Ejercicios (Números reales)

1.1. Decir si cada una de las siguientes expresiones es cierta o falsa:

a) $\displaystyle\sum_{j=1}^{30} j^4 = \sum_{j=0}^{30} j^4$, b) $\displaystyle\sum_{j=0}^{100} 2 = 200$, c) $\displaystyle\sum_{j=1}^{20}(2+j^2) = 2 + \sum_{j=1}^{20} j^2$,

d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{100} k^2 = \left(\sum_{k=1}^{100} k\right)^2$

1.2. Expresar con notación de sumatorio:

a) $\dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \dfrac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \dfrac{1}{10\cdot 11}$,

b) $1 + 40 + 900 + 16\,000 + 250\,000 + 3\,600\,000$,

c) $1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + 5x^4$, d) $a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4$,

e) $a^5 - a^4b + a^3b^2 - a^2b^3 + ab^4 - b^5$, f) $a^5 + a^4b + a^3b^2 + a^2b^3 + ab^4 + b^5$.

1.3. Sabiendo que $\frac{1}{j(j+1)} = \frac{1}{j} - \frac{1}{j+1}$, hallar la suma de $\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j(j+1)}$.

1.4. Hallar las sumas siguientes ($n \in \mathbb{N}$):

a) $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}(2j-1)$. (Usar la igualdad $j^2 - (j-1)^2 = 2j - 1$, $j \in \mathbb{N}$.)

b) $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} j$. (Apoyarse en a).)

1.5. Algunas de estas afirmaciones sobre los números naturales n y p son ciertas y otras falsas. Decidir de qué tipo es cada una de ellas y justificar la respuesta.

a) n^2 es par si, y solo si, n es par.

b) $(n+p)^2$ es par si, y solo si, $(n-p)^2$ es par.

c) Si np es impar, entonces $n+p$ es par.

d) Si $n^2 + np + p^2$ es par, entonces np es par.

e) Si $n^2 + np + p^2$ es par, entonces n y p son pares.

1.6. Probar que

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

1.7. Deducir de la Identidad Ciclotómica la suma de $\sum_{j=0}^{n} x^j$, $x \neq 1$. Hacer operaciones en la expresión $(1-x)\sum_{j=1}^{n} jx^j$ para deducir la suma de $\sum_{j=1}^{n} jx^j$, $x \neq 1$. Análogamente en $(1-x)\sum_{j=1}^{n} j^2x^j$ para deducir la suma de $\sum_{j=1}^{n} j^2x^j$, $x \neq 1$.

1.8. Demostrar por inducción las propiedades siguientes ($n \in \mathbb{N}$):

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k+4}{k(k+1)(k+2)} = \frac{n(3n+7)}{2(n+1)(n+2)}$,

c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$, d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$,

e) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \geqslant \sqrt{n}$, f) $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$,

g) $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} ar^{j-1} = \frac{a(r^n-1)}{r-1}$ $(r \neq 1)$.

1.9. Deducir de las ecuaciones

$$\begin{aligned} 1 &= 1, \\ 1-4 &= -(1+2), \\ 1-4+9 &= 1+2+3, \\ 1-4+9-16 &= -(1+2+3+4), \end{aligned}$$

una fórmula general sencilla que incluya las anteriores como casos particulares, y demostrarla mediante el Principio de Inducción Matemática.

1.10. Dado un número $n \in \mathbb{N}$, se define su *factorial* como

$$n! = n(n-1)(n-2)\cdots 2 \cdot 1,$$

y también se define $0! = 1$. Dados dos números $m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ con $m \geqslant n$, se define el coeficiente binómico "m sobre n" como

$$\binom{m}{n} = \frac{m!}{n!(m-n)!}.$$

Probar las siguientes propiedades:

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

c) $\binom{m}{n} + \binom{m}{n+1} = \binom{m+1}{n+1}$.

1.11. Probar la fórmula del *Binomio de Newton*: para cada $x, y \in \mathbb{R}$ y cada $n \in \mathbb{N}$,

$$(x+y)^n = \sum_{j=0}^{n} \tbinom{n}{j} x^j y^{n-j}.$$

Deducir de ella que:

a) $1 + n + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n-1} + 1 = 2^n$,

b) $1 - n + \binom{n}{2} + \cdots + (-1)^{n-1}\binom{n}{n-1} + (-1)^n = 0$.

1.12. Demostrar que $7^{2n+1} - 48^n - 7$ ($n \in \mathbb{N}$) es divisible por 48.

1.13. Demostrar que $2^{2n} + 15n - 1$ ($n \in \mathbb{N}$) es múltiplo de 9.

1.14 (Desigualdad de Bernouilli)**.**

a) Probar que para todo $x > -1$ y todo $n \in \mathbb{N}$ se verifica $(1+x)^n \geqslant 1 + nx$.

b) Demostrar también que si $n \geqslant 2$ y $x \neq 0$ la desigualdad anterior es estricta.

1.15. Probar las siguientes desigualdades para $n \in \mathbb{N}$:

a) $n! > 2^{n-1} \quad (n \geqslant 3)$,

b) $(2n)! < 2^{2n}(n!)^2$,

c) $\sqrt{n + \sqrt{(n-1) + \cdots + \sqrt{2 + \sqrt{1}}}} < \sqrt{n} + 1$.

1.16. ¿Para qué naturales n es cierto que

$$\frac{1}{n!} > \frac{8^n}{(2n)!}?$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

a) $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{(n+1)(2n+1)}$, b) $a_{n+1} = \dfrac{3a_n}{(2n+2)(2n+3)}$,

c) $a_{n+1} = \dfrac{2n+1}{n+1} \cdot a_n$, d) $a_{n+1} = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n a_n$.

1.18. Supongamos que $x_0 > 0$ y $x_n = 1 - e^{-x_{n-1}}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Mostrar que $0 < x_n < 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

1.19. Supongamos qu e$R > 0$, $x_0 > 0$ y que

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{R}{x_n} + x_n\right), \qquad \text{si } n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Probar que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $x_n > x_{n+1} > \sqrt{R}$ y

$$x_n - \sqrt{R} \leqslant \frac{1}{2^n} \cdot \frac{(x_0 - \sqrt{R})^2}{x_0}.$$

1.20. Sean $x, y > 0$ y para cada $k, n \in \mathbb{N}$, sea

$$\alpha_{k,n} = \sum_{j=0}^{n} j^k \tbinom{n}{j} x^j y^{n-j}.$$

a) Probar, mediante la fórmula del Binomio de Newton, que

$$\alpha_{1,n} = nx(x+y)^{n-1}.$$

b) Hallar $\alpha_{2,n}$. *Sugerencia:* calcular antes

$$\beta_{2,n} = \sum_{j=0}^{n} j(j-1) \tbinom{n}{j} x^j y^{n-j}.$$

c) Obtener un procedimiento para calcular $\alpha_{k,n}$ para cualesquiera $k, n \in \mathbb{N}$.

1.21. Probar por inducción que

$$\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 3x + \cdots + \operatorname{sen}(2n-1)x = \frac{1 - \cos 2nx}{2 \operatorname{sen} x}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

1.23. Sean $a_1 = 2$, $a_2 = 0$, $a_3 = -14$, y

$$a_{n+1} = 9a_n - 23a_{n-1} + 15a_{n-2}, \qquad , n \geqslant 3.$$

Mostrar por inducción que $a_n = 3^{n-1} - 5^{n-1} + 2$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

1.24. Los *números de Fibonacci* $f_1, f_2, f_3, \ldots$ se definen por $f_1 = f_2 = 1$ y

$$f_{n+1} = f_n + f_{n-1}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Demostrar por inducción que

$$f_n = \frac{(1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n}{2^n\sqrt{5}}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

(La anterior es conocida como *Fórmula de Binet*.)

1.25 (Desigualdad de Cauchy-Schwartz)**.** Probar que si $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$, entonces

$$\Big(\sum_{j=1}^{n} x_j y_j\Big)^2 \leqslant \Big(\sum_{j=1}^{n} x_j^2\Big)\Big(\sum_{j=1}^{n} y_j^2\Big).$$

Deducir que, si $a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = 1$, entonces $|ac + bd| \leqslant 1$.

1.26. Sea P_n la propiedad $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{(2n+1)^2}{8}$.

a) Probar que si P_n es cierta, entonces P_{n+1} es cierta.

b) Discutir la afirmación: *se deduce por inducción que P_n es cierta para todo $n \in \mathbb{N}$.*

1.27. Decidir para qué números naturales n es cierta la desigualdad $2^n > n^2$. Demostrarlo por inducción.

1.28. Comparar n^{n+1} y $(n+1)^n$ para $n \in \mathbb{N}$, y enunciar y demostrar qué desigualdad se verifica entre ambos números.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

1.31. Hallar las soluciones de las desigualdades siguientes:

a) $2x^2 + 9x + 6 \geqslant x + 2$, b) $x + \dfrac{1}{x} < 1$, c) $\dfrac{x}{x+5} < 0$,

d) $\dfrac{3x^2 - 1}{1 + x^2} > 0$, e) $\dfrac{2x - 1}{3x + 2} \leqslant 1$, f) $\dfrac{2x^2 + 9x + 6}{x + 2} \geqslant 1$,

g) $\dfrac{x^2 - 4x + 4}{1 + x^3} > 0$, h) $\dfrac{x - 1}{3x + 4} \leqslant \dfrac{3x + 2}{x}$.

1.32. Escribir las siguientes fórmulas con expresiones equivalentes que no impliquen valores absolutos:

a) $a + b + |a - b|$, b) $a + b - |a - b|$,

c) $a + b + 2c + |a - b| + |a + b - 2c + |a - b||$,

d) $a + b + 2c - |a - b||a + b - 2c - |a - b||$.

1.33. Resolver las ecuaciones:

a) $|x^2 - 5x + 6| = -(x^2 - 5x + 6)$, b) $\left|\dfrac{x - 1}{x + 1}\right| = \dfrac{x - 1}{x + 1}$,

c) $|(x^2 + 4x + 9) + (2x - 3)| = |x^2 + 4x + 9| + |2x - 3|$,

d) $|x - 1||x + 1| = 0$, e) $|x - 1||x + 2| = 3$.

1.34. Resolver las siguientes desigualdades:

a) $|2x + 3| - 1 < |x|$, b) $|x(x - 4)| < |x - 4| - |x|$,

c) $|2 - |x|| = 2 + |x|$, d) $|x - 1| + |x + 1| < 1$,

e) $|x - 5| < |x + 1|$, f) $|3x - 5| < 3$,

g) $|x^2 - 1| < 1$, h) $|x^2 - x + 1| > 1$,

i) $1 < |x - \frac{1}{2}| < 2$, j) $x - |x| > 2$,

k) $|x^2 - x| + x > 1$, l) $|x + |x - 1|| < 2$.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

1.35. Estudiar para qué números reales se cumple:

a) $\dfrac{|x|+1}{x} < 1$ y $\dfrac{-2|x|+1}{x} < 1$, b) $\big|2x - |2x-1|\big| = -5x$.

1.36. Si $0 < x < y$ son dos números reales, probar que

$$\frac{2xy}{x+y} < \sqrt{xy} < \frac{a+b}{2} < \sqrt{a^2+b^2}2.$$

1.37 (Desigualdad de las Medias)**.** Probar por inducción que si $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son números reales positivos tales que $a_1 a_2 \cdots a_n = 1$, entonces

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n \geqslant n.$$

Deducir de aquí que si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son números reales no negativos cualesquiera, entonces

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n},$$

es decir, su media aritmética es siempre mayor o igual que su media geométrica.

1.38. Sea $x \in \mathbb{R}$. Demostrar que si $|x| \leqslant \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$, entonces $x = 0$. ¿Qué números reales x cumplen que $x \leqslant \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$?

1.39. Sea p un número racional no nulo y x un irracional. Probar que $p + x$ y px son irracionales

1.40. Mostrar que $\sqrt{p}$ es irracional si p es primo.

1.41. Probar que $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ y $1 - \sqrt[3]{2+\sqrt{5}}$ son irracionales algebraicos.

1.42. Calcular el supremo y el ínfimo, si existen, de los siguientes conjuntos, indicando si son máximo o mínimo respectivamente:

a) $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$, b) $\{\frac{2n+1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$, c) $\{n \pm \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$,
d) $\{x \in \mathbb{Q} \mid |x| < \sqrt{2}\} \cup \{x \in \mathbb{Q} \mid \frac{1}{x-5} > 7\}$, e) $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$,
f) $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$, g) $\{-\frac{1}{n} + [1+(-1)^n]n \mid n \in \mathbb{N}\}$, h) $\{\frac{1}{n} + (-1)^n \mid n \in \mathbb{N}\}$,
i) $\{2, 2{,}2, 2{,}22, 2{,}222, \ldots\}$,

∞

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

o) $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + x + 1 \geqslant 0\}$, p) $\{x \in \mathbb{R} \mid |2x + 1| < 5\}$,
q) $\{x \in \mathbb{R} \mid (x^2+1)^{-1} > \frac{1}{2}\}$, r) $\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 \leqslant 7\}$,
s) $\bigcup_{n=1}^{\infty}(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$, t) $\bigcap_{n=1}^{\infty}(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$, u) $\bigcap_{n=1}^{\infty}[\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n-1}]$.

1.43. Sea A un conjunto, $s = \sup A$ y $\varepsilon > 0$. ¿Se puede asegurar que existe algún $a \in A$ tal que $s - \varepsilon < a < s$? En caso afirmativo, demostrarlo. En caso negativo, dar un contraejemplo y modificar las desigualdades anteriores para que sea cierto.

1.44. Sean A y B dos conjuntos no vacíos, acotados, de números reales.

a) Demostrar que si $A \subset B$, entonces

$$\sup A \leqslant \sup B, \qquad \text{ínf}\, A \geqslant \text{ínf}\, B.$$

b) Probar que si $x \leqslant y$ para todos los $x \in A$, $y \in B$, entonces

$$\begin{aligned} \sup A &\leqslant y \quad \text{para todo } y \in B, \\ x &\leqslant \text{ínf}\, B \quad \text{para todo } x \in A, \end{aligned}$$

y por lo tanto $\sup A \leqslant \text{ínf}\, B$.

c) Demostrar que si $\sup A < \text{ínf}\, B$, entonces $a < b$ para todos los $a \in A$, $b \in B$. Justificar si es cierto el recíproco.

1.45.

a) Sean A y B dos conjuntos acotados de números reales. Definimos el conjunto

$$A + B = \{x + y \mid x \in A,\ y \in B\}.$$

Demostrar que

$$\sup(A + B) = \sup A + \sup B, \qquad \text{ínf}(A + B) = \text{ínf}\, A + \text{ínf}\, B.$$

b) Sean $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subset \mathbb{R}$, $B = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\} \subset \mathbb{R}$, y consideremos el conjunto

$$C = \{x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n\}.$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

1.46. Sean A y B dos conjuntos acotados de números reales. Definimos el conjunto

$$A - B = \{\, x - y \mid x \in A,\ y \in B \,\}.$$

Demostrar que

$$\sup(A - B) = \sup A - \text{ínf}\, B, \qquad \text{ínf}(A - B) = \text{ínf}\, A - \sup B.$$

1.47 (Teorema de Dedekind)**.** Sean S y T dos conjuntos no vacíos tales que todo número real está en S o en T y tales que si $s \in S$ y $t \in T$ entonces $s < t$. Probar que existe un único número real β tal que todo número real menor que β está en S y todo número real mayor que β está en T. (Una descomposición de los reales en dos conjuntos con estas propiedades se denomina una *cortadura de Dedekind*.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.