Universidad Europea de Madrid

LAUREATE INTERNATIONAL UNIVERSITIES

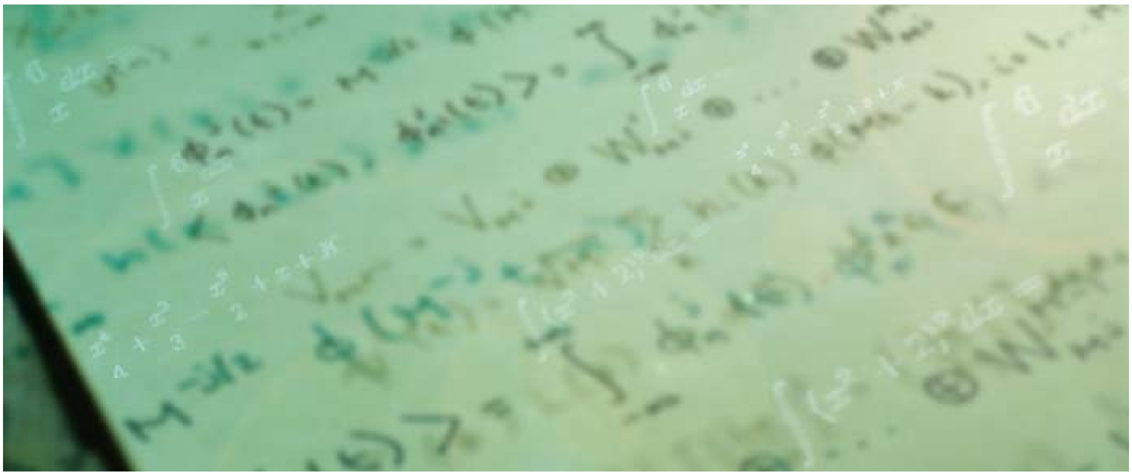
DERIVADA E INTEGRAL

CÁLCULO INTEGRAL

Índice

Presentación

Uno de los grandes problemas matemáticos ha sido el cálculo de áreas y volúmenes encerrados por cualquier curva o superficie, también llamado el problema de las cuadraturas. En el s. XVII se solucionó dicho problema con el desarrollo, por parte de Newton y Leibniz, del cálculo diferencial e integral. Anteriormente, otros matemáticos como Arquímedes, Kepler, Fermat o Descartes ya habían dado respuesta al área encerrada por algunas curvas particulares, pero gracias a la integral se formalizó esta idea para cualquier curva.



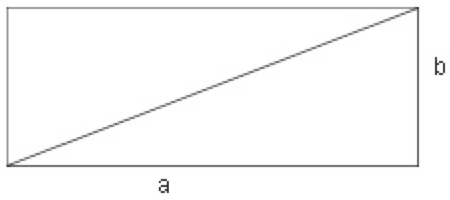
El concepto de integral de una función se aplicó principalmente al cálculo de áreas de funciones y cómo operación inversa de la derivada (antiderivada).
En este tema estudiaremos qué es la integral de una función, cuáles son sus principales propiedades y cómo se calcula utilizando diferentes métodos de resolución.

El cálculo del área

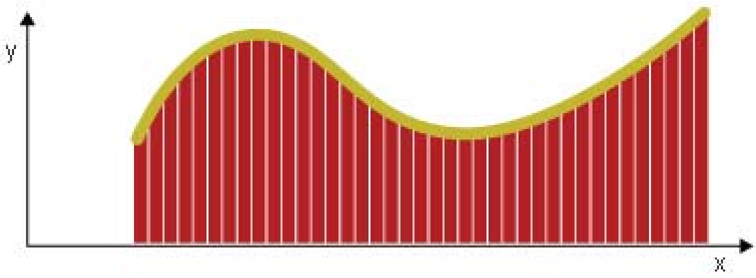
Para calcular el área encerrada por cualquier forma se puede rellenar con cuadrados de un metro de lado y contar cuántos cuadrados contiene.

Por ejemplo, si se quiere calcular el área de un rectángulo de lados *a* y *b*, se rellena ese rectángulo con *a•b* cuadrados de un metro de lado. Su área es, por tanto, *a•b*.

En el caso del área de un triángulo podemos obtenerla dividiendo el rectángulo anterior en dos partes mediante una diagonal. Se consiguen así dos triángulos rectángulos con una base de longitud *a* y una altura de longitud *b*. El área será *a•b/2*



¿Pero qué ocurre en el caso de las formas curvas? Al tener el borde curvo no se puede rellenar toda la superficie con cuadrados (o rectángulos). Lo que haremos es dividir en rectángulos cada vez más pequeños ese espacio de forma que la suma de todas sus áreas se aproxime cada vez más al área buscada.



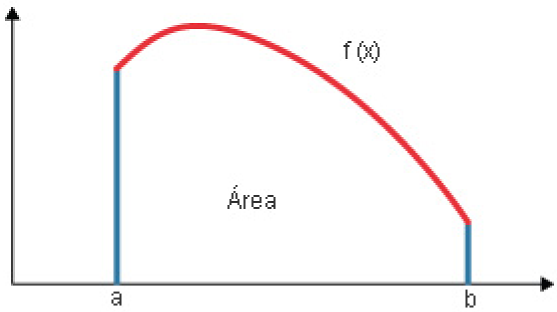
La integral como un área

Veamos cómo queda definida la integral como el área encerrada por la gráfica de una función y el eje *X*.

Definición:
Sea *A* la región limitada por la gráfica de la función *f(x)* y el eje de abcisas, entre *x=a y x=b*. Si *f(x)* es continua y positiva, hay un único número real

$$\int_a^b f(x)dx$$

que llamaremos integral definida de *f(x)* entre *a* y *b* y que coincide con el área *A*.



Observaciones:

- Una integral definida es un número real que implica una suma infinita de valores y representa la suma acumulativa total de todos los cambios sufridos por *f*.
- Es importante estudiar si la función es positiva, pues en caso de no serlo en todo el intervalo, se tendrá que calcular la integral separada en intervalos según el signo y tomar su valor absoluto.

Propiedades

A continuación se expone un teorema y sus propiedades más relevantes.

Teorema: Sea *a<c<b*. Si f es integrable en el intervalo *[a,b]*, entonces f es integrable en los intervalos *[a,c]* y [*c,b]*, de modo que

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Este teorema afirma que la integral de una función entre los valores *a* y *b* es igual a la integral entre *a* y *c* más la integral entre *c* y *b*, siendo *c* un valor contenido en el intervalo [*a,b]*. Esto es lo mismo que afirmar que el área encerrada debajo de una curva entre dos puntos *a* y *b* es la misma que la suma de dos áreas: una entre *a* y *c* y otra entre *c* y *b*.

Las siguientes propiedades nos van a permitir, por ejemplo, operar con integrales de funciones.

Propiedades: Sean *f* y *g* dos funciones integrables

1) $\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

2) $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$

3) $\text{Si } \ f(x) \geq 0 \ \text{ entonces } \int_a^b f(x)dx \geq 0.$

4) $\text{Si } \ f_1(x) \geq f_2(x) \ \text{ entonces } \int_a^b f_1(x)dx \geq \int_a^b f_2(x)dx$

5) $\int_a^a f(x)dx = 0$

Funciones definidas a través de una integral

Uno de los mayores avances que se produjo con el cálculo integral fue el considerar al área como una función. De esta forma, la integral de una función se podría considerar como "otra" función. Este resultado se conoce como **Teorema fundamental del cálculo** y en términos matemáticos se expresa de la siguiente manera:

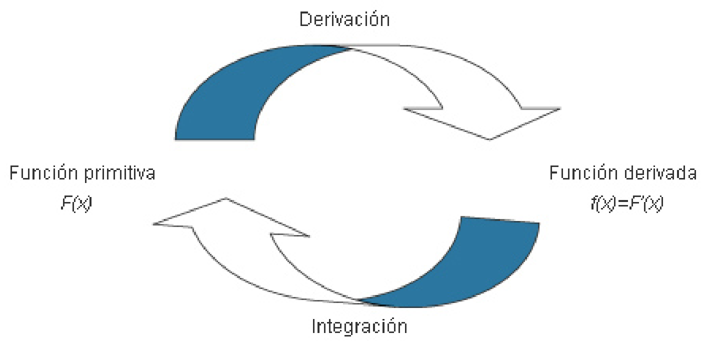
Si *f* es una función continua en *[a,b]*, la función *F(x)* definida en *[a,b]* mediante

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

es derivable en *(a,b)* y su derivada es *F'(x)=f(x)*

Debemos fijarnos en los límites de la integral. Ahora, en lugar de determinar la integral entre los valores *a* y *b* se ha cambiado la *b* por una *x*, de forma que obtenemos es una función que depende de *x* y no un número real.

El Teorema fundamental del cálculo relacionó de forma definitiva la integral y la derivada como dos operaciones inversas. En este caso, se dice que *F* es una función primitiva de *f*.



Regla de Barrow

Es posible determinar el valor de una integral definida en términos de la función primitiva mediante la **Regla de Barrow**. Gracias a ella, para calcular una integral definida en un intervalo *[a,b]*, se buscará una función primitiva de la función original y se sustituirán los valores del intervalo, tal y cómo indica la regla.

Sea *f* una función continua en *[a,b]* y *F(x)* una función primitiva de *f* en ese intervalo, entonces

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Este resultado se conoce generalmente como la segunda parte del **Teorema fundamental del cálculo**. Es importante señalar que esta integral coincide con el área encerrada por la curva y el eje *X* entre los valores *a* y *b*, únicamente si la función es positiva.

Isaac Barrow

Isaac Barrow (1630-1677).fue un teólogo y matemático inglés que desarrolló importantes contribuciones al cálculo diferencial e integral.
Trabajó como profesor en la Universidad de Cambridge hasta que dejó su puesto para dedicarse a la teología. En 1669 dejó la cátedra en favor de su pupilo, Isaac Newton.
Publicó importantes tratados de matemáticas relacionados con la geometría y la óptica. Sus otras publicaciones literarias fueron en el campo de la teología en forma de elocuentes sermones.

Integrales indefinidas

Gracias a la regla de Barrow es sabido que para calcular la integral de una función en un intervalo se tiene que conocer su función primitiva. Por lo tanto, hay que encontrar esa función. Este cálculo no es siempre sencillo y conviene aprender algunas técnicas que permitan resolver integrales más complicadas.
En primer lugar se presentan aquí las integrales inmediatas, es decir, aquellas de las que es posible calcular su función primitiva sin realizar cálculos muy elaborados. En ellas basta con pensar en su derivada para darse cuenta de qué función se está buscando.
Hay que recordar que para poder integrar bien es imprescindible conocer las reglas de derivación, pues la forma de comprobar si se ha calculado correctamente la integral de una función es derivándola para ver si coincide con la función original.
Se llamará integral indefinida a aquella integral en la que no hay límites de integración. En este tipo de problemas, cuándo pidan "calcular la integral de la función *f*" tendremos que calcular su función primitiva.

$$\int f(x)dx$$

Si *F(x)* es una primitiva de *f(x)* en un intervalo, cada una de las funciones *G(x)=F(x)+K*, donde *K* es una constante, también lo es.

Por ello, cuando resolvamos una integral, pondremos:

$$\int f(x)dx = F(x) + k$$

Reglas para integrar de forma inmediata

Ahora se repasan algunas reglas que permiten integrar funciones de manera inmediata, es decir, sin realizar cálculos elaborados. Cada fórmula que aparece a continuación se puede obtener de alguna regla de derivación, teniendo en cuenta que la derivada de la función primitiva coincide con la función de la que se obtiene la integral.

1) $\int dx = x + k$ **2)** $\int k dx = kx + k$

3) $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + k \text{ siempre que } n \neq -1$

4) $\int e^x dx = e^x + k$ **5)** $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + k$

Al igual que con la derivada, es posible calcular la integral de algunas operaciones de funciones, de forma que

1) $\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$ **2)** $\int k f(x) dx = k \int f(x) dx$

Pero cuidado: hay que recordar que esta regla no se cumple para el producto y el cociente de funciones.

1) $\int [f(x) \cdot g(x)] dx \neq \int f(x) dx \cdot \int g(x) dx$ **2)** $\int \frac{f(x)}{g(x)} dx \neq \frac{\int f(x) dx}{\int g(x) dx}$

Ejemplos

- $\int 2dx = 2x + K$
- $\int x^2 dx = \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + K$
- $\int x^5 dx = \frac{x^6}{6} + K$
- $\int \frac{x}{4} dx = \int \frac{x}{4} dx = \frac{x^2}{8} + K$
- $\int 3e^x dx = \int 3e^x dx = 3e^x + K$
- $\int \frac{5}{x} dx = \int \frac{5}{x} dx = 5ln\,|x| + K$
- $\int (x^3+2)^2 dx = \int (x^3+2)^2 dx = \int x^6 + 4 + 4x^3 dx = \frac{x^7}{7} + x^4 + 4x + K$
- $\int x^5 + 4x^3 - 3x + 9dx = \int x^5 + 4x^3 - 3x + 9dx = \frac{x^6}{6} + x^4 - \frac{3x^2}{2} + 9x + K$
- $\int \frac{1}{x^4} dx = \int \frac{1}{x^4} dx = \int x^{-4} dx = -\frac{x^{-3}}{3} = -\frac{1}{3x^3} + K$
- $\int x^4 + 2x^5 - 8x + \frac{2}{x^2} dx = \int x^4 + 2x^5 - 8x + \frac{2}{x^2} dx = \frac{x^5}{5} + \frac{x^6}{3} - 4x^2 - \frac{2}{x} + K$

Resumen

Uno de los grandes problemas que han interesado a los matemáticos de todos los tiempos es la manera de calcular el **área encerrada por cualquier curva**. Aunque había soluciones para algunos casos particulares, no se dio una respuesta general a través del concepto de integral de una función hasta finales del s. XVII. De esta manera, el problema quedaba solucionado para cualquier función; aparecía así el **cálculo integral**. Se debe tener presente que:

- Para calcular el área de una forma curva se divide esta en rectángulos cada vez más pequeños para que la suma de todas sus áreas se aproxime al área buscada.
- Una integral definida es un número real que implica una suma infinita de valores y representa la suma acumulativa total de todos los cambios sufridos por f.
- Una **integral indefinida** es aquella en la que no hay límites de integración.
- Una **integral inmediata** es aquella que puede solucionarse sin realizar cálculos complejos.
- **Isaac Barrow** demostró que la integral y la derivada eran operaciones opuestas.
- Gracias al **teorema fundamental del cálculo** siempre se puede comprobar que se haya realizado correctamente una integral. Basta con derivar la función obtenida. Si la integral está bien hecha, al derivar se obtiene la función original.