ALGEBRA DE BOOLE Y FUNCIONES LÓGICAS

PROBLEMA 5 Simplificar las siguientes FC

- $f_1(w,x,y,z) = \sum m(5,6,9,10)$

a) Mapa de Karnaugh de 4 variables. **MINITERMINOS**

wx \ yz	00	01	11	10
00	0	1	3	2
01	4	5 (1)	7	6 (1)
11	12	13	15	14
10	8	9 (1)	11	10 (1)

⇒ Todos los unos están disjuntos. No se puede simplificar más:

$$f_1(w\,x\,y\,z) = \bar{w}x\bar{y}z + \bar{w}xy\bar{z} + w\bar{x}\bar{y}z + w\bar{x}y\bar{z}$$

b) **MAXITERMINOS**

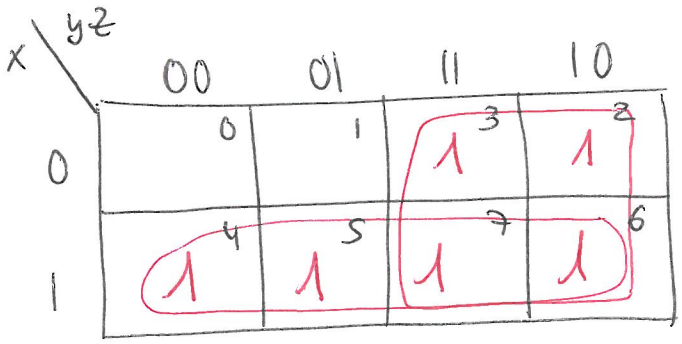
wx \ yz	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	0	5	0	6
11	0	0	0	0
10	0	9	0	10

: se puede simplificar como estos cuatro unos, de dos literales cada término

$$f_1(w,x,y,z) = (y+z)(\bar{y}+\bar{z})(w+x)(\bar{w}+\bar{x})$$

- $f_2(x,y,z) = \sum m(2,3,4,5,6,7)$

a) Tres variables. MINITÉRMINOS:

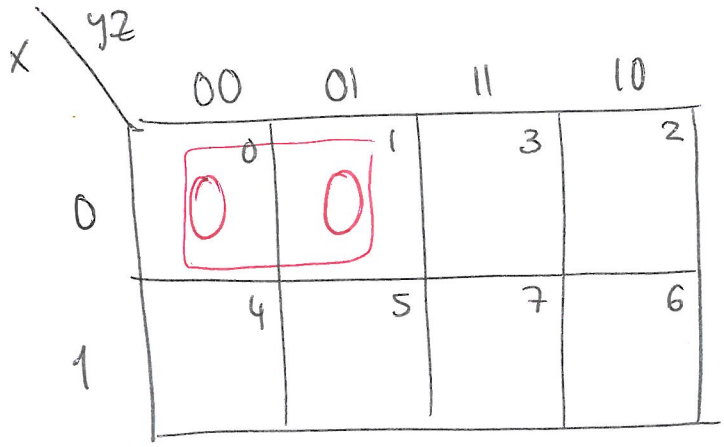


= ahorro de dos literales

⇒ términos producto con 1 literal.

$$f_2(x,y,z) = X + y$$

b) MAXITÉRMINOS



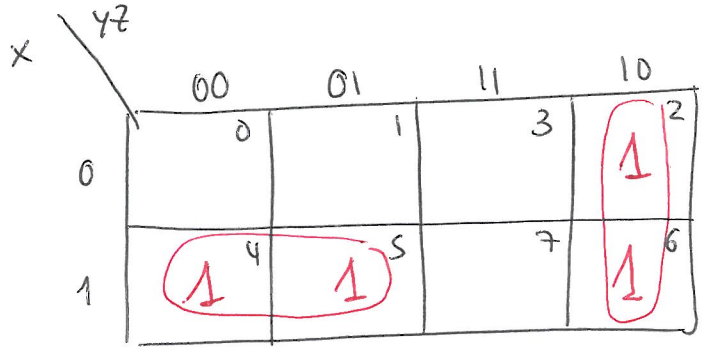
⇒ Término de 2 ceros ⇒ ahorro de 1 literal.

$$f_2(x,y,z) = (X + y)$$

(7)

- $f_3(x,y,z) = \sum m(2,4,5,6)$

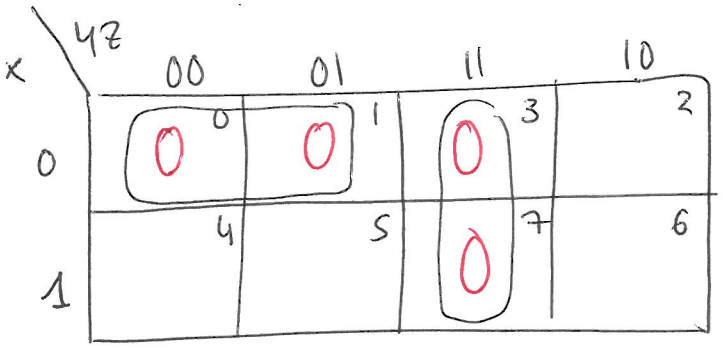
a) Tres variables $\Rightarrow 2^3 = 8$. MINITERMINOS (SdP)



= dos grupos de dos
- Ahorro 1 literal -
- Terminos producto con 2 literales.

$$f_3 = x \cdot \bar{y} + y\bar{z}$$

b) MAXITÉRMINOS (Productos de Sumas)



- Ahorro 1 literal
→ 2 terminos suma de 2 literales

$$f_3(x,y,z) = (x+y)\cdot(\bar{y}+\bar{z})$$

- Algebraicamente, se puede demostrar que b) es igual que a)

$$f_3 = (x+y)\cdot(\bar{y}+\bar{z}) = x\bar{y} + x\bar{z} + y\bar{y} + y\bar{z} = y\cdot\bar{z} + \bar{y}\cdot x$$

$y\bar{y} = 0$

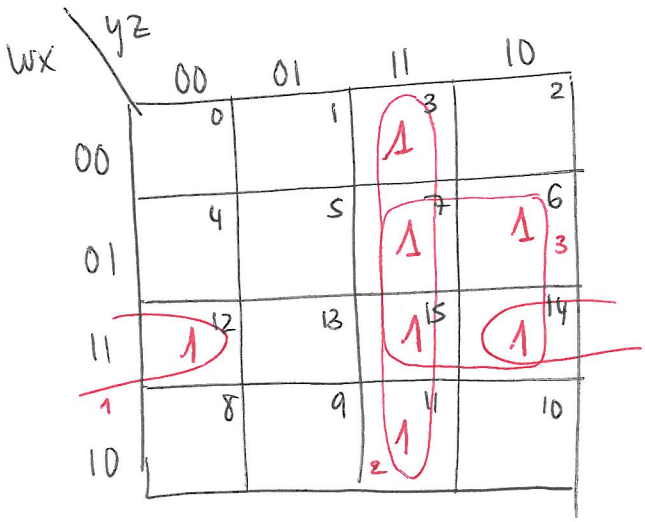
⇒ Por el "teorema del consenso": $ab + a'c = ab + a'c + bc$

$$y\bar{z} + \bar{y}x = y\cdot\bar{z} + \bar{y}x + \underline{\bar{z}x}$$

TERMINO EXTRA

$$f_4(w,x,y,z) = \sum m(3,6,7,11,12,14,15)$$

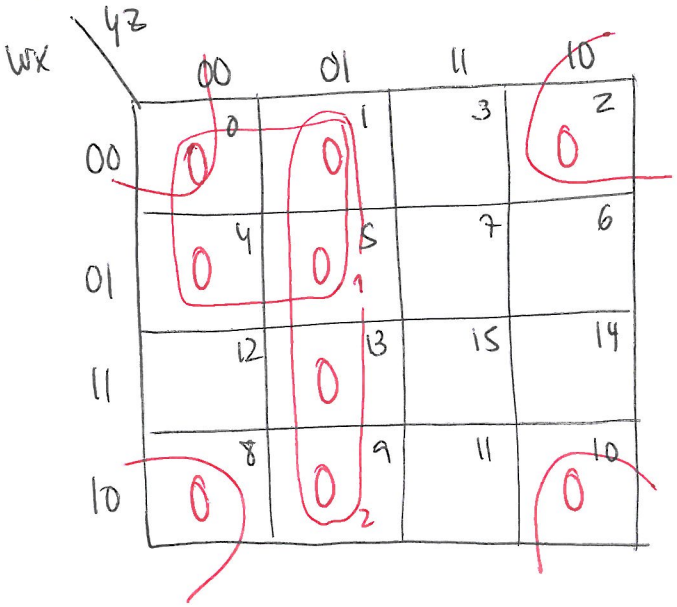
a) Cuatro variables ⇒ mk de 16 celdas. MINITÉRMINOS



1: $w\bar{x}\bar{z}$
2: $y\bar{z}$
3: xy

$$f_4 = w\bar{x}\bar{z} + y\bar{z} + x\bar{y}$$

b) MAXITÉRMINOS (más complicado en este caso?) No, resulte con más cuadros.



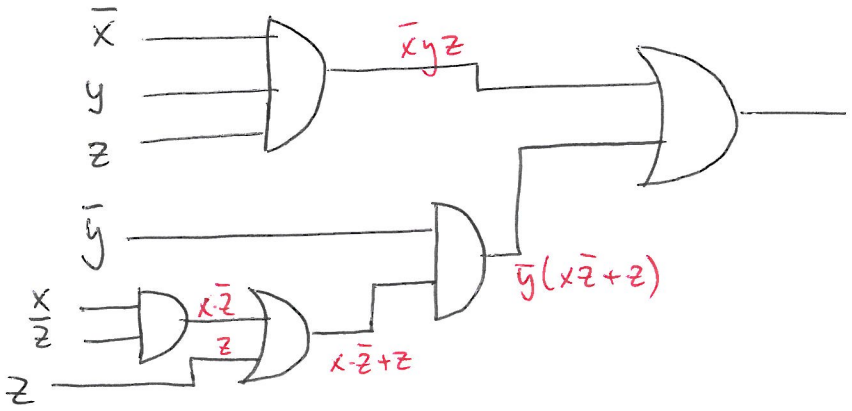
1: $(w+y)$
2: $(y+\bar{z})$
3: $(x+z)$

$$f_4 = (w+y)(y+\bar{z})(x+z)$$

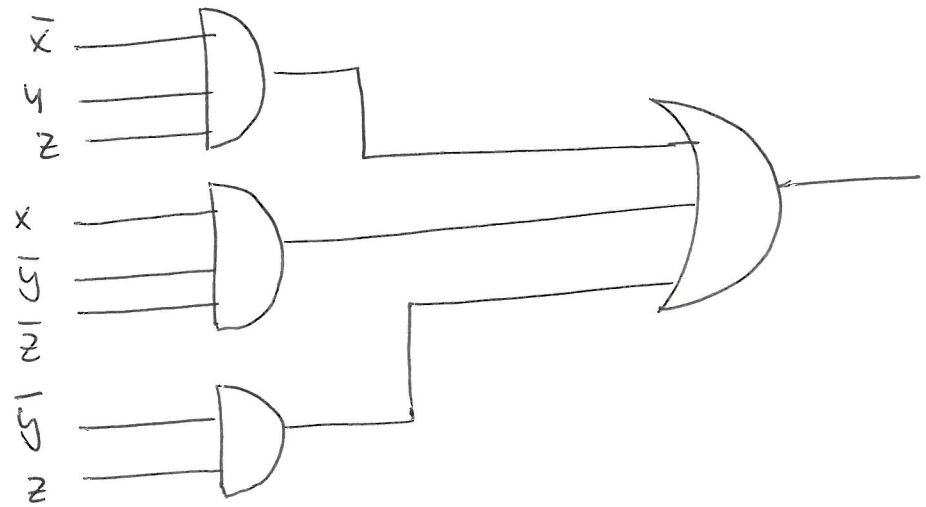
PROBLEMA 6 Dibujar un circuito con puertas AND, OR, NOT que la sintetice.

a) $F = \bar{x}yz + \bar{y}\cdot(x\bar{z} + z)$

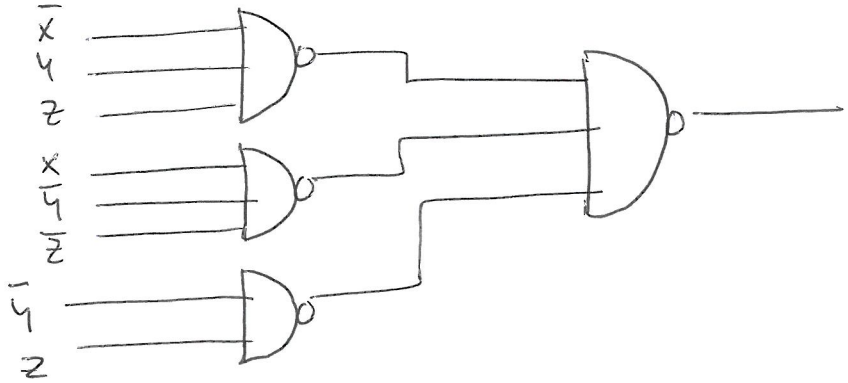
1.) Haciendolo directamente sería.



2) Otra opción está en operar $F = \bar{x}yz + \bar{y}x\bar{z} + \bar{y}z$, representando 3 AND y 1 OR.

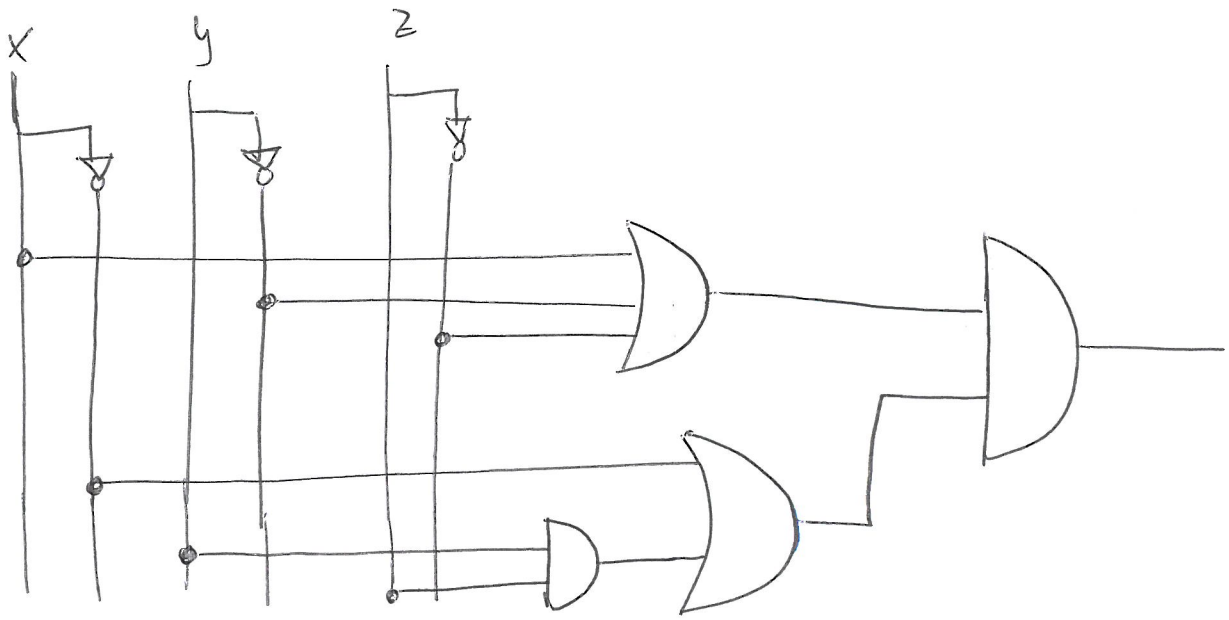


3) Pasar a NAND es trivial:

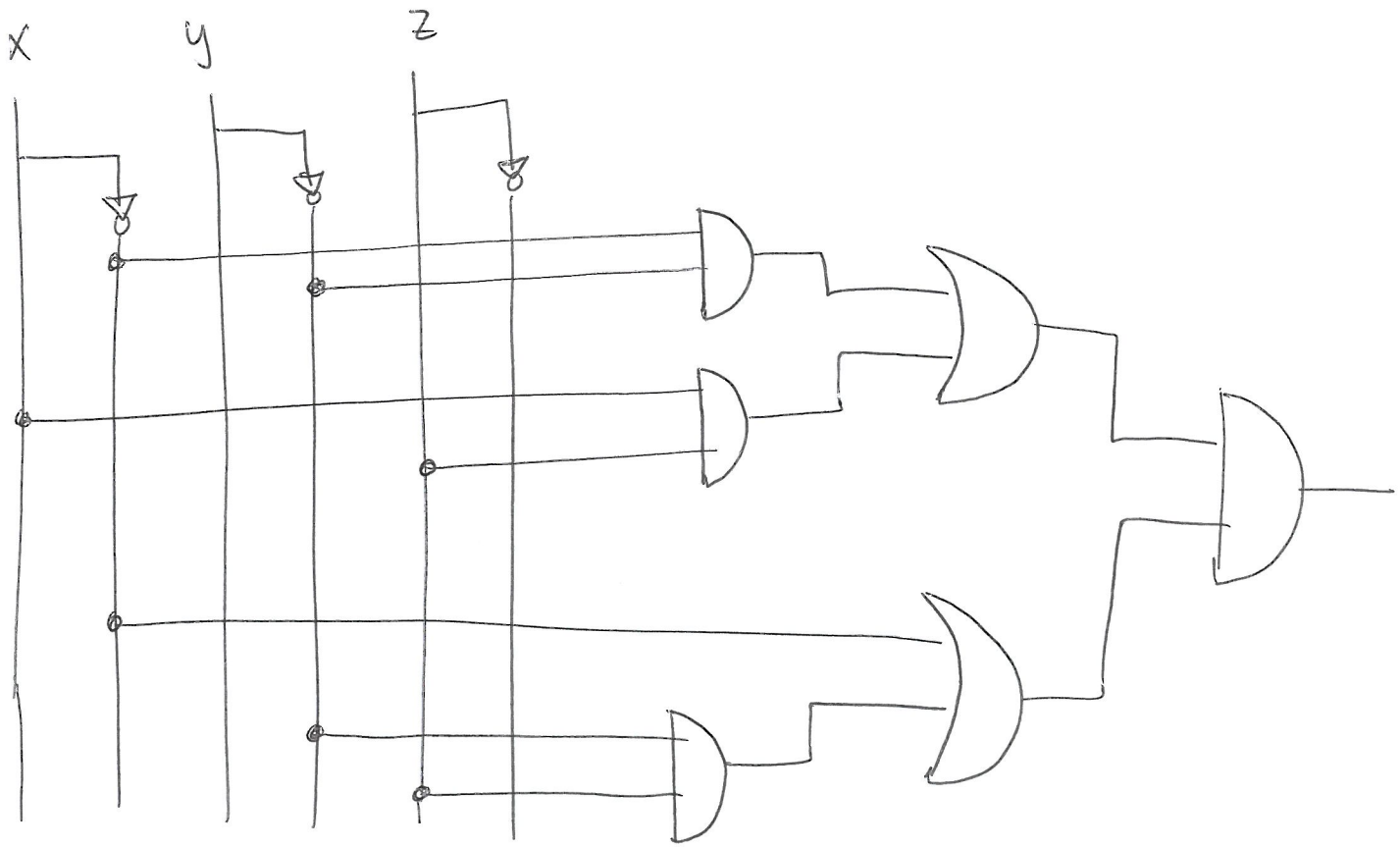


b) $G = (x + \bar{y} + \bar{z}) \cdot (\bar{x} + yz)$

Vamos a pintar explícitamente las variables y sus complementos



c) $H = (\bar{x}\bar{y} + xz)(\bar{x} + \bar{y}z)$. Hacemos lo mismo:



PROBLEMA 7 Proceso químico mezcla $-4°C < T < 4°C$

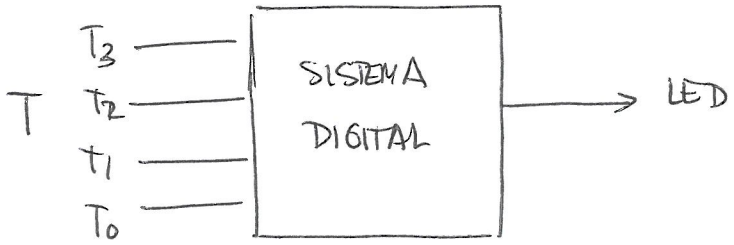
→ El sensor ofrece la medida en 4 bits, C2 (1 nibble)

Diseñar un circuito digital tal que se active una alarma cuando estamos entre -4 y 4°C.

a) Recordemos que con 4 bits el rango en C2 es de:

$(0111)_{C2} = +7_{10}$

$(1000)_{C2} = -8_{10}$



La tabla de verdad del sistema es entonces de $2^4 = 16$ celdas.

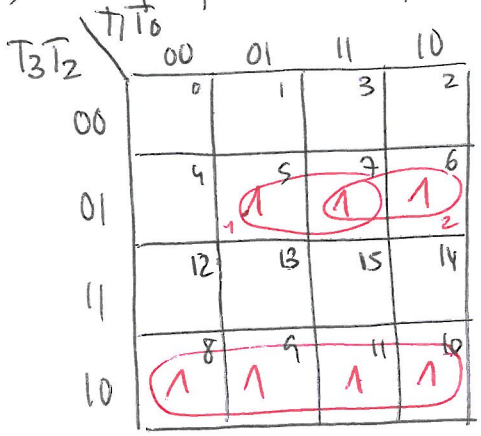
- Clave: saber qué número decimal está codificado en code C2

DEC	T_3	T_2	T_1	T_0	LED	
0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	0	1
2	0	0	1	0	0	2
3	0	0	1	1	0	3
4	0	1	0	0	0	4
5	0	1	0	1	1	5
6	0	1	1	0	1	6
7	0	1	1	1	1	7
-8	1	0	0	0	1	8
-7	1	0	0	1	1	9
-6	1	0	1	0	1	10
-5	1	0	1	1	1	11
-4	1	1	0	0	0	12
-3	1	1	0	1	0	13
-2	1	1	1	0	0	14
-1	1	1	1	1	0	15

b) Como SPC (1FC): $LED(T_3, T_2, T_1, T_0) = \sum M(5,6,7,8,9,10,11)$

$= M_5 + M_6 + M_7 + M_8 + M_9 + M_{10} + M_{11}$.

C1) Simplificació per minitèrmins (SDP)



1: $\overline{T_3}\,T_2\,T_0$

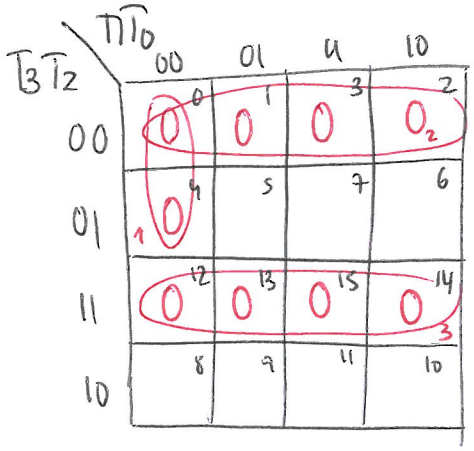
2: $\overline{T_3}\,T_2\,T_1$

3: $T_3\,\overline{T_2}$

$LED = \overline{T_3}\,T_2\,T_0 + \overline{T_3}\,T_2\,T_1 + T_3\,\overline{T_2}$

Simplificació per maxitèrmins (PDS)

C2



1: $T_3 + T_1 + T_0$

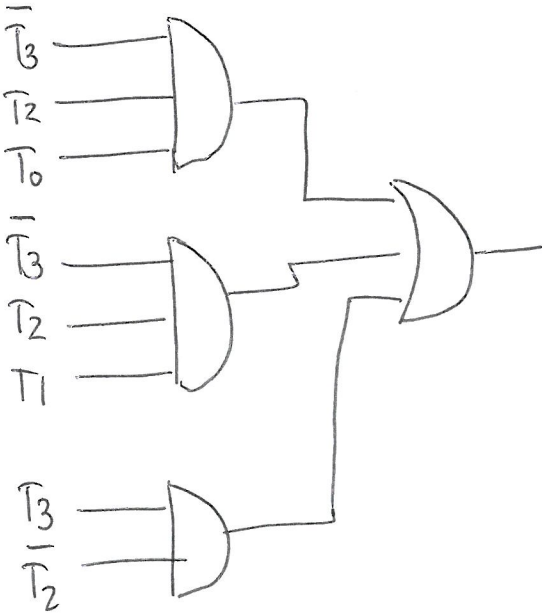
2: $T_3 + T_2$

3: $\overline{T_3} + \overline{T_2}$

$LED = (\overline{T_3} + T_1 + T_0)(T_3 + T_2)(\overline{T_3} + \overline{T_2})$

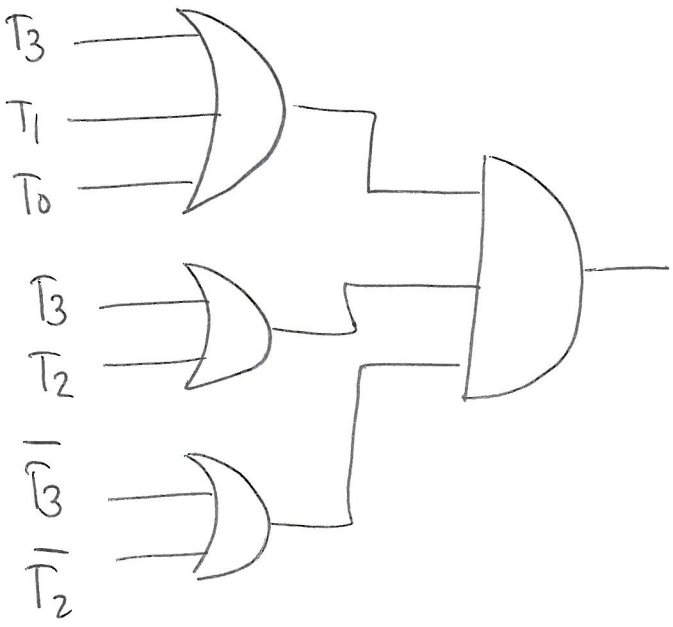
D) IMPLEMENTAMOS

SPD



- PASAR A NAND ES TRIVIAL

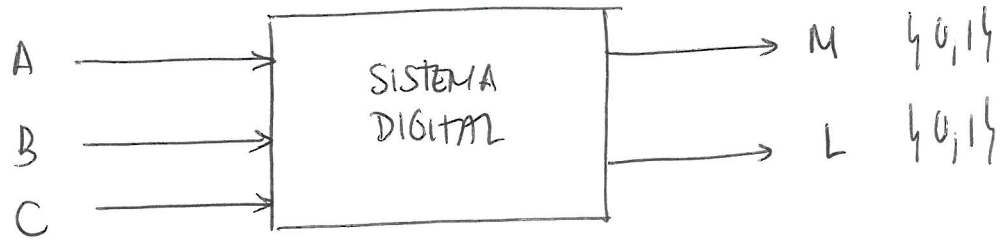
PDS



- PASAR A NOR ES TRIVIAL.

PROBLEMA 8 MOTOR CONTROLADO POR TRES PULSADORES { A, B, C }

→ Hay un LED que se debe encender solo cuando se pulsan 1 o 2 pulsadores (no 3 o ninguno)



a) Tabla de verdad { M(A,B,C), L(A,B,C) } → dos funciones de conmutación

Codificamos los 4 casos del enunciado

① : Tres pulsadores ⇒ M=1, L=0

② : Dos pulsadores cualesquiera M=1, L=1

③ : 1 pulsador " M=0 L=1

④ : 0 pulsadores ⇒ M=0, L=0

	A	B	C	M	L	
④	0	0	0	0	0	0
	0	0	1	0	1	1
	0	1	0	0	1	2
②	0	1	1	1	1	3
	1	0	0	0	1	4
②	1	0	1	1	1	5
②	1	1	0	1	1	6
①	1	1	1	1	0	7

b) Expresar como 1FC

$$M = M_3 + M_5 + M_6 + M_7 = \sum m(3,5,6,7)$$

$$L = M_1 + M_2 + M_3 + M_4 + M_5 + M_6 = \sum m(1,2,3,4,5,6)$$

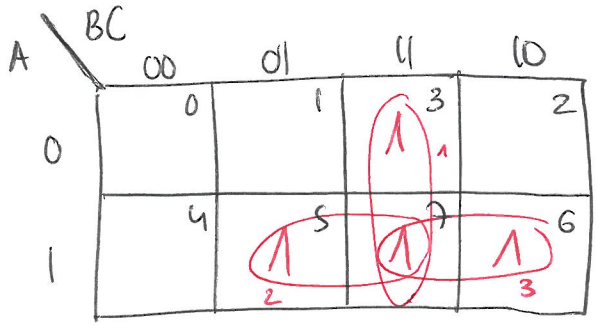
Alternativamente (2FC)

$$M = M_0 \cdot M_1 \cdot M_2 \cdot M_4 = \prod M(0,1,2,4)$$

$$L = M_0 \cdot M_7 = \prod M(0,7)$$

c) Simplificació usando mk.

(A) MOTOR.



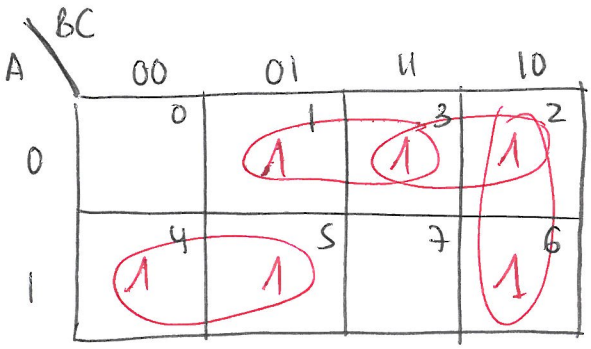
1 : BC

2 : AC

3 : AB

$M = AB + AC + BC$

(B) LED



Minitermes →

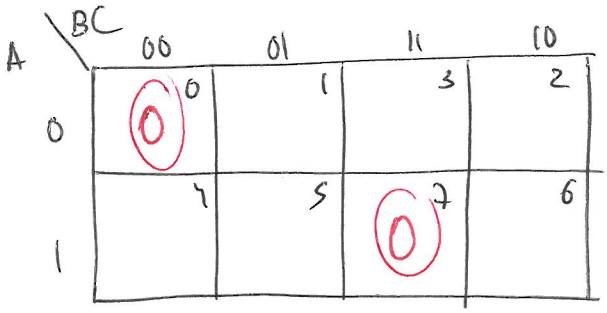
$1 = \bar{A}C$

$2 = \bar{X}\bar{X}$ (sobra)

$3 = A\bar{B}$

$4 = B\bar{C}$

$L = \bar{A}C + \bar{X}\bar{X} + A\bar{B} + B\bar{C}$



Maxtermes → (més ràpido)

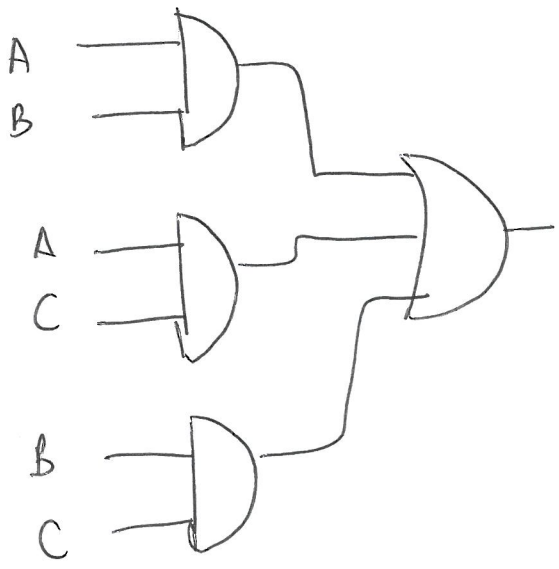
$0 = A + B + C$

$1 = \bar{A} + \bar{B} + \bar{C}$

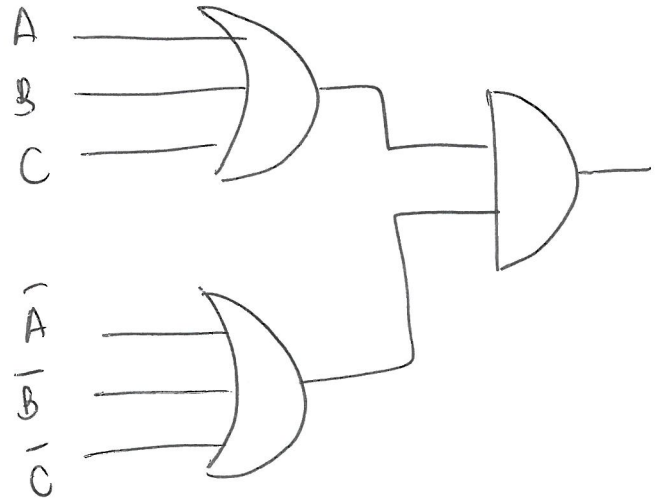
$L = (A+B+C)(\bar{A}+\bar{B}+\bar{C})$

d) Circuits amb puertes lògiques:

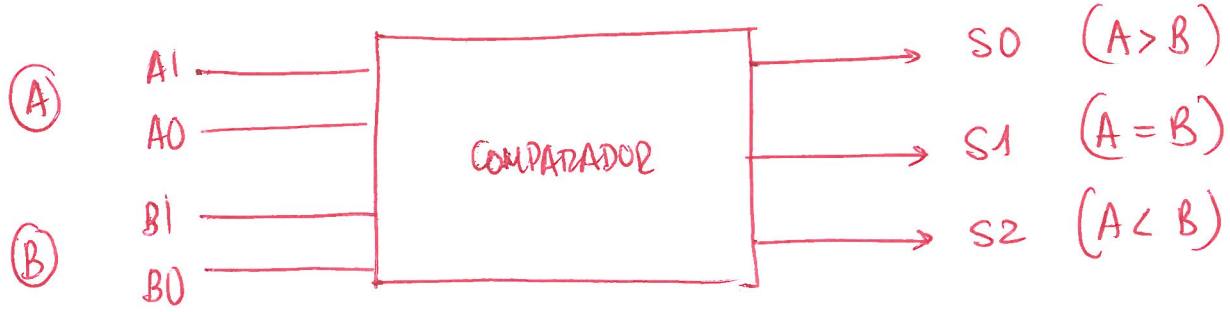
MOTOR



LED



PROBLEMA 9 Comparador binario completo (3 salidas)



a) Tabla de verdad. 4 entradas ⇒ 16 posibles combinaciones

	A_1	A_0	B_1	B_0	S0	S1	S2
0	0	0	0	0		1	
1	0	0	0	1			1
2	0	0	1	0			1
3	0	0	1	1			1
4	0	1	0	0	1		
5	0	1	0	1		1	
6	0	1	1	0			1
7	0	1	1	1			1
8	1	0	0	0	1		
9	1	0	0	1	1		
10	1	0	1	0		1	
11	1	0	1	1			1
12	1	1	0	0	1		
13	1	1	0	1	1		
14	1	1	1	0	1		
15	1	1	1	1		1	

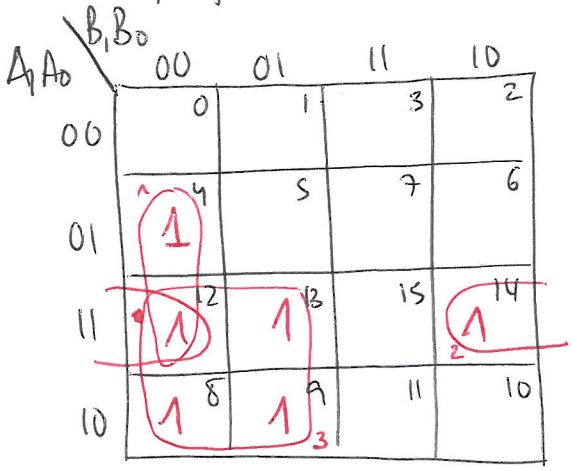
b) Funciones de salida como suma de productos (1FC)

- $S0 = m_4 + m_8 + m_9 + m_{12} + m_{13} + m_{14} = \sum m(4,8,9,12,13,14)$
- $S1 = m_0 + m_5 + m_{10} + m_{15} = \sum m(0,5,10,15)$
- $S2 = m_1 + m_2 + m_3 + m_6 + m_7 + m_{11} = \sum m(1,2,3,6,7,11)$

Adicionalmente (2FC)

- $S0 = \Pi M\,(0,1,2,3,5,6,7,10,11,15)$
- $S1 = \Pi M\,(1,2,3,4,6,7,8,9,11,12,13,14)$
- $S2 = \Pi M\,(0,4,5,8,9,10,12,13,14,15)$

c) Simplificació mediante mk.



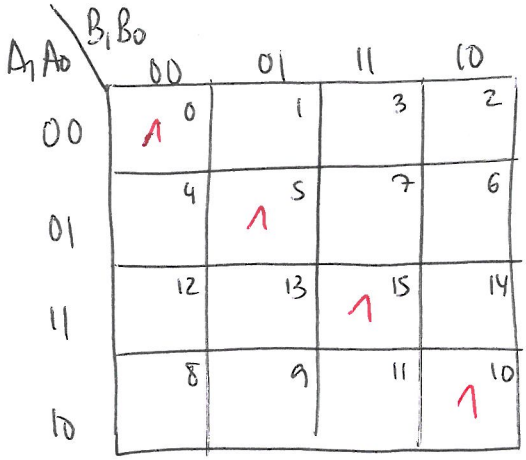
$S0 = \sum m (4, 8, 9, 12, 13, 14)$

1 : $A_0 \bar{B}_1 \bar{B}_0$

2 : $A_1 A_0 B_0$

3 : $A_1 B_1$

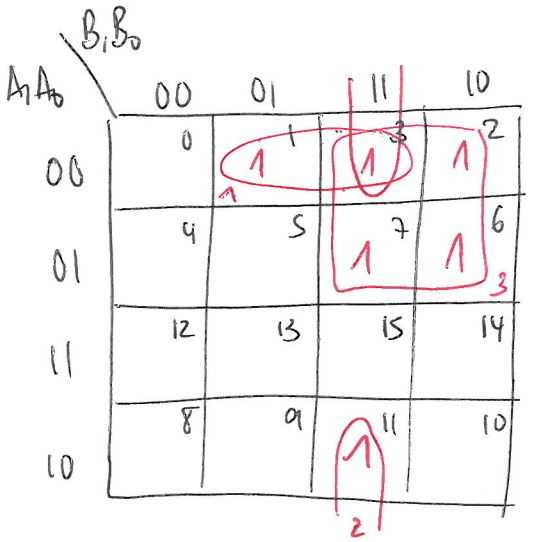
$$S0 = A_0 \bar{B}_1 \bar{B}_0 + A_1 A_0 B_0 + A_1 \bar{B}_1$$



$S1 = \sum m (0, 5, 10, 15)$

⇒ no permite ninguna reducción de minterms

$$S1 = \bar{A}_1 \bar{A}_0 \bar{B}_1 \bar{B}_0 + \bar{A}_1 A_0 \bar{B}_1 B_0 + A_1 \bar{A}_0 \bar{B}_1 \bar{B}_0 + A_1 A_0 \bar{B}_1 B_0$$



$S2 = \sum m (1, 2, 3, 6, 7, 11)$

1 : $\bar{A}_1 \bar{A}_0 B_0$

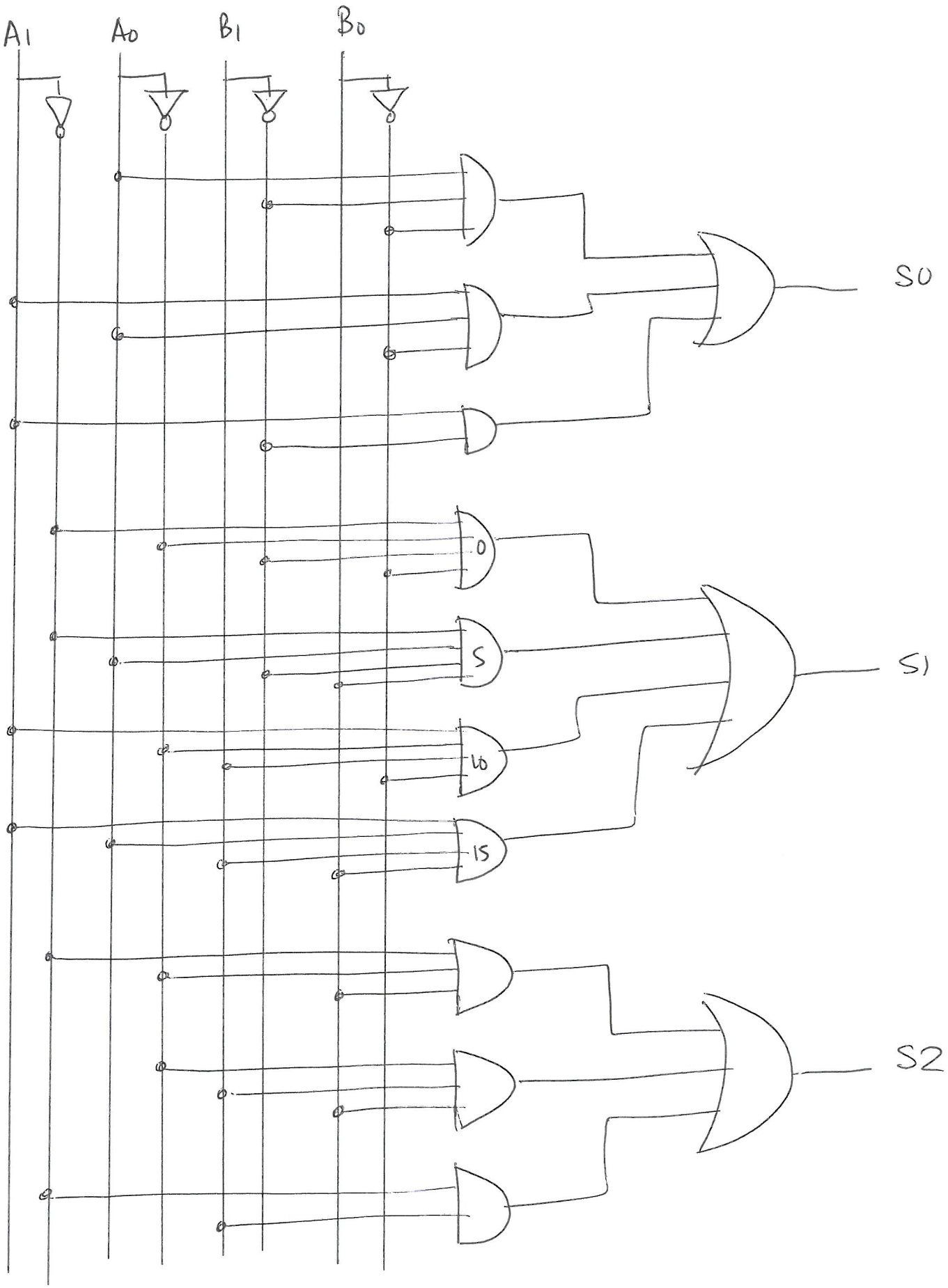
2 : $\bar{A}_0 B_1 B_0$

3 : $\bar{A}_1 B_1$

$$S2 = \bar{A}_1 \bar{A}_0 B_0 + \bar{A}_0 B_1 B_0 + \bar{A}_1 B_1$$

d) Implementación mediante puertas lógicas.

- AND - OR - NOT

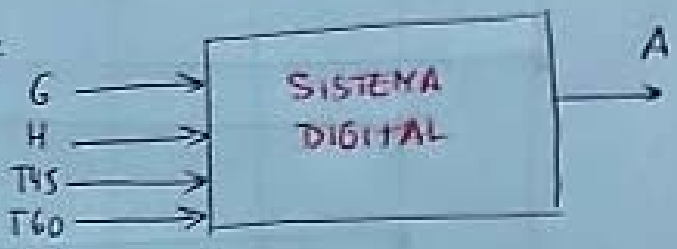


PROBLEMA 10 Circuito para activar la alarma de incendios (A) de un edificio

Entradas (4):
- Sensor de gases (G)
- Sensor de humos (H)
- Termómetro → T > 45°C (T45) / T > 60°C (T60)

a) Tabla de verdad del sistema:

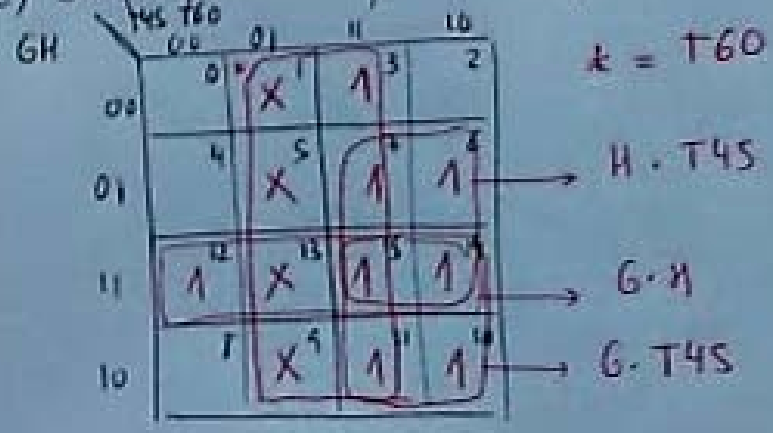
4 entradas ⇒ $2^4 = 16$ filas



	G	H	T45	T60	A	
0	0	0	0	0	0	Condiciones normales, sin alarmas
1	0	0	0	1	X	T no puede ser > 60° y < 45° a la vez
2	0	0	1	0	0	45 < T < 60 pero G=0 y H=0
3	0	0	1	1	1	T > 60°
4	0	1	0	0	0	Solo humo, no alarma
5	0	1	0	1	X	
6	0	1	1	0	1	HUMO + T > 45°
7	0	1	1	1	1	T > 60°
8	1	0	0	0	0	Solo GAS, no alarma
9	1	0	0	1	X	
10	1	0	1	0	1	GAS + T > 45°
11	1	0	1	1	1	T > 60°
12	1	1	0	0	1	GAS + HUMO con T ≤ 45° → Alarma
13	1	1	0	1	X	
14	1	1	1	0	1	GAS + HUMO + T > 45° → Alarma
15	1	1	1	1	1	T > 60°

b) Suma de productos (1FC) ⇒ $A = \sum m(3,6,7,10,11,12,14,15) + \sum X(1,5,9,13)$

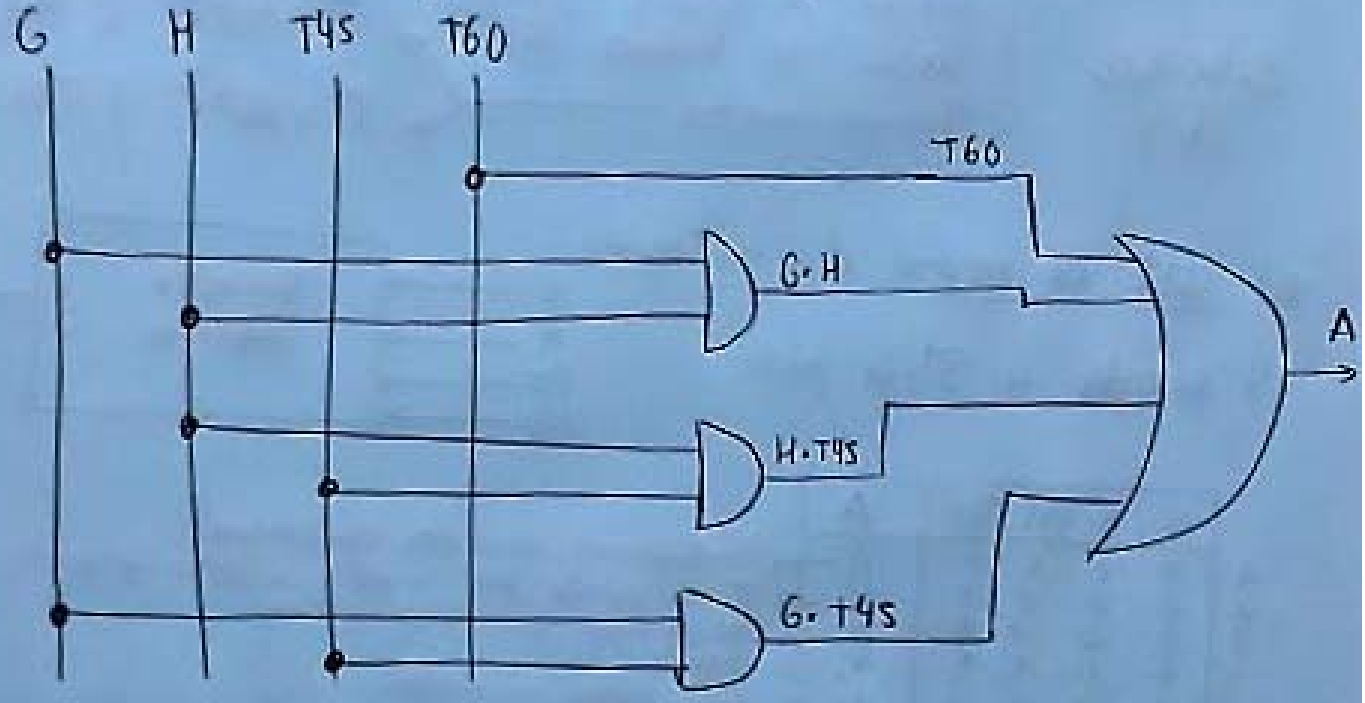
c) Simplificación por Karnaugh:



$$A = G \cdot H + T60 + H \cdot T45 + G \cdot T45$$

d) Implementación usando puertas lógicas:

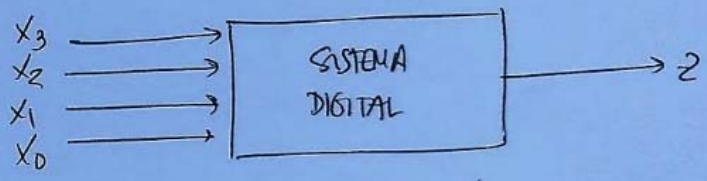
Como no hay ninguna variable negada:



CASO PRACTICO Sistema digital que acepte números del 1 al 10 codificados en binario, y genere salida = 1 por entradas múltiplo de 2 o igual a 9

a) Tabla de verdad:

Necesitamos 4 dígitos



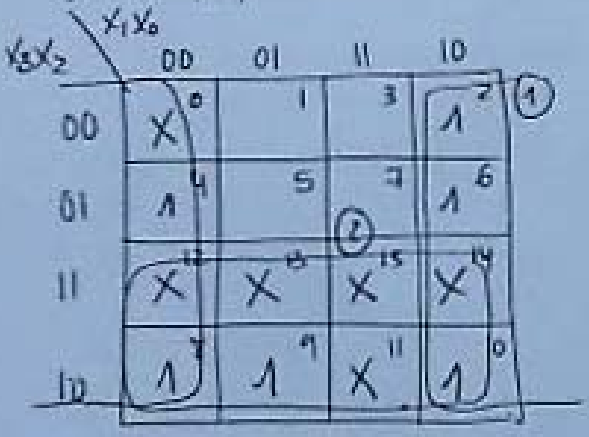
DEC	X_3	X_2	X_1	X_0	Z
0	0	0	0	0	X
1	0	0	0	1	0
2	0	0	1	0	1
3	0	0	1	1	0
4	0	1	0	0	1
5	0	1	0	1	0
6	0	1	1	0	1
7	0	1	1	1	0

DEC	X_3	X_2	X_1	X_0	Z
8	1	0	0	0	1
9	1	0	0	1	1
10	1	0	1	0	1
11	1	0	1	1	X
12	1	1	0	0	X
13	1	1	0	1	X
14	1	1	1	0	X
15	1	1	1	1	X

b) Expresar en la 1ª forma canónica:

$$Z = \sum_{9} m(2,4,6,8,10) + \sum X(0,11,12,13,14,15)$$

c) Simplificamos:



① 8 latches ⇒ ahorro de $2^3 = 3$

$Z = \overline{X_0}$

② 8 latches → ahorro de 3

$Z = X_3$

$$Z = \overline{X_0} + X_3$$

a)

	X_3	X_2	X_1	X_0	Z	
0	0	0	0	0	X	don't care
1	0	0	0	1	0	
2	0	0	1	0	1	
3	0	0	1	1	0	
4	0	1	0	0	1	
5	0	1	0	1	0	
6	0	1	1	0	1	
7	0	1	1	1	0	
8	1	0	0	0	1	
9	1	0	0	1	1	
10	1	0	1	0	1	
11	1	0	1	1	X	
12	1	1	0	0	X	don't care
13	1	1	0	1	X	
14	1	1	1	0	X	
15	1	1	1	1	X	

d) Implementación con puertas lógicas.