PROBLEMA 1

Consideremos los espacios normados $(\mathbb{X}_i \, , \|.\|_i)$ $(i = 1{,}2)$.

a) Demostrar entonces, que el par de espacios normados indicados son homemorfos (topológicamente isomorfos) si y solamente si $\exists\, \boldsymbol{A} : \mathbb{X}_1 \to \mathbb{X}_2$ que es un isomorfismo y además existen constantes reales $m, M > 0$ tales que se verifica que $m \leq \dfrac{\|x\|_1}{\|\boldsymbol{A}\, x\|_2} \leq M \quad \forall x \in \mathbb{X}_1 \;\; ; \;\; x \neq 0$.

b) Si $\mathbb{X}_1$ es un espacio de Banach ¿Qué pasa con $\mathbb{X}_2$?

<u>**Indicación**</u> : Recordar que:

- Una aplicación $\boldsymbol{A} : \mathbb{X}_1 \to \mathbb{X}_2$ es un isomorfismo si $\boldsymbol{A}$ es lineal; es decir, si $\boldsymbol{A}(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha\, \boldsymbol{A} x_1 + \beta\, \boldsymbol{A} x_2$ y además es biyectiva (es decir, uno a uno y sobre).
- Los espacios $\mathbb{X}_1$ y $\mathbb{X}_2$ se dicen homeomorfos (o topológicamente equivalentes) si existe un isomorfismo

  $\boldsymbol{A} : \mathbb{X}_1 \to \mathbb{X}_2$, que es continuo y cuyo inverso también es continuo.

(3 Puntos)

PROBLEMA 2

Sea $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión acotada de números complejos.

a) Demostrar que el operador lineal $\boldsymbol{A}: \boldsymbol{l^2} \to \boldsymbol{l^2}$ definido en la forma $\boldsymbol{A e}_n = \mu_n \boldsymbol{e}_n$; $\forall n \geq 1$ **,** donde $\left\{\{\boldsymbol{e}_n\}_{n=1}^{\infty}\right\}$ es una base ortonormal de $\boldsymbol{l}^2$, es acotado.

b) ¿Cuándo existe el inverso?

(2,5 Puntos)

PROBLEMA 3

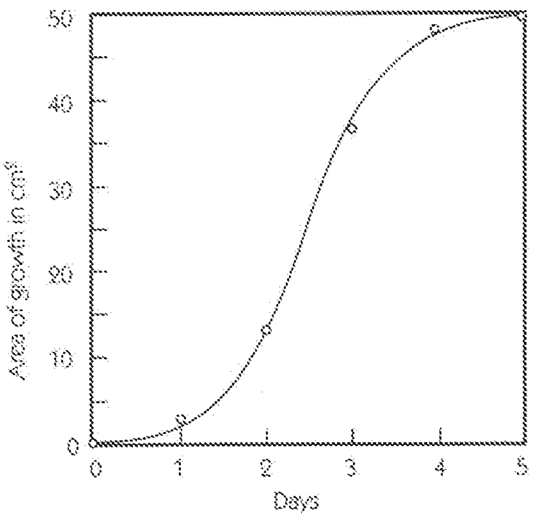
Utilizar la transformada de Laplace para resolver en $f(t)$ la ecuación integral:

$$f(t) = 3t^2 - e^{-t} - \int_0^t f(\tau)\, e^{t-\tau}\, d\tau \, .$$

Indicación: Utilizar para ello el teorema de la convolución.

(2,00 Puntos)

PROBLEMA 4 (2,5 puntos)



La figura adjunta nos da las medidas del crecimiento diario (cículos) de un área (en cm^2). Los puntos experimentales se han ajustado a la llamada función logística (línea continua):

$$y(t) = \frac{a}{b + e^{-\gamma\, t}}$$

donde a, b y γ son constantes positivas.

a) Obtenga el valor de $y(t)$ en función de a, b y γ cuando $t = 0$ y $t \to \infty$.

b) Muestre que la función logística es solución de la ecuación

$$\frac{dy}{dt} = k_1\, y - k_2\, y^2$$

y calcule los valores de k_1 y k_2.

c) En la figura, $a = 0{,}25\ cm^2$, $b = 0.005$ y $\gamma = 2{,}1\ día^{-1}$. Encuentre los valores correspondientes de k_1 y k_2.

Duración: 2h. MATERIAL AUXILIAR: ninguno.

Razónese las respuestas para que puedan darse como válidas.