierta masa; pero en primera aproximación estos efectos secundarios pueden despreciarse. De igual modo, todo condensador real tendrá algo de inductancia y algo de resistencia, y toda bobina real tendrá algo de capacidad y algo de resistencia.
- iii. Como veremos con detalle en este Capítulo, el valor máximo de la respuesta no se produce exactamente a la frecuencia de resonancia.
- iv. En rigor habría que decir que la amplificación es mucho mayor a la frecuencia de resonancia que a otras frecuencias. Hablamos, pues, de números relativos. El valor absoluto de la amplificación pudiera ser pequeño.

A este tipo de descripción dinámica consistente en un conjunto de ecuaciones de primer orden acopladas entre sí se le denomina *descripción de estado*, y a las variables del circuito implicadas se las denomina *variables de estado*:

- $x$  e  $i_z$  para la Fig. 2(a), y
- $x$  y  $v_z$  para la Fig. 2(b).

Las variables de estado “naturales” de un circuito dinámico son las tensiones de sus condensadores y las intensidades de sus bobinas, aunque también podemos escoger otras obtenidas a partir de éstas. Por ejemplo, en los circuitos de la Fig. 2 nos interesa estudiar la evolución temporal de las variables  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ; por tanto, formularemos las ecuaciones de estado en función de estas variables. Para ello nos basta observar que se cumplen las siguientes relaciones:

$$y(t) = R \cdot i_z \Big|_{\text{Figura 2(a)}} \quad y(t) = G \cdot v_z \Big|_{\text{Figura 2(b)}} \quad (4.3)$$

que, tras sustituir en (4.2) nos permiten obtener:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{1}{R \cdot C} y(t) \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{R}{L} [-x(t) - y(t) + \varepsilon(t)] \end{aligned} \right|_{\text{Figura 2(a)}} \quad \left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{R}{L} y(t) \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{1}{R \cdot C} [-x(t) - y(t) + \varepsilon(t)] \end{aligned} \right|_{\text{Figura 2(b)}} \quad (4.4)$$

En adelante, ambas ecuaciones las unificaremos en la siguiente:

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \omega_{ox} \cdot y(t) \\ \frac{dy}{dt} &= \omega_{oy} \cdot [-x(t) - y(t) + \varepsilon(t)] \end{aligned}} \quad (4.5)$$

donde,

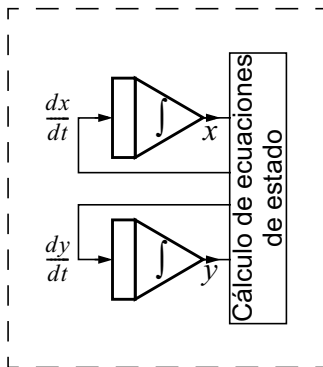
$$\omega_{ox} \equiv \frac{1}{\tau_x} \equiv \begin{cases} \frac{1}{R \cdot C} \Big|_{\text{Figura 2(a)}} \\ \frac{R}{L} \Big|_{\text{Figura 2(b)}} \end{cases} \quad \omega_{oy} \equiv \frac{1}{\tau_y} \equiv \begin{cases} \frac{R}{L} \Big|_{\text{Figura 2(a)}} \\ \frac{1}{R \cdot C} \Big|_{\text{Figura 2(b)}} \end{cases} \quad (4.6)$$

$$\left[ \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \omega_o \cdot [-x + \varepsilon(t)] \\ \omega_o \equiv \frac{1}{\tau} &\equiv \begin{cases} \frac{1}{R \cdot C} \Big|_{\text{Fig. 2(a)}} \\ \frac{R}{L} \Big|_{\text{Fig. 2(b)}} \end{cases} \end{aligned} \right]$$

Por conveniencia, en el margen de la izquierda mostramos la ecuación unificada, obtenida en el Capítulo anterior, que representa el comportamiento del circuito de la Fig. 2(a) para  $L = 0$ , y el del circuito de la Fig. 2(b) para  $C = 0$ . Observe que la ecuación en dicho margen izquierdo se obtiene haciendo  $\tau_y = 0$  en (4.5), lo que lleva a  $y(t) = -x(t) + \varepsilon(t)$ . De esta manera, definiendo  $\omega_o \equiv \omega_{ox}$  se obtiene la ecuación al margen.

### Sobre la Simulación de las Ecuaciones de Estado

Las ecuaciones de estado son herramientas muy útiles y potentes para describir el comportamiento dinámico de circuitos, tanto lineales como no-lineales. Entre otras razones, el uso de ecuaciones de estado facilita la simulación numérica del comportamiento de los circuitos, simulación que puede ser de gran utilidad para suplir la falta de evidencia experimental sobre distintos fenómenos de interés.



La simulación numérica requiere el uso de *integradores*. Estas estructuras de cómputo se construyen con gran facilidad usando cualquier lenguaje de programación científica; y están disponibles como *macros* en entornos de simulación tales como MATLAB/SIMULINK. La figura del margen de la izquierda ilustra el concepto de simulación numérica basada en integradores. Por cada variable de estado se dispone un integrador: cada integrador tiene una entrada y una salida. Para que la simulación sea correcta, en la entrada de cada integrador debemos aplicar la derivada de la correspondiente variable de estado. De esta manera, la salida de cada integrador proporcionará la variable de estado en sí. Puesto que las ecuaciones de estado nos dan las derivadas de las variables de estado en función de dichas variables, el proceso de simulación se completa disponiendo los operadores y conexiones necesarios para obtener las variables de entrada de los integradores en función de las salidas de los mismos y de las excitaciones.

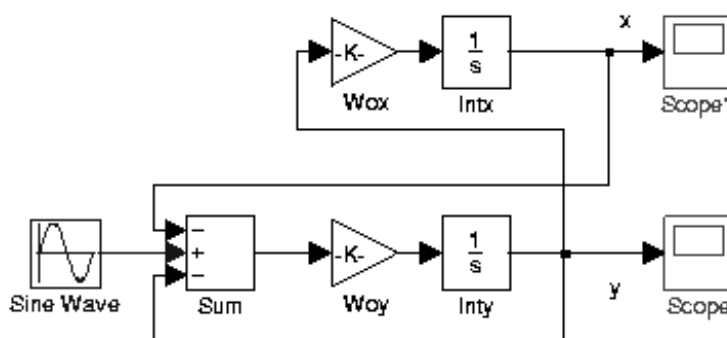
- Conocemos los valores de  $x$ ,  $y$ ,  $\varepsilon$  en el instante  $t = nT$
- Con estos valores, calculamos las derivadas,
 
$$\dot{x}(nT) = f[x(nT), y(nT), \varepsilon(nT)]$$
- Con las derivadas, calculamos el valor de las variables en  $t = (n+1)T$ :
 
$$x[(n+1)T] = x(nT) + \dot{x}(nT) \cdot T$$
- Con estos nuevos valores nos vamos al primer punto y repetimos el proceso para obtener las variables en el siguiente instante.

Este método es intrínseco a la filosofía de funcionamiento de MATLAB/SIMULINK, tal como queda de manifiesto en la siguiente aplicación. El lector debe ser consciente, no obstante, de que la simulación numérica de ecuaciones diferenciales es una disciplina compleja. La simulación en sí se puede hacer usando distintos *algoritmos*, algunos más adecuados que otros dependiendo del problema a tratar. Todos estos algoritmos implican una *discretización* de la variable temporal. Esto es,  $t$  deja de ser una variable continua, y pasa a tomar sólo un conjunto de valores discretos. En el caso más simple estos valores están separados a intervalos regulares, tal que  $t = n \cdot T$ ,  $\forall n$  entero. Esto implica que las variables y sus derivadas están también definidas sólo en esos instantes de tiempo. Así, el algoritmo más simple de integración numérica, debido a Euler, usaría los valores de las variables en  $t = n \cdot T$  para calcular la derivada en este instante, y con dicha derivada, calcular el nuevo valor de la variable en el instante posterior  $t = (n+1) \cdot T$ . El proceso se ilustra a la izquierda de esta columna de texto.

Conviene que sepamos que existen muchos algoritmos, y cada uno lleva asociado distintos parámetros que hay que controlar adecuadamente para obtener resultados correctos. La elección de los algoritmos y sus parámetros es tanto ciencia como, en muchas ocasiones, arte. En cualquier caso, ambos aspectos se quedan fuera de los objetivos de este texto.

## Aplicación 1

En la Figura de la derecha se muestra una representación esquemática de un sistema capaz de emular el comportamiento dinámico dado por (4.5) en SIMULINK, en base a conectar bloques integradores, sumadores y escaladores. Hemos añadido un bloque para proporcionar una excitación sinusoidal y dos bloques para monitorizar las variables  $x$  e  $y$ .



**Figura 4** Simulación de las ecuaciones de estado de un sistema de segundo orden en SIMULINK.

## 2.2. Descripción Escalar

Una alternativa al uso de la ecuación de estado para estudiar el comportamiento dinámico es usar la llamada *descripción escalar*, consistente en una única ecuación de segundo orden. Si tomamos derivadas en la expresión de arriba en (4.2), y combinamos con la de abajo, conseguiremos eliminar una de las variables, obteniendo:

$$L \cdot C \frac{d^2 x}{dt^2} + R \cdot C \frac{dx}{dt} + x = \varepsilon(t) \quad \left| \begin{array}{c} \text{Figura 2(a)} \end{array} \right. \quad L \cdot C \frac{d^2 x}{dt^2} + G \cdot L \frac{dx}{dt} + x = \varepsilon(t) \quad \left| \begin{array}{c} \text{Figura 2(b)} \end{array} \right. \quad (4.7)$$

que se pueden representar de forma unificada mediante una ecuación que pone de manifiesto la dualidad entre ambos circuitos,

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_{oy} \frac{dx}{dt} + (\omega_{ox} \cdot \omega_{oy}) \cdot x = (\omega_{ox} \cdot \omega_{oy}) \cdot \varepsilon(t) \quad (4.8)$$

Operando de forma similar y tras un sencillo análisis se obtienen descripciones similares para las otras dos variables mostradas en cada uno de los dos circuitos, la variable  $y$  y la variable  $z$ ,

$$\left. \begin{array}{l} \frac{d^2 y}{dt^2} + \omega_{oy} \frac{dy}{dt} + (\omega_{ox} \cdot \omega_{oy}) \cdot y = \omega_{oy} \frac{d\varepsilon}{dt} \\ \frac{d^2 z}{dt^2} + \omega_{oy} \frac{dz}{dt} + (\omega_{ox} \cdot \omega_{oy}) \cdot z = \frac{d^2 \varepsilon}{dt^2} \end{array} \right| \begin{array}{c} \text{Figura 2(a)} \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \frac{d^2 y}{dt^2} + \omega_{oy} \frac{dy}{dt} + (\omega_{ox} \cdot \omega_{oy}) \cdot y = \omega_{oy} \frac{d\varepsilon}{dt} \\ \frac{d^2 z}{dt^2} + \omega_{oy} \frac{dz}{dt} + (\omega_{ox} \cdot \omega_{oy}) \cdot z = \frac{d^2 \varepsilon}{dt^2} \end{array} \right| \begin{array}{c} \text{Figura 2(b)} \end{array} \quad (4.9)$$

Note que la dinámica de estas variables depende de las derivadas de la excitación, y no de la excitación en sí como sucede para  $x$ . De manera similar a lo que ocurriría en los circuitos de primer orden, esto nos permite anticipar que el comportamiento dinámico de las variables  $y$  y  $z$  será más sensible a las variaciones rápidas de la señal de excitación que el de la



variable  $x$ . Este hecho lo constataremos más adelante al considerar la respuesta de los circuitos resonadores en régimen sinusoidal estacionario.

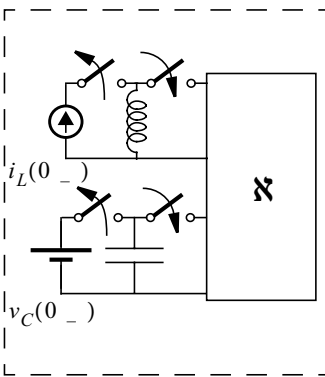
### 3. Respuesta al Estado

Consideremos primero la respuesta de los circuitos resonadores en ausencia de una excitación externa; esto es, en el caso de que  $\varepsilon(t)$  sea nula. Pese a no tener una excitación externa, el circuito puede mostrar actividad en respuesta a la energía eléctrica o magnética almacenada en sus elementos reactivos. A este tipo de respuesta se la denomina respuesta al estado.

En este punto quizás convenga recordar que la energía magnética de una bobina lineal y de un condensador lineal se pueden expresar en función de la intensidad y la caída de tensión, respectivamente:

$$E_{\text{bobina}}(0_-) = \frac{1}{2}L \cdot i_L(0_-)^2 \quad E_{\text{condensador}}(0_-) = \frac{1}{2}C \cdot v_C(0_-)^2 \quad (4.10)$$

Suponiendo que, por el medio que sea, creamos un cierto estado energético en el circuito en el instante  $t = 0_+$ , estado que queda descrito por el valor de la tensión en el condensador y el de la intensidad en la bobina en ese instante, la respuesta al estado consiste en las formas de onda que se producen en el proceso de *disipación*<sup>v</sup> de la energía asociada a dicho estado para  $t > 0$ . La figura del margen de la izquierda ilustra un experimento físico idealizado para observar la respuesta al estado. En este experimento, los elementos reactivos adquieren energía mediante unas llaves que permanecen en ON hasta el instante  $t = 0_-$ , conectándose después al circuito resistivo  $\mathbb{R}$  mediante llaves que se ponen en ON a partir del instante  $t = 0_+$ . La respuesta al estado es la observada a partir de dicho instante.



#### 3.1. Formulación Matemática

Fijemos nuestra atención en las descripciones escalares del comportamiento dinámico dadas en (4.8) y (4.9). Nos limitaremos de momento a la variable  $x$ ,

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_{oy} \frac{d}{dt} x + (\omega_{ox} \cdot \omega_{oy}) \cdot x = 0 \quad (4.11)$$

Supongamos que en el instante  $t = 0_-$  introducimos una tensión  $v_C(0_-)$  en el condensador y una intensidad  $i_L(0_-)$  en la bobina; es

v. En el tema sobre circuitos de primer orden vimos que la energía se disipa si la resistencia es positiva. Sin embargo, si la resistencia es negativa, la energía no se disipa sino que aumenta. De momento, aquí consideramos que la resistencia es positiva, razón por la que afirmamos que la energía se disipa.



decir creamos un cierto estado inicial. Recordemos que ni la tensión de un condensador ni la intensidad de una bobina pueden experimentar saltos de discontinuidad; es decir, que se deben mantener continuas en el tiempo. Esto significa que la tensión en el condensador y la intensidad en la bobina en el instante  $t = 0_+$  tienen los valores que introdujimos en  $t = 0_-$ . Por lo tanto, la simple inspección de los circuitos de la Fig. 2 nos permite obtener:

$$\begin{aligned} x(0_+) &= \begin{cases} v_C(0_-) \big|_{\text{Figura 2(a)}} \\ i_L(0_-) \big|_{\text{Figura 2(b)}} \end{cases} \\ \dot{x}(0_+) \equiv \frac{dx}{dt} \bigg|_{t=0} &= \begin{cases} \frac{i_L(0_-)}{C} \big|_{\text{Figura 2(a)}} \\ \frac{v_C(0_-)}{L} \big|_{\text{Figura 2(b)}} \end{cases} \end{aligned} \quad (4.12)$$

Las ecuaciones (4.11) y (4.12) nos dan la ley de evolución y las condiciones iniciales de la variable  $x$ . Con ello tenemos toda la información necesaria para calcular la expresión de la forma de onda asociada a esta variable. Sin embargo, tal información no está disponible para las  $y$  y  $z$ .

En el caso de estas variables conocemos las ecuaciones que rigen su evolución temporal; de hecho estas ecuaciones son idénticas a (4.11), salvo la diferencia obvia de que en lugar de  $x$  aparecerá  $y$  o  $z$ . Pero a partir de la tensión en el condensador y la intensidad en la bobina no podemos calcular las condiciones iniciales ni de  $y$  ni de  $z$ . Estas condiciones iniciales dependen de las derivadas primeras de la tensión en el condensador y/o la intensidad en la bobina. Por lo tanto, para obtenerlas debemos primero resolver para la variable  $x$ . De hecho, una vez obtenida la expresión de  $x(t)$  podemos obtener las variables  $y$  y  $z$  sin necesidad de resolver ninguna ecuación diferencial, tal como se muestra en el margen de la izquierda, donde las ecuaciones de arriba son para el circuito de la Fig. 2(a) y las de abajo para el de la Fig. 2(b).

$$\begin{aligned} y &= CR \frac{dx}{dt} & z &= LC \frac{d^2 x}{dt^2} \\ y &= \frac{L dx}{R dt} & z &= LC \frac{d^2 x}{dt^2} \end{aligned}$$

### 3.2. Ecuación Característica. Frecuencias Naturales

La expresión (4.11) es una ecuación diferencial lineal y *homogénea*. La solución de este tipo de ecuaciones, sea cual sea su orden, consiste en una combinación lineal de funciones exponenciales,

$$x(t) = k_1 \cdot e^{s_1 \cdot t} + k_2 \cdot e^{s_2 \cdot t} + \dots + k_n \cdot e^{s_n \cdot t} + \dots \quad (4.13)$$

cuyo número coincide con el orden de la ecuación; en nuestro caso el orden es dos y la solución contiene por tanto dos funciones exponenciales,

$$x(t) = k_1 \cdot e^{s_1 \cdot t} + k_2 \cdot e^{s_2 \cdot t} \quad (4.14)$$

Las constantes  $k_1$  y  $k_2$  pueden ser reales o complejas y sus valores dependen de las condiciones iniciales. Los exponentes  $s_1$  y  $s_2$ , llamados *frecuencias naturales* del circuito, pueden ser también reales o complejos<sup>vi</sup>, pero sus valores son independientes de las condiciones iniciales.

El primer paso para encontrar la solución es calcular las frecuencias naturales. Estas frecuencias naturales son las raíces de la denominada *ecuación característica*, que en el caso genérico de una ecuación diferencial lineal homogénea de orden  $N$  se obtiene tal como se indica a continuación,

$$\sum_{k=0, N} a_k \frac{d^k x}{dt^k} = 0 \quad \rightarrow \quad D(s) = \sum_{k=0, N} a_k \cdot s^k \quad (4.15)$$

Para la ecuación de segundo orden que nos ocupa, dada por (4.11), obtenemos pues la siguiente ecuación característica:

$$D(s) = s^2 + \omega_{oy} \cdot s + \omega_{ox} \cdot \omega_{oy} \quad (4.16)$$

cuyas raíces,

$$\left. \begin{matrix} s_1 \\ s_2 \end{matrix} \right\} = -\frac{\omega_{oy}}{2} \pm \sqrt{\frac{\omega_{oy}^2}{4} - \omega_{ox} \cdot \omega_{oy}} \quad (4.17)$$

son las frecuencias naturales del circuito. Estas frecuencias naturales serán reales si  $4\omega_{ox} \cdot \omega_{oy} < \omega_{oy}^2$ , y complejas en caso contrario. Por otra parte, las complejas pueden ser imaginarias puras, si  $\omega_{oy} = 0$ ; o tener parte real. Asimismo, las reales pueden ser iguales entre sí, si  $\omega_{oy}^2 = 4\omega_{ox} \cdot \omega_{oy}$ , o distintas. Así pues, en el estudio de la respuesta al estado de los circuitos RLC de segundo orden surge una amplia casuística que conviene desgranar. Por conveniencia, dicho desgrane no lo haremos en función de los parámetros  $\omega_{ox}$  y  $\omega_{oy}$ , sino en función de otros más generales y que se usan típicamente como indicadores del comportamiento dinámico de los circuitos y sistemas de segundo orden. Estos son la *frecuencia de resonancia* ( $\omega_0$ ) y el *coeficiente de amortiguamiento* ( $\xi$ ), que definimos a continuación.

En un circuito L.I.T. de segundo orden, sean los RLC estudiados aquí u otros cualesquiera, la *ecuación característica* se puede expresar como:

vi. En el caso de que las frecuencias naturales y los coeficientes sean complejos, se combinan de forma tal que la expresión (4.14) resulte en  $x(t)$  real.

$$D(s) = s^2 + 2\xi \cdot \omega_o \cdot s + \omega_o^2 \quad (4.18)$$

donde,

$$\omega_o^2 = \omega_{ox} \omega_{oy} = \frac{1}{LC} \quad \text{Fig. 2(a,b)}$$

$$\xi = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\omega_{oy}}{\omega_{ox}}} = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}} \quad \text{Fig. 2(a)}$$

$$\xi = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\omega_{oy}}{\omega_{ox}}} = \frac{1}{2R} \sqrt{\frac{L}{C}} \quad \text{Fig. 2(b)}$$

$$\begin{aligned} \omega_o &\equiv \text{frecuencia de resonancia} \\ \xi &\equiv \text{coeficiente de amortiguamiento} \end{aligned} \quad (4.19)$$

Las relaciones entre estos parámetros y los usados hasta ahora en el tema se muestran en el margen de la izquierda.

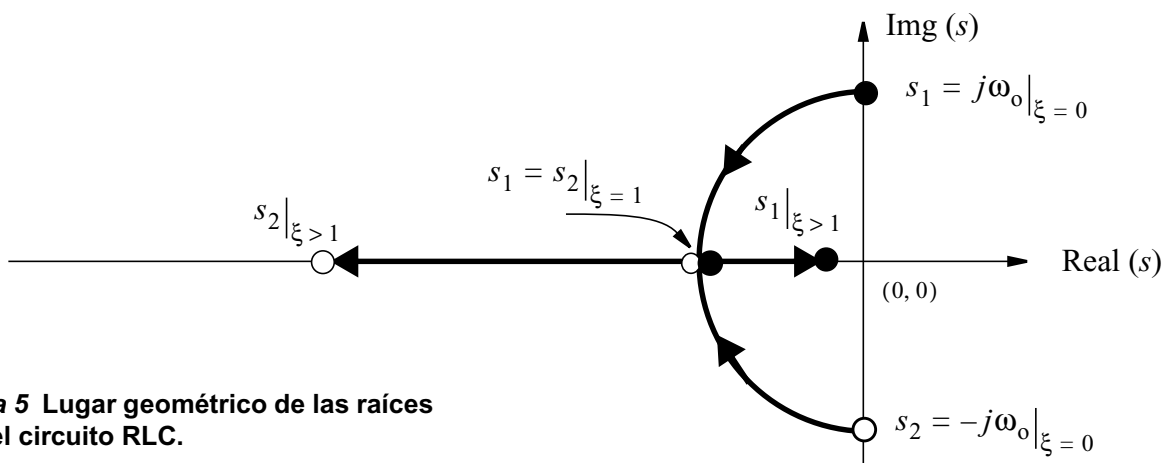
En función de la frecuencia de resonancia y el coeficiente de amortiguamiento, las frecuencias naturales se obtienen como:

$$\left. \begin{matrix} s_1 \\ s_2 \end{matrix} \right\} = -\xi \cdot \omega_o \pm \sqrt{(\xi \cdot \omega_o)^2 - \omega_o^2} \quad (4.20)$$

y pueden ser:

- Complejas conjugadas; caso que se da para  $0 \leq \xi < 1$ ; este caso origina un tipo de respuesta que se conoce como *respuesta sub-amortiguada*.
- Reales e iguales; caso que da para  $\xi = 1$ ; este caso origina un tipo de respuesta que se conoce como *respuesta críticamente amortiguada*.
- Reales y distintas; caso que se da para  $1 < \xi < \infty$ ; este caso origina un tipo de respuesta que se conoce como *respuesta sobre-amortiguada*.

Las posibles localizaciones de las raíces se ilustran en la Fig. 5, donde se ha representado el lugar geométrico de tales raíces con  $\omega_o$  fijo y  $\xi$  variando desde 0 hasta  $\infty$ . Este tipo de representación que muestra cómo varían las raíces con un parámetro es una herramienta bastante común y extendida en el estudio del comportamiento dinámico de los circuitos electrónicos.



**Figura 5** Lugar geométrico de las raíces para el circuito RLC.

Veamos ahora las distintas expresiones matemáticas de la respuesta al estado para cada una de las clases anteriores. Como ilustración usaremos formas de onda obtenidas con MATLAB/SIMULINK para el modelo desarrollado en la Aplicación 1 de este Capítulo; con los siguientes valores de los parámetros:

$$\begin{aligned}\omega_0 &= 2\pi \\ \xi &= 0, 0.1, 0.5, 1, 2, 10\end{aligned}\tag{4.21}$$

y las siguientes condiciones iniciales  $x(0) = 1$  e  $y(0) = 0 \Rightarrow \dot{x}(0) = 0$ .

## 4. Tipos de Respuesta

### 4.1. Respuesta Sin Pérdidas

Empecemos por el caso sub-amortiguado. En particular, suponiendo que el coeficiente de amortiguamiento  $\xi$  es nulo. En este caso las frecuencias naturales son imaginarias puras. Substituyendo en (4.14) e imponiendo que se cumplan las condiciones iniciales dadas en (4.12) se obtiene la siguiente respuesta al estado:

$$x(t) = k \cdot \cos(\omega_0 \cdot t - \theta)\tag{4.22}$$

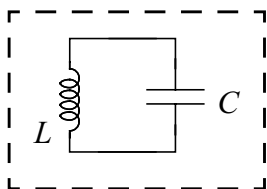
donde,

$$k = x(0) \cdot \sec(\theta) \quad \theta = \operatorname{atan}\left(\frac{\dot{x}(0)}{\omega_0 \cdot x(0)}\right)\tag{4.23}$$

En la Fig. 6(a) se ilustra este tipo de respuesta mediante una simulación con MATLAB/SIMULINK del modelo mostrado en la Aplicación 1, con  $\omega_0 = 2\pi$  rad/s,  $x(0) = 1$  e  $y(0) = 0$ . De esta representación, y de la propia ecuación (4.22), concluimos que la respuesta al estado es *periódica*. Esto es, partiendo de las condiciones iniciales almacenadas en los elementos reactivos, el circuito evoluciona dando lugar a una forma de onda repetitiva cuya frecuencia coincide con la de resonancia y es independiente de las condiciones iniciales, y cuya amplitud y fase dependen de las condiciones iniciales. Físicamente esto significa que la energía inicial almacenada en el circuito no se disipa, aunque no permanece invariable. De hecho lo que ocurre es que la energía se transforma continuamente entre dos formas distintas, manteniéndose constante la energía total.

### 4.2. Resonador Ideal

Para mejor comprender esta afirmación, conviene hacer notar que  $\xi = 0$  corresponde a  $R = 0$  para el circuito de la Fig. 2(a), y a  $R \rightarrow \infty$  para el de la Fig. 2(b). En ambos casos, el circuito equivalente es el que se



muestra en la figura del margen izquierdo, constituido por la conexión de la bobina y el condensador. Tal circuito es un *resonador eléctrico ideal*, un ente similar al resonador mecánico formado por un muelle ideal que sujeta una masa, también ideal, que se mueve sin rozamiento sobre una superficie. En el resonador eléctrico ideal, y partiendo de una energía inicial almacenada en el condensador o en la bobina, se produce un intercambio continuo entre energía magnética de la bobina y energía eléctrica del condensador, intercambio que origina un movimiento periódico en el transcurso del cual la energía total se preserva. Y se preserva porque la transformación entre las dos formas de energía se produce sin disipación alguna, pues no hay resistencia. Al igual que en un resonador mecánico ideal la energía cinética de la masa se transforma continuamente en energía potencial del muelle, y viceversa; sin disipación debido a que idealmente no hay rozamiento.

### 4.3. Respuesta Sub-Amortiguada

En este caso  $\xi$  no es nulo, pero lo suficientemente pequeño para que se cumpla la condición  $0 < \xi < 1$ . Las frecuencias naturales siguen siendo imaginarias pero tienen parte real no nula, tal como se ilustra en la Fig. 5. De (4.20) concluimos que la parte real es:

$$\alpha = -\xi \cdot \omega_0 \quad (4.24)$$

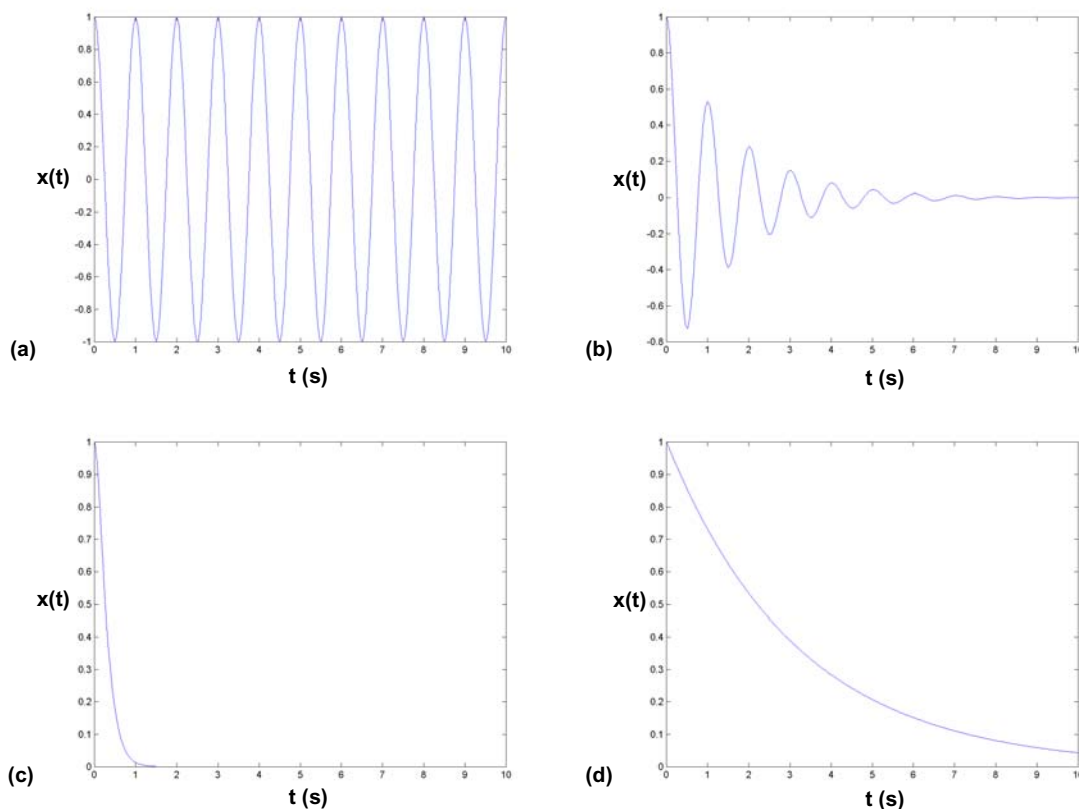
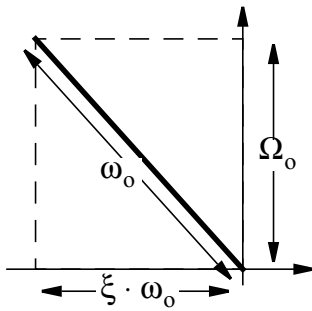


Figura 6 Tipos de respuesta al estado para los resonadores RLC.



y que la parte imaginaria está dada por:

$$\Omega_0 = \sqrt{\omega_0^2 - (\xi \cdot \omega_0)^2} \quad (4.25)$$

que se ilustra gráficamente en la figura del margen de la izquierda.

Substituyendo en (4.14) e imponiendo que se cumplan las condiciones iniciales dadas en (4.12) se obtiene la siguiente respuesta al estado:

$$x(t) = k \cdot e^{-\xi \cdot \omega_0 \cdot t} \cdot \cos(\Omega_0 \cdot t - \theta) \quad (4.26)$$

donde,

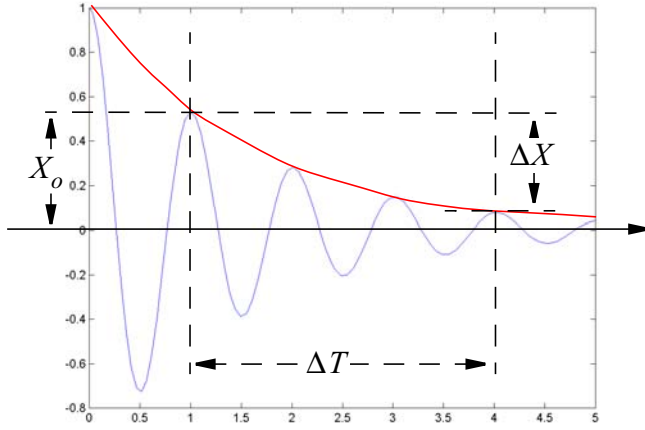
$$k = x(0) \cdot \sec(\theta) \quad \theta = \operatorname{atan}\left(\frac{\xi \cdot \omega_0}{\Omega_0} + \frac{\dot{x}(0)}{\Omega_0 \cdot x(0)}\right) \quad (4.27)$$

En la Fig. 6(b) se ilustra esta respuesta mediante una simulación con MATLAB/SIMULINK con  $\omega_0 = 2\pi$ ,  $\xi = 0.1$ ,  $x(0) = 1$  e  $y(0) = 0$ . Tal como muestra la ecuación (4.26), la respuesta experimenta un “movimiento” armónico, al igual que en el caso sin pérdidas, aunque su frecuencia no coincide con la de resonancia y, lo que es más importante, su amplitud decae exponencialmente con el tiempo. Esto nos indica que la energía no se preserva sino que una parte se disipa en cada ciclo. Tal disipación es debida a la resistencia no nula.

### Ejercicio 1

Suponga que, por el procedimiento que sea, mide experimentalmente la forma de onda de una respuesta sub-amortiguada. Sugiera un procedimiento para obtener los valores del coeficiente de amortiguamiento y la frecuencia de resonancia a partir de datos medidos sobre dicha forma de onda.

El procedimiento consiste en tomar tres datos sobre la forma de onda. Existen distintas posibilidades, aunque una de las más convenientes es la que se muestra en la Fig. 7.



**Figura 7** Cálculo de los parámetros de la respuesta subamortiguada.

Básicamente consiste en medir los valores de la señal en dos crestas, donde el valor del factor sinusoidal en (4.26) es la unidad. Mientras mayor sea la separación entre estos puntos menor será el valor relativo del error de medida. En la figura las crestas están separadas tres períodos. El intervalo temporal  $\Delta T$  entre las dos medidas es igual por lo tanto a tres períodos de la señal sinusoidal, lo que nos permite obtener la frecuencia angular de dicha señal,

$$\Omega_o = \frac{6\pi}{\Delta T} \quad (4.28)$$

Por otra parte, puesto que entre las crestas la amplitud se atenúa según el factor exponencial en (4.26), es inmediato obtener,

$$\left. \begin{aligned} X_o &= k \cdot e^{-\xi \cdot \omega_o \cdot t} \\ X_o - \Delta X &= k \cdot e^{-\xi \cdot \omega_o \cdot (t + \Delta T)} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \xi = -\frac{1}{\omega_o \cdot \Delta T} \ln\left(\frac{X_o - \Delta X}{X_o}\right) \quad (4.29)$$

#### 4.4. Respuesta Críticamente-Amortiguada

Este caso corresponde a  $\xi = 1$ , situación en la cual (4.20) nos muestra que la raíces son reales e iguales. Así,

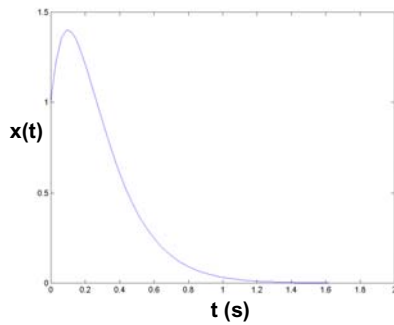
$$x(t) = (k + k' \cdot t) \cdot e^{-\xi \cdot \omega_o \cdot t} \quad (4.30)$$

con,

$$k = x(0) \quad k' = \xi \cdot \omega_o \cdot x(0) + \dot{x}(0) \quad (4.31)$$

En la Fig. 6(c) se ilustra este tipo de respuesta mediante una simulación con MATLAB/SIMULINK del esquemático de la Fig. 4 con  $\omega_o = 2\pi$ ,  $\xi = 1$ ,  $x(0) = 1$  e  $y(0) = 0$ . Ahora, tal como muestra (4.30), la respuesta no incluye ninguna componente armónica. Sin embargo, esto no significa que la forma de onda sea monótona con el tiempo. Bien es cierto que la forma de onda usada como ilustración en la Fig. 6(c) es monótona decreciente. Pero esto es consecuencia de las condiciones iniciales escogidas. Puede ocurrir, sin embargo, que la forma de onda experimente cambios de pendiente a medida que transcurre el tiempo.





**Figura 8** Ejemplo de respuesta críticamente-amortiguada.

Para ilustrar esto, supongamos unas condiciones iniciales distintas de las anteriores. Con aquella, el decaimiento de la forma de onda era monotónico; la pendiente de la forma de onda con el tiempo es siempre negativa, tal como se muestra en la Fig. 6(c). Esto es debido a que  $y(0) = 0$ .

Con otras condiciones iniciales, en particular si la derivada es distinta de cero, puede haber un cambio de pendiente, tal como se ilustra en la Fig. 8 para  $\omega_0 = 2\pi$ ,  $\xi = 1$ ,  $x(0) = 1$  e  $y(0) = 10/\pi$  que, de acuerdo con (4.12) y (4.19), resulta en  $\dot{x}(0) = 10$ . Se observa que la pendiente de la forma de onda es inicialmente positiva, pasando a negativa tras un intervalo de tiempo.

#### 4.5. Respuesta Sobre-Amortiguada

Este caso corresponde a  $1 < \xi < \infty$ , situación en la cual (4.20) nos muestra que la raíces son reales y distintas. Así,

$$x(t) = k_1 \cdot e^{s_1 \cdot t} + k_2 \cdot e^{s_2 \cdot t} \quad (4.32)$$

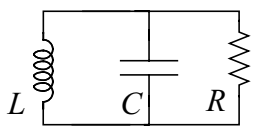
con,

$$k_1 = \frac{\dot{x}(0) - x(0) \cdot s_2}{s_1 - s_2} \quad k_2 = \frac{\dot{x}(0) - x(0) \cdot s_1}{s_2 - s_1} \quad (4.33)$$

En la Fig. 6(d) se ilustra este tipo de respuesta mediante una simulación con MATLAB/SIMULINK del esquemático de la Fig. 4 con  $\omega_0 = 2\pi$ ,  $\xi = 10$ ,  $x(0) = 1$  e  $y(0) = 0$ . Tal como en el caso críticamente amortiguado, la respuesta simplemente decae con el tiempo, aunque a un ritmo mucho más lento que en dicho caso.

#### 4.6. Comparando los Tipos de Respuesta

Llegados a este punto puede ser de interés comparar los distintos tipos de respuesta. En particular mediante dicha comparación intentaremos proporcionar una explicación lógica a los calificativos usados para dichos tipos. Consideremos, para centrar la discusión, el circuito de la Fig. 2(b) que repetimos por conveniencia en la figura de la derecha, donde la excitación ha sido eliminada pues estamos estudiando la respuesta al estado. En esta figura hemos añadido las expresiones de la frecuencia de resonancia y el coeficiente de amortiguamiento en función de los valores de los elementos.



$$\omega_0^2 = \frac{1}{L \cdot C} \quad \xi = \frac{1}{2R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

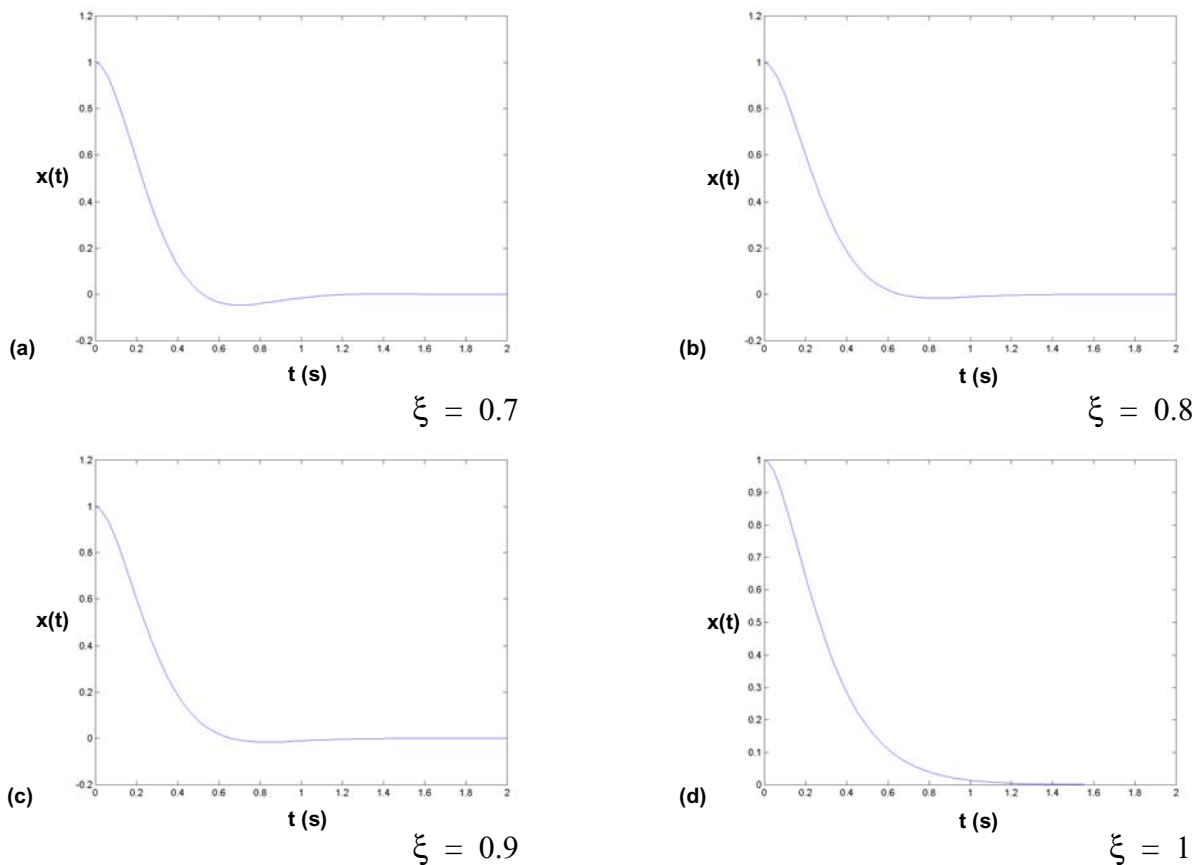
Suponga que en este circuito la capacidad y la autoinducción no cambian; por tanto, la frecuencia de resonancia tampoco cambia. Suponga, por otra parte, que la resistencia sí puede cambiar; más aún que pretende ajustarla para encontrar el valor que permite disipar una cierta cantidad de energía almacenada inicialmente en el circuito en el menor tiempo posible. Note que actuando sobre el valor de la resistencia puede cambiar el coeficiente de amortiguamiento. El problema que se le plantea es, pues, determinar el valor de dicho coeficiente que resulta en el transitorio de descarga más rápido posible. A este respecto es evidente que la opción sin pérdidas,  $R \rightarrow \infty$ , debe ser descartada ya que en este caso la respuesta es periódica, no llega a amortiguarse nunca. Por otra parte, la opción sub-amortiguada con valores pequeños de  $\xi$  tampoco es conveniente pues produce un movimiento periódico cuya amplitud decrece muy lentamente. Tampoco es conveniente la opción sobre-amortiguada con valores grandes de  $\xi$ , pues esto produce una frecuencia natural  $s_1$  cuyo módulo es muy pequeño y, por tanto, una función exponencial que varía muy lentamente con el tiempo<sup>vii</sup>. La opción óptima estará alrededor del valor correspondiente al caso críticamente amortiguado, tal como se ilustra con el conjunto de formas de onda de la Fig. 9, todas ellas obtenidas con  $\omega_0 = 2\pi$ ,  $x(0) = 1$  e  $y(0) = 0$ , y cada una con un valor distinto del coeficiente de amortiguamiento. Como se ve, la respuesta más rápida se obtiene sub-amortiguando ligeramente, lo suficientemente poco para que la forma de onda rebase sólo levemente el valor final en su excursión negativa.

## Ejercicio 2

Al rebase máximo que se produce respecto al valor final en una respuesta sub-amortiguada se le conoce con el nombre de *sobredisparo*. Calcule el sobredisparo en función de la frecuencia de resonancia y el coeficiente de amortiguamiento.

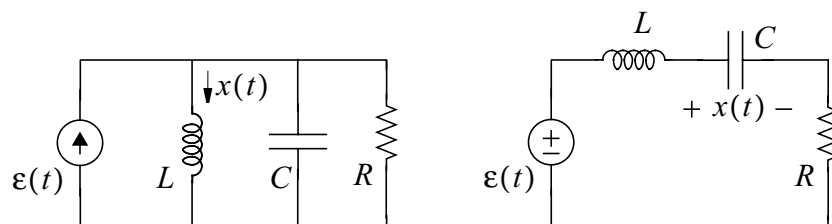
---

vii. En los exponentes de (4.32) el tiempo aparece multiplicado por las frecuencias naturales, que son números reales y negativos. De igual modo, a cada frecuencia natural le podemos asimilar una constante de tiempo, respectivamente  $\tau_1 = -1/s_1$  y  $\tau_2 = -1/s_2$ , y formular la evolución temporal en términos de estas constantes de tiempo. Así, cuando  $|s_1|$  es muy pequeño, la constante de tiempo asociada resulta ser muy grande y esto explica la lentitud del transitorio.



**Figura 9** Formas de onda obtenidas en función del coeficiente de amortiguamiento.

## 5. Respuesta a una Entrada de DC



**Figura 10** Circuitos lineales de segundo orden excitados con una señal de DC.

Veamos ahora la respuesta del circuito a una excitación de DC. Para ello consideremos los dos circuitos representados en la Fig. 10, donde  $\varepsilon(t) = E$ . Ambos tienen la misma descripción matemática:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\xi \cdot \omega_0 \cdot \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 \cdot x = \omega_0^2 \cdot \varepsilon(t) \quad (4.34)$$

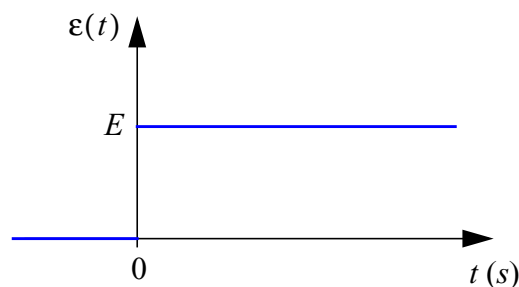
A este tipo de ecuación diferencial se le denomina ecuación lineal completa de segundo orden. Se resuelve igual que la homogénea vista ante-

riormente, con la diferencia de que es necesario añadir a la solución de la homogénea un término cualquiera que sea solución particular de la ecuación:

$$x(t) = k_1 \cdot e^{s_1 \cdot t} + k_2 \cdot e^{s_2 \cdot t} + x_o(t) \quad (4.35)$$

donde  $x_o(t)$  es solución particular de (4.34).

Visualicemos la señal  $\varepsilon(t)$  de la forma mostrada en la Fig. 11. Resulta lógico suponer que el circuito va a evolucionar acercándose indefinidamente a  $\varepsilon(t)$ , sean cuales sean las condiciones iniciales. Por tanto la parte natural de la respuesta va a decaer con el tiempo y, al cabo de un intervalo de tiempo infinito, el circuito sólo va a mostrar la respuesta a la entrada, que también va a ser por tanto solución particular del mismo.



**Figura 11 Señal de DC.**

Entonces ya tenemos la solución particular que necesitamos:  $x_o(t) = E$ .

Por lo demás las constantes  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $s_1$  y  $s_2$  se obtienen de modo similar al descrito en la sección anterior. Note el lector que en este caso  $k_1$  y  $k_2$  se obtendrán de aplicar las condiciones iniciales  $x(0)$  y  $\dot{x}(0)$  a la solución completa (4.35), y no a la solución de la ecuación diferencial homogénea como en la Sección 4.