Universidad Rey Juan Carlos

Tema 2: Modelos Matemáticos

Susana Borromeo
Juan Antonio Hernández Tamames
Curso 2014-2015

Universidad Rey Juan Carlos

Contenidos Control y Automatización

1. Conceptos básicos.
2. Modelado matemático de sistemas Físicos. Linealización . Función de Transferencia
3. Análisis de sistemas en el dominio del Tiempo
4. Análisis de los sistemas en el dominio de la Frecuecia
5. Sistemas de Control. Análisis dinámico y Frecuencial
6. Acciones básicas de control: Reguladores PD, Pi, PDI.
7. Autómatas Programables. buses de campo

Índice

Introducción

- Teoría clásica de control: Análisis diseño mediante métodos de cálculo basados en la Transformada de la Laplace y la respuesta del sistema (dominio de la frecuencia)

*Sistemas **lineales** en **bucle cerrado**, de **parámetros concentrados**, **estacionarios**, **deterministas** y **continuos**.*

- Teoría moderna de control: Variables de estado, , álgebra matricial, dominio del tiempo

Universidad Rey Juan Carlos

Fundamentos matemáticos

- Sistemas de Control Automático. Benjamín C. KUO. Séptima Edición. Pearson

1. Variable compleja
2. Ecuaciones diferenciales
3. Transformada de Laplace
4. Descomposición en Fracciones simples
5. Álgebra de matrices
6. Ecuaciones de estado
7. Transformada z.

MATLAB SIMULINK

Universidad Rey Juan Carlos

Fundamentos matemáticos

- Sistemas de Control Automático. Benjamín C. KUO. Séptima Edición. Pearson

1. Variable compleja

$$s=\sigma + j\omega$$

$$G(s) = \text{Re } G(s) + j \text{ Im } G(s)$$

$$H(\omega) = \frac{a+jb}{c+jd}$$

$$|H(\omega)| = \frac{|a+jb|}{|c+jd|} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{c^2+d^2}}$$

Universidad Rey Juan Carlos

Fundamentos matemáticos

2. Ecuaciones diferenciales: ecuaciones que involucran derivadas dependientes con respecto a una variable independiente

- Lineales : ejemplo RLC
- No lineales

Ecuación no lineal:

$$f(x_1,\ldots,x_n) = 0$$

Ecuación linealizada:

$$f(x_1,\ldots,x_n) - \left[f(x_1,\ldots,x_n)\right]_0 = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}\right]_0 (x_1 - x_{1_0}) + \ldots + \left[\frac{\partial f}{\partial x_n}\right]_0 (x_n - x_{n_0})$$

2014/2015 Control y Automatización

Universidad Rey Juan Carlos

Fundamentos matemáticos

3. Transformada de Laplace:

Mediante el uso de la transformada de Laplace, es posible convertir muchas funciones comunes, tales como las funciones senoidales, las funciones senoidales amortiguadas y las funciones exponenciales, en funciones algebraicas de una **variable s compleja**.

- La propiedad de diferenciación en el tiempo nos convierte las ecuaciones diferenciales en polinomios en el dominio s
- La integral de convolución (respuesta de un sistema ante una señal) de dos señles en el tiempo se

Transformada de Laplace

$$s = \sigma + j\omega$$

$$\boxed{F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-st} dt \quad F(s), s \in C}$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi \quad j} \int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} F(s) e^{st} ds$$

Universidad Rey Juan Carlos

Fundamentos matemáticos

$f(t)$	$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)\, e^{-sT} dt$
$\delta(t) = \begin{cases} \infty, & t=0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases}$	1
$u_0(t) = \begin{cases} 0, & t<0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}$	$1/s$
$r_0(t) = \begin{cases} 0, & t<0 \\ t, & t \geq 0 \end{cases}$	$1/s^2$
$t^n \cdot u_0(t)$	$n!/s^{n+1}$
$e^{-at} \cdot u_0(t)$	$\dfrac{1}{(s+a)}$
sen $\omega t \cdot u_0(t)$	$\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$
cos $\omega t \cdot u_0(t)$	$\dfrac{s}{s^2+\omega^2}$
$e^{-at} \cdot \cos \omega t$	$\dfrac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$

Nombre	Descripción
Linealidad	$\mathcal{L}[a f(t) + b\, g(t)] = a F(s) + b\, G(s)$
Derivación en t	$\mathcal{L}\left[\dfrac{d^n f(t)}{dt^n}\right] = s^n F(s) - \sum_{i=1}^{n} \left[f^{i-1}(t)\right]_{0^+} s^{n-i}$
Integración en t	$\mathcal{L}\left[\int f(t) dt\right] = \dfrac{F(s)}{s} + \dfrac{\left[\int f(t) dt\right]_{0^+}}{s}$
Desplazamiento en t	$\mathcal{L}\left[f(t-\tau)\, u_0(t-\tau)\right] = e^{-s\tau} F(s)$
Derivación en s	$\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{dF(s)}{ds}\right] = -t\, f(t)$
Convolución	$Z(s) = X(s)\, Y(s) \Leftrightarrow z(t) = \int_0^t x(\tau)\, y(t-\tau)\, d\tau$
Teorema del valor inicial	$\lim_{t \to 0^+} f(t) = \lim_{s \to \infty} s F(s)$
Teorema del valor final	$\lim_{t \to \infty} f(t) = \lim_{s \to 0} s F(s)$, si $\exists$

Universidad Rey Juan Carlos

Fundamentos matemáticos

4. Descomposición en Fracciones simples

Raíces reales simples:

$$\frac{N(s)}{\prod_{i=1}^{n} (s+a_i)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{A_i}{s+a_i}$$

Raíces reales múltiples:

$$\frac{N(s)}{(s+a)^p} = \sum_{i=1}^{p} \frac{A_i}{(s+a)^i}$$

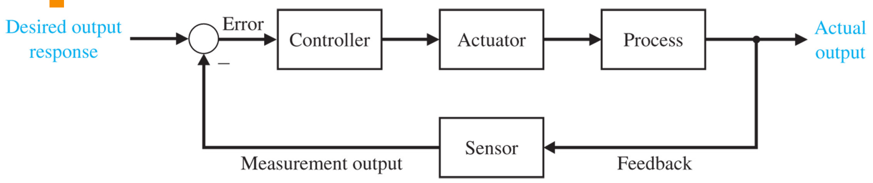
Raíces complejas simples:

$$\frac{N(s)}{(s+\alpha)^2+\beta^2} = \frac{A}{s+\alpha+j\beta} + \frac{B}{s+\alpha-j\beta} = \frac{Ps+Q}{(s+\alpha)^2+\beta^2}$$

Universidad Rey Juan Carlos

Introducción

11



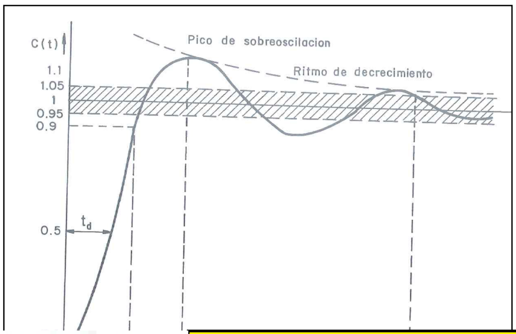
- Criterios de diseño:
  - Estabilidad
  - Error en régimen permanente
  - Respuesta transitoria: Sobreoscilación máxima, Velocidad inicial de la respuesta (tr, tp, td, tiempo necesario para alcanzar su valor en régimen permanente ts)

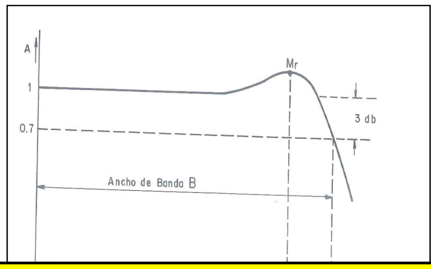
Universidad Rey Juan Carlos

Introducción

12

- Respuesta transitoria: Sobreoscilación máxima, Velocidad inicial de la respuesta (tr, tp, td, tiempo necesario para alcanzar su valor en régimen permanente ts)





Universidad Rey Juan Carlos

Introducción

13

Modelos Matemáticos

Linealización

Transforma de Laplace

Universidad Rey Juan Carlos

Modelado

14

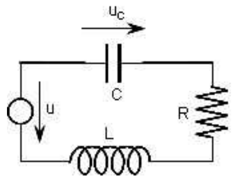
Modelado

Para seguir adelante con el diseño del sistema de control se necesita en primer lugar entender el proceso. Típicamente, el conocimiento del proceso se cristaliza en la forma de un **modelo matemático**.

Modelado: sistemas eléctricos

Resistencia	$u(t) = R \cdot i(t)$	u: tensión i: intensidad R: resistencia
Condensador	$u(t) = \frac{1}{C}\int i(t)dt$	u: tensión i: intensidad C: capacidad
Bobina	$u(t) = L\frac{d}{dt}i(t)$	u: tensión i: intensidad L: inductancia

Ejemplo:



$$\left.\begin{array}{l} u_c(t) + R \cdot i(t) + L\dfrac{di(t)}{dt} = u(t) \\ C\dfrac{du_c(t)}{dt} = i(t) \end{array}\right\}$$

$$R \cdot C \cdot \frac{du_c(t)}{dt} + LC\frac{d^2u_c(t)}{dt^2} + u_c(t) = u(t)$$

Modelado: sistemas mecánicos

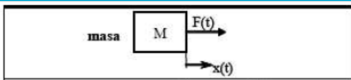
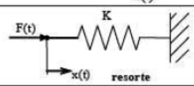
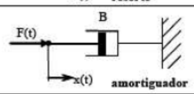
SISTEMAS MECÁNICOS TRASLACIÓN	masa	$F(t) = M\frac{d^2}{dt^2}x(t)$	F: fuerza M: masa x: desplazamiento
	resorte	$F(t) = K \cdot x(t)$	F: fuerza K: constante del muelle x: desplazamiento
	amortiguador	$F(t) = B\frac{d}{dt}x(t)$	F: fuerza B: coeficiente de fricción viscosa x: desplazamiento
SISTEMAS MECÁNICOS ROTACIÓN	Momento de inercia	$T(t) = I\frac{d^2}{dt^2}\theta(t)$	T: par I: momento de inercia θ: desplazamiento angular
	Rigidez	$T(t) = K \cdot \theta(t)$	T: par K: constante del muelle θ: desplazamiento angular
	Rozamiento viscoso	$T(t) = B\frac{d}{dt}\theta(t)$	T: par B: coeficiente de fricción viscosa θ: desplazamiento angular

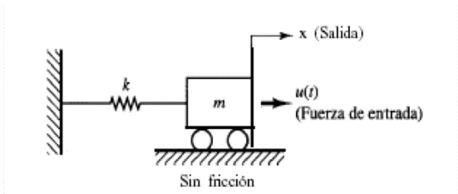
Universidad Rey Juan Carlos

Modelado: sistemas mecánicos

17

SISTEMAS MECÁNICOS TRASLACIÓN

	$F(t) = M\frac{d^2}{dt^2}x(t)$	F: fuerza M: masa x: desplazamiento
	$F(t) = K \cdot x(t)$	F: fuerza K: constante del muelle x: desplazamiento
	$F(t) = B\frac{d}{dt}x(t)$	F: fuerza B: coeficiente de fricción viscosa x: desplazamiento



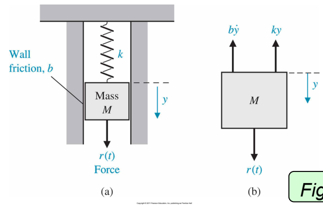


Fig. 2.2

$$u(t) = K \cdot x(t) + f\frac{dx(t)}{dt} + M\frac{dx^2(t)}{dt^2}$$

Universidad Rey Juan Carlos

Modelado: sistemas electromecánicos

18

Motor CC controlado por campo excitación

$$\begin{cases} u(t) = Ri(t) + L\frac{di}{dt} + u_m(t) \\ u_m(t) = K_b w(t) \\ P_m(t) = K_p i(t) \\ J\dot{w}(t) = P_m(t) - Bw(t) \end{cases}$$

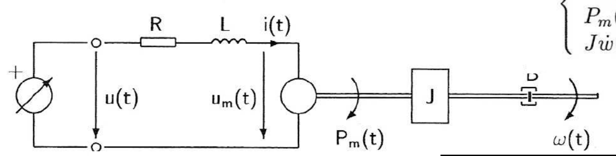


Table 2.4 Typical Constants for a Fractional Horsepower DC Motor

Motor constant K_m	50×10^{-3} N·m/A
Rotor inertia J_m	1×10^{-3} N·m·s^2/rad
Field time constant τ_f	1 ms
Rotor time constant τ	100 ms
Maximum output power	$\frac{1}{4}$ hp, 187 W

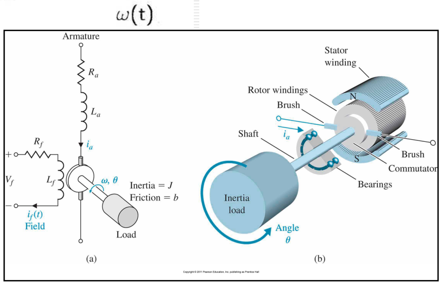
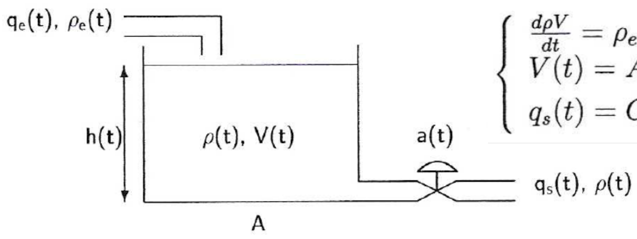


Figure 2.19 Diagrama de bloques de un motor de CC controlado por campo

Modelado

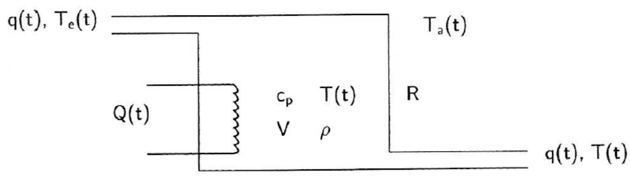
Sistemas Hidraúlicos



$$\begin{cases} \frac{d\rho V}{dt} = \rho_e(t)q_e(t) - \rho(t)q_s(t) \\ V(t) = Ah(t) \\ q_s(t) = Ca(t)\sqrt{2gh(t)} \end{cases}$$

Sistemas Térmicos

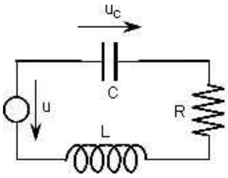
$$\rho V c_p \frac{dT}{dt} = \rho c_p q(t)[T_e(t) - T(t)] + Q(t) - \frac{T(t) - T_a(t)}{R}$$



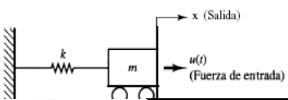
Principio de analogía

Dos sistemas físicos que sean análogos pueden ser representados por el mismo modelo matemático.

Analogía circuitos eléctricos: Fácilmente reproducibles en laboratorio



$$R \cdot C \cdot \frac{du_c(t)}{dt} + LC\frac{d^2u_c(t)}{dt^2} + u_c(t) = u(t)$$



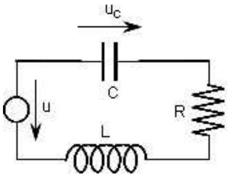
$$u(t) = K \cdot x(t) + f\frac{dx(t)}{dt} + M\frac{dx^2(t)}{dt^2}$$

Universidad Rey Juan Carlos

Principio de analogía

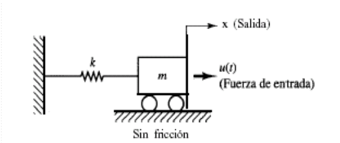
Dos sistemas físicos que sean análogos pueden ser representados por el mismo modelo matemático.

Analogía circuitos eléctricos: Fácilmente reproducibles en laboratorio



$$LC\frac{d{u_c}^2(t)}{dt^2}+RC\frac{du_c(t)}{dt}+u_c(t)=u(t)$$

$$M\frac{dx^2(t)}{dt^2}+f\frac{dx(t)}{dt}+K\cdot x(t)=u(t)$$

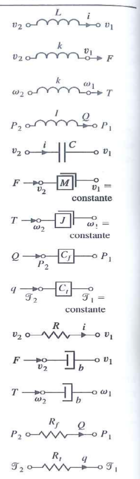


$$a\frac{dy^2(t)}{dt^2}+b\frac{dy(t)}{dt}+c\cdot y(t)=u(t)$$

Ejemplo 2.4

Tabla 2.2. Resumen de ecuaciones diferenciales que describen a elementos ideales

Tipo de elemento	Elemento físico	Ecuación descriptiva	Energía E o potencia $\mathcal{P}$	Símbolo
	Inductancia eléctrica	$v_{21}=L\frac{di}{dt}$	$E=\frac{1}{2}Li^2$	
Almacenamiento inductivo	Resorte traslacional	$v_{21}=\frac{1}{k}\frac{dF}{dt}$	$E=\frac{1}{2}\frac{F^2}{k}$	
	Resorte rotacional	$\omega_{21}=\frac{1}{k}\frac{dT}{dt}$	$E=\frac{1}{2}\frac{T^2}{k}$	
	Inercia del fluido	$P_{21}=I\frac{dQ}{dt}$	$E=\frac{1}{2}IQ^2$	
	Capacitancia eléctrica	$i=C\frac{dv_{21}}{dt}$	$E=\frac{1}{2}Cv_{21}^2$	
	Masa trasnacional	$F=M\frac{dv_2}{dt}$	$E=\frac{1}{2}Mv_2^2$	
Almacenamiento capacitivo	Masa rotacional	$T=J\frac{d\omega_2}{dt}$	$E=\frac{1}{2}J\omega_2^2$	
	Capacitancia del fluido	$Q=C_f\frac{dP_{21}}{dt}$	$E=\frac{1}{2}C_fP_{21}^2$	
	Capacitancia térmica	$q=C_t\frac{d\mathcal{T}_2}{dt}$	$E=C_t\mathcal{T}_2$	
	Resistencia eléctrica	$i=\frac{1}{R}v_{21}$	$\mathcal{P}=\frac{1}{R}v_{21}^2$	
	Amortiguador traslacional	$F=bv_{21}$	$\mathcal{P}=bv_{21}^2$	
Disipadores de energía	Amortiguador rotacional	$T=b\omega_{21}$	$\mathcal{P}=b\omega_{21}^2$	
	Resistencia del fluido	$Q=\frac{1}{R_f}P_{21}$	$\mathcal{P}=\frac{1}{R_f}P_{21}^2$	
	Resistencia térmica	$q=\frac{1}{R_t}\mathcal{T}_{21}$	$\mathcal{P}=\frac{1}{R_t}\mathcal{T}_{21}$	



istemas de Control Moderno". Richard C. Dorf. Pearson -Prentice Hall. 10ª edición.

Introducción

Modelos Matemáticos

Linealización

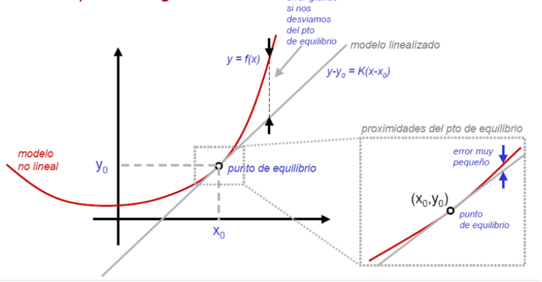
Transforma de Laplace

Linealización

*Un sistema lineal satisface las propiedades de **superposición** y **homogeneidad***

- Se linealiza en torno a un punto de equilibrio.
- Las variaciones de las variables son nulas
- La ecuación de linealización no es única, depende del punto donde se haga la linealización
- Las variables de la ecuación linealizada representan incrementos respecto al punto

interpretación gráfica



"Análisis dinámico de sistemas". ISA. Universidad de Oviedo

Universidad Rey Juan Carlos

Introducción

25

Modelos Matemáticos

Linealización

Transforma de Laplace

Universidad Rey Juan Carlos

Transforma de Laplace

26

Table 2.5 Transfer Functions of Dynamic Elements and Networks

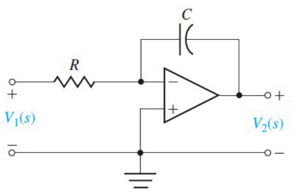
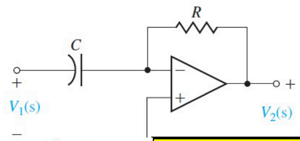
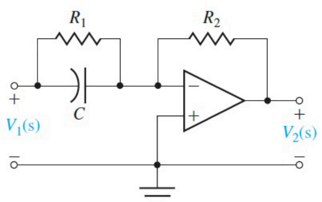
Element or System	$G(s)$
1. Integrating circuit, filter 	$\frac{V_2(s)}{V_1(s)} = -\frac{1}{RCs}$
2. Differentiating circuit 	$\frac{V_2(s)}{V_1(s)} = -RCs$

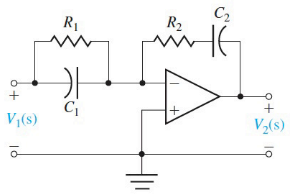
Table 2.5 Transfer Functions of Dynamic Elements and Networks

Element or System	G(s)
3. Differentiating circuit	$\frac{V_2(s)}{V_1(s)} = -\frac{R_2(R_1Cs + 1)}{R_1}$
4. Integrating filter	$\frac{V_2(s)}{V_1(s)} = -\frac{(R_1C_1s + 1)(R_2C_2s + 1)}{R_1C_2s}$

3. Differentiating circuit



4. Integrating filter

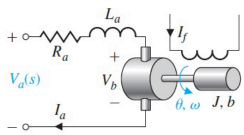


(continued)

Table 2.5 Transfer Functions of Dynamic Elements and Networks

Element or System	G(s)
6. DC motor, armature-controlled, rotational actuator	$\frac{\theta(s)}{V_a(s)} = \frac{K_m}{s[(R_a + L_as)(Js + b) + K_bK_m]}$
7. AC motor, two-phase control field, rotational actuator	$\frac{\theta(s)}{V_c(s)} = \frac{K_m}{s(\tau s + 1)}$, $\tau = J/(b - m)$, m = slope of linearized torque-speed curve (normally negative)

6. DC motor, armature-controlled, rotational actuator



7. AC motor, two-phase control field, rotational actuator

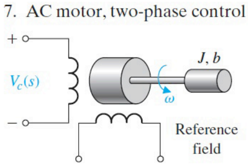
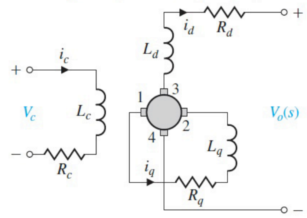
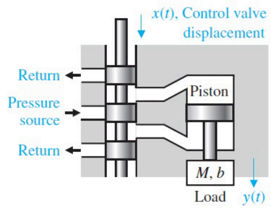
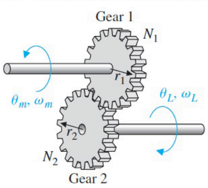
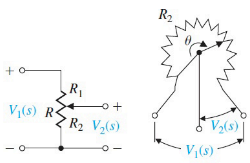


Table 2.5 Transfer Functions of Dynamic Elements and Networks

Element or System	G(s)
8. Rotary Amplifier (Amplidyne) 	$\frac{V_o(s)}{V_c(s)} = \frac{K/(R_cR_q)}{(s\tau_c + 1)(s\tau_q + 1)}$ $\tau_c = L_c/R_c, \quad \tau_q = L_q/R_q$ for the unloaded case, $i_d \approx 0$, $\tau_c \approx \tau_q$, $0.05\text{ s} < \tau_c < 0.5\text{ s}$ $V_q,\ V_{34} = V_d$
9. Hydraulic actuator 	$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{K}{s(Ms + B)}$ $K = \frac{Ak_x}{k_p}, \quad B = \left(b + \frac{A^2}{k_p}\right)$ $k_x = \left.\frac{\partial g}{\partial x}\right\vert_{x_0}, \quad k_p = \left.\frac{\partial g}{\partial P}\right\vert_{P_0},$ $g = g(x, P) = \text{flow}$ $A = \text{area of piston}$

(continued)

Table 2.5 *Continued*

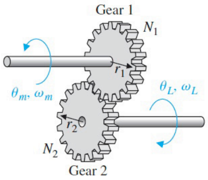
Element or System	G(s)
10. Gear train, rotational transformer 	Gear ratio $= n = \frac{N_1}{N_2}$ $N_2\theta_L = N_1\theta_m, \quad \theta_L = n\theta_m$ $\omega_L = n\omega_m$
11. Potentiometer, voltage control 	$\frac{V_2(s)}{V_1(s)} = \frac{R_2}{R} = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$ $\frac{R_2}{R} = \frac{\theta}{\theta_{max}}$

Transforma de Laplace

Table 2.5 *Continued*

Element or System	G(s)

10. Gear train, rotational transformer

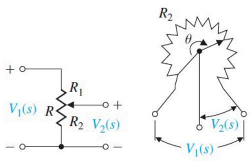


Gear ratio $= n = \dfrac{N_1}{N_2}$

$N_2\theta_L = N_1\theta_m, \qquad \theta_L = n\theta_m$

$\omega_L = n\omega_m$

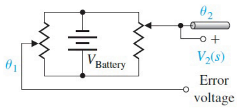
11. Potentiometer, voltage control



$$\frac{V_2(s)}{V_1(s)} = \frac{R_2}{R} = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

$$\frac{R_2}{R} = \frac{\theta}{\theta_{max}}$$

12. Potentiometer, error detector bridge



$V_2(s) = k_s(\theta_1(s) - \theta_2(s))$

$V_2(s) = k_s\theta_{error}(s)$

$k_s = \dfrac{V_{Battery}}{\theta_{max}}$

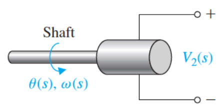
2014/

Transforma de Laplace

Table 2.5 Transfer Functions of Dynamic Elements and Networks

Element or System	G(s)

13. Tachometer, velocity sensor



$V_2(s) = K_t\omega(s) = K_t s\theta(s)$

$K_t =$ constant

14. DC amplifier

$$\frac{V_2(s)}{V_1(s)} = \frac{k_a}{s\tau + 1}$$

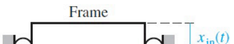
$R_o =$ output resistance

$C_o =$ output capacitance

$\tau = R_oC_o, \tau \ll 1s$

and is often negligible for controller amplifier

15. Accelerometer, acceleration sensor



$x_o(t) = y(t) - x_{in}(t),$

$$\frac{X_o(s)}{X_{in}(s)} = \frac{-s^2}{s^2 + (b/M)s + k/M}$$

Transforma de Laplace

Table 2.5 Transfer Functions of Dynamic Elements and Networks

Element or System	G(s)
16. Thermal heating system	$\frac{\mathcal{T}(s)}{q(s)} = \frac{1}{C_t s + (QS + 1/R_t)}$, where $\mathcal{T} = \mathcal{T}_o - \mathcal{T}_e$ = temperature difference due to thermal process C_t = thermal capacitance Q = fluid flow rate = constant S = specific heat of water R_t = thermal resistance of insulation $q(s)$ = transform of rate of heat flow of heating element
17. Rack and pinion	$x = r\theta$ converts radial motion to linear motion