Universidad Europea de Madrid

LAUREATE INTERNATIONAL UNIVERSITIES

CONTINUIDAD Y DERIVADA

APLICACIONES DE LA DERIVADA II

Índice

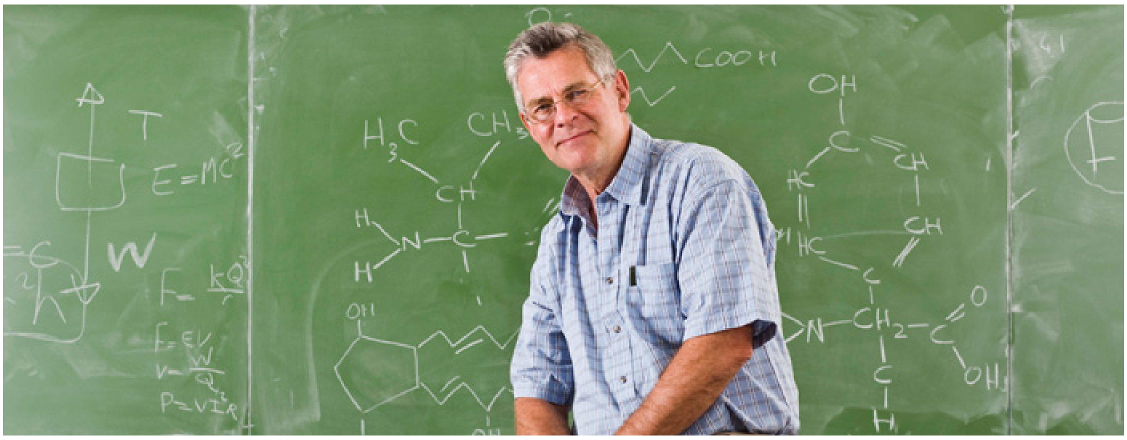
Presentación 3
Extremos locales 4
Primer criterio 5
Segundo criterio 6
Ejemplo 7
Curvatura de la gráfica de una función 8
Intervalos de curvatura 9
Puntos de inflexión 10
Ejemplo 11
Resumen 12

Presentación

En este tema continuaremos estudiando algunas de las aplicaciones de la derivada.
Para el estudio de la gráfica de una función, la derivada es un elemento fundamental. Con el signo de la primera derivada podemos determinar el crecimiento (y decrecimiento) de la función. Otras aplicaciones importantes de la derivada son el cálculo de los máximos y mínimos relativos (extremos) y el estudio de la curvatura.

El cálculo de los máximos y mínimos de una función tiene como aplicación fundamental los problemas de optimización. En economía, es importante saber, por ejemplo, cuándo se obtiene el máximo beneficio, o el máximo ingreso o el mínimo coste.

En este tema las derivadas sucesivas de una función cumplirán un papel fundamental.



Extremos locales

La derivada de una función nos ayudará a conocer los puntos **máximo** y **mínimo locales** de una función.
Decimos que la función *f* tiene un **máximo local** (o relativo) en un intervalo *[a,b]* en el punto *c* del intervalo si se cumple que, para cualquier valor *x* de intervalo *f(x)<f(c)*. En otras palabras, un **máximo relativo** es el punto en el que la función alcanza el valor más alto de los que se encuentran a su alrededor (pero no tiene por qué ser el punto más alto de toda la función).
Decimos que la función *f* tiene un **mínimo local** (o relativo) en un intervalo *[a,b]* en el punto c del intervalo si se cumple que, para cualquier valor *x* de intervalo *f(c)<f(x)*. En otras palabras, un mínimo relativo es el punto en el que la función alcanza el valor más bajo de los que se encuentran a su alrededor (pero no tiene por qué ser el punto más bajo de toda la función).

Si pensamos en la gráfica como en una cordillera, cada pico de cada montaña sería un máximo relativo y los valles, un mínimo relativo.

Llamaremos extremo local (o relativo) de una función a los puntos máximo y mínimo relativos.

Primer criterio

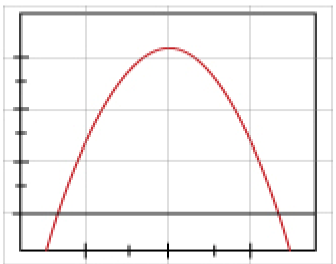
¿Cómo podemos calcular los máximos y los mínimos de cualquier función? La función derivada nos dará la respuesta a esta pregunta. Un resultado importante para encontrar los extremos es el siguiente:
Si una función *f* tiene un extremo (máximo o mínimo) relativo en el punto *c* de un intervalo *[a,b]* y *f* es derivable, entonces *f´(c)=0*.
Es decir, los "candidatos" a extremo relativo los encontraremos entre los puntos qe anulan la primera derivada.
Los puntos que anulan la primera derivada los denominamos **puntos críticos**.

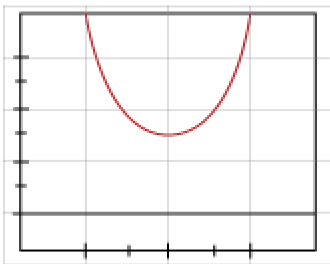
¡Cuidado! Todos los extremos son puntos críticos pero no todos los puntos críticos son extremos.

Para saber cuáles de los puntos críticos son extremos relativos utilizaremos alguno de los siguientes criterios:

Primer criterio (criterio del crecimiento)

Sea ***c*** un punto crítico:
Si una función cambia de crecer a decrecer → **máximo local**
Si una función cambia de decrecer a crecer → **mínimo local**


Máximo local


Mínimo local

Segundo criterio

Para conocer si un punto crítico es un extremo relativo o no, podemos utilizar también la **segunda derivada** de la función. Recordemos que la segunda derivada nos indica cómo cambia la primera derivada.

Segundo criterio (segunda derivada)

En un punto crítico *c*, la función *f(x)* tiene un:

máximo local si $f''(c)<0$

mínimo local si $f''(c)>0$

Para encontrar los **extremos locales** de una función podemos utilizar el **primer criterio** o el **segundo**.

En resumen:

Para obtener los máximos y mínimos locales de una función debemos seguir los siguientes pasos:

Calcular el dominio de la función identificando las discontinuidades (en los puntos fuera de dominio).

Calcular la primera derivada de la función.

Calcular los puntos críticos igualando la primera derivada a cero. Estos puntos serán los “candidatos” a máximo o mínimo relativo.

Clasificamos los puntos críticos utilizando alguno de los dos criterios anteriores.

Criterios	
Primer criterio	Construimos los intervalos de crecimiento y estudiamos el signo de la primera derivada. Si en los puntos críticos hay cambios de crecimiento entonces son máximos o mínimos locales.
Segundo criterio	Calculamos la segunda derivada y sustituimos los valores de los puntos críticos en ella.Si es positiva, el punto será un mínimo local y si es negativa, tendremos un máximo local.

Recuerda: no todos los puntos críticos son máximos o mínimos, es posible que el punto que anula la primera derivada no sea ni una cosa ni la otra.

Ejemplo

Determinar los máximos y mínimos locales de la función $f(x)=x^3-6x^2+5$.

Solución

Seguiremos los pasos que hemos definido para el cálculo de extremos:

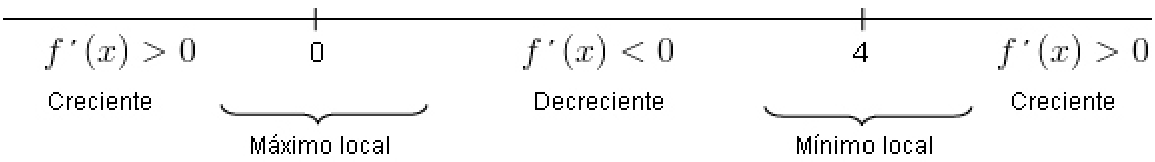
1. *Dom f*=R.
2. Cálculo de la derivada de la función: $f'(x)=3x^2-12x$.
3. Calculamos los puntos críticos: $f'(x)=3x(x-4)=0$, los puntos críticos son $x=0$ y $x=4$.
4. Clasificación:

- **Si utilizamos el primer criterio**:

  Determinamos los intervalos de crecimiento con los puntos críticos y los puntos de discontinuidad.

  En este caso, no hay puntos de discontinuidad por los que los intervalos son $(-\infty,0),(0,4),(4,\infty)$.

  Estudiamos el signo de la derivada en cada intervalo:



- **Si utilizamos el segundo criterio**:

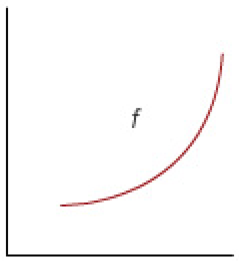
  Calculamos la segunda derivada $f''(x)=6x-12$, y sustituimos cada punto crítico.

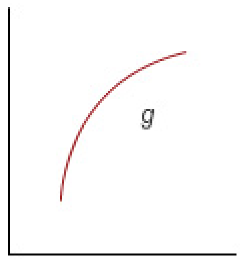
  $f''(0)=-12<0 \rightarrow$ **máximo local en $x=0$**

  $f''(4)=12>0 \rightarrow$ **mínimo local en $x=4$**

Curvatura de la gráfica de una función

La forma de la gráfica de una función se puede estudiar gracias a la segunda derivada. Si observamos las gráficas siguientes nos daremos cuenta que las funciones f y g son ambas crecientes en un intervalo pero su forma es muy distinta.

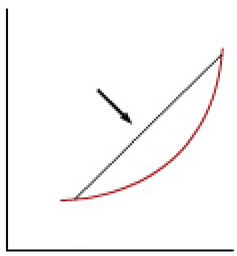




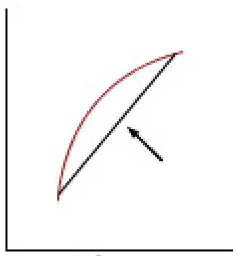
La forma que tiene la gráfica de una función recibe el nombre de curvatura, y esta curvatura puede ser **cóncava** o **convexa**.

Decimos que una función es convexa si al trazar una recta que une dos puntos de la gráfica, la recta queda por encima de la gráfica. Si las rectas quedan por debajo, decimos que la función es cóncava.

Según las definiciones anteriores, la función f es convexa y la función g es cóncava.



Convexa



Cóncava

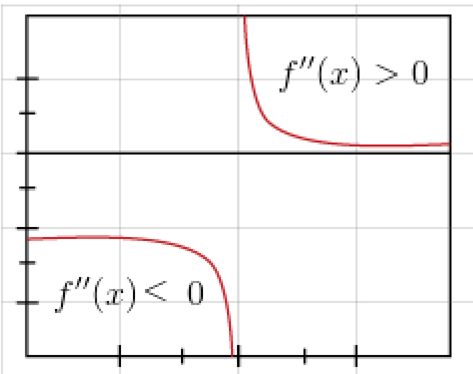
Intervalos de curvatura

¿Qué nos dice la segunda derivada sobre la curvatura? Cuando la función es derivable, la segunda derivada nos resulta muy útil para el estudio de su curvatura. De forma que, si f es una función **derivable** se cumple que:

- Es convexa si *f´´(x)>0* en un intervalo.
- Es cóncava si *f´´(x)<0* en un intervalo.

De la misma manera que al estudiar el crecimiento de una función lo hacemos atendiendo a los diferentes intervalos, para estudiar si la función es cóncava o convexa, construiremos los **intervalos de curvatura** siguiendo los siguientes **pasos**:

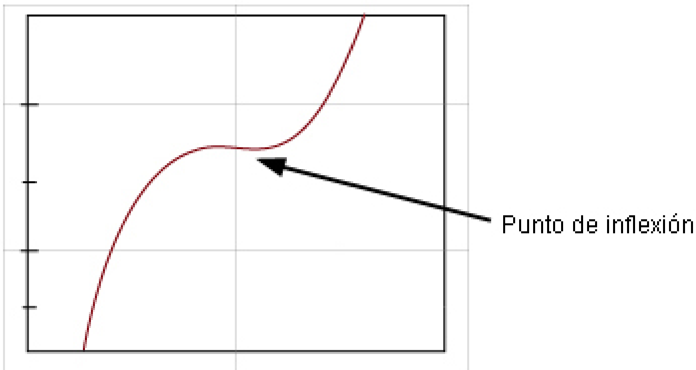
1. Calcular el dominio de la función identificando las discontinuidades (en los puntos fuera de dominio).
2. Calcular la primera derivada de la función.
3. Calcular la segunda derivada de la función.
4. Obtener los puntos que anulan la segunda derivada.
5. Construir los intervalos de curvatura utilizando los puntos que anulan la segunda derivada y los puntos fuera de dominio.
6. Estudiar del signo de la segunda derivada en cada intervalo.



Puntos de inflexión

Hemos visto al comienzo del tema que si en un **punto crítico** existe un **cambio en el crecimiento**, entonces ese punto es un **máximo** o un **mínimo local**. De la misma manera, si en un punto que anula la segunda derivada existe un cambio de curvatura, es decir, pasa de ser cóncava a convexa o al contrario, el punto recibe el nombre de **punto de inflexión**.

Observemos la gráfica siguiente:



Existe un punto en el que la función, siendo **creciente** en todo el recorrido, **cambia de cóncava a convexa**, dicho punto es un **punto de inflexión**.

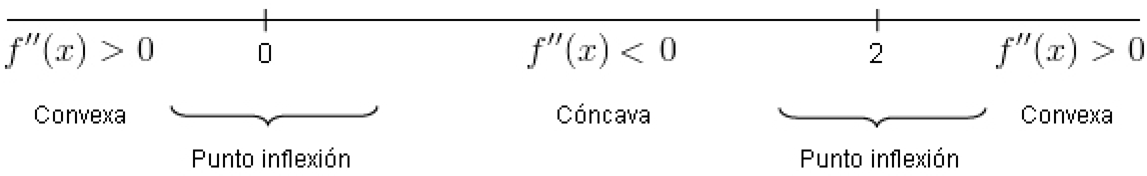
Estos puntos tienen la característica de que, en ellos, la recta tangente cruza la gráfica de la función.

Ejemplo

Estudia la curvatura de la función $f(x)=x^4-4x^3$ indicando si tiene puntos de inflexión.

Solución

1. *Dom f*=R
2. $f'(x)=4x^3-12x^2$
3. $f''(x)=12x^2-24x$
4. $f'''(x)=12x(x-2)=0$ → $x=0$, $x=2$
5. Construimos los siguientes intervalos $(-\infty,0)$, $(0,2)$, $(2,\infty)$.
6. Estudiamos el signo de la segunda derivada en dichos intervalos.



Por lo tanto, la función f es convexa de $(-\infty,0)$ y $(2,\infty)$, y cóncava en $(0,2)$.

Presenta dos puntos de inflexión en $x=0$ y $x=2$.

Recuerda: para estudiar el signo de la segunda derivada cogemos un punto del intervalo y sustituimos en la segunda derivada.

Resumen

En este tema hemos estudiado qué nos dice de la función la segunda derivada. Esta derivada nos permite calcular los máximos y mínimos locales de una función así como determinar su curvatura.

Los candidatos a extremos locales de una función son los puntos críticos, es decir, los puntos que anulan la primera derivada. Para clasificar esos puntos como máximos o mínimos locales (o ninguno de ellos), podemos utilizar dos criterios: el de crecimiento, observando los cambios de creciente a decreciente (o al revés); y el de la segunda derivada, de modo que al sustituir el punto crítico en la segunda derivada, será un máximo local si tiene signo negativo y un mínimo si es positivo.

Para el estudio de la curvatura, debemos determinar el signo de la segunda derivada, de modo que si ésta es positiva, la función es convexa y si es negativa, es cóncava. Los puntos en los que se produce un cambio de curvatura se denominan puntos de inflexión.