Problema 03_03_01

ıa pirámide de base triangular equilátera, determinar:

ıé clase cristalográfica pertenece

merar los elementos cristalográficos de simetría

ijar los ejes convencionales y cartesianos

merar los elementos del grupo puntual de simetría

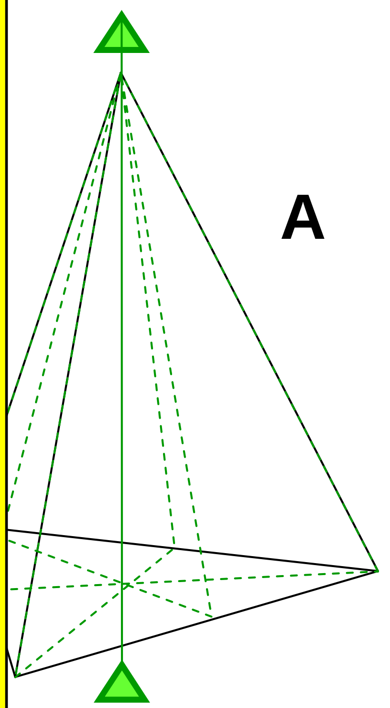
ficar el orden del grupo

ibir la tabla del producto de este grupo

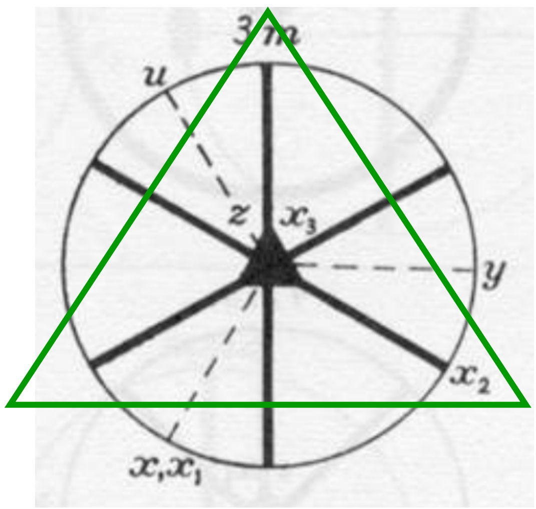
ficar que cumple los axiomas de grupo

Problema 03_03_01

e la base es un triángulo equilátero, la pirámide tiene un eje ternario
ular a la misma, y tres planos de simetría (figura A). Estos son los
; cristalográficos de simetría. Pertenece por tanto a la clase $3m$
arlo en la tabla de estereogramas en 03_01_01.pdf). La orientación
s convencionales y cartesianos (dibujados en la proyección sobre la
a de la figura B.



A



B

Problema 03_03_01

ntos del grupo puntual de simetría y su acción sobre un punto de coordenadas (x,y,z) aparecen en la siguiente tabla:

emento alográfico simetría	elemento del grupo de simetría	matriz de representación $\underset{\sim}{M}$	$\underset{\sim}{M} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$	notas
$3_c \equiv 3_{[0001]}$	3_c^1	$\begin{pmatrix} 0 & \bar{1} & 0 \\ 1 & \bar{1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \bar{y} \\ x-y \\ z \end{pmatrix}$	
	3_c^2	$\begin{pmatrix} \bar{1} & 1 & 0 \\ \bar{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} y-x \\ \bar{x} \\ z \end{pmatrix}$	
	$3_c^3 \equiv E$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$	elemento unidad
$n_a \equiv m_{(\bar{2}110)}$	m_x	$\begin{pmatrix} \bar{1} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} y-x \\ y \\ z \end{pmatrix}$	el subíndice en $m_{(\bar{2}110)}$ identifica el plano por sus índices de Miller

Problema 03_03_01

te: las coordenadas (x,y,z) están medidas a lo largo de los ejes convencionales,) CARTESIANOS, y que en este caso forman un ángulo de 120º. Para las cartesianas se usan exclusivamente los símbolos x_1, x_2, x_3.

emento alográfico simetría	elemento del grupo de simetría	matriz de representación $\underset{\sim}{M}$	$\underset{\sim}{M} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$	notas
$m_b \equiv m_{(1\bar{2}10)}$	m_y	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \bar{1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} x \\ x-y \\ z \end{pmatrix}$	
$\equiv m_{(11\bar{2}0)}$	m_u	$\begin{pmatrix} 0 & \bar{1} & 0 \\ \bar{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -y \\ -x \\ z \end{pmatrix}$	

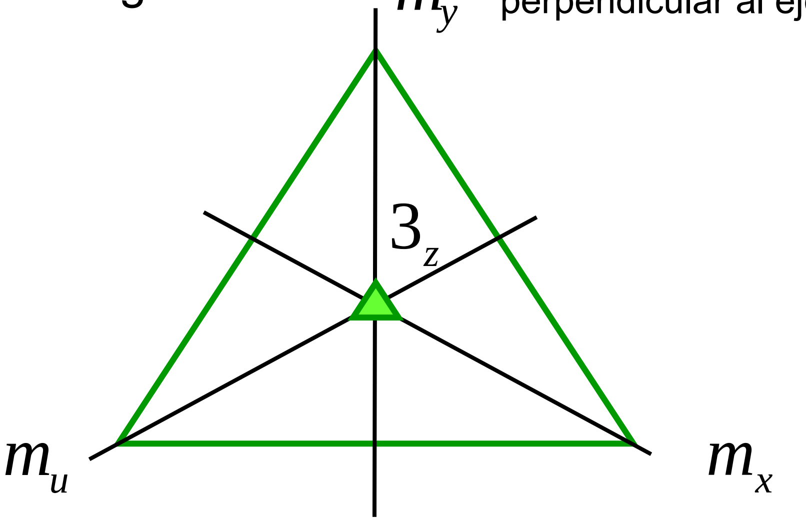
ementos → orden del grupo es 6. Mientras que elementos cristalográficos sólo hay 4:

$\boxed{{}_z \equiv 3_c \equiv 3_{[0001]}}$ $\underbrace{\boxed{m_y \equiv m_{(1\bar{2}10)}} \quad \boxed{m_x \equiv m_{(\bar{2}110)}} \quad \boxed{m_u \equiv m_{(11\bar{2}0)}}}_{\text{generan 1 cada uno}}$

era 3 elementos del grupo

Problema 03_03_01

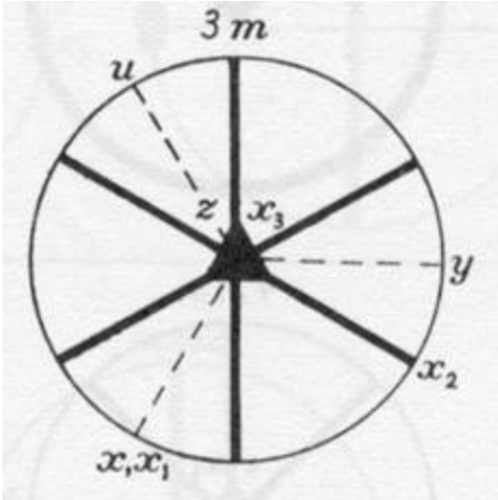
…ristalográficos:



perpendicular al eje y

…icular al eje u

perpendicular al eje x



…” del grupo corresponde:

…rminos físicos (geométricos) a realizar dos operaciones de simetría una tras

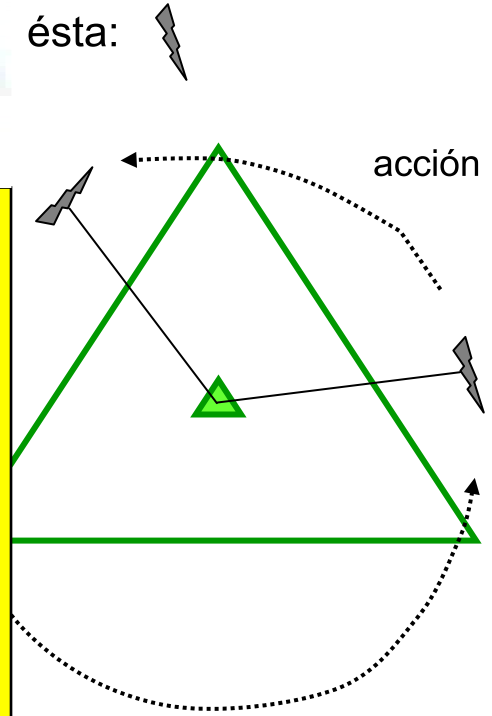
… orden <u>importa</u>, en general no son grupos abelianos)

… grupo abstracto, al producto de las matrices de representación.

…lo, realizamos el producto de los elementos 1 y 2: $3_c^2 \cdot 3_c^1$

Problema 03_03_01

ır el resultado se coloca en un punto arbitrario cualquier figura no
ésta:



O bien se realiza el producto de las matrices de representación

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \bar{1} & 1 & 0 \\ \bar{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{3_c^2} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \bar{1} & 0 \\ 1 & \bar{1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{3_c^1} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{E}$$

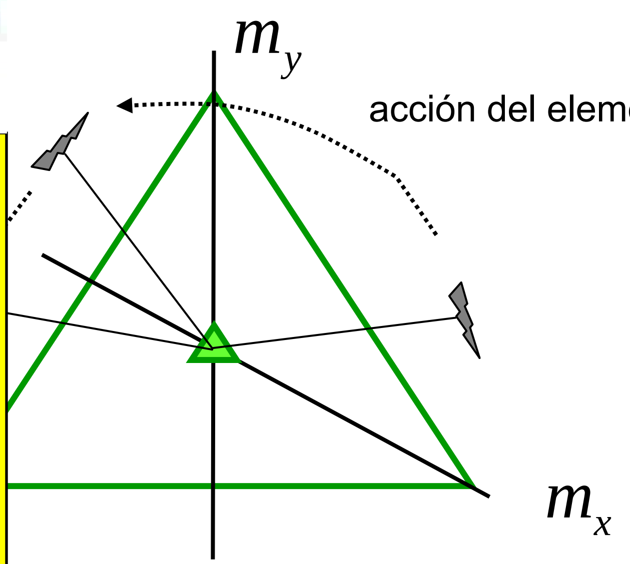
ıtado de las dos acciones nos devuelve a la posición inicial. Por tanto, el
ıo de estos dos elementos es:

$$3_c^2 \cdot 3_c^1 = E \longleftarrow$$

importante: los factores del producto se ordenan de derecha a izquierda de acuerdo con el orden en que actúan

Problema 03_03_01

e los elementos 1 y 4: $m_x \cdot 3_c^1$



O bien se realiza el producto de las matrices de representación

$$\underset{m_x}{\begin{pmatrix} \bar{1} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \cdot \underset{3_c^1}{\begin{pmatrix} 0 & \bar{1} & 0 \\ 1 & \bar{1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} = \underset{m_y}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \bar{1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

ltado es igual que una reflexión en el plano m_y
nto 5)

to, el producto de estos dos elementos es:

$$m_x \cdot 3_c^1 = m_y$$

Problema 03_03_01

lo de esta manera para todos los productos (son 36) se construye la tabla de ón. Por convención, el factor que opera primero, el que aparece más a la derecha cto, se coloca en la fila superior:

$\cdot$	E	3_c^1	3_c^2	m_x	m_y	m_u
E	E	3_c^1	3_c^2	m_x	m_y	m_u
3_c^1	3_c^1	3_c^2	E	m_u	m_x	m_y
3_c^2	3_c^2	E	3_c^1	m_y	m_u	m_x
m_x	m_x	m_y	m_u	E	3_c^1	3_c^2
m_y	m_y	m_u	m_x	3_c^2	E	3_c^1
m_u	m_u	m_x	m_y	3_c^1	3_c^2	E

este elemento es su propio inverso

en los axiomas de grupo:
roducto está definido
te un elemento unidad único
roducto de dos elementos sigue perteneciendo al grupo (en la tabla no aparecen elementos que no pertenezcan al grupo)
a elemento tiene un inverso (en todas las filas/columnas aparece la unidad sólo una vez)
sociativo (no es evidente, hay que comprobarlo con la tabla)