

TEMA 2

MODULACIONES DIGITALES LINEALES: PASO BANDA

- 2.1 Modulaciones lineales (PAM) paso bajo
 - ▶ 2.1.1. Espectro de PAM banda base
 - ▶ 2.1.2. Transmisión con ruido gaussiano
 - ▶ 2.1.3. Canal discreto equivalente
- 2.2. Criterio de Nyquist
- 2.3. Transmisión PAM sobre canales lineales
- 2.4. Diagrama de ojo
- 2.5. Modulación lineales (PAM) paso banda
 - ▶ 2.5.1. Espectro de PAM paso banda
 - ▶ 2.5.2. Receptores PAM paso banda
 - ▶ 2.5.3. Características del ruido en el receptor
 - ▶ 2.5.4. Canal discreto equivalente

PAM paso banda - Modulación AM

- Hasta ahora hemos estudiado **PAM paso bajo**. Muy útil para entender los conceptos pero **poco práctico**:
 - ▶ **Atenuación en baja frecuencia** de algunos medios de transmisión. Ejemplo, **cable telefónico**
 - ★ No transmite señales próximas a la continua debido a bobinas híbridas.
 - ▶ **Canales compartidos**. Ejemplo, **canales radio**:
 - ★ Se **divide** el rango de frecuencias disponibles en **bandas** que se asignan con distintos propósitos.
 - ★ Es ilegal transmitir fuera de la banda.
 - ★ El ancho de banda siempre es mucho menor que la frecuencia central.

- Recordatorio: PAM en banda base

$$s(t) = \sum_n A[n] \cdot g(t - nT_s)$$

- Ahora se debe modular $s(t)$ en amplitud
 - ▶ PAM de doble banda lateral (PAM-DSB)
 - ▶ PAM de banda lateral única (PAM-SSB)
 - ★ Banda lateral inferior.
 - ★ Banda lateral superior.
 - ▶ Banda lateral vestigial (PAM-VSB).
 - ★ Banda lateral inferior.
 - ★ Banda lateral superior.

Inconvenientes de la modulación AM

- PAM de doble banda lateral (PAM-DSB)
 - ▶ Eficiencia espectral (se reduce a la mitad)
- PAM de banda lateral única (PAM-SSB)
 - ▶ Filtros analógicos de banda lateral ideales
- Banda lateral vestigial (PAM-VSB).
 - ▶ Filtros analógicos de banda lateral vestigial

Modulación mediante dos portadoras en cuadratura

- **Objetivo:** Mantener la **eficiencia espectral** de banda base.
- Dos secuencias de símbolos (no necesariamente independientes), $A_0[n]$ y $A_1[n]$
- Dos señales en banda base obtenidas al modular dichas señales con $g(t)$.

$$s_I(t) = \sum_n A_0[n] \cdot g(t - nT_s), \quad s_Q(t) = \sum_n A_1[n] \cdot g(t - nT_s)$$

$s_I(t)$: componente en fase, $s_Q(t)$: componente en cuadratura

- Señal PAM paso banda

$$\begin{aligned} x(t) &= \sqrt{2} \cdot s_I(t) \cdot \cos(\omega_c t) - \sqrt{2} \cdot s_Q(t) \cdot \sin(\omega_c t) \\ &= \sqrt{2} \cdot \sum_n A_0[n] \cdot g(t - nT_s) \cdot \cos(\omega_c t) - \sqrt{2} \cdot \sum_n A_1[n] \cdot g(t - nT_s) \cdot \sin(\omega_c t) \end{aligned}$$

Notación compleja para PAM paso banda

- Se define una secuencia **compleja** de símbolos

$$A[n] = A_0[n] + jA_1[n]$$

▶ $A_0[n] = \text{Re}\{A[n]\}$, $A_1[n] = \text{Im}\{A[n]\}$

- Se define la señal **compleja** en banda base, $s(t)$:

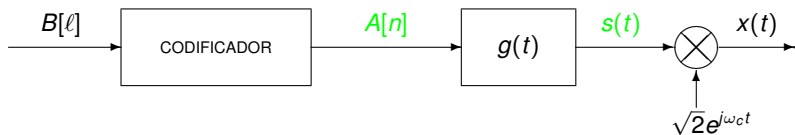
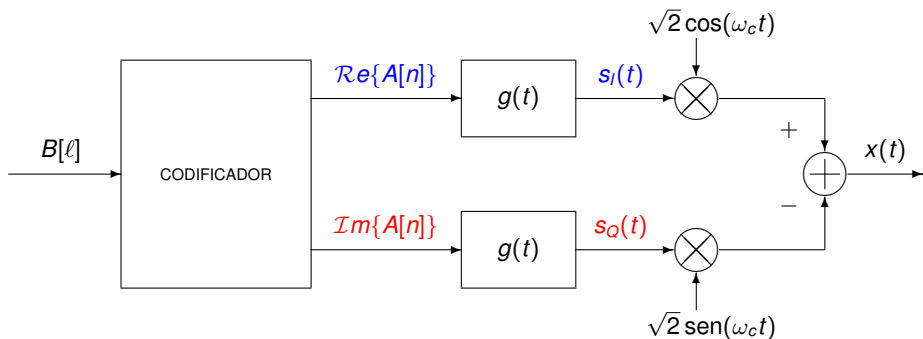
$$s(t) = s_I(t) + js_Q(t) = \sum_n A[n] \cdot g(t - nT_s)$$

- La señal PAM en paso banda se puede

$$x(t) = \sqrt{2} \cdot \text{Re} \left\{ s(t) \cdot e^{j\omega_c t} \right\} = \sqrt{2} \cdot \text{Re} \left\{ \sum_n A[n] \cdot g(t - nT_s) \cdot e^{j\omega_c t} \right\}$$

- ▶ La señal transmitida $x(t)$ es **real**.
- ▶ $x(t)$ **igual** a la transparencia anterior pero con otra notación.

Modulador PAM paso banda



Relación con espacio de señales 2D

- Señal en espacio de señales 2D

$$x(t) = \sum_n A_0[n] \cdot \phi_0(t - nT_s) + A_1[n] \cdot \phi_1(t - nT_s)$$

- ▶ $\phi_0(t)$ y $\phi_1(t)$ son señales ortogonales
- Sólo es válido si la frecuencia de la portadora es múltiplo de la tasa de símbolo. Recordar que $\omega_c \gg R_s$

$$\omega_c = \frac{2\pi N}{T_s} = 2\pi NR_s$$

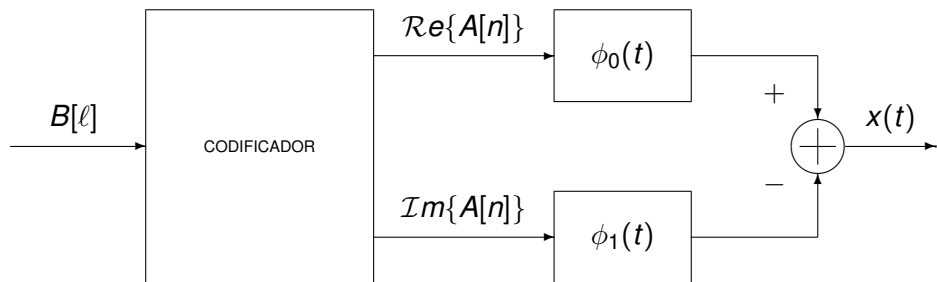
En este caso

$$\phi_0(t) = g(t) \cdot \cos(\omega_c t), \quad \phi_1(t) = -g(t) \cdot \sen(\omega_c t)$$

$$\phi_0(t - nT_s) = g(t - nT_s) \cdot \cos(\omega_c(t - nT_s)) = g(t - nT_s) \cdot \cos(\omega_c t)$$

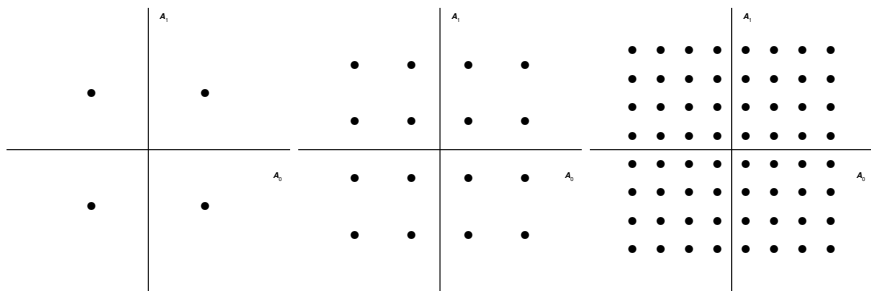
$$\phi_1(t - nT_s) = -g(t - nT_s) \cdot \sen(\omega_c(t - nT_s)) = -g(t - nT_s) \cdot \sen(\omega_c t)$$

Modulador en espacio 2D



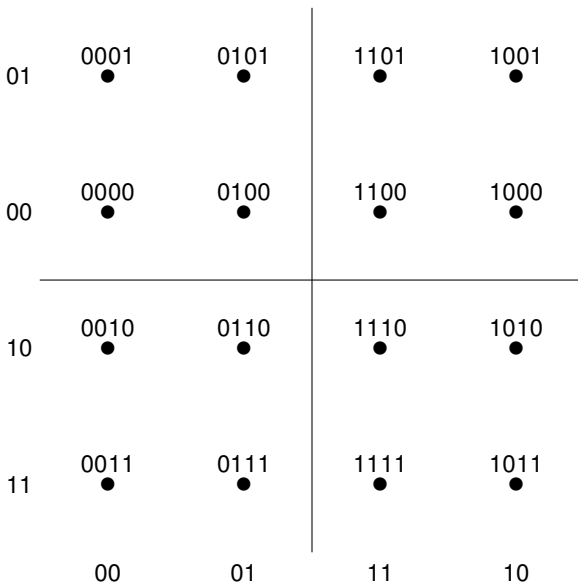
Constelaciones QAM

- QAM es una extensión a 2D de las modulaciones PAM.

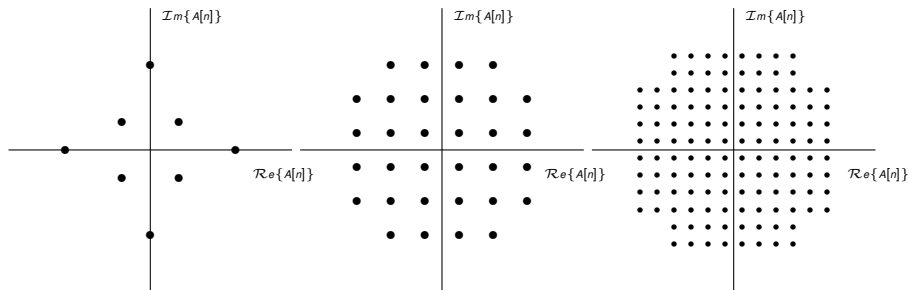


- Constelaciones 4-QAM (QPSK), 16-QAM y 64-QAM
- Para tener constelaciones cuadradas, el número de símbolos tiene que ser de la forma $M = 4^k$

Codificación Gray QAM

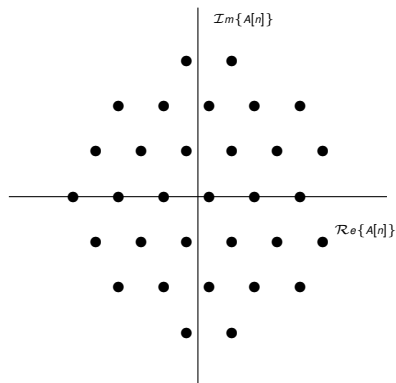
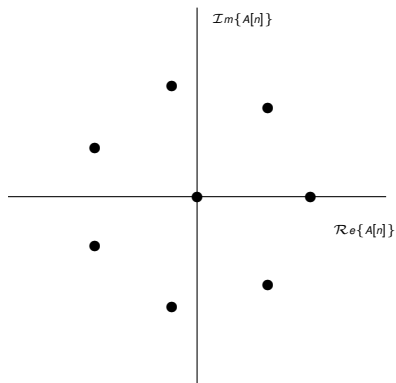


Constelaciones QAM en cruz



- Constelaciones 8-QAM, 32-QAM y 128-QAM

Otras constelaciones



Constelaciones 1-7-AM-PM y 32-hexagonal

Caso especial PSK: Modulación por cambio de fase

- Símbolos en PSK

$$A[n] = \sqrt{E_s} \cdot e^{j\varphi[n]}$$

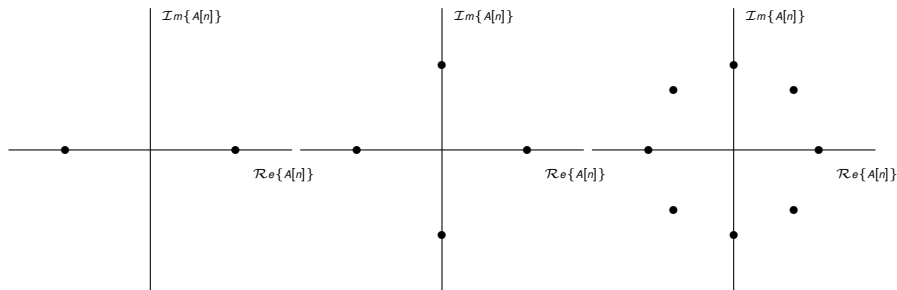
- ▶ **Módulo constante**
- ▶ Información en la fase

- Forma de onda de una PSK

$$\begin{aligned} x(t) &= \sqrt{2E_s} \operatorname{Re} \left\{ \sum_n g(t - nT) \cdot e^{j(\omega_c t + \varphi[n])} \right\} \\ &= \sqrt{2E_s} \sum_n g(t - nT) \cos(\omega_c t + \varphi[n]) \end{aligned}$$

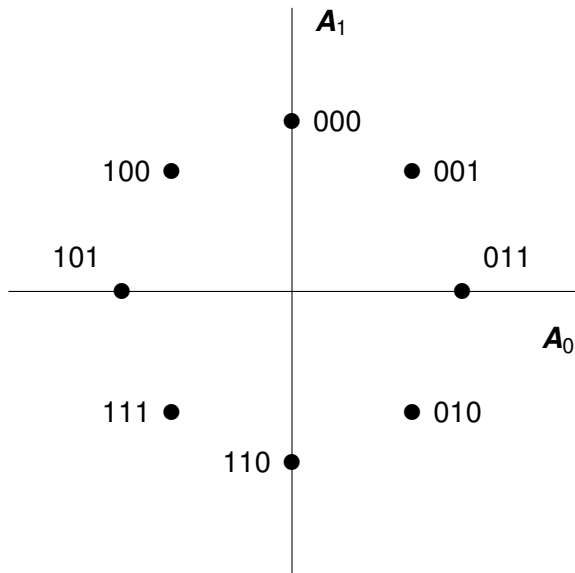
- ▶ Saltos de fase

Constelaciones PSK

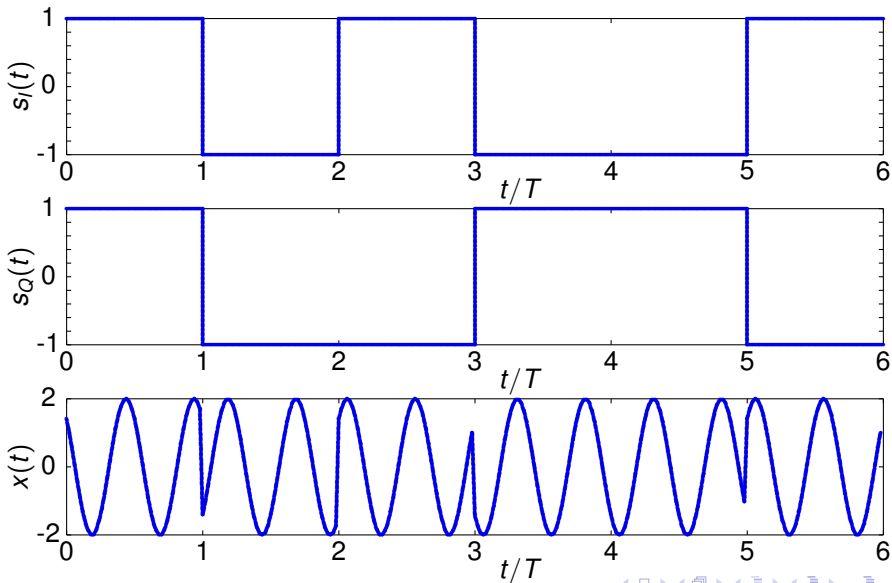


Constelaciones 2-PSK (**BPSK**), 4-PSK (**QPSK**), 8-PSK

Codificación Gray PSK



Modulación QPSK



2.5.1. Espectro de una PAM paso banda

- Para garantizar la cicloestacionariedad de la señal $x(t)$:

$$E \{A[n+k] \cdot A[n]\} = 0, \text{ para todo } n, k, k \neq 0 \text{ (símbolos blancos)}$$

- ▶ Modulación QAM

- ★ Los símbolos $A_0[n]$ y $A_1[n]$ son mutuamente independientes.
- ★ Las funciones de autocorrelación de $A_0[n]$ y de $A_1[n]$ son iguales (una delta).

- ▶ Modulación PSK

- ★ Las muestras de $\varphi[n]$ son mutuamente independientes.

- Densidad espectral de potencia

$$S_x(j\omega) = \frac{1}{2} [S_s(j\omega - j\omega_c) + S_s^*(-j\omega - j\omega_c)]$$

$$S_s(j\omega) = \frac{1}{T_s} \cdot S_A(e^{j\omega T_s}) \cdot |G(j\omega)|^2$$

Espectro de una PAM paso banda (II)

- Para secuencias blancas: $S_A(e^{j\omega}) = E_s$

$$S_s(j\omega) = \frac{E_s}{T_s} \cdot |G(j\omega)|^2$$

Es el pulso conformador el que da forma al espectro

$$S_x(j\omega) = \frac{1}{2} \left[|G(j\omega - j\omega_c)|^2 + |G(j\omega + j\omega_c)|^2 \right]$$

Potencia transmitida

- La potencia media transmitida es

$$P = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_x(j\omega) d\omega$$

- Si la secuencia $A[n]$ es blanca

$$S_A(e^{j\omega}) = E_s$$

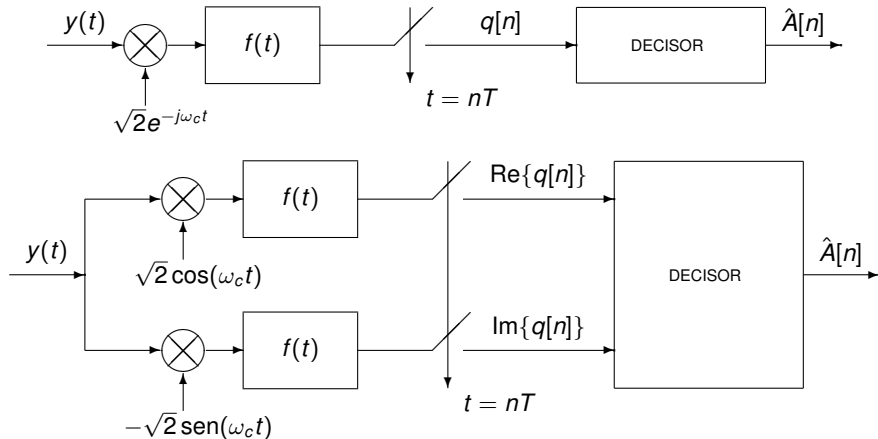
- ▶ Potencia para una secuencia blanca

$$P = \frac{E_s}{T_s} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |G(j\omega)|^2 d\omega = \frac{E_s}{T_s} \cdot \mathcal{E}\{g(t)\}$$

- ★ Si el filtro está normalizado

$$P = \frac{E_s}{T_s} = E_s R_s$$

2.5.2. Receptores PAM paso banda



Demodulador alternativo equivalente

- Señal a la entrada del muestreador

$$q(t) = \left(y(t) \cdot e^{-j\omega_c t} \right) * \left(\sqrt{2} \cdot f(t) \right)$$

- Expresión de la convolución

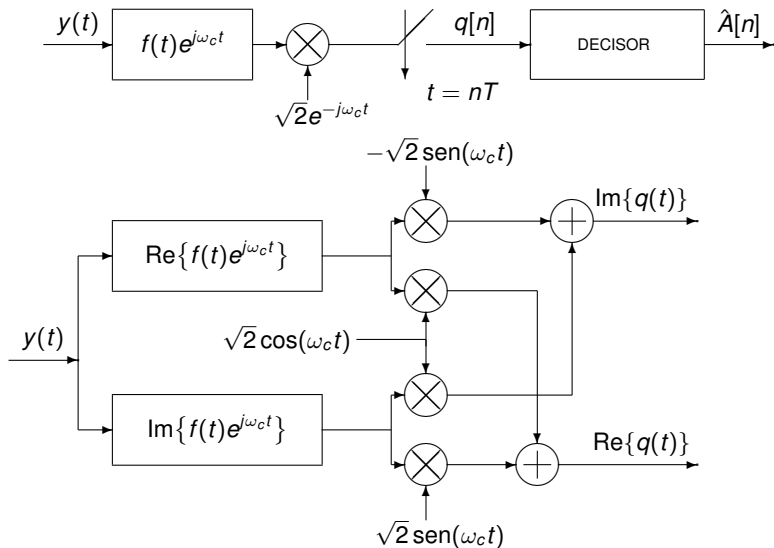
$$q(t) = \sqrt{2} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cdot y(t - \tau) \cdot e^{j\omega_c \tau} \cdot e^{-j\omega_c t} d\tau$$

- Reordenando términos

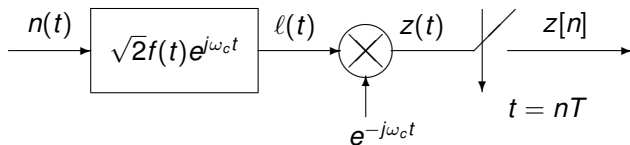
$$q(t) = e^{-j\omega_c t} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{2} \cdot f(\tau) \cdot e^{j\omega_c \tau} \cdot y(t - \tau) d\tau$$

$$q(t) = e^{-j\omega_c t} \cdot \left(y(t) * \left(\sqrt{2} \cdot f(t) \cdot e^{j\omega_c t} \right) \right)$$

Demodulador PAM paso banda equivalente



2.5.3. Características de ruido en el receptor



- Filtro receptor:

$$f_c(t) = \sqrt{2} \cdot f(t) \cdot e^{j\omega_c t}, \quad F_c(j\omega) = \sqrt{2} \cdot F(j\omega - j\omega_c)$$

- Espectro $S_\ell(j\omega)$:

$$S_\ell(j\omega) = 2 \cdot S_n(j\omega) \cdot |F(j\omega - j\omega_c)|^2$$

Ruido discreto $z[n]$ en el receptor

- Si se cumple que:

① $f(t)$ es real

② $f(t) * f^*(-t)$ cumple el criterio de Nyquist. $P(j\omega) = |F(j\omega)|^2$

$$\frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} P\left(j\omega - j\frac{2\pi k}{T_s}\right) = 1$$

③ $n(t)$ es AWGN

- Entonces:

- ▶ $R_z[k] = \delta[k]$, i.e, $z[n_1]$ es **independiente** de $z[n_2]$ si $n_1 \neq n_2$.
- ▶ $\text{Re}\{z[n]\}$ es **independiente** de $\text{Im}\{z[n]\}$

Varianza y distribución de $z[n]$

- La varianza del ruido complejo discreto es

$$\sigma_z^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_z(e^{j\omega}) d\omega$$

- Si el ruido $n(t)$ es blanco, con $S_n(j\omega) = N_0/2$ W/Hz, y si $f(t)$ satisface el criterio de Nyquist

$$\sigma_z^2 = N_0$$

- Si el ruido es circularmente simétrico
 - ▶ La parte real (I) e imaginaria (Q) son independientes y con varianza $\sigma_I^2 = \sigma_Q^2 = N_0/2$
 - ▶ La función densidad de probabilidad de este ruido es

$$f_Z(z) = \frac{1}{\pi N_0} e^{-\frac{|z|^2}{N_0}}$$

2.5.4. Canal discreto equivalente PB \rightarrow BB

- Canal equivalente en banda base, $h_{eq}(t)$

$$h_{eq}(t) = e^{-j\omega_c t} \cdot h(t) \leftrightarrow H_{eq}(j\omega) = H(j\omega + j\omega_c)$$

- Señal a la salida del filtro adaptado como en banda base:

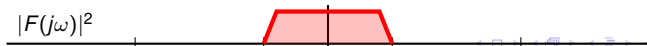
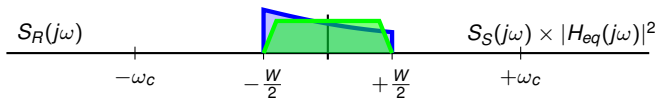
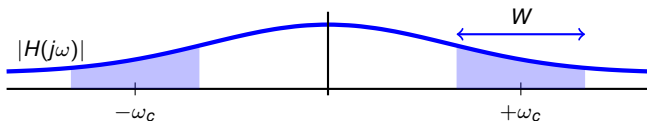
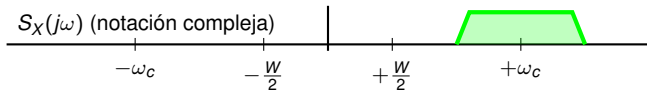
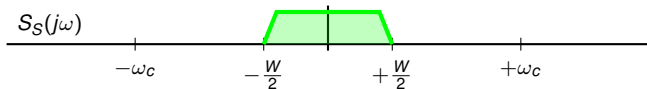
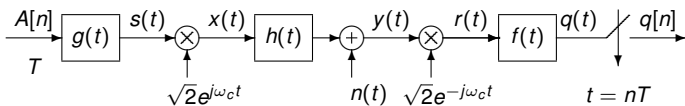
$$q(t) = \sum_n A[n] \cdot p(t - nT_s) + z(t)$$

► $p(t) = g(t) * h_{eq}(t) * f(t)$

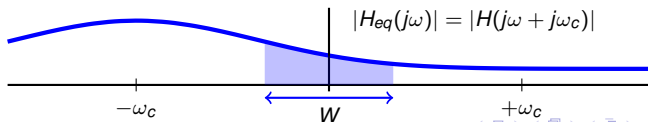
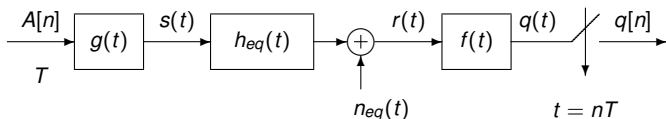
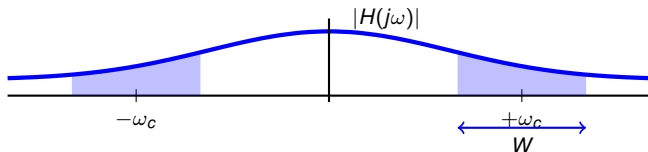
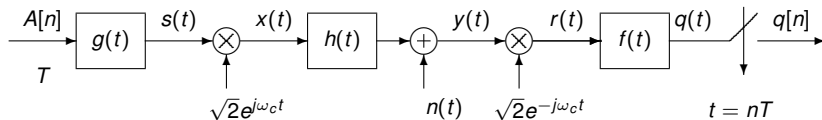
- Canal discreto equivalente: $p[n] = p(t)|_{t=nT_s} = p(nT_s)$

$$\begin{aligned} P(e^{j\omega}) &= \frac{1}{T_s} \sum_k P \left(j\frac{\omega}{T_s} - j\frac{2\pi k}{T_s} \right) \\ &= \frac{1}{T_s} \sum_k G \left(j\frac{\omega}{T_s} - j\frac{2\pi k}{T_s} \right) \cdot H_{eq} \left(j\frac{\omega}{T_s} - j\frac{2\pi k}{T_s} \right) \cdot F \left(j\frac{\omega}{T_s} - j\frac{2\pi k}{T_s} \right) \end{aligned}$$

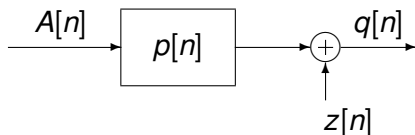
Canal complejo equivalente en BB



Canal complejo equivalente en BB (II)

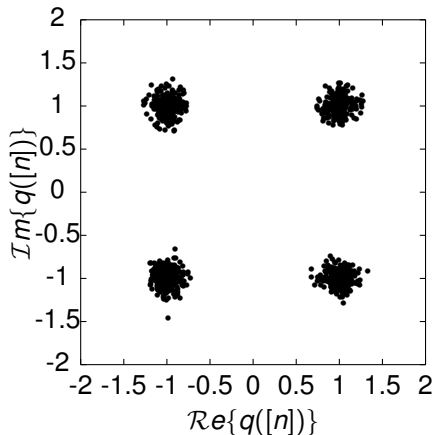


Canal discreto equivalente PB \rightarrow BB



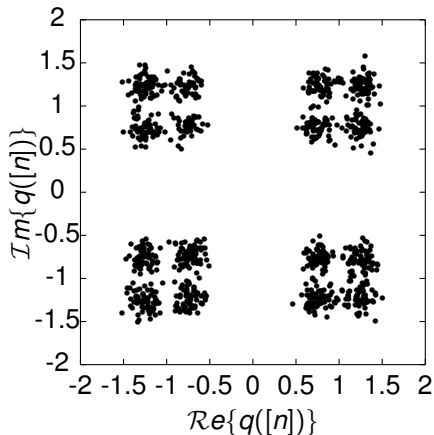
- El canal discreto equivalente es el mismo en BB que en PB.
 - ▶ Símbolos $A[n]$
 - ▶ Canal discreto equivalente $p[n]$
 - ▶ Ruido discreto $z[n]$
- Observación: en **BB** todo es **real** y en **PB** es **complejo**.
- De nuevo, si no hay ISI (se cumple el criterio de Nyquist):
$$q[n] = A[n] + z[n]$$
- Y al ser independientes la parte Real y la Imaginaria:
$$q_I[n] = A_I[n] + z_I[n] \text{ y } q_Q[n] = A_Q[n] + z_Q[n]$$

Diagrama de Dispersión



$$p[n] = \delta[n]$$

Cumple Nyquist: ¡No ISI!



$$p[n] = \delta[n] - 0,25\delta[n - 1]$$

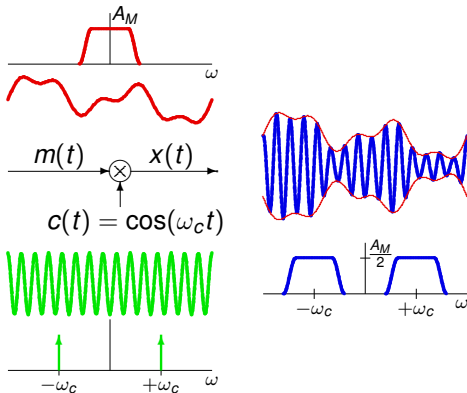
Cada símbolo se mezcla con el anterior: ISI

Revisión - Producto con una senoide

- Multiplicar por una senoide de frecuencia ω_c genera, espectralmente, dos réplicas del espectro de la señal, desplazadas $\pm\omega_c$

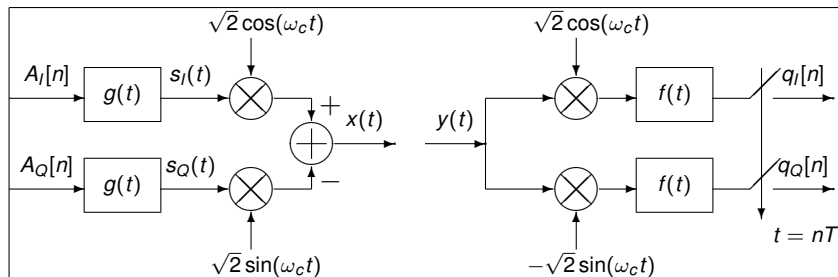
$$x(t) = m(t) \times \cos(\omega_c t) \quad \xleftrightarrow{TF} \quad X(j\omega) = \frac{1}{2}M(j\omega - j\omega_c) + \frac{1}{2}M(j\omega + j\omega_c)$$

$$\text{Densidad espectral de potencia: } S_X(j\omega) = \frac{1}{4}S_M(j\omega - j\omega_c) + \frac{1}{4}S_M(j\omega + j\omega_c)$$



Análisis modulación / demodulación

- Digrama de bloques de transmisor y receptor



- Transmisor: modula dos señales en banda base con portadoras ortogonales
- Receptor: demodula cada componente y filtra con $f(t)$
 - ▶ El filtro receptor $f(t)$ tiene una característica banda base (paso bajo)
 - ▶ Configuración típica: filtro en raíz de coseno alzado

Análisis modulación / demodulación (II)

- La señal recibida sin distorsión (señal modulada) tiene la forma

$$y(t) = A \cos(\omega_c t) + B \sin(\omega_c t)$$

- En el receptor, la señal se procesa dividiéndola en dos componentes

$$y_A(t) = [A \cos(\omega_c t) + B \sin(\omega_c t)] \times \cos(\omega_c t)$$

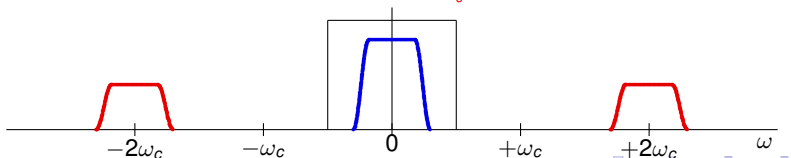
$$y_B(t) = [A \cos(\omega_c t) + B \sin(\omega_c t)] \times \sin(\omega_c t)$$

- Identidades trigonométricas y eliminación (filtrado) de términos paso banda

$$X \cos(\omega_c t) \cos(\omega_c t) = \underbrace{\frac{X}{2}}_{\text{Deseado}} + \underbrace{\frac{X}{2} \cos(2\omega_c t)}_{\text{Paso banda en } 2\omega_c}$$

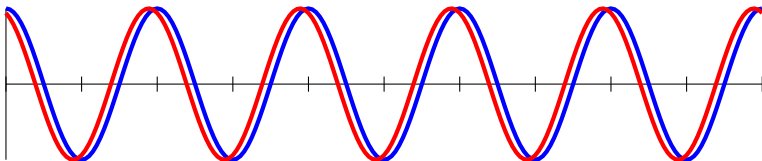
$$X \sin(\omega_c t) \cos(\omega_c t) = \underbrace{\frac{X}{2} \sin(2\omega_c t)}_{\text{Paso banda en } 2\omega_c}$$

$$X \sin(\omega_c t) \sin(\omega_c t) = \underbrace{\frac{X}{2}}_{\text{Deseado}} - \underbrace{\frac{X}{2} \cos(2\omega_c t)}_{\text{Paso banda en } 2\omega_c}$$

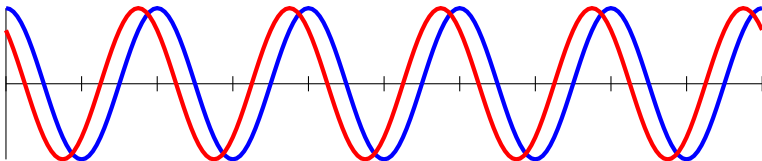


Distintas fases o frecuencias

Portadoras con misma frecuencia y desfase de 20°



Portadoras con misma frecuencia y desfase de 45°



Portadoras con frecuencias distintas: desfase "variable"

