02_01_02

NOTACIÓN DE VOIGT,

ESTRUCTURA DE PROPIEDADES,

PROPIEDADES EN UNA DIRECCIÓN

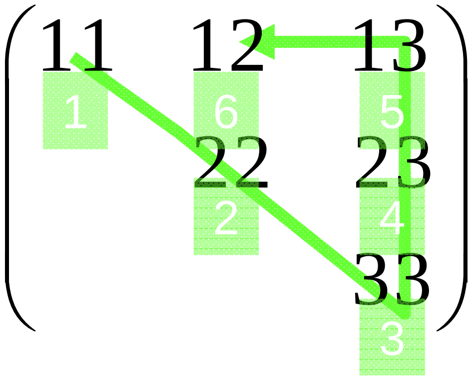
Notación de Voigt

n de Voigt es en general aplicable a cualquiera pareja de índices respecto a la cual la propiedad correspondiente es simétrica.

le Voigt: para los dos índices de τ_{ij} y ε_{ij} , para los dos últimos índices de d_{ijk} y para las dos parejas de índices de c_{ijkl}, s_{ijkl} es:

11	22	33	23 y 32	13 y 31	12 y 21
1	2	3	4	5	6

Como regla mnemotécnica sencilla, recordar el diagrama:



Notación de Voigt

La notación de Voigt facilita la visualización, simplifica las operaciones pero las variables con índices de Voigt

no se transforman como tensores

Para cambiar de coordenadas es preciso volver a la notación completa y aplicar la regla de transformación de coordenadas de tensores

Muy importante

s de segundo orden T_{ij} simétricos se representan como vectores 6×1

s de tercer orden T_{ijk} simétricos respecto a un par de índices se tan como matrices 3×6 (simétrico en j y k) o 6×3 (simétrico en i y j)

s de cuarto orden T_{ijkl} simétricos respecto a los dos pares de índices o en i y j y en k y l) se representan como matrices 6×6

ción de Voigt es cómoda pero hay que usarla con cuidado

os experimentales casi siempre se encuentran en notación de Voigt

Notación de Voigt

mantenga la forma de las ecuaciones constitutivas, se introduce un factor de 2 en algunos:

eformación

si m es 1, 2 o 3

ij si m es 4, 5 o 6

según la tabla

Esfuerzo

$$\tau_m = \tau_{ij}$$

$ij \rightarrow m$ según la tabla

Módulos piezoeléctricos

$$d_{im} = d_{ijk} \quad \text{si } m \text{ es } 1, 2 \text{ o } 3$$

$$d_{im} = 2\, d_{ijk} \quad \text{si } m \text{ es } 4, 5 \text{ o } 6$$

$jk \rightarrow m$ según la tabla

Notación de Voigt

Complianza

jkl si m y n son 1, 2 o 3

s_{ijkl} si m o n, pero no los dos, son 4, 5 o 6

s_{ijkl} si m y n son 4, 5 o 6

$kl \to n$ según la tabla

Rigidez (módulos)

$$c_{mn} = c_{ijkl}$$

$ij \to m \quad kl \to n$ según la tabla

iciones (y gracias a los factores de 2 y 4) se puede escribir:

$$= \underset{\sim}{d}\vec{\tau} \qquad \vec{\varepsilon}^{\,T} = \underline{E}^T \underset{\sim}{d} \qquad \vec{\tau} = \underset{\sim}{c}\vec{\varepsilon} \qquad \vec{\varepsilon} = \underset{\sim}{s}\vec{\tau}$$

$$= d_{ij}\tau_j \qquad \varepsilon_i = E_j d_{ji} \qquad \tau_i = c_{ij}\varepsilon_j \qquad \varepsilon_i = s_{ij}\tau_j$$

Notación de Voigt o matricial

$$= \underline{\underline{\underline{d}}} : \underline{\underline{\tau}} \qquad \underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{E} \cdot \underline{\underline{\underline{d}}} \qquad \underline{\underline{\tau}} = \underline{\underline{\underline{\underline{c}}}} : \underline{\underline{\varepsilon}} \qquad \underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\underline{\underline{s}}}} : \underline{\underline{\tau}}$$

$$= d_{ijk}\tau_{kj} \qquad \varepsilon_{ij} = E_k d_{kij} \qquad \tau_{ij} = c_{ijkl}\varepsilon_{lk} \qquad \varepsilon_{ij} = s_{ijkl}\tau_{lk}$$

Notación tensorial

Notación de Voigt

e:

• variable subrayada: tensorial, orden = nº de subrayados. Se transforma según la regla de transformación de tensores cartesianos.

• variable subrayada con tilde: matriz (p.ej. ortogonal, de rotación) o variable tensorial de 3er orden representada como matriz por medio de la notación de Voigt. **No** se transforma como tensor. Para transformarla a otros ejes, volver primero a la notación tensorial normal, transformar como tensor y retornar a la notación de Voigt.

• variable con flecha superior de vector: no es tensor de 1er orden sino variable tensorial de 2º orden representada como vector por medio de la notación de Voigt. **No** se transforma como tensor. Transformación como en el punto anterior.

Propiedades de 1er orden

...es como la piroelectricidad y la polarización eléctrica bajo ...fuerzo hidrostático) son propiedades tensoriales de 1er orden.

...los materiales que pertenecen a las clases polares pueden ...edades de este orden.

...*ándolas como vectores*, tienen las estructuras que se muestran ...ientes páginas. Se han usado los símbolos:

· elemento nulo

● elemento no nulo

Propiedades de 1er orden

n n nal	Clases	Material orientado o compuesto análogo	Estructura, en forma de vector	Número de componentes independientes
	1	**TRICLÍNICO**	$\begin{bmatrix}\bullet\\ \bullet\\ \bullet\end{bmatrix}$	3
	2	**MONOCLÍNICO**	$\begin{bmatrix}\cdot\\ \bullet\\ \cdot\end{bmatrix}$	1
	m	**MONOCLÍNICO**	$\begin{bmatrix}\bullet\\ \cdot\\ \bullet\end{bmatrix}$	2
CO	$mm2$	**ORTOTRÓPICO, LÁMINA BIORIENTADA NO EQUIBIAXIAL**	$\begin{bmatrix}\cdot\\ \cdot\\ \bullet\end{bmatrix}$	1

Propiedades de 1er orden

n n nal	Clases	Material orientado o compuesto análogo	Estructura, en forma de vector	Número de componentes independientes
	$4,4mm$ $3,3m$ $6,6mm$	**Cerámica PZT polarizada Polímero semicristalino polarizado**	$\begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \bullet \end{bmatrix}$	1

edades de 2º orden, tensor simétrico

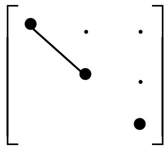
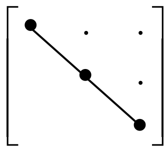
es como la difusividad másica, la conductividad térmica, la
lad y resistividad eléctrica, la permitividad eléctrica, las
dades eléctrica y magnética son propiedades tensoriales de 2º
tricas que relacionan dos tensores de 1^er orden. Otras, como
ntes de expansión térmica relacionan un escalar con un tensor
de 2º orden. Todas estas propiedades son simétricas (sólo se
la parte triangular superior). *Representándolos como*
enen las estructuras que se muestran en las siguientes
e han usado los símbolos:

·	elemento nulo
•	elemento no nulo
• – •	elementos iguales

ropiedades 2º orden, simétricas

n n nal	Clases	Material orientado o compuesto análogo	Estructura, en forma de matriz	Número de componentes independientes
	todas	**TRICLÍNICO**	$\begin{bmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ & \bullet & \bullet \\ & & \bullet \end{bmatrix}$	6
	todas	**MONOCLÍNICO**	$\begin{bmatrix} \bullet & \cdot & \bullet \\ & \bullet & \cdot \\ & & \bullet \end{bmatrix}$	4
CO	**todas**	**ORTOTRÓPICO, LÁMINA BIORIENTADA NO EQUIBIAXIAL, COMPUESTO LAMINAR UNIDIRECCIONAL (láminas perpendiculares al eje ③), MADERA**	$\begin{bmatrix} \bullet & \cdot & \cdot \\ & \bullet & \cdot \\ & & \bullet \end{bmatrix}$	3

Propiedades 2º orden, simétricas

n n nal	Clases	Material orientado o compuesto análogo	Estructura, en forma de matriz	Número de componentes independientes
	todas	FILAMENTO ORIENTADO UNIAXIALMENTE, FIBRA (dirección de orientación coincidente con el eje ③) COMPUESTO LAMINAR CUASI-ISOTRÓPICO (láminas perpendiculares al eje ③) COMPUESTO REFORZADO CON FIBRA (fibras alineadas en dirección ③)		2
	todas	COMPUESTO ISÓTROPO		1

ezoelectricidad (props. 3er orden)

ción de Voigt, la matriz de módulos piezoeléctricos para las clases cristalográficas y morfologías de compuestos tienen las que se muestran en las siguientes páginas. Se han usado los símbolos:

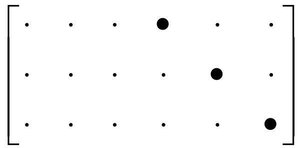
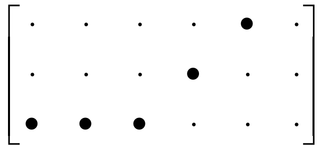
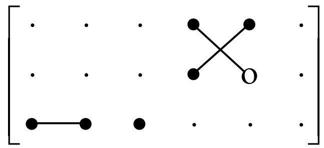
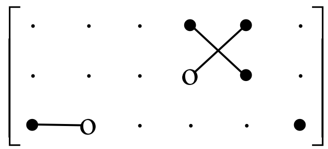
·	elemento nulo
•	elemento no nulo
• – •	elementos iguales
• – o	elementos iguales en módulo, signo contrario
⊙	-2 veces el valor del elemento • al que está conectado

teriales pertenecientes a clases centrosimétricas no pueden r efecto piezoeléctrico. En las tablas siguientes se omiten por tanto las clases centrosimétricas.

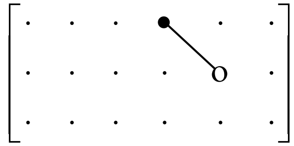
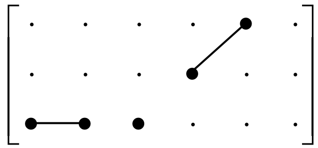
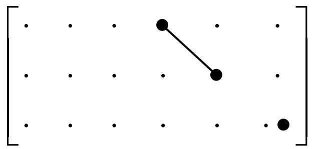
Piezoelectricidad

n n nal	Clases	Material orientado o compuesto análogo	Estructura de d_{ij}	Número de componentes independientes
	1	**TRICLÍNICO**	$\begin{bmatrix} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \end{bmatrix}$	18
	2	**MONOCLÍNICO**	$\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \bullet & \cdot & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \cdot & \bullet & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \bullet & \cdot & \bullet \end{bmatrix}$	8
	m		$\begin{bmatrix} \bullet & \bullet & \bullet & \cdot & \bullet & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \bullet & \cdot & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \cdot & \bullet & \cdot \end{bmatrix}$	10

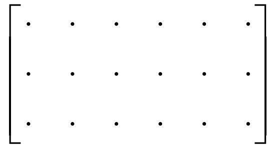
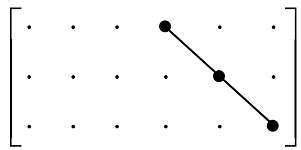
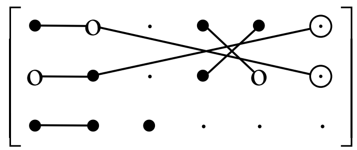
Piezoelectricidad

...n ...n ...nal	Clases	Material orientado o compuesto análogo	Estructura de d_{ij}	Número de componentes independientes
...CO	222	ORTOTRÓPICO, LÁMINA BIORIENTADA NO EQUIBIAXIAL		3
	$mm2$			5
	4			4
	$\bar{4}$			4

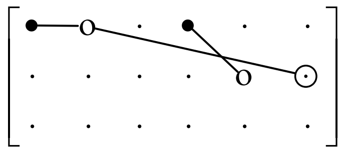
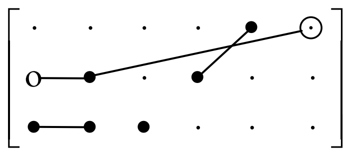
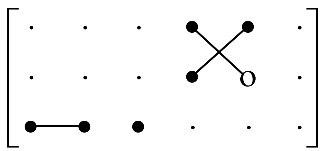
Piezoelectricidad

n n nal	Clases	Material orientado o compuesto análogo	Estructura de d_{ij}	Número de componentes independientes
L	422			1
	$4mm$			3
	$\bar{4}2m$	eje binario (**2**) paralelo a ①		2

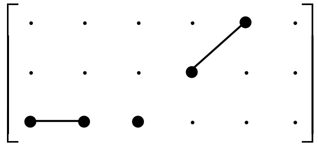
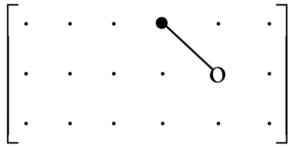
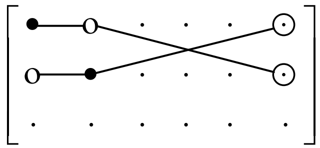
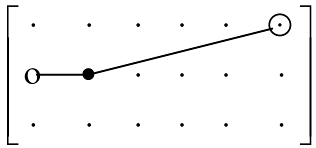
Piezoelectricidad

n n nal	Clases	Material orientado o compuesto análogo	Estructura de d_{ij}	Número de componentes independientes
	432			0
	$\bar{4}3m, 23$			1
	3			6

Piezoelectricidad

n n nal	Clases	Material orientado o compuesto análogo	Estructura de d_{ij}	Número de componentes independientes
	32			2
	$3m$			4
L	6, ∞			4

Piezoelectricidad

n n nal	Clases	Material orientado o compuesto análogo	Estructura de d_{ij}	Número de componentes independientes
	$6mm, \infty m$			3
	$622, \infty 2$			1
	$\bar{6}$			2
	$\bar{6}m2$			1

Elasticidad (prop. 4º orden)

n de Voigt, las matrices de complianza y rigidez para las ases cristalográficas y morfologías de compuestos tienen las que se muestran en las siguientes páginas. Se han usado los

	·	elemento nulo
	•	elemento no nulo
	• – •	elementos iguales
	• – o	elementos iguales en módulo, signo contrario
Para s	⊙	2 veces el valor del elemento • al que está conectado
Para c	⊙	el valor del elemento • al que está conectado
Para s	×	$2(s_{11} - s_{12})$
Para c	×	$\frac{1}{2}(c_{11} - c_{12})$

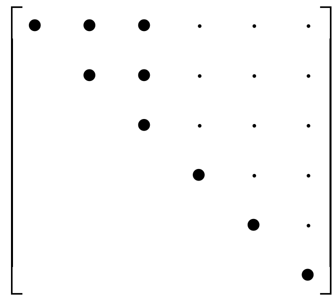
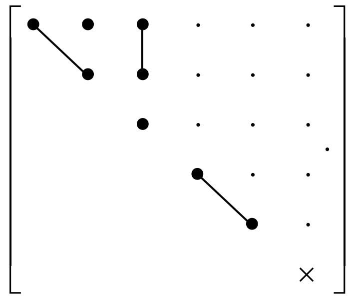
s de complianza y rigidez son simétricas; en los diagramas siguientes se representa la parte triangular superior. También se verifica:

$$\underset{\sim}{s} = \underset{\sim}{c}^{-1}$$

Propiedades elásticas lineales

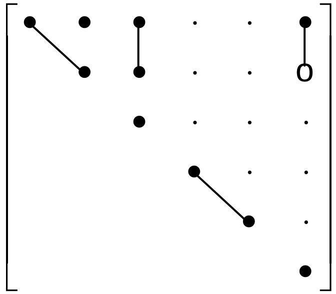
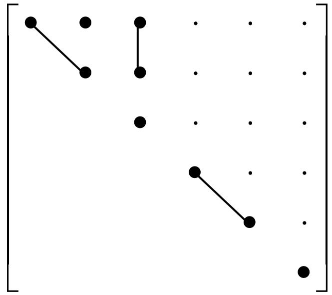
n n nal	Clases	Material orientado o compuesto análogo	Estructura de s_{ij}, c_{ij}	Número de componentes independientes
	todas $1, \bar{1}$		$\begin{bmatrix} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ & & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ & & & \bullet & \bullet & \bullet \\ & & & & \bullet & \bullet \\ & & & & & \bullet \end{bmatrix}$	21
	todas $2, m, 2/m$		$\begin{bmatrix} \bullet & \bullet & \bullet & \cdot & \bullet & \cdot \\ & \bullet & \bullet & \cdot & \bullet & \cdot \\ & & \bullet & \cdot & \bullet & \cdot \\ & & & \bullet & \cdot & \bullet \\ & & & & \bullet & \cdot \\ & & & & & \bullet \end{bmatrix}$	13

Propiedades elásticas lineales

n n nal	Clases	Material orientado o compuesto análogo	Estructura de s_{ij}, c_{ij}	Número de componentes independientes
CO	todas $222, mm2$ mmm	**ORTOTRÓPICO, LÁMINA BIORIENTADA NO EQUIBIAXIAL* MADERA (① es la dirección tangencial, ② la radial, ③ la axial) COMPUESTO LAMINAR UNIDIRECCIONAL (láminas perpendiculares al eje ③)**		9
	$6, \bar{6}, 6/m,$ $622, 6mm$ $\bar{6}m2, 6/mmm$ $\infty m, \infty, \infty/m$ $\infty/mm, \infty 2$	**FILAMENTO ORIENTADO UNIAXIALMENTE, FIBRA (dirección de orientación coincidente con el eje ③) COMPUESTO LAMINAR CUASI-ISOTRÓPICO (láminas perpendiculares al eje ③) COMPUESTO REFORZADO CON FIBRA (fibras alineadas en dirección ③)**		5

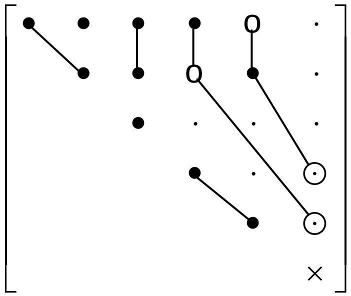
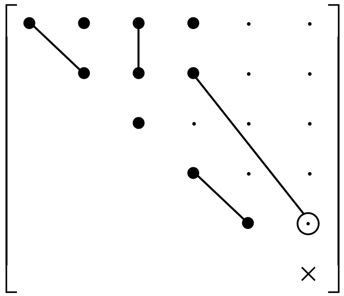
l ha sido estirado en dos direcciones, pero no en la misma proporción. O el material compuesto tiene de por sí propiedades os direcciones, p.ej. radial y tangencial en el caso de la madera.

Propiedades elásticas lineales

n n nal	Clases	Material orientado o compuesto análogo	Estructura de s_{ij}, c_{ij}	Número de componentes independientes
	$4, \bar{4}, 4m$			7
	$4mm, \bar{4}2m$ $422, 4/mmm$	**TETRAGONAL, LÁMINA BIORIENTADA EQUIBIAXIAL (① y ② son las direcciones de orientación equivalentes)* COMPUESTO LAMINAR BIDIRECCIONAL (láminas perpendiculares al eje ③)**		6

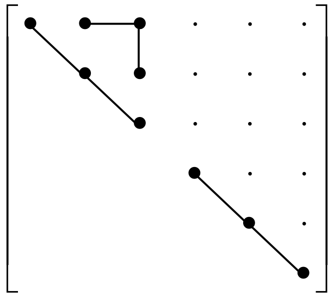
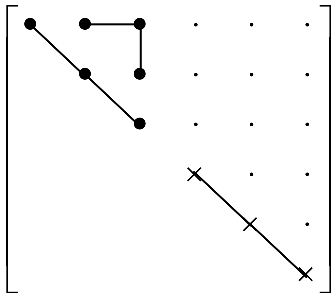
terminado material compuesto a una clase cristalográfica por diferentes autores no siempre es coincidente. Pero en general no es
que, aunque las estructuras (elementos no nulos) de las matrices de propiedades son diferentes, la combinación de los valores
tos de dichas matrices conducen a valores casi idénticos (y con discrepancias menores que las incertidumbres experimentales en
. el compuesto cuasi-isotrópico del problema 09_02_01 es a veces asignado a la clase tetragonal de máxima simetría $4/mmm$ y a
(más correctamente) a la monoclínica $2/m$. En no pocas ocasiones en la práctica industrial, no se miden o no se pueden estimar
as matrices de complianza y rigidez de un material y es frecuente realizar diseños o cálculos sólo aproximados asignando el
estrictamente no es la correcta. La validez de este procedimiento depende de la aplicación de que se trate.

Propiedades elásticas lineales

n n nal	Clases	Material orientado o compuesto análogo	Estructura de s_{ij}, c_{ij}	Número de componentes independientes
	$3, \bar{3}$			7
	$32, \bar{3}m, 3m$			6

ema trigonal se le llama "romboédrico" y se utiliza una celda
es lados y los ángulos son iguales (ejes de Miller-Bravais). La
onal no es unitaria pero es equivalente y más general (Seitz,
development of the crystallographic groups", Z.f. Krist. 88,
9-313 (1935), 91, 336-366 (1935), 100-130 (1936)).

Propiedades elásticas lineales

n n nal	Clases	Material orientado o compuesto análogo	Estructura de s_{ij}, c_{ij}	Número de componentes independientes
	todas $23, m3$ $432, \bar{4}3m, m3m$			3
	$\infty\infty m$	**ISÓTROPO COMPUESTO ISÓTROPO (p.ej. hormigón, HM o "metal duro") COMPUESTO REFORZADO CON FIBRA CORTA ORIENTADA AL AZAR**		2

úbico no es isótropo en lo que se refiere a sus propiedades elásticas (4º orden). Sí lo es en e 2º orden (difusividad másica, conductividad térmica, conductividad y resistividad eléctricas).

Material isótropo

miento elástico lineal de un **material isótropo** (p.ej., un material policristalino no n material amorfo, un material compuesto como el hormigón o una espuma, cribe con sólo dos parámetros (diferentes para cada material).

Complianzas ⇔ módulo de Young y relación de Poisson

Rigideces ⇔ constantes de Lamé

cuencia eden e:

módulo de Young y relación de Poisson ⇔ constantes de Lamé

alquier caso sólo hay 2 parámetros independientes para el material isótropo.

nes son las siguientes:

Material isótropo

Complianzas ⇔ módulo de Young y relación de Poisson

$$\ldots \tau_1 + s_{12}\tau_2 + s_{12}\tau_3$$
$$\ldots \tau_1 + s_{11}\tau_2 + s_{12}\tau_3$$
$$\ldots \tau_1 + s_{12}\tau_2 + s_{11}\tau_3$$
$$\ldots s_{11} - s_{12})\tau_4$$
$$\ldots s_{11} - s_{12})\tau_5$$
$$\ldots s_{11} - s_{12})\tau_6$$

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}\tau_1 - \frac{\nu}{E}\tau_2 - \frac{\nu}{E}\tau_3$$
$$\varepsilon_2 = \frac{-\nu}{E}\tau_1 + \frac{1}{E}\tau_2 - \frac{\nu}{E}\tau_3$$
$$\varepsilon_3 = \frac{-\nu}{E}\tau_1 - \frac{\nu}{E}\tau_2 + \frac{1}{E}\tau_3$$
$$\varepsilon_4 = \frac{1}{G}\tau_4$$
$$\varepsilon_5 = \frac{1}{G}\tau_5$$
$$\varepsilon_6 = \frac{1}{G}\tau_6$$

deformación longitudinal 1-1 debida a esfuerzo long. 1-1

deformación longitudinal 1-1 debida a esfuerzo long. 2-2

Módulo elástico o de Young

deformación angular en el plano 2-3 debida a esfuerzo cortante 2-3

Módulo de cortadura (o “cortante”, o “a cortadura”, o “de cizalla”)

… en cuenta la estructura de $\underset{\sim}{S}$
… s decir:

$\ldots_{33}$

$\ldots_{13} = s_{31} = s_{23} = s_{32}$

$\ldots_{66} = 2(s_{11} - s_{12})$

… coeficientes: $\boxed{s_{11} = 1/E \qquad s_{12} = -\nu/E}$ que son los dos únicos …ecesarios para describir el material isótropo. Además se obtiene el módulo de … función de los otros dos parámetros: $1/G = 2(s_{11} - s_{12})$ $\boxed{G = E/[2(1+\nu)]}$

Material isótropo

Rigideces ⇔ constantes de Lamé

$$+ c_{12}\varepsilon_2 + c_{12}\varepsilon_3$$
$$+ c_{11}\varepsilon_2 + c_{12}\varepsilon_3$$
$$+ c_{12}\varepsilon_2 + c_{11}\varepsilon_3$$
$$- c_{12})\varepsilon_4$$
$$- c_{12})\varepsilon_5$$
$$- c_{12})\varepsilon_6$$

$$\begin{aligned}
\tau_1 &= (2\mu + \lambda)\varepsilon_1 + \lambda\varepsilon_2 + \lambda\varepsilon_3 \\
\tau_2 &= \lambda\varepsilon_1 + (2\mu + \lambda)\varepsilon_2 + \lambda\varepsilon_3 \\
\tau_3 &= \lambda\varepsilon_1 + \lambda\varepsilon_2 + (2\mu + \lambda)\varepsilon_3 \\
\tau_3 &= \mu\varepsilon_4 \\
\tau_4 &= \mu\varepsilon_5 \\
\tau_5 &= \mu\varepsilon_6
\end{aligned}$$

Identificando coeficientes: $\boxed{\lambda = c_{12} \qquad \lambda + 2\mu = c_{11}}$

Finalmente:

ódulo de Young y relación de Poisson ⇔ constantes de Lamé

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} \qquad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$$

Resumen

les II usamos los símbolos de las clases cristalográficas para qué sistema pertenece un material y por tanto saber qué estructura de Voigt) tienen propiedades tales como los módulos os, la complianza, la rigidez, etc.

iso saber deducir los símbolos para un material dado, ni siquiera s los elementos de simetría que implica un símbolo.

anteriores sirven, en Materiales II,

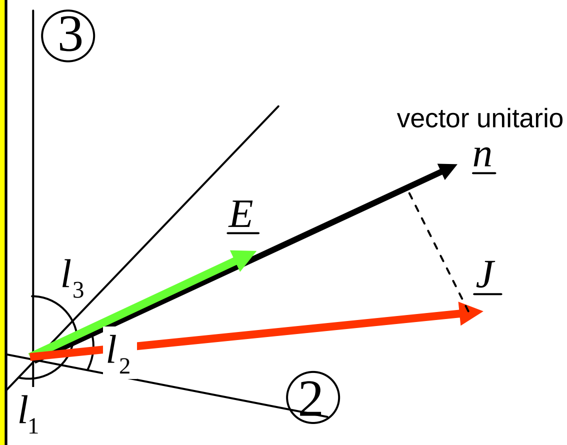
oder **entender y consultar las fuentes de datos experimentales** iedades de materiales anisotrópicos (monocristales, materiales los y materiales compuestos)

nificar el tratamiento de materiales cerámicos, poliméricos y stos **anisótropos**.

edades de 2º orden en una dirección dada

a propiedad de 2º orden (p.ej. la conductividad eléctrica) en una dirección
os cosenos directores se calcula como:

$$\underline{J} = \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{E}$$



1. se aplica un campo $\underline{E}$ en dirección $\underline{n}$: $\underline{E} = E\underline{n}$
2. se calcula $\underline{J}$
3. se determina la componente de $\underline{J}$ en dirección de $\underline{n}$ (proyección sobre $\underline{E}$): $\underline{J} \cdot \underline{n}$
4. el valor de la propiedad (en este caso conductividad) es el cociente: $\boxed{\sigma = \dfrac{|\underline{J} \cdot \underline{n}|}{|\underline{E}|}}$

$$_j = E\sigma_{ij} l_j$$

$$\sigma = \frac{|(\delta_i E\sigma_{ij} l_j) \cdot (\delta_k l_k)|}{E} = l_j l_k \sigma_{ij} \delta_{ik} = l_j l_i \sigma_{ij} = l_i l_j \sigma_{ij}$$

es decir: $\boxed{\sigma = l_i l_j \sigma_{ij}}$

edades de 2° orden en una dirección dada

conveniente elegir un nuevo sistema de coordenadas en el que uno de los , p.ej. el ①', va en la dirección de $\underline{n}$. En este caso, la prop. en la dirección de

$$\sigma = l_{1i} l_{1j} \sigma_{ij} = \sigma'_{11}$$

valor de la propiedad en la dirección ①' es σ'_{11} (lo que resulta evidente de la σ'_{11}). Es posible interpretar σ gráficamente de modo muy intuitivo:

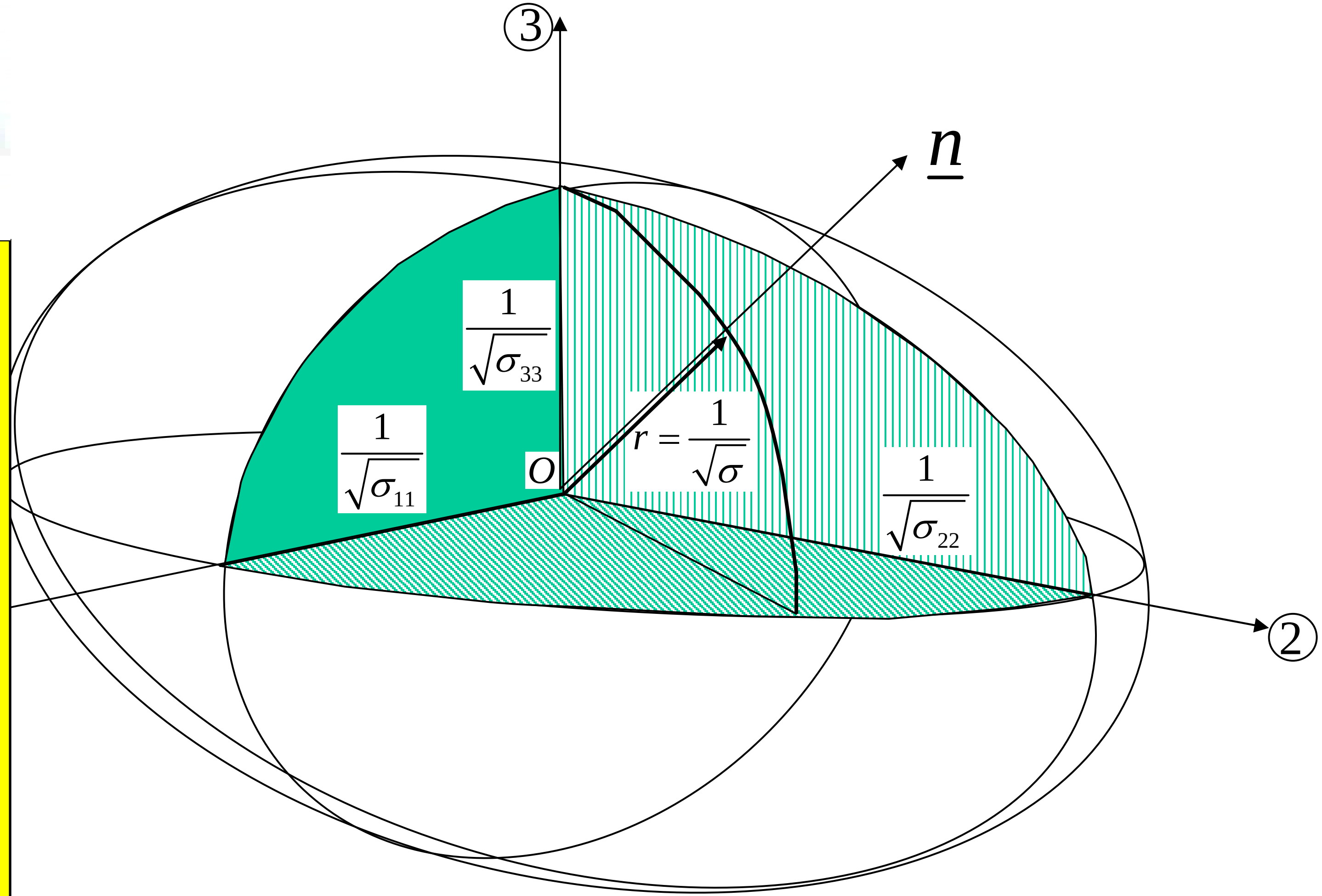
nos la superficie $\sigma_{ij} x_i x_j = 1$ (* esta superficie se llama cuádrica de representación para la propiedad de 2º orden)

conductividad eléctrica es un elipsoide (puesto que los tres valores principales positivos). En una dirección definida por los cosenos directores l_i el radio decir, el vector del origen a la superficie del elipsoide en esa dirección) tiene por s $x_i = r l_i$ y sustituyendo en (*),

$$l_i l_j = 1 \quad \text{es decir:} \quad r^2 \sigma = 1 \quad \Rightarrow \quad r = \frac{1}{\sqrt{\sigma}}$$

longitud del radio vector es igual al inverso de la raíz cuadrada del módulo de la n esa dirección.

edades de 2º orden en una dirección dada



el caso de la conductividad, elipsoide) de representación de la cond. eléctrica (válida
a propiedad de 2º orden simétrica; si los valores de la propiedad pueden ser negativos o nulos, p.ej. la
a cuádrica puede ser cualquiera, es decir, un hiperboloide de una o dos hojas, un paraboloide o un
rio)

al cúbico es isótropo para props. de 2º orden

l cúbico se caracteriza por tener iguales los tres valores principales de cualquier
de 2º orden simétrica en tres direcciones ortogonales.

se deduce inmediatamente que la cuádrica de representación es una esfera.

la propiedad de 2º orden es la misma en todas las direcciones, es decir, la
es independiente de la dirección, o lo que es lo mismo, hay invariancia rotacional,
ondición de isotropía.

<u>aterial cúbico es, para propiedades simétricas de 2º orden, isótropo.</u>

edades de 4° orden en una dirección dada

, para determinar una propiedad de cuarto orden (p.ej. la complianza $s'_{11} (= s'_{1111})$ rial compuesto) en la dirección definida por el vector unitario $\underline{n}$, giramos los ejes que la dirección del nuevo eje ①' coincida con la dirección de $\underline{n}$ y determinamos entre la deformación longitudinal en esa dirección y el esfuerzo de tracción o en esa dirección, es decir, calculamos directamente el valor de s'_{11} según la ley mación habitual:

$$s'_{1111} = l_{1i} l_{1j} l_{1k} l_{1l} s_{ijkl}$$

so, la superficie de representación no es una cuádrica (la regla de transformación oductos de cuatro cosenos directores, es decir, será en general una cuártica. En props. de 2º orden, la regla de transformación contiene productos de dos ectores y la superficie de representación es una cuádrica).

edades de 4º orden en una dirección dada

ıte, la complianza de una barra cortada del material tal y como se indica en el alcula como $s'_{1111} = l_{1i}l_{1j}l_{1k}l_{1l}s_{ijkl}$, el módulo elástico o de Young para esa barra $'_{1111}$ y la rigidez elástica como $c'_{1111} = l_{1i}l_{1j}l_{1k}l_{1l}c_{ijkl}$.