

Lección 2: Señales y Espectros. Parte II

Gianluca Cornetta, Ph.D.

Dep. de Ingeniería de Sistemas de Información y Telecomunicación

Universidad San Pablo-CEU



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Contenido

- ❑ Transmisión de Señales y Sistemas Lineales
- ❑ Ancho de Banda de Datos Digitales



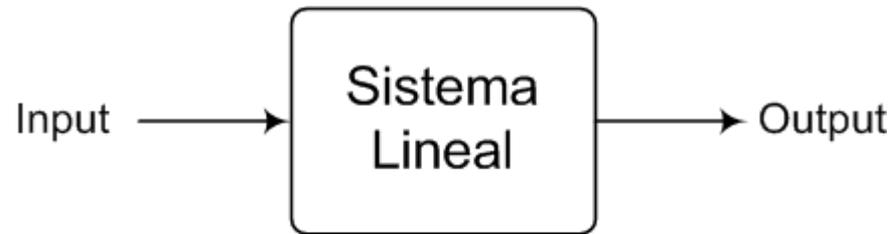
Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Transmisión de Señales y Sistemas Lineales

- ❑ Un sistema puede ser caracterizado tanto en el dominio del tiempo como en el de la frecuencia
- ❑ Caracterizar un sistema equivale a poder analizar su respuesta a una señal de entrada arbitraria $x(t)$
 - ❑ En el dominio de la frecuencia, $x(t)$ es sustituida por su *transformada de Fourier* $X(f)$
- ❑ En el dominio del tiempo un sistema es caracterizado por su *respuesta al impulso* $h(t)$, mientras que en el dominio de la frecuencia por su *función de transferencia* $H(f)$. Estas funciones se utilizan para determinar respectivamente las respuestas del sistema en el dominio del tiempo $y(t)$ y de la frecuencia $Y(f)$



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Transmisión de Señales y Sistemas Lineales

- Un *sistema lineal invariante por traslaciones temporales* es caracterizado por su respuesta al impulso $h(t)$:

$$y(t) = h(t) \quad \text{cuando } x(t) = \delta(t)$$

- A partir de la respuesta al impulso es posible construir la respuesta para una señal de entrada arbitraria $x(t)$:

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau$$

- Donde * denota el operador de convolución
- Para un *sistema causal* el integral de convolución resulta ser:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

Transmisión de Señales y Sistemas Lineales

- ❑ La salida en el dominio de la frecuencia $Y(f)$ se obtiene realizando la transformada de Fourier del producto de convolución:

$$Y(f) = X(f)H(f) \Rightarrow H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)}$$

- ❑ Donde $H(f) = \mathcal{F}\{h(t)\}$ y $X(f) \neq 0$ para todas las frecuencias f
- ❑ En general $H(f)$ es una función compleja que puede expresarse como:

$$H(f) = |H(f)|e^{j\theta(f)}$$

- ❑ Donde $|H(f)|$ es el módulo (magnitud de la respuesta) y la fase θ puede definirse como:

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Transmisión de Señales y Sistemas Lineales

- ❑ Si la entrada de un sistema lineal e invariante por traslaciones temporales es un proceso aleatorio, también la salida del sistema será un proceso aleatorio
- ❑ La densidad espectral de potencia en entrada $G_X(f)$, y en salida $G_Y(f)$, estarán relacionadas de la siguiente manera:

$$G_Y(f) = G_X(f) |H(f)|^2$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Transmisión de Señales y Sistemas Lineales

- ❑ El objetivo de diseño es que *la transmisión de una señal a través de una red aproxime lo más posible el caso ideal*
- ❑ La salida $y(t)$ de una línea de transmisión ideal es una réplica exacta y sin distorsiones de la señal de entrada $x(t)$ que puede diferir de $x(t)$ sólo por un retardo y un eventual cambio de escala, es decir:

$$y(t) = Kx(t - t_0)$$

- ❑ Donde K y t_0 son constantes
- ❑ En el dominio de Fourier se obtiene:

$$Y(f) = KX(f)e^{-j2\pi ft_0}$$

- ❑ Por tanto, resulta que, para que la transmisión sea sin distorsiones, un sistema debe tener una respuesta con magnitud constante y una fase con una dependencia lineal de la frecuencia:

$$H(f) = Ke^{-j2\pi ft_0}$$

- ❑ Todas las componentes a las distintas frecuencias deben experimentar un retardo

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORIAS TECNICAS ONLINE
LLAMA O ENVIA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Transmisión de Señales y Sistemas Lineales

- ❑ El retardo t_0 está relacionado con la rotación de fase θ y la frecuencia angular $\omega=2\pi f$:

$$\theta(f) = 2\pi f t_0 \Rightarrow t_0 = \frac{\theta}{2\pi f}$$

- ❑ La rotación de fase debe ser proporcional a la frecuencia para que el retardo de todos los componentes sea idéntico
- ❑ La figura de mérito que mide la distorsión de retardo de una señal se denomina *retardo de envolvente* o *retardo de grupo* $\tau(f)$:

$$\tau(f) = -\frac{1}{2\pi} \frac{d\theta(f)}{df}$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

Transmisión de Señales y Sistemas Lineales

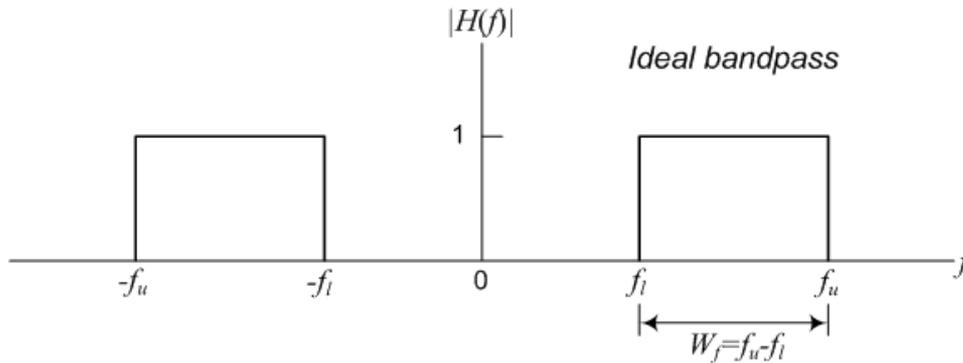
- ❑ La red que garantiza una transmisión ideal de la información no es realizable en la realidad ya que requeriría un ancho de banda infinito
- ❑ El ancho de banda de un sistema es definido como el intervalo de frecuencias para las que la magnitud $|H(f)|$ se mantiene constante
- ❑ Una red de transmisión sin distorsión se aproxima con un filtro ideal
 - ❑ Un filtro ideal es un circuito selectivo que deja pasar sin distorsiones todas las componentes de frecuencia incluidas entre un límite inferior f_l y uno superior f_u
 - ❑ f_l es la *frecuencia de corte inferior*, f_u es la *frecuencia de corte superior*
 - ❑ El rango de frecuencias $f_l < f < f_u$ se denomina *banda de paso*. El *ancho de banda efectivo* W_f de la banda de paso es $W_f = (f_u - f_l)$

Cartagena99

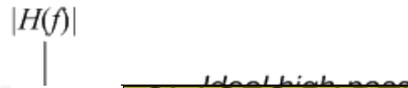
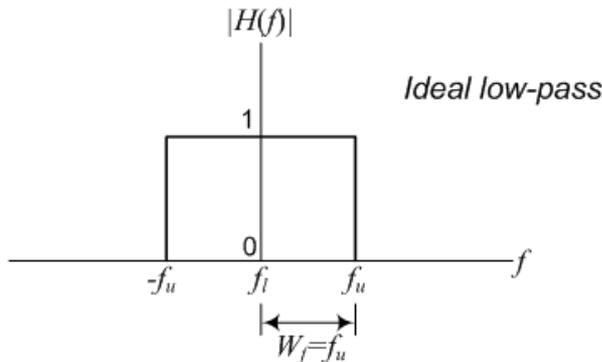
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Transmisión de Señales y Sistemas Lineales



- Filtro paso-banda: $f_l \neq 0$ y $f_u \neq \infty$*
- Filtro paso-bajo: $f_l = 0$ y f_u finito*
- Filtro paso-alto: $f_l \neq 0$ y $f_u \rightarrow \infty$*

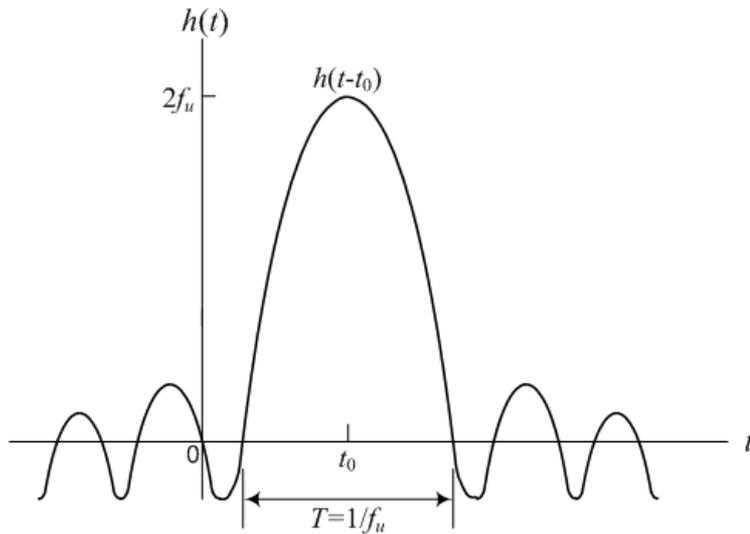


Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Transmisión de Señales y Sistemas Lineales



- Asumiendo $K=1$, en el caso de un filtro paso-bajo ideal con ancho de banda $W_f = f_u$ Hz, la función de transferencia puede expresarse de la siguiente manera:

$$H(f) = |H(f)|e^{-j\theta(f)}$$

- Donde:

$$|H(f)| = \begin{cases} 1 & \text{para } |f| < f_u \\ 0 & \text{para } |f| \geq f_u \end{cases}$$

$$e^{j\theta(f)} = e^{-j2\pi f t_0}$$

- La respuesta al impulso del filtro paso-bajo ideal es:

$$h(t) = \mathcal{F}^{-1}\{H(f)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} H(f)e^{j2\pi f t} df = \int_{-f_u}^{+f_u} e^{-j2\pi f t_0} e^{j2\pi f t} df = \int_{-f_u}^{+f_u} e^{j2\pi f (t-t_0)} df = 2f_u \frac{\sin 2\pi f_u (t-t_0)}{2\pi f_u (t-t_0)} = 2f_u \text{sinc} 2f_u (t-t_0)$$

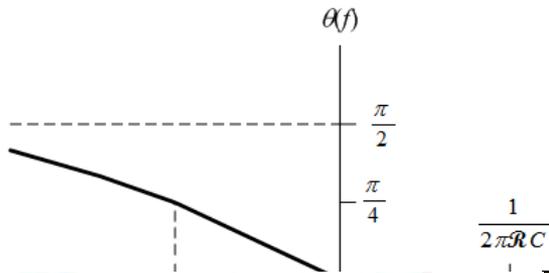
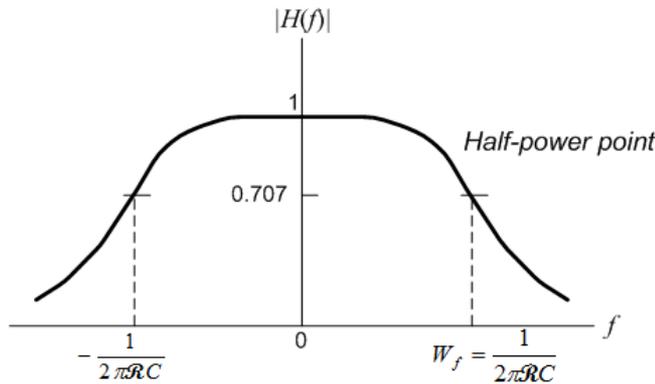
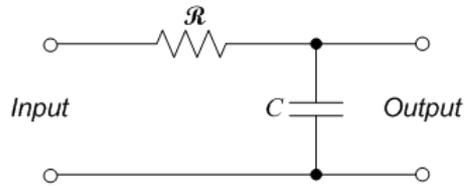
- La respuesta al impulso del filtro paso-bajo ideal es no

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

Transmisión de Señales y Sistemas Lineales



- ❑ El filtro realizable más sencillo es el filtro paso-bajo , cuya función de transferencia es:

$$H(f) = \frac{1}{1 + j2\pi fRC} = \frac{1}{\sqrt{1 + (2\pi fRC)^2}} e^{-j\theta(f)}$$

- ❑ Donde $\theta(f) = \tan^{-1} 2\pi fRC$
- ❑ La banda de -3 dB del filtro paso-bajo es definida como la frecuencia a la que la potencia de la señal ha disminuido de un factor 2 (o su tensión de pico de un factor $1/\sqrt{2}$)
- ❑ Por definición:

$$\text{number of dB} = 10 \log_{10} \frac{P_2}{P_1} = 10 \log_{10} \frac{V_2^2 / R_2}{V_1^2 / R_1}$$

- ❑ Normalmente se suelen manejar potencias normalizadas para las que $R_1 = R_2 = 1\Omega$, por tanto:

$$\text{number of dB} = 10 \log_{10} \frac{P_2}{P_1} = 10 \log_{10} \frac{V_2^2}{V_1^2}$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

Transmisión de Señales y Sistemas Lineales

- La amplitud de la respuesta puede expresarse en dB:

$$|H(f)|_{\text{dB}} = 20 \log_{10} \frac{V_2}{V_1} = 20 \log_{10} |H(f)|$$

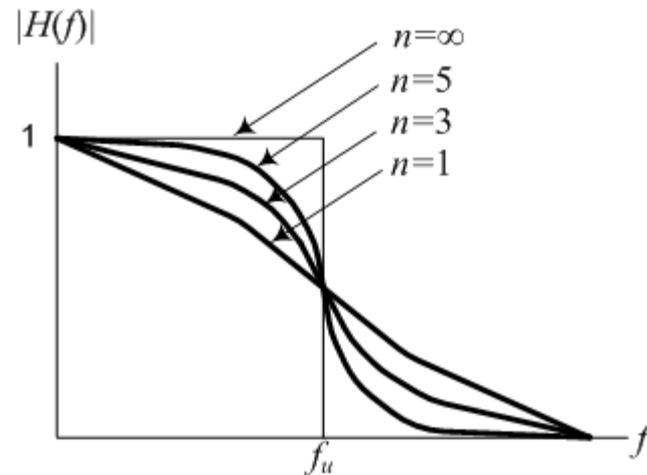
- El punto de media potencia (*half-power point*) del filtro \mathcal{RC} paso-bajo es $\omega = 1/\mathcal{RC}$ rad/s o $f = 1/(2\pi\mathcal{RC})$ Hz. Por tanto la banda W_f en Hz es $1/(2\pi\mathcal{RC})$.
- El factor de forma del filtro (*shape factor*) es un indicador de cuanto efectivamente un filtro es realizable y es la relación entre las bandas del filtro en los puntos cuyas amplitud de respuesta valen -60 dB y -6 dB respectivamente (cuanto más pequeño es el factor de forma, más abrupta es la respuesta y más difícil es la implementación)
- Hay varias aproximaciones matemáticas de la respuesta de un filtro, una de éstas es el *filtro de Butterworth* (o filtro de respuesta máximamente plana -*maximal flatness*)
- La respuesta de Butterworth aproxima el comportamiento de un filtro paso-bajo con:

$$|H_n(f)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (f/f_u)^{2n}}} \quad \text{con } n \geq 1$$

- Donde f_u es la frecuencia de corte superior a -2 dB y n representa el

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

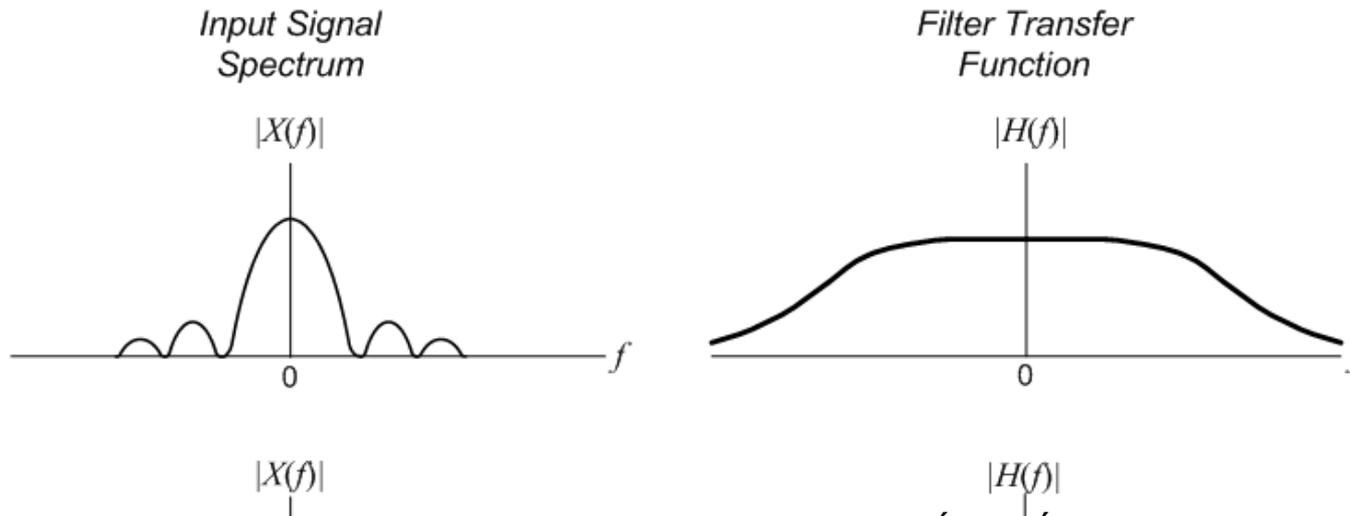
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70



Cartagena99

Transmisión de Señales y Sistemas Lineales

- ❑ Las señales se caracterizan por su espectro, los circuitos o sistemas por su función de transferencia de frecuencia
- ❑ La respuesta de un sistema será el producto entre los espectros de señal y función de transferencia y será dominada por la contribución con el menor ancho de banda

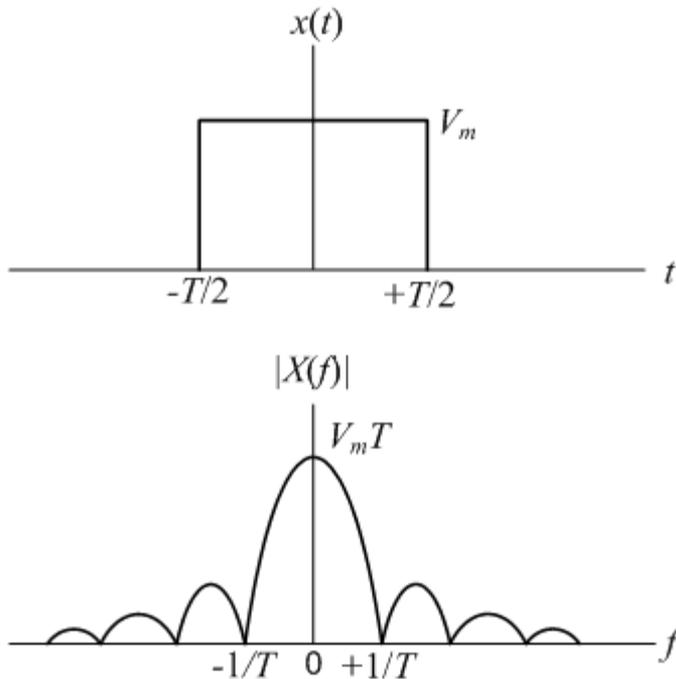


Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Transmisión de Señales y Sistemas Lineales

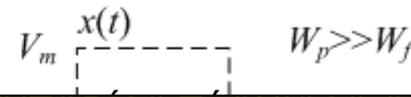


- El efecto del filtro sobre una señal puede estudiarse también en el dominio del tiempo. En este caso la respuesta $y(t)$ se obtiene realizando la convolución entre el pulso ideal $x(t)$ (de amplitud V_m y duración T) y la respuesta al impulso del filtro paso-bajo \mathcal{RC} :

$$y(t) = \begin{cases} V_m (1 - e^{-t/\mathcal{RC}}) & \text{para } 0 \leq t \leq T \\ V'_m e^{-(t-T)/\mathcal{RC}} & \text{para } t > T \end{cases}$$

donde $V'_m = V_m (1 - e^{-T/\mathcal{RC}})$

- El ancho de banda del pulso es $W_p = 1/T$, mientras que la del filtro es $W_f = 1/(2\pi\mathcal{RC})$
- Pueden verificarse tres casos:
 - $W_p \ll W_f$ ($T \gg 2\pi\mathcal{RC}$) buena fidelidad
 - $W_p \approx W_f$ ($T \approx 2\pi\mathcal{RC}$) detectabilidad buena
 - $W_p \gg W_f$ ($T \ll 2\pi\mathcal{RC}$) detectabilidad pobre

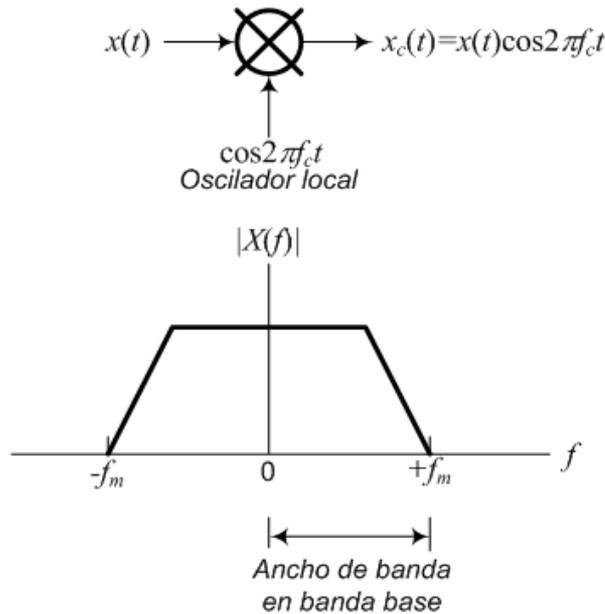


CLASES PARTICULARES, TUTORIAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVIA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

Ancho de Banda de Datos Digitales

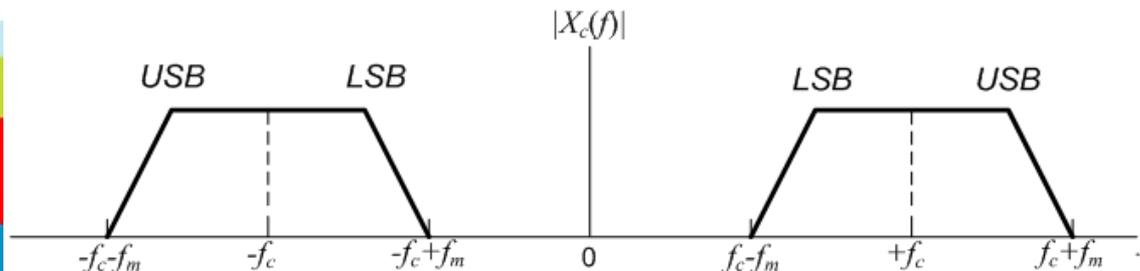


- Una forma fácil de desplazar una señal paso-bajo o banda base $x(t)$ con un ancho de banda f_m , a una frecuencia más elevada consiste en multiplicarla por una portadora sinusoidal $\cos 2\pi f_c t$ con $f_c \gg f_m$ (superheterodinación) obteniendo una señal modulada de banda lateral doble (DSB) $x_c(t)$:

$$x_c(t) = x(t)\cos 2\pi f_c t$$

- En el dominio de la frecuencia se obtiene:

$$X_c(f) = \frac{1}{2} [X(f - f_c) + X(f + f_c)]$$



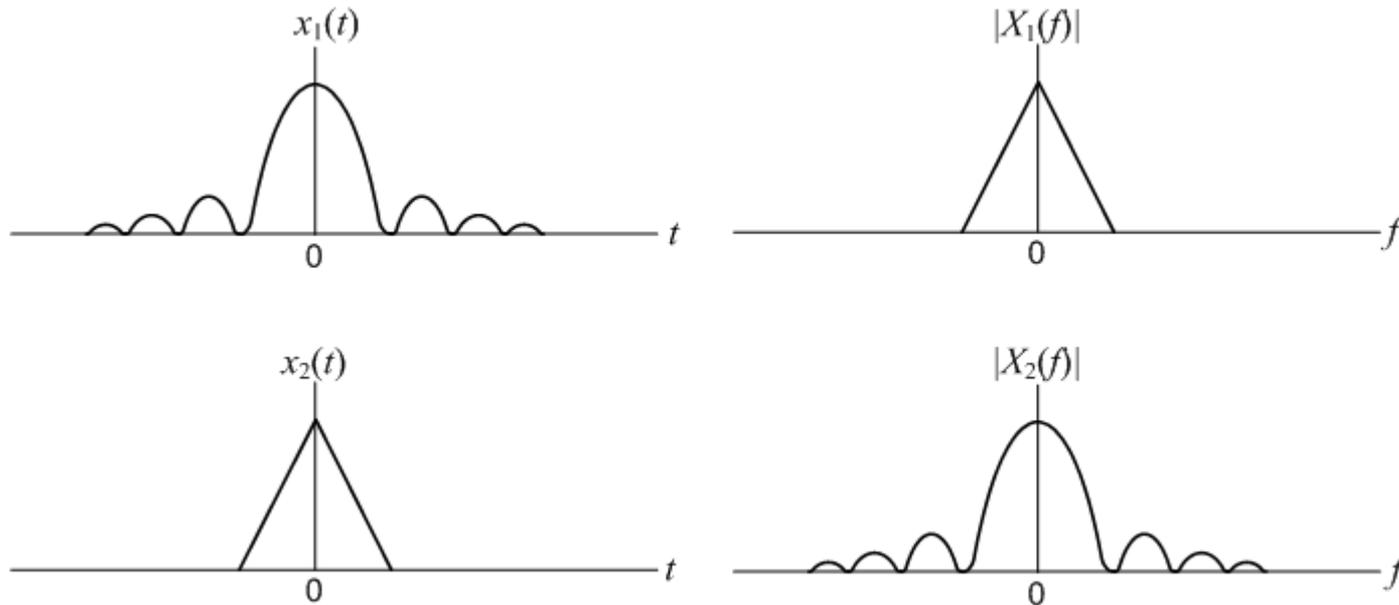
- Imágenes de los espectros en las bandas USB y LSB se encuentran en la parte de frecuencias negativas de $|X_c(f)|$
- Para transmitir una señal modulada DSB hace falta un ancho de banda $W_{DSB} = 2f_m$ igual al doble de la banda en banda base.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

Ancho de Banda de Datos Digitales



- Una señal estrictamente limitada en banda es irrealizable en la práctica ya que es ilimitada en el dominio del tiempo
- Por otro lado, una señal limitada en el tiempo es físicamente realizable pero su implementación no es viable ya que es

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORIAS TECNICAS ONLINE
LLAMA O ENVIA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

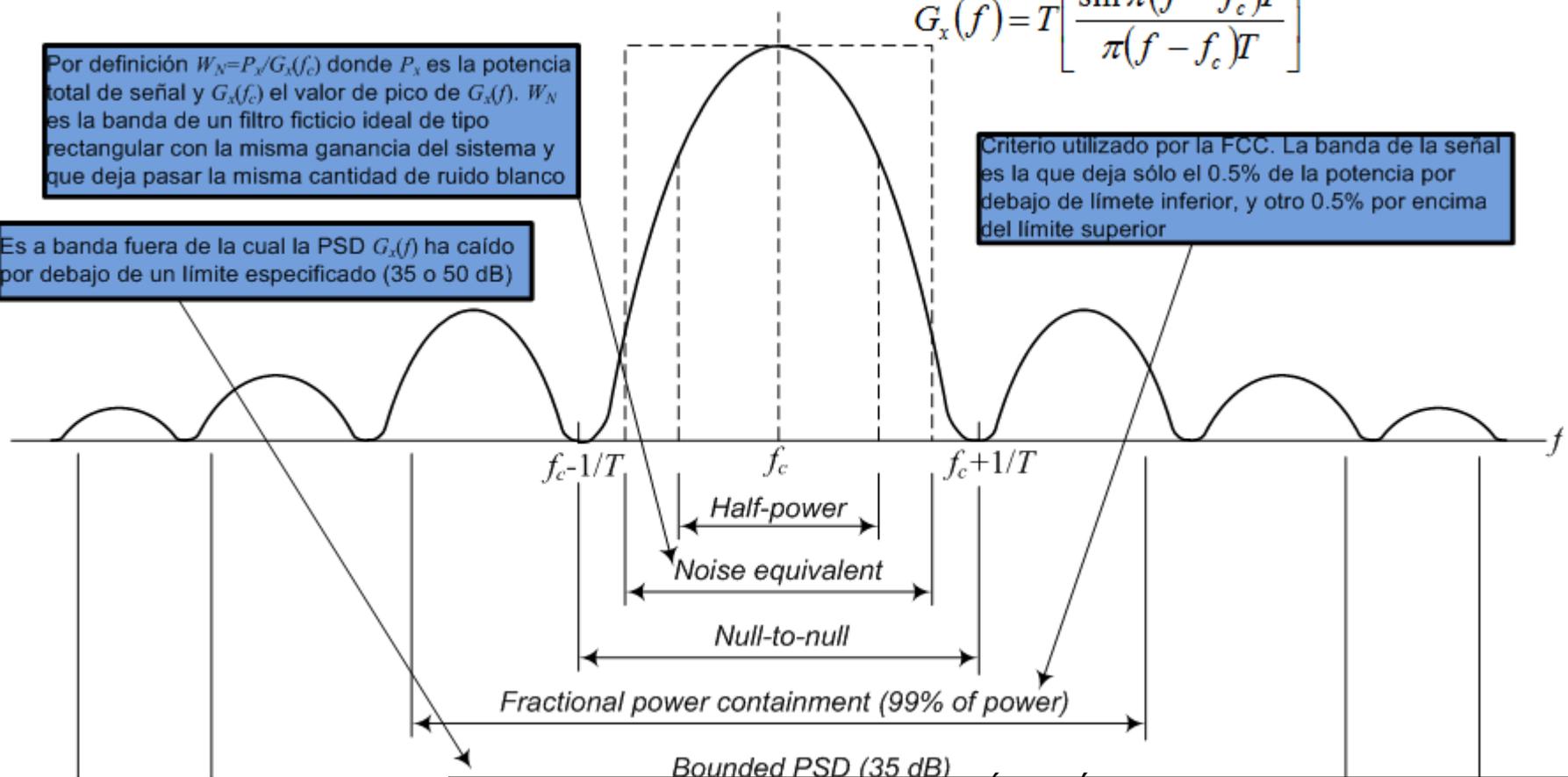
Ancho de Banda de Datos Digitales

$$G_x(f) = T \left[\frac{\sin \pi(f - f_c)T}{\pi(f - f_c)T} \right]^2$$

Por definición $W_N = P_x / G_x(f_c)$ donde P_x es la potencia total de señal y $G_x(f_c)$ el valor de pico de $G_x(f)$. W_N es la banda de un filtro ficticio ideal de tipo rectangular con la misma ganancia del sistema y que deja pasar la misma cantidad de ruido blanco

Es a banda fuera de la cual la PSD $G_x(f)$ ha caído por debajo de un límite especificado (35 o 50 dB)

Criterio utilizado por la FCC. La banda de la señal es la que deja sólo el 0.5% de la potencia por debajo de límite inferior, y otro 0.5% por encima del límite superior



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99