Hoja 2

(1) $f:\{1,2,\dots,m\}\to\{1,2,\dots,n\}$

Número de aplicaciones: n^m

Inyectivas: $m\le n$ $\qquad \dfrac{m!}{(m-n)!}$

Exhaustivas: $m\ge n$ $\qquad \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\binom{m}{k}(n-k)^m$

(2) $|X\times X| = n^2$

Número de funciones $f: X\to X\times X$ $\quad n^{2n}$

(5) Si $A=\{\text{múltiplos de } 2\}$, $B=\{\text{múltiplos de } 5\}$

(a)

No coprimos $= |A\cup B| = |A|+|B|-|A\cap B| = 500+200-100 = 600$

Coprimos $= 1000-600 = \underline{400}$

(b)

No coprimos, Sean $A=\{\text{múltiplos de } 2\}$, $B=\{\text{múltiplos de } 3\}$
$C=\{\text{múltiplos de } 5\}$

$$|A\cup B\cup C| = |A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C| =$$
$$= 180+120+72-60-24-36+12 = 264$$

Coprimos $= 360-264 = \underline{96}$

(9) (a) 1 es el mínimo. No hay máximo.

(b) Tienen mínimo los subconjuntos A que contengan el máximo común divisor de todos sus elementos. Tienen máximo los que contengan el mínimo común múltiplo de sus elementos.

(c) Veamos un ejemplo, sea $A=\{2,3,4,5,6\}$

6 4

sus elementos y luego tachando sus múltiplos.

Hoja 2

(11) Si $X = \{a, b\}$ tiene dos elementos

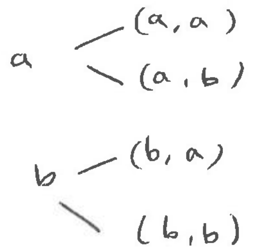


diagrama de los elementos de $X \times X$

Son relaciones de orden

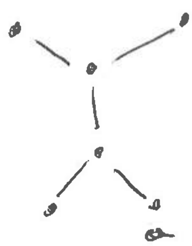
$\{(a,a), (a,b), (b,b)\}$ isomorfos

$\{(a,a), (b,a), (b,b)\}$

$\{(a,a), (b,b)\}$

Caso de 3 y de 4 elementos se seguiría la misma idea.

(12) En el ejemplo



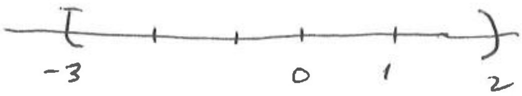
a es minimal, pero no el mínimo

(14) En el orden lexicográfico, un subconjunto infinito no tiene por qué tener mínimo.

Por ejemplo $b \geq ab \geq aab \geq aaab \geq \dots$

(15) (a) El orden no es total ya que por ej. -2 y 2 no están relacionados.

(b) En $A = [-3, 2)$



A no tiene supremo

$\dots, 1$

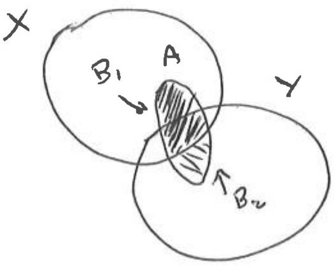
$(A) : f(A) = \varphi \} = \{$ números pares $\}$

Hoja 2

(10) (a) Sea $A \subset X \cup Y$, debemos probar que A tiene un mínimo (un primer elemento).

Si A está completamente contenido en X ó en Y, entonces A tendrá un primer elemento por estar X e Y bien ordenados.

Si no es el caso, dado $A \subset X \cup Y$, hacemos $A = B_1 \cup B_2$ donde $B_1 \subset X$, $B_2 \subset Y$ como en la figura.



Ahora B_1 tendrá un primer elemento b_1, mientras que B_2 un primer elemento b_2, el más pequeño de ellos será el mínimo de A.

(b) Sea $X = \{a_n + b_m : n, m \in \mathbb{N}\}$ donde $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ son sucesiones crecientes. Dado $A \subset X$ sean

$$n_0 = \min\{n : \exists k \text{ tal } a_n + b_k \in A\}$$

$$m_0 = \min\{m : \exists k \text{ tal } a_k + b_m \in A\}$$

Entonces, si $a_{n_0} + b_{k_1}$, $a_{k_2} + b_{m_0}$ están en A y t es el más pequeño de estos dos valores

$$a_n + b_m \in A \Rightarrow (n \leq k_2 \text{ y } m \leq k_1) \text{ ó } a_n + b_m \geq t$$

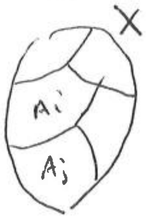
pero como mucho sólo hay un número finito de n, m que satisfacen luego A tiene un mínimo.

(19) $f : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$

$T = \{ \ldots A \subset \mathbb{N} : f(A) = \emptyset\}$ que son los subconjuntos de $\mathbb{N}$ que sólo contienen pares.

Hoja 3

① Dada la partición $X = \bigcup_{i \in I} A_i$ la relación



$$x R y \Leftrightarrow x \text{ e } y \text{ pertenecen al mismo } A_i$$

es de equivalencia ya que se comprueba fácilmente que es reflexiva, simétrica y transitiva.

Recíprocamente, si R es una relación de equivalencia en un conjunto X, la clase de equivalencia que contiene un elemento $x \in X$ es

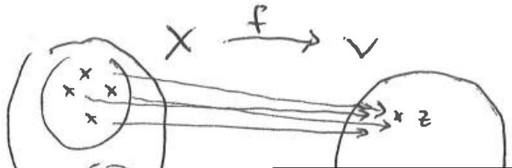
$$[x] = \{ y \in X : x R y \}$$

Las clases de equivalencia $\{A_i\}$ forman una partición, ya que todo elemento $x \in X$ está en algún A_i, por tanto $X = \bigcup A_i$ y además

$$A_i \cap A_j = \emptyset \quad \text{si} \quad i \neq j$$

puesto que si $A_i = [x_i]$, $A_j = [x_j]$, si $y \in A_i \cap A_j$ entonces $y R x_i$, $y R x_j$ con lo que tendríamos $x_i R x_j$, esto es, que $[x_i] = [x_j]$.

② $x R y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$ claramente es una relación de equivalencia pues es reflexiva, simétrica y transitiva



está bien definida, esto es, si $y_1 R y_2$ entonces $F([y_1]) = F([y_2])$,

es inyectiva y exhaustiva luego F es biyectiva

Hoja 3

(4) i) $f: \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}$ dada por $f(\bar{m}) = m$ no está bien definida ya que si $m_1, m_2 \in \bar{m}$ con $m_1 \neq m_2$ entonces es $\overline{m_1} = \overline{m_2}$ y f no tendría imagen única.

iii) Para que $G: \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_n$ tal que $G((\bar{m}, \bar{k})) = \overline{m+k}$ esté bien definida debemos comprobar que

$$\left.\begin{array}{l} \text{Si } m_1, m_2 \in \bar{m} \\ k_1, k_2 \in \bar{k} \end{array}\right\} \Rightarrow \overline{m_1 + k_1} = \overline{m_2 + k_2}$$

Por hipótesis
$$m_1 - m_2 = p_1 n$$
$$k_1 - k_2 = p_2 n$$

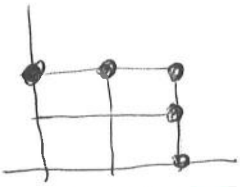
sumando $m_1 + k_1 - (m_2 + k_2) = (p_1 + p_2) n$ luego si se cumple

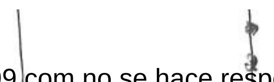
(5) Las clases de equivalencia son las hipérbolas $xy = k$ para $k \in \mathbb{R}$.

(6) En $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ $(n,m) R (n',m') \Leftrightarrow \max\{n,m\} = \max\{n',m'\}$ es una relación de equivalencia.

La clase de equivalencia que contiene $(2,2)$ es

$$[(2,2)] = \{(n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \max\{n,m\} = \max\{2,2\} = 2\} =$$
$$= \{(0,2), (1,2), (2,2), (2,0), (2,1)\}$$





Hoja 3

(8) Un ejemplo de relación binaria reflexiva y transitiva, pero no antisimétrica sería por ejemplo:

Dado $X = \{a, b, c\}$

$$R = \{(a,a), (b,b), (c,c), (a,b), (b,a)\}$$

los demás apartados van solvendo a partir de las definiciones.

(9) $m R_1 n \Leftrightarrow 5 \mid m + 2n$

No es de equivalencia, ya que no es reflexiva

$m R_2 n \Leftrightarrow 4 \mid (9m + 3n)$

Sí que es de equivalencia al ser reflexiva, simétrica y transitiva.

Para las clases de equivalencia, en general

$$[j] = \{ m \in \mathbb{Z} : m R_2 j \} = \{ m : 4 \mid 9m + 3j \} = \{ m : 9m + 3j = 4k, k \in \mathbb{Z} \}$$

Dado j debemos resolver la llamada ecuación diofántica

$$9m - 4k = -3j$$

que (se verá en su momento) tiene por soluciones

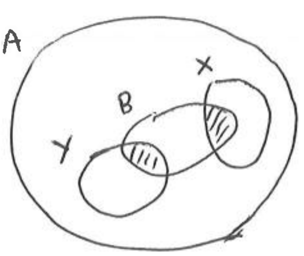
$$m = -3j + 4n \quad \text{para } n \in \mathbb{Z}$$

Estos son los elementos del conjunto $[j]$. Aparecen por tanto las cuatro clases de equivalencia distintas

$$[0] = \{ \dots, -4, 0, 4, 8, \dots \}$$

Hoja 3

(10)



Es de equivalencia. Si $|B| = n$ hay $n+1$ clases de equivalencia de $0, 1, 2, \dots, n$ elementos

$$\left| \mathcal{P}(A)/_R \right| = n+1$$

(14) Demostremos primero el

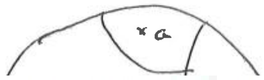
Lema Si A es infinito se puede extraer un subconjunto F numerable.

Dem En efecto, sea $x_0 \in A$, de $A \setminus \{x_0\}$ extraemos un elemento que llamamos x_1 (por ejemplo el primer elemento si $A \setminus \{x_0\}$ está bien ordenado). Sea ahora $A \setminus \{x_0, x_1\}$ del que extraemos un elemento x_2, consideramos ahora $A \setminus \{x_0, x_1, x_2\}$ y vamos repitiendo el proceso. Encontramos de este modo el conjunto numerable

$$E = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\} \subset A$$

Obsérvese que en la demostración hemos utilizado el axioma de elección o su equivalente el principio de buena ordenación.

Hacemos ahora $A = E \cup \{a\} \cup \underbrace{(A \setminus (E \cup \{a\}))}_{=B}$



Hoja 3

15. a) $|\mathbb{N}\times\mathbb{N}|=|\mathbb{N}|$ Por el teorema de Cantor-Schröder-Bernstein donde una de las inyectivas puede ser

$$F: \mathbb{N}\times\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$$
$$(m,n) \longmapsto 2^m 3^n$$

(o cualquier otra que funcione).

b) $|\mathbb{N}\times\mathbb{Q}|=|\mathbb{N}|$

Otra vez con el teorema CSB, donde si $\mathbb{Q}=\{r_1,r_2,\dots,r_n,\dots\}$ una de las inyecciones es

$$F: \mathbb{N}\times\mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{N}$$
$$(m,r_n) \longmapsto 2^m \times 3^n$$

c) $|\mathbb{R}\times\mathbb{Q}|=|\mathbb{R}|$

Puede usarse que $\mathbb{R}\subset\mathbb{R}\times\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}^2$ y utilizar luego que $|\mathbb{R}^2|=|\mathbb{R}|$, lo cuál puede probarse ya que $\mathbb{R}$ es equipotente con $(0,1)$, luego $\mathbb{R}^2=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ será equipotente con $(0,1)\times(0,1)$, pero ahora $(0,1)\times(0,1)$ es equipotente con $(0,1)$ pues podemos definir una biyección

$$f: (0,1)\times(0,1) \longrightarrow (0,1)$$

dada por, si $x = 0{,}a_1a_2a_3\dots$
$y = 0{,}b_1b_2b_3\dots$

$$f(x,y) = 0{,}a_1b_1a_2b_2a_3b_3\dots$$