EJERCICIOS TEMA 2
Inducción

2.1. Demuestra por inducción que

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad 1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$$

2.2. Demuestra por inducción que $2^n > n + 1$ para todo $n \geq 2$

2.3. Demuestra que la suma de los k primeros número naturales impares es k^2

2.4. Demuestra que la suma de los k primeros número naturales impares es $k^2 + k$

2.5. Demuestra que $2n + 1 < n^2$ para todo $n \geq 3$

2.6. Demuestra que si $n \in \mathbf{N}$ entonces $4^n + 6n - 1$ es múltiplo de 9

2.7. Demuestra que si $n \in \mathbf{N}$ entonces $7^n - 4^n$ es múltiplo de 3

2.8. Se define la sucesión $t_1, t_2, t_3, \ldots$ del siguiente modo: $t_1 = 1$, $t_2 = 2$ $t_3 = 3$,
$t_n = t_{n-1} + t_{n-2} + t_{n-3}$ $\forall n \geq 4$. Demuestra que $t_n < 2^n$ $\forall n \in \mathbf{N}$

2.9. Demuestra que si n>13, entonces n se puede expresar como suma de treses y ochos.

2.10. Se define la aplicación f: $\mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$ de la siguiente forma $f(\mathrm{x}) = \dfrac{x}{1+x}$

Calcula $f^n(x) = (f \circ f \circ ..^{n)}.. \circ f)(x)$

2.11. Sea a un número entero positivo. Vamos a demostrar, usando el principio fuerte de inducción, que $a^{n-1} = 1$ para todo natural n

> Si n = 1 entonces $a^{1-1} = 1$, que es cierto.
> Supongamos que el resultado es cierto para todo k con $1 \leq k \leq n$
> Entonces, $a^{n-1} = \dfrac{a^{n-2}a^{n-2}}{a^{n-3}} = \dfrac{1 \cdot 1}{1} = 1$ utililizando la hipótesis de inducción. Por tanto, por el principio de inducción $a^{n-1} = 1$ para todo natural n

¿Dónde falla el argumento?

2.12. Demostremos, por inducción, que n = n + 1 $\forall n \in \mathbf{N}$

> Sea $M = \{0\} \cup \{n \in N \,/\, n = n + 1\}$, entonces $0 \in M$.
> Si $k \in M$ entonces k = k + 1, luego k + 1 = k + 2, es decir, también $k + 1 \in M$.
> Por tanto, por inducción, $M = \mathbf{N_0}$ y el resultado es cierto $\forall n \in \mathbf{N}$

¿Dónde falla este argumento?

2.13. Demostrar que:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \quad \text{para todo natural } n$$

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n\cdot(n+1)} = \frac{n}{n+1} \quad \text{para todo natural } n$$