PROBLEMAS DEL TEMA 1: CIRCUITOS ELÉCTRICOS EN AC

Problemas de reactancias

Problema 14. Una bobina con L = 5 mH se conecta a un generador de tensión alterna sinusoidal de V_{ef} = 80 V. Calcula la reactancia inductiva y la corriente eficaz del circuito cuando la frecuencia es de 15 Hz, 200 Hz y 3500 Hz. Teniendo en cuenta la corriente eficaz obtenida para 15 Hz, ¿cuánto debería valer L para conseguir la misma corriente eficaz a 3500 Hz?

Sol: Para *f* = 15 Hz, $\omega = 2\pi f = 30\pi \text{ rad/s}$, $X_L = \omega L = 30\pi \text{ rad/s} \cdot 0.005 \text{ H} = 0.47\ \Omega$ y por ello $I_{ef} = \frac{\varepsilon_{ef}}{X_L} = \frac{80 \text{ V}}{0.47\ \Omega} = 170.2 \text{ A}$.

Para *f* = 200 Hz, $\omega = 400\pi \text{ rad/s}$, $X_L = \omega L = 6.28\ \Omega$, $I_{ef} = \frac{\varepsilon_{ef}}{X_L} = 12.74 \text{ A}$.

Por último, para *f* = 3500 Hz, $\omega = 7000\pi \text{ rad/s}$, $X_L = 109.96\ \Omega$, $I_{ef} = 0.728 \text{ A}$.

Para poder conseguir la corriente que se tiene a 15 Hz (de 170.2 A) pero a una frecuencia de 3500 Hz, y ya que la tensión alterna no cambia, es necesario que la reactancia de la bobina a esa frecuencia sea igual que la de 15 Hz, es decir, $I_{ef}(3500 \text{ Hz}) = I_{ef}(15 \text{ Hz}) \Rightarrow X_L(3500 \text{ Hz}) = X_L(15 \text{ Hz}) = 0.47\ \Omega$. Para ello el coeficiente de autoinducción L de la bobina debe ser $L = \frac{X_L}{\omega} = \frac{0.47\ \Omega}{7000\pi \text{ rad/s}} = 21.4\ \mu\text{H}$.

Problema 15. Un condensador de 10 μF se conecta a un generador de tensión alterna sinusoidal de V_P = 150 V. Si la corriente eficaz del circuito es de 1 A, ¿Cuál es el periodo de la señal de tensión alterna? ¿Cuál debería ser la velocidad angular del generador para que la corriente eficaz del circuito fuese de 5 A?

Sol: Dado que se conoce que V_P = 150 V, la tensión eficaz del generador es entonces de 106,1 V. La reactancia capacitiva del condensador es por lo tanto de V_{ef}/I_{ef} = 106,1 Ω. Como el condensador tiene una capacidad de 10 μF, se puede obtener la velocidad angular $X_C = \frac{1}{\omega C} \Rightarrow \omega = \frac{1}{X_C C} = 942.5 \text{ rad/s}$, la frecuencia $\omega = 2\pi f \Rightarrow f = \frac{\omega}{2\pi} = 150 \text{ Hz}$ y con ella el periodo $T = \frac{1}{f} = 6.67 \text{ ms}$.

Para que la corriente eficaz del circuito fuese de 5 A se necesitaría una reactancia capacitiva de 106,1V / 5A = 21,22 Ω, lo que se consigue a una velocidad angular de $\omega = \frac{1}{X_C C} = 4712.5 \text{ rad/s}$.

Problema 16. Una bobina de 62.5 mH se conecta a un generador de tensión alterna sinusoidal de V_P = 100 V. Si la corriente eficaz del circuito es de 3 A, ¿cuál es la frecuencia f de la tensión alterna?

Sol: Dado que se conoce que V_P = 100 V, la tensión eficaz del generador es de 70,71 V. La reactancia de la bobina es por lo tanto 70,71V / 3 A = 23,57 Ω.

Como la bobina tiene una autoinducción de 62.5 mH, se puede obtener la velocidad angular $X_L = \omega L \Rightarrow \omega = \frac{X_L}{L} = 377.12 \text{ rad/s}$ y con ella la frecuencia $\omega = 2\pi f \Rightarrow f = \frac{\omega}{2\pi} = 60 \text{ Hz}$.

Problemas de impedancias complejas y fasores

Nota. En estos problemas se nos dan las fuentes de la forma f =A cos(ωt+φ), donde f puede ser una fuente de tensión o de corriente. En esta nomenclatura, A es la amplitud de la señal (el módulo), ω es la frecuencia angular y φ es el desfase.

También se recuerda al alumno que las relaciones entre módulo (ρ) y fase (φ), parte real (a) y parte imaginaria (b) de un número complejo son:

a=ρcosφ
b=ρsenφ

$\rho = (a^2+b^2)^{1/2}$
$\phi = \text{arctg } (b/a)$

Problema 17. Hallad la corriente en un circuito RLC en serie si el voltaje de entrada es V= 10 cos(8t). R = 4 Ω, L =1 H y C =0,025 F.

$$Z = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = 4 + j(8-5) = 4 + 3j = 5|_{36,9^\circ}$$

$$I = \frac{V}{Z} = \frac{10|_{0^\circ}}{5|_{36,9^\circ}} = 2|_{-36,9^\circ} = 1{,}6 - j1{,}2$$

En forma sinusoidal la corriente se expresa como:

$$I = 2\cos(8t - 36{,}9)$$

Problema 18. Hallad el voltaje que cae en el condensador del ejercicio anterior.

El voltaje en el condensador se haya multiplicando la corriente por la impedancia del condensador:

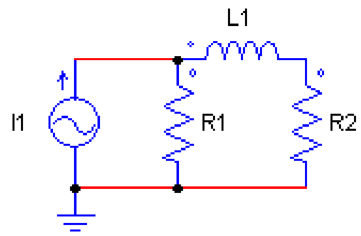
$$Z_c = \frac{1}{j\omega C} = \frac{-j}{\omega C} = -5j = 5|_{-90}$$

$$V = IZ_c = 2|_{-36,9} 5|_{-90} = 10|_{-126,9} = -6 - 8j$$

Que en forma sinusoidal se escribe como:

$$V = 10\cos(8t - 126{,}9)$$

Problema 19. Hallad el voltaje que cae en R_2 de la figura inferior si $R_1 = 1\Omega$, $R_2 = 2\ \Omega$, L= 0,5 H y I_1 =10 cos (8t).

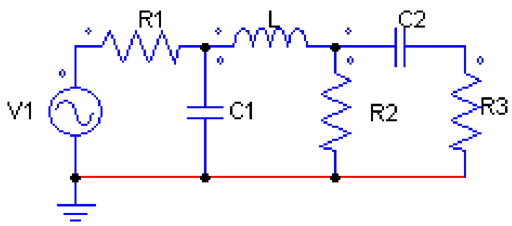


$$Z_e = R_2 + j\omega L = 2 + 4j$$

$$I_{R_2} = I_1 \frac{R_1}{R_1 + Z_e}$$

$$V_{R_2} = I_{R_2} R_2 = I_1 \frac{R_1 R_2}{R_1 + Z_e} = 10\frac{2}{3+4j} = \frac{20}{3+4j} = \frac{20|_0}{5|_{53,1}} = 4|_{-53,1} = 4\cos(8t - 53,1)$$

Problema 20. Hallad i(t) (corriente que genera V_1) en el circuito inferior, sabiendo que R_1=0,5 Ω, C_1 =1 F, L =1 H, C_2=0,5F, R_2 =3Ω, R_3 =2Ω y V=12cos(t+14)



Para hallar la corriente que genera V_1, podemos ir asociando las impedancias de los elementos, yendo de derecha a izquierda. Llamamos Z_1 a la impedancia equivalente entre R_3 y C_2. Esa impedancia está en paralelo con R_2, y a ese paralelo llamaremos Z_2.
A su vez Z_2 está en serie con L (Z_3) y Z_3 está en paralelo con C_1 (Z_4).

$$Z_1 = R_3 + \frac{1}{j\omega C_2} = 2 + \frac{1}{j0,5} = 2 - 2j$$

$$Z_2 = \frac{R_2 Z_1}{R_2 + Z_1} = \frac{3(2-2j)}{3+2-2j} = \frac{6-6j}{5-2j} = \frac{6-6j}{5-2j}\frac{(5+2j)}{(5+2j)} = 1,45 - 0,621j$$

$$Z_3 = Z_2 + j\omega L = 1,45 - 0,621j + j = 1,45 + 0,379j$$

$$Z_4 = \frac{\frac{1}{j\omega C_1} Z_3}{\frac{1}{j\omega C_1} + Z_3} = 0,583 - 0,75j$$

$$Z_{total} = Z_4 + 0,5 = 1,083 - 0,75j$$

$$I = \frac{12|_{14}}{1,083 - 0,75j} = 6.9|_{48,7} = 6.9\cos(t + 48,7)$$

Problema 21. Hallad la función de transferencia de un circuito RC, tomando la salida en bornes del condensador. Decir cuál es el límite de dicha función a frecuencia muy baja y a frecuencia muy alta.

Primero calculamos la corriente que circula por el circuito y después calculamos el voltaje en bornes del condensador:

$$I = \frac{V_{in}}{R + Z_c}$$

$$V_{out} = IZ_C = \frac{V_{in} Z_c}{R + Z_c} \Rightarrow \frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{1 + j\omega RC}$$

Calculamos ahora los límites de esa función a baja y a alta frecuencia:

$$\lim_{\omega \to 0} \frac{1}{1 + j\omega RC} = 1 = 1|_0$$

$$\lim_{\omega \to \infty} \frac{1}{1 + j\omega RC} = \frac{-j}{\omega RC} = 0|_{-90}$$

Problema 22. Tenemos una fuente V = 1 V conectada en serie con dos elementos Z_1=-2j y Z_2=1+2j. Hallad el voltaje que cae en Z_2.

Hallamos primero la corriente que circula por el circuito y después calculamos el voltaje que cae en Z_2.

$$I = \frac{V}{Z_1 + Z_2} = \frac{1}{Z_1 + Z_2} = \frac{1}{-2j + 1 + 2j} = 1$$

$$V_{Z_2} = IZ_2 = 1(1 + 2j) = 1 + 2j = \sqrt{5}\Big|_{63}$$

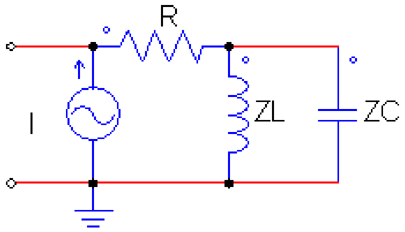
Problema 23. En el mismo circuito del problema anterior hallad Z_2 para que V_2 = 7-3j, sabiendo que V_1=3+j y que Z_1=-2j

Repetimos los cálculos del problema anterior con los nuevos datos:

$$I = \frac{V_1}{Z_1} = \frac{3 + j}{-2j} = 1{,}5j - 0{,}5$$

$$Z_2 = \frac{V_2}{I} = \frac{7 - 3j}{-0{,}5 + 1{,}5j} = -3{,}2 - 3{,}6j = 4{,}82|_{-132}$$

Problema 24. Hallad el circuito equivalente de Thévenin del circuito inferior visto desde los terminales de entrada con R =3 Ω, Z_L = 2j, Z_C=-4j, I = $2|_{10}$



Para simplificar hacemos el paralelo entre L y C y le sumamos la R que está en serie

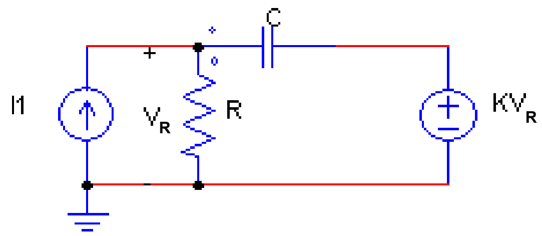
$$Z_e = R + \frac{Z_L Z_C}{Z_L + Z_C} = 3 + \frac{2j(-4j)}{2j - 4j} = 3 + \frac{8}{-2j} = 3 + 4j = 5|_{53}$$

$$V_{TH} = IZ_e = 2|_{10} 5|_{53} = 10|_{63}$$

$$I_{sc} = I$$

$$R_{TH} = \frac{V_{TH}}{I} = Z_e = 5|_{53}$$

Problema 25. Hallar en el circuito inferior la corriente que circula por la resistencia si R = 4 Ω, C =0,125 F, I (t) = 3cos(4t) A. La fuente de voltaje es dependiente del voltaje V_R que cae en la resistencia, y su valor es de K·V_R (con K=0,5).



Llamando i a la corriente que circula por R (de arriba hacia abajo), tenemos que la corriente que circula por C será (I_1-i).

Planteamos la ecuación de Kirchhoff de la malla:

$$V = Ri$$

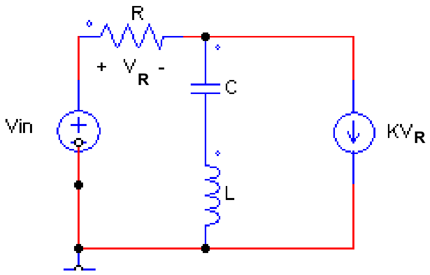
$$Ri = (I_1 - i)Z_c + K{\cdot}V_R = I_1 Z_c - iZ_c + KRi$$

$$\Rightarrow i = \frac{I_1 Z_c}{R - KR + Z_c}$$

Metiendo los datos del problema, nos queda:

$$\Rightarrow i = 3|_0 \frac{-2j}{4 - 2 - 2j} = 3|_0 \frac{-2j}{2 - 2j} = 3|_0 \frac{-j}{1 - j} = 3|_0 \frac{1|_{-90}}{\sqrt{2}|_{-45}} = \left.\frac{3}{\sqrt{2}}\right|_{-45} = 2{,}43\cos(4t - 45)$$

Problema 26. Hallar la corriente que genera la fuente de tensión en el circuito inferior. R=1 Ω, C= 1F, L=1 H, V_{in} = 4cos(3t) V. La fuente de corriente es dependiente del voltaje V_R que cae en la resistencia, y su valor es de $K\cdot V_R$ (con K=1,5).



Llamando i a la corriente que pasa por R (la que genera la fuente de tensión) tenemos que la corriente que pasa por C y por L será ($i-K\cdot V_R$)=($i-1{,}5V_R$). Planteando la ecuación de Kirchhoff para la malla, tenemos que:

$$V_R = RI = 1{\cdot}I = I$$

$$V_{in} - RI - (I - 1{,}5{\cdot}V_R)Z_c - (I - 1{,}5{\cdot}V_R)Z_L = 0$$

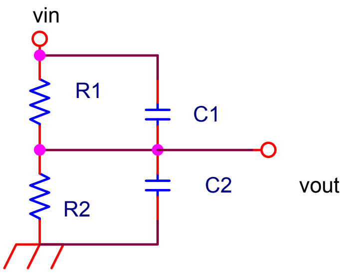
$$V_{in} - I - (I - 1{,}5I)(Z_c + Z_L) = 0$$

$$V_{in} - I + 0{,}5I(j\frac{8}{3}) = 0$$

$$V_{in} + I(-1 + \frac{4}{3}j) = 0 \Rightarrow I = \frac{V_{in}}{1 - \frac{4}{3}j} = \frac{4|_0}{1{,}7|_{-53}} = 2{,}35|_{53}$$

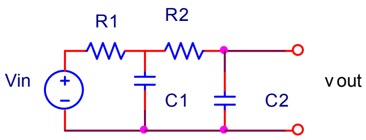
Problemas de cálculo de la función de transferencia, V_{out}/V_{in}

Problema 27. Hallar la condición que han de cumplir R1, R2, C1, C2 para que la función de transferencia (V_{out}/V_{in}) del circuito no dependa de la frecuencia de trabajo.



Sol: $R_1C_1 = R_2C_2$

Problema 28 Hallar la función de transferencia (V_{out}/V_{in}) del circuito de la figura, siendo v_{in} una fuente de tensión sinusoidal de frecuencia ω.



Sol: $$\frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{1}{(1 - \omega^2 C_1C_2R_1R_2 + j\omega(R_1C_2 + R_1C_1 + R_2C_2)}$$

Problemas de factor de potencia y frecuencia de resonancia

Problema 29. Hallar el factor de potencia en un circuito RLC en serie. Particularizar para una frecuencia de red de 50 Hz y valores R = 1 kΩ, L = 1 mH y C = 1 μF.

$$\cos\phi = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} = \frac{1000}{\sqrt{1000^2 + \left(2\pi 50x0{,}001 - \frac{1}{2\pi 50x10^{-6}}\right)^2}} = 0{,}3$$

Problema 30. Hallar el factor de potencia en un circuito RLC en paralelo para una frecuencia de red de 50 Hz y valores R = 1 kΩ, L = 1 mH, C = 1 μF

$$Y = \frac{1}{Z} = \frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L} + j\omega C = \frac{1}{R} + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)$$

$$\Rightarrow \cos\phi = \frac{\frac{1}{R}}{\sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\omega CR - \frac{R}{\omega L}\right)^2}}$$

Problema 31. Hallar la frecuencia de resonancia de un circuito RLC con valores R = 1 kΩ L = 1 mH, C = 1 μF

La frecuencia de resonancia se define como la <u>frecuencia a la cual la impedancia del circuito es real</u>, por tanto en la expresión de la impedancia del ejercicio anterior igualamos la parte imaginaria a cero, con lo que nos queda:

$$\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0 \Rightarrow \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{10^{-9}}} = 31622{,}8$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = 5kHz$$

Problema 32. Un determinado dispositivo eléctrico consume 10 A eficaces y tiene una potencia media de 720 W cuando se conecta a una línea de 120 V eficaces y 60 Hz. ¿Cuál es la impedancia del aparato? ¿A qué combinación en serie de resistencia y reactancia es equivalente? ¿Y en paralelo?

La impedancia del dispositivo eléctrico por el que pasan 10 A eficaces cuando se conecta a 120 V eficaces es Z = 12 Ω

Si tiene una potencia media de 720 W, y dado que la potencia eléctrica media en un circuito de alterna se puede calcular como $P = \varepsilon_{ef} I_{ef} \cos\delta$, el factor de potencia del circuito es $\cos\delta = 0.6$, y por ello el desfase (entre corriente total y tensión total) es $\cos\delta = 0.6 \Rightarrow \delta = \pm 0.927\ \mathrm{rad}$. Como dicho desfase no es ni cero ni $\pm\pi/2$, el circuito está formado necesariamente por una resistencia y una reactancia:

- Si el circuito está en serie, el valor de la resistencia se obtiene de $\cos\delta = \dfrac{R}{Z} \Rightarrow R = Z\cdot\cos\delta = 7.2\ \Omega$. También se conoce la relación que permite calcular la reactancia: $\tan\delta = \dfrac{X}{R} \Rightarrow X = R\cdot\tan\delta = 9.6\ \Omega$.

- Si el circuito está en paralelo, ahora $\cos\delta = \dfrac{1/R}{1/Z} \Rightarrow R = \dfrac{Z}{\cos\delta} = 20\ \Omega$. La reactancia ahora se calcula teniendo en cuenta que $\tan\delta = \dfrac{1/X}{1/R} = \dfrac{R}{X} \Rightarrow X = \dfrac{R}{\tan\delta} = 15\ \Omega$.