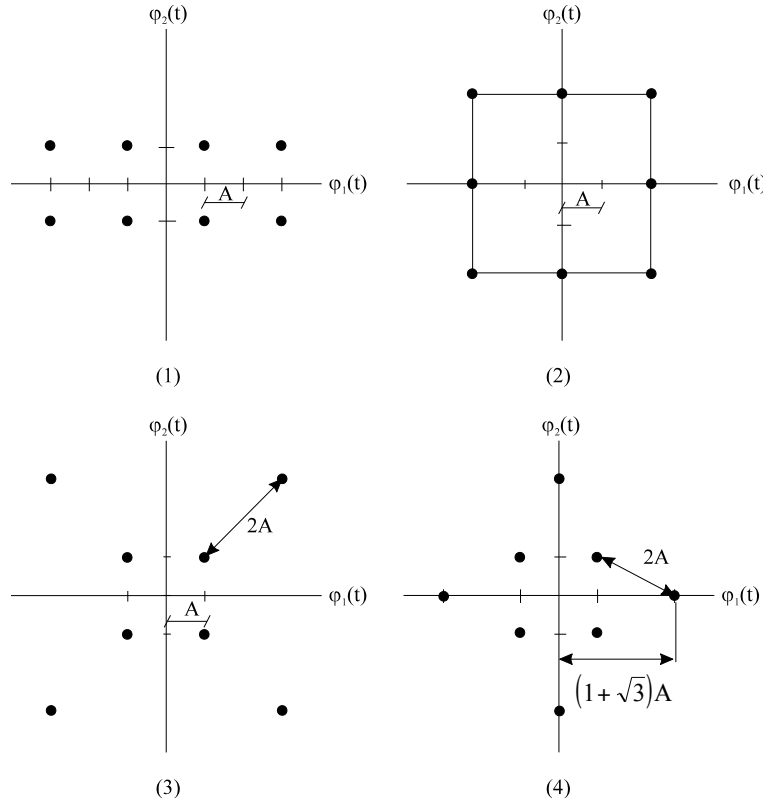


Tema 3: detección óptima en canales gaussianos

3.1 Dadas las constelaciones de señales equiprobables, mostradas en la siguiente figura, se pide calcular los apartados a y b de todas ellas:

- El valor de A para que $E_s=1$.
- Establecer las regiones de decisión así como el valor de la P_e máxima con $\eta_0/2 = -13$ dB/Hz



Solución numérica:

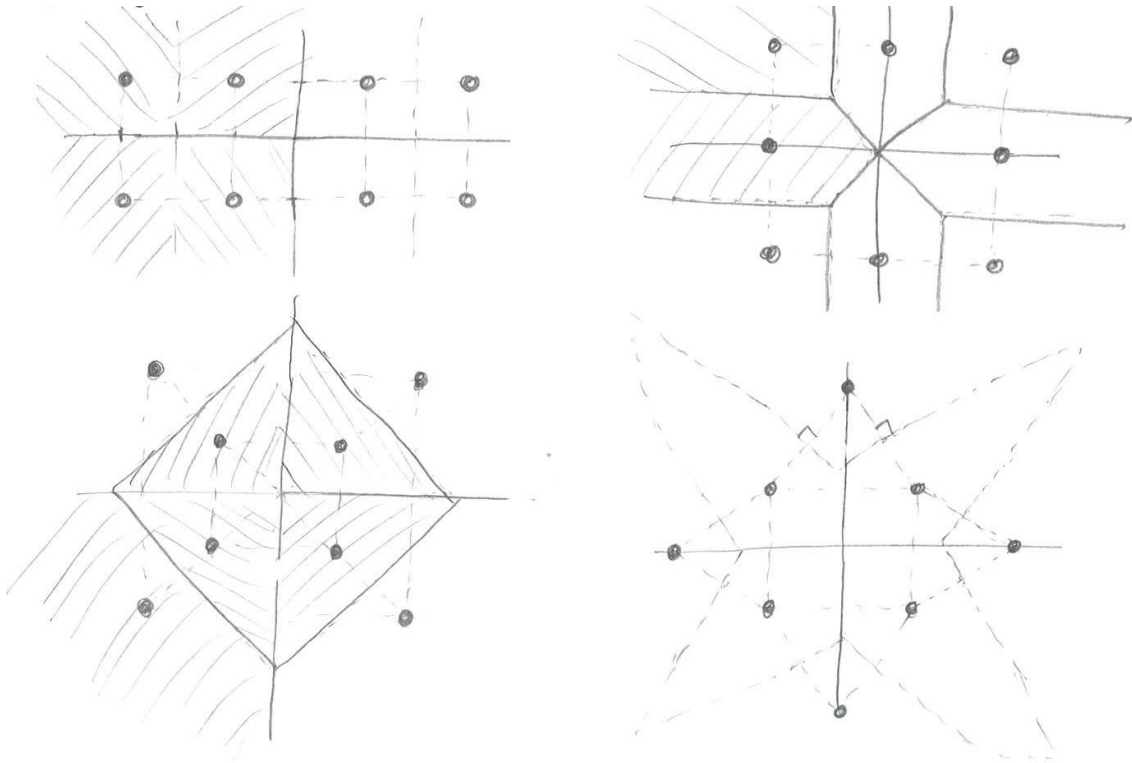
- $A = \frac{1}{\sqrt{6}}$; $A = \frac{1}{\sqrt{6}}$; $A = \frac{1}{\sqrt{2(2+\sqrt{2})}}$; $A = \frac{1}{\sqrt{3+\sqrt{3}}}$
- $P_e=0.2515$; $P_e=0.2515$; $P_e=0.31199$; $P_e=0.1421$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

TEORÍA DE LA COMUNICACIÓN



3.2 Dado el siguiente conjunto de señales, definidas en el intervalo de $-1 \leq t < 1$:

$$s_1(t)=1 \quad ; \quad s_2(t)=t \quad ; \quad s_3(t)=t^2$$

Se pide:

- Utilizando el método de Gram-Schmidt, encontrar una base ortonormal que permita representar las señales.
- Representar la constelación correspondiente.

3.3 Para transmitir un conjunto de ocho símbolos equiprobables, a través de un sistema en banda base, se eligen las ocho señales representadas en la figura.

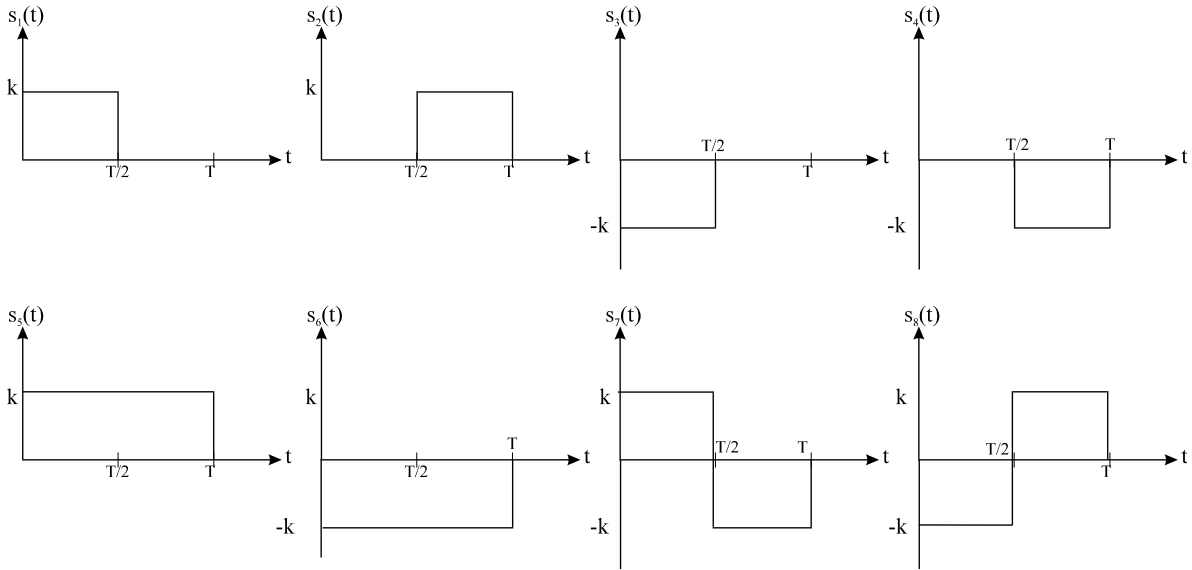
- Dibujar una posible constelación del conjunto de señales, indicando la distancia entre las señales adyacentes.

Cartagena99

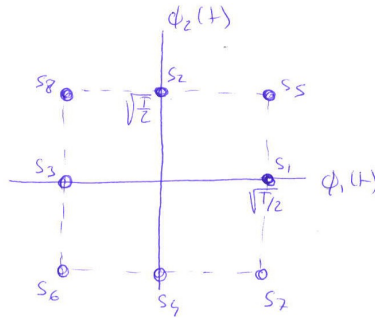
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

TEORÍA DE LA COMUNICACIÓN



Solución:
Representación de la constelación



$$d_{12} = d_{14} = \sqrt{T}; \quad d_{13} = \sqrt{2T}; \quad d_{15} = d_{17} = \sqrt{\frac{T}{2}}; \quad d_{16} = d_{18} = \sqrt{\frac{3T}{2}}$$

3.4 Se utilizan las señales de la siguiente figura, para transmitir dos mensajes equiprobables, a través de un canal perturbado por ruido aditivo blanco Gaussiano, con densidad espectral de potencia de ruido $N_0/2 = 1 \text{ W/Hz}$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

TEORÍA DE LA COMUNICACIÓN

de las dos señales.

- b. Representar la constelación correspondiente.
- c. Calcular la probabilidad de error correspondiente.

3.5 Un transmisor envía una de cuatro posibles formas de onda (con igual probabilidad), cada T segundos por un canal con ruido blanco y gaussiano aditivo.

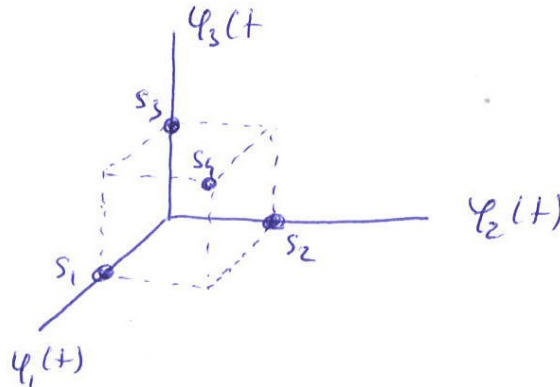
$$s_1(t) = \varphi_1(t); s_2(t) = \varphi_2(t); s_3(t) = \varphi_3(t); s_4(t) = \varphi_1(t) + \varphi_2(t) + \varphi_3(t)$$

$$\varphi_i(t) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{T}} \cos(\omega_i t) & 0 \leq t < T \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases} \quad \omega_i = \frac{2\pi i}{T} \quad i = 1, 2, 3$$

- a. Indicar justificadamente si las $\varphi_i(t)$ constituyen una base ortonormal.
- b. Representar la constelación correspondiente al conjunto de señales.
- c. Obtener la separación mínima entre las pulsaciones ω_i ($\omega_{i+1} - \omega_i$), para que las señales $\varphi_i(t)$ sean ortogonales.

Solución numérica:

- a. Sí constituyen una base ortonormal.
- b. Representación de la constelación:



c. $\Delta\omega = \frac{\pi}{T}$

3.6 Un sistema de comunicación digital emite un conjunto de señales equiprobables de la forma:

$$s_i = i^2 \cdot g(t), \text{ con } i = 1, \dots, 3N \text{ cada } T \text{ segundos.}$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

TEORÍA DE LA COMUNICACIÓN

- d. Calcular la región de decisión para $i=1$, en función de $d = \sqrt{E_g}$.
- e. Calcular la probabilidad de error correspondiente a la señal $s_1(t)$.

Nota:
$$\sum_{i=1}^N i^4 = \frac{N(N+1)(2N+1)(3N^2+3N-1)}{30}$$

- 3.7 Suponga que dos señales $s_1(t)$ y $s_2(t)$ sean ortogonales en el intervalo $[0, T]$. Una función muestra, $n(t)$, de un proceso aleatorio de ruido blanco gaussiano de media cero se correlaciona con $s_1(t)$ y $s_2(t)$ para obtener

$$n_1 = \int_0^T s_1(t) n(t) dt$$

$$n_2 = \int_0^T s_2(t) n(t) dt$$

Probar que $E[n_1 n_2] = 0$.

- 3.8 Un sistema de comunicaciones digitales transmite el siguiente conjunto de señales equiprobables:

$$s_i(t) = a_i \alpha(t) + b_i \beta(t), \quad i=1, 2, 3, 4.$$

Con a_i, b_i enteros distintos de 0.

Sabiendo que:

$$\alpha(t) \cdot \alpha(t) = T, \quad \alpha(t) \cdot \beta(t) = T, \quad \beta(t) \cdot \beta(t) = 2T$$

Se pide:

- Calcular una base ortonormal para las $s_i(t)$.
- Calcular las coordenadas de las señales transmitidas, respecto a la base obtenida en el apartado anterior.
- Si $a_1=1, b_1=1, a_2=-2, b_2=-1, a_3=2, b_3=-1, a_4=-2, b_4=1, T=10^{-6}$ s, dibujar la constelación y las regiones de decisión.

Utilizando los valores de a_i, b_i y T especificados para el apartado anterior y sabiendo que en el receptor se recibe la señal $r(t)=s_i(t)+n(t)$, con $n(t)$ ruido blanco Gaussiano, cuya densidad espectral de potencia es $\frac{\eta_0}{2} = -63 \text{ dBW/Hz}$.

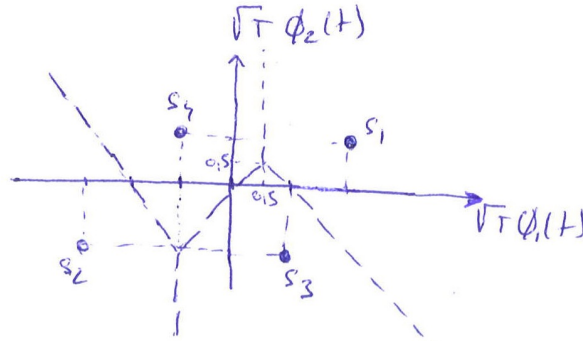
The logo for 'Cartagena99' features the text 'Cartagena99' in a stylized, blue, serif font. The '99' is significantly larger and more prominent than the 'Cartagena' part. The text is set against a light blue background with a subtle gradient and a soft shadow effect.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

TEORÍA DE LA COMUNICACIÓN

c. Regiones de decisión:



d. $d_{\min} = 2.24 \times 10^{-3}$; $P_e \leq 0.17$

3.9 Un sistema de transmisión de tipo binario utiliza las señales $s_0(t)$ y $s_1(t)$ para transmitir las dos hipótesis equiprobables, a través de un sistema que introduce ruido gaussiano cuya densidad espectral de potencia es $N_0/2$.

$$s_0(t) = \begin{cases} A \cos\left(\frac{\pi t}{T}\right) & 0 \leq t < T \\ 0 & \text{Resto} \end{cases} ; \quad s_1(t) = \begin{cases} A \cos\left(\frac{\pi t}{T} + \phi\right) & 0 \leq t < T \\ 0 & \text{Resto} \end{cases}$$

Donde T es la duración del símbolo.

- Calcular una base ortonormal para $s_0(t)$ y $s_1(t)$.
- Obtener la constelación correspondiente a las dos señales y representar las regiones de decisión.
- Determinar la probabilidad de error.

Solución numérica:

a. Base ortonormal:

$$\phi_1(t) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{T}} \cos \frac{\pi t}{T}; & 0 \leq t < T; \\ 0; & c. c. \end{cases} \quad \phi_2(t) = \begin{cases} (-1) \sqrt{\frac{2}{T}} \sin \frac{\pi t}{T}; & 0 \leq t < T \\ 0; & c. c. \end{cases}$$

b. $s_0(t) = A \sqrt{\frac{T}{2}} \phi_1(t)$; $s_1(t) = A \sqrt{\frac{T}{2}} \cos \phi \phi_1(t) + A \sqrt{\frac{T}{2}} \sin \phi \phi_2(t)$

Regiones de decisión:

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70**

TEORÍA DE LA COMUNICACIÓN

3.10 Consideremos un conjunto de M señales ortogonales $s_m(t)$, $1 \leq m \leq M$, $0 \leq t < T$, todas con la misma energía, E . Definimos un nuevo conjunto de M señales como

$$s'_m(t) = s_m(t) - \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M s_k(t), \quad 1 \leq m \leq M, \quad 0 \leq t < T$$

Muestre que las M señales $\{s'_m(t)\}$ tienen la misma energía de valor

$$E' = \frac{M-1}{M} E,$$

y están igualmente correladas, con coeficiente de correlación

$$r_{mn} = \frac{1}{E'} \int_0^T s'_m(t) s'_n(t) dt = -\frac{1}{M-1}$$

3.11 Un sistema de comunicación transmite las señales $\{s_i(t)\}$, $i = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$

$$s_i(t) = \begin{cases} A \cdot \cos(\omega_c \cdot t + \frac{\pi}{4} i) & , \quad 0 \leq t < T \\ 0 & , \quad \text{c.c.} \end{cases} ; \quad \omega_c = n_c \cdot \frac{2\pi}{T}, \text{ con } n_c \text{ entero}$$

por un canal con ruido aditivo blanco gaussiano con densidad espectral de potencia de valor $N_0/2$ y media nula. Se pide:

- Obtener una base ortonormal para representar estas señales.
- Dibujar el esquema de bloques de un receptor de correlación diseñado para detectar estas señales.
- Calcular una cota superior de la probabilidad de error de símbolo en el caso de $A = 0,2 \text{ mV}$, $N_0/2 = 10^{-15} \text{ W/Hz}$ y $T = 8\mu\text{s}$.

Nota: $P_e \leq (M-1) \cdot Q\left(\frac{d_{\min}}{\sqrt{2N_0}}\right)$

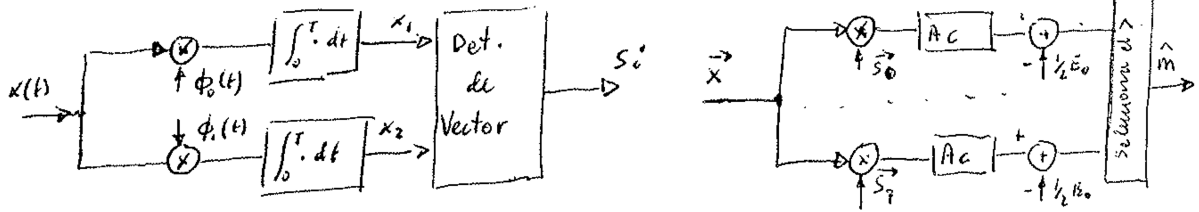
Solución numérica:

a. Base ortonormal:

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

TEORÍA DE LA COMUNICACIÓN



c. $P_e \leq 5,5 \times 10^{-6}$

3.12 Las señales $\{s_i(t)\}$, $i=1,2,3,4$, se utilizan para transmitir cuatro mensajes equiprobables por un canal con ruido aditivo blanco gaussiano con densidad espectral de potencia de valor $N_0/2$. Se pide:

- Obtener una base ortonormal para el espacio de señal e indicar cuál es su dimensión.
- Dibujar la constelación de señal con indicación de las regiones de decisión con el criterio de mínima probabilidad de error.
- Dibujar las respuestas al impulso de los filtros adaptados a cada una de las señales de la base.
- Calcular la probabilidad de error de símbolo en función de A y de $N_0/2$.

$$s_1(t) = \begin{cases} A/2 & , 0 \leq t < T/2 \\ -A/2 & , T/2 \leq t < T \\ 0 & , \text{c.c.} \end{cases} \quad s_2(t) = \begin{cases} -A/2 & , 0 \leq t < T/2 \\ A/2 & , T/2 \leq t < T \\ 0 & , \text{c.c.} \end{cases}$$

$$s_3(t) = \begin{cases} 3A/2 & , 0 \leq t < T/2 \\ -3A/2 & , T/2 \leq t < T \\ 0 & , \text{c.c.} \end{cases} \quad s_4(t) = \begin{cases} -3A/2 & , 0 \leq t < T/2 \\ 3A/2 & , T/2 \leq t < T \\ 0 & , \text{c.c.} \end{cases}$$

Solución numérica:

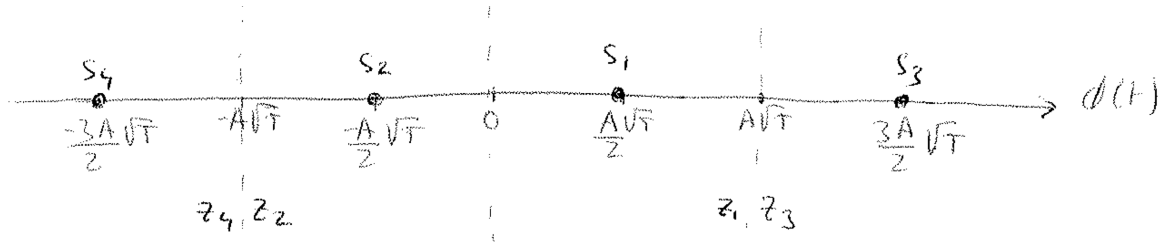
- a. Base ortonormal:

$$\phi(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{T}}; 0 \leq t < \frac{T}{2} \\ \frac{-1}{\sqrt{T}}; \frac{T}{2} \leq t < T \\ 0; \text{c.c.} \end{cases}$$

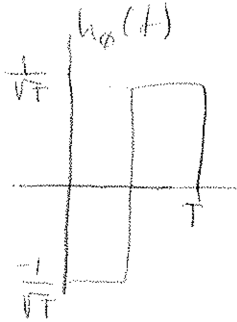
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

TEORÍA DE LA COMUNICACIÓN



c.



$$h_{\phi}(t) = \phi(T-t)$$

d. $P_e = \frac{3}{2} Q\left(A\sqrt{\frac{T}{2N_0}}\right)$

3.13 Sea el conjunto de señales dado por la expresión:

$$s_i(t) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2E}{T}} \cos\left(\omega_c t + i \cdot \frac{\pi}{4}\right) & , 0 \leq t < T \\ 0 & , \text{c.c.} \end{cases}$$

donde $i=1,2,3,4$ y $\omega_c = n_c \cdot 2\pi/T$ para algún valor entero n_c .

- ¿Cuál es la dimensión, N , del espacio generado por este conjunto de señales?
- Obtenga una base ortonormal para representar este conjunto.
- Obtenga los vectores de señal de cada una de las señales $s_i(t)$.
- Dibuje los vectores de señal en el espacio de señal.

Solución numérica:

- $N=2$
- Base ortonormal:

Cartagena99

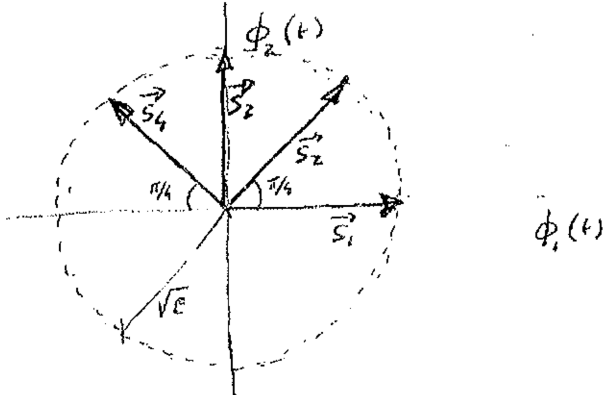
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

TEORÍA DE LA COMUNICACIÓN

$$\vec{s}_1 = [\sqrt{E}, 0]; \vec{s}_2 = \left[\sqrt{\frac{E}{2}}, \sqrt{\frac{E}{2}} \right]; \vec{s}_3 = [0, \sqrt{E}]; \vec{s}_4 = \left[-\sqrt{\frac{E}{2}}, \sqrt{\frac{E}{2}} \right]$$

d.



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70