ÁLGEBRA LINEAL – 2º PARCIAL
ESPACIOS VECTORIALES GENERALES y APLICACIONES LINEALES

Nº Matrícula…………………

Apellidos………………………………………………………………Nombre………………………

Ejercicio 1: (**5** ptos)

a) Dado en $\mathbb{Z}_2^4$ el s.v. C = L{(0,1,0,0), (1,1,1,1), (0,1,1,0), (1,1,0,1)}. Obtén las ecuaciones paramétricas e implícitas de C, la dimensión de C y todas las palabras del código C.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow B_C = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ Ecs. Paramét. de C.}$$

$$\left(\begin{array}{c|c} 100 & x_1 \\ 110 & x_2 \\ 101 & x_3 \\ 100 & x_4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{c|c} 100 & x_1 \\ 010 & x_1 + x_2 \\ 001 & x_1 + x_3 \\ 000 & x_1 + x_4 \end{array}\right) \Rightarrow x_1 + x_4 = 0 \text{ Ec. Implícita. de C.}$$

Además, dimC = 3 y las 8 palabras del código C son:

C = {(0,0,0,0),(0,1,0,0), (1,1,1,1), (0,1,1,0), (1,1,0,1),(0,1,1,0),(1,0,1,1),(1,0,0,1)}.

b) Construye en $\mathbb{Z}_2^8$ un código lineal C que codifique al menos 6 mensajes y sea capaz de corregir un error. Obtén una matriz de paridad para el código C construido.

Para que sea un código lineal tiene que tener 2^k palabra, por tanto, el código tendrá 8 palabras y será de dimensión 3. Como tiene que ser capaz de corregir un error el código lineal tiene que tener distancia 3 (el mínimo número de unos que tienen las palabras no nulas de este código tiene que ser 3). Por ejemplo, el código pedido puede ser:

C = L{(1,1,1,0,0,0,0,0), (0,0,0,1,1,1,0,0), (1,0,0,0,0,0,1,1)} = {(0,0,0,0,0,0,0,0), (1,1,1,0,0,0,0,0), (0,0,0,1,1,1,0,0), (1,0,0,0,0,0,1,1), (1,1,1,1,1,1,0,0), (0,1,1,0,0,0,1,1), (1,0,0,1,1,1,1,1), (0,1,1,1,1,1,1,1)}.

$$\left(\begin{array}{c|c} 101 & x_1 \\ 100 & x_2 \\ 100 & x_3 \\ 010 & x_4 \\ 010 & x_5 \\ 010 & x_6 \\ 001 & x_7 \\ 001 & x_8 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{c|c} 100 & x_2 \\ 010 & x_4 \\ 001 & x_7 \\ 000 & x_1 + x_2 + x_7 \\ 000 & x_2 + x_3 \\ 000 & x_4 + x_5 \\ 000 & x_4 + x_6 \\ 000 & x_7 + x_8 \end{array}\right) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{r} x_1 + x_2 + x_7 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ x_4 + x_5 = 0 \\ x_4 + x_6 = 0 \\ x_7 + x_8 = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ Ecs. Implícs. de C.}$$

Luego una matriz de paridad para el código C es: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

c) Dado un código (7,4) de Hamming y recibidos los siguientes mensajes en los que se supone que hay como máximo un error, detecta si hay error y, en su caso, corrígelo dando el mensaje original.

(0,1,0,0,1,0,1)
(1,0,0,0,1,0,1)
(1,1,0,0,1,0,1)

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Hay error en el segundo y tercer mensaje, los mensajes originales son:

(1,0,0+1,0,1,0,1) = (1,0,1,0,1,0,1) y

(1+1,1,0,0,1,0,1) = (0,1,0,0,1,0,1).

Ejercicio 2: (5 ptos)

Estudia si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

1 La aplicación f(x,y,z)=(x-y, xy) es lineal. **F**

2 La aplicación f(x,y,z)=(2x+y-z, 0) es lineal. **V**

3 La aplicación f(x,y)=(x-y, x+y, x-y) es lineal. **V**

4 La aplicación f(x,y)=(2x+y, x-1) es lineal. **F**

5 Dada la aplicación lineal $f(x_1,\dots,x_n) = A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ con $A \in M_{m\times n}(\Re)$ la imagen de *f* es un s.v. de $\Re^n$. **F**

6 Dada la aplicación lineal $f(x_1,\dots,x_n) = A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ con $A \in M_{m\times n}(\Re)$ el núcleo de *f* es un s.v. de $\Re^n$. **V**

7 Dado el homomorfismo $f(x_1,\dots,x_n) = A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ con $A \in M_{m\times n}(\Re)$, se tiene que dim*Imf*=rango(A). **V**

8 Dado el homomorfismo $f(x_1,\dots,x_n) = A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ con $A \in M_{m\times n}(\Re)$, se tiene que dim*kerf*=rango(A). **F**

9 Dado el homomorfismo $f(x_1,x_2,x_3,x_4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$, se tiene que $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Im}f$. **F**

10 Dado el homomorfismo $f(x_1,x_2,x_3,x_4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$, se tiene que $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \in kerf$. **F**

Ejercicio 3: (5 ptos)

Dada la aplicación lineal f: $\Re^3 \rightarrow \Re^4$ definida por: $f(x, y, z) = \begin{pmatrix} x-y \\ y \\ y \\ y-z \end{pmatrix}$

a) Halla la matriz asociada a f respecto de las bases canónicas y obtén las ecuaciones de la aplicación lineal.

$$f(1,0,0)=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\ f(0,1,0)=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\1\end{pmatrix},\ f(0,0,1)=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\-1\end{pmatrix} \Rightarrow M_f(B_c^{\mathbb{R}^3},B_c^{\mathbb{R}^4})=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&0\\0&1&0\\0&1&-1\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\\t'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&0\\0&1&0\\0&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

b) Halla el núcleo de f, dando la dimensión y las ecuaciones implícitas del subespacio.

$$\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&0\\0&1&0\\0&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&0&0\\0&1&0&0\\0&1&0&0\\0&1&-1&0\end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&0\end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases}x_1=0\\x_2=0\\x_3=0\end{cases} \Rightarrow \ker f=\{(0,0,0)\} \text{ y } \dim \ker f=0.$$

c) Halla la imagen de f, dando una base, la dimensión y las ecuaciones paramétricas e implícitas del subespacio.

$$B_{\operatorname{Im} f}=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\\-1\end{pmatrix}\right\} \Rightarrow \dim \operatorname{Im} f=3,\quad \begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\\t'\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\1\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}0\\0\\0\\-1\end{pmatrix} \text{ Ecs. Paramét. de } \operatorname{Im} f$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&0&x'\\0&1&0&y'\\0&1&0&z'\\0&1&-1&t'\end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&0&x'\\0&1&0&y'\\0&0&0&z'-y'\\0&0&-1&t'-y'\end{array}\right) \Rightarrow y'-z'=0 \text{ Ec. Implíc. de } \operatorname{Im} f$$

d) ¿Es f monomorfismo?, ¿Es f epimorfismo?, ¿Es f isomorfismo?
SI es monomorfismo porque f es inyectiva ya que ker$f$={(0,0,0)}, pero NO es epimorfismo ya que no es suprayectiva por ser Imf $\neq \Re^4$. NO es isomorfismo ya que no es biyectiva por no ser suprayectiva.

Ejercicio 4: (5 ptos)

a) Obtén la matriz y las ecuaciones del cambio de base de la base canónica de $\Re^3$ a la base B={(1,1,0), (0,1,-1), (0,1,-2)}.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&0\\1&1&1&0&1&0\\0&-1&-2&0&0&1\end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&0\\0&1&1&-1&1&0\\0&-1&-2&0&0&1\end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&0\\0&1&1&-1&1&0\\0&0&-1&-1&1&1\end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&0\\0&1&0&-2&2&1\\0&0&-1&-1&1&1\end{array}\right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&0\\0&1&0&-2&2&1\\0&0&1&1&-1&-1\end{array}\right) \Rightarrow M'C(B_c,B)=\begin{pmatrix}1&0&0\\-2&2&1\\1&-1&-1\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}_B=\begin{pmatrix}1&0&0\\-2&2&1\\1&-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}_{B_c}$$

b) Dada la aplicación lineal f: $\Re^3 \rightarrow \Re^3$ tal que *kerf*=L{(1,1,0), (0,1,-1)} y f(0,1,-2)=(1,-1,0), obtén la matriz de f respecto de la base canónica ($M_f(B_c,B_c)$) y las ecuaciones de la aplicación.
Tomamos la base B={(1,1,0), (0,1,-1), (0,1,-2)} del apartado anterior ya que, los dos primeros vectores de B son los vectores de una base del núcleo de f, y del tercer vector de la base B nos dan su imagen. Por tanto, las imágenes de los vectores de la base B son:

$$f(1,1,0)=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},\ f(0,1,-1)=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},\ f(0,1,-2)=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\Rightarrow M_f(B,B_c)=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow M_f(B_c,B_c)=M_f(B,B_c)MC(B_c,B)=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&-1\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\-2&2&1\\1&-1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\-1&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\-1&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\ \text{Ecs. de la Aplicación.}$$

c) Obtén las ecuaciones implícitas de la imagen de *f*.

Como Im*f*=L{(1,-1,0)} las ecuaciones implícitas de Im*f* son $\begin{cases}x'+y'=0\\ z'=0\end{cases}$

Ejercicio 5: (5 ptos)

Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}-1&4&16\\0&5&8\\0&-2&-5\end{pmatrix}$

a) Halla los autovalores de la matriz A.

$$\begin{vmatrix}-1-\lambda&4&16\\0&5-\lambda&8\\0&-2&-5-\lambda\end{vmatrix}=(-1-\lambda)\begin{vmatrix}5-\lambda&8\\-2&-5-\lambda\end{vmatrix}=(-1-\lambda)((5-\lambda)(-5-\lambda)+16)=-(1+\lambda)(\lambda^2-9)$$

Por tanto, σ(A)={-1, 3, -3}.

b) Obtén una base de autovectores de cada uno de los subespacios propios asociados a cada autovalor de A.

$$S_{\lambda=-1}:\begin{pmatrix}0&4&16\\0&6&8\\0&-2&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}0&1&4&0\\0&3&4&0\\0&1&2&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}0&1&4&0\\0&0&-8&0\\0&0&-2&0\end{array}\right)\Rightarrow\begin{cases}y=0\\z=0\end{cases}\Rightarrow B_{S_{\lambda=-1}}=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$$

$$S_{\lambda=3}:\begin{pmatrix}-4&4&16\\0&2&8\\0&-2&-8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&-4&0\\0&1&4&0\\0&1&4&0\end{array}\right)\Rightarrow\begin{cases}x=0\\y=-4\alpha\\z=\alpha\end{cases}\Rightarrow B_{S_{\lambda=3}}=\left\{\begin{pmatrix}0\\-4\\1\end{pmatrix}\right\}$$

$$S_{\lambda=-3}:\begin{pmatrix}2&4&16\\0&8&8\\0&-2&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x=-2y-8x=-6\alpha\\y=-\alpha\\z=\alpha\end{cases}\Rightarrow B_{S_{\lambda=-3}}=\left\{\begin{pmatrix}-6\\-1\\1\end{pmatrix}\right\}$$

c) Estudia si la matriz A es diagonalizable y en caso afirmativo halla la matriz P y P^{-1} tal que $D=P^{-1}AP$ sea una matriz diagonal.

A SI es diagonalizable ya que tiene 3 autovalores reales distintos y por tanto, asociados a ellos tres autovectores l.i. Luego tenemos una base de $\Re^3$ formada por autovectores de la matriz A. Por tanto, $P=\begin{pmatrix}1&0&-6\\0&-4&-1\\0&1&1\end{pmatrix}$ y calculamos P^{-1}:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&-6&1&0&0\\0&-4&-1&0&1&0\\0&1&1&0&0&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&-6&1&0&0\\0&1&\frac{1}{4}&0&\frac{-1}{4}&0\\0&1&1&0&0&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&-6&1&0&0\\0&1&\frac{1}{4}&0&\frac{-1}{4}&0\\0&0&\frac{3}{4}&0&\frac{1}{4}&1\end{array}\right)\xrightarrow[\frac{4}{3}F_3]{F_1+8F_3,\ F_2-\frac{1}{3}F_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&2&8\\0&1&0&0&\frac{-1}{3}&\frac{-1}{3}\\0&0&1&0&\frac{1}{3}&\frac{4}{3}\end{array}\right)$$

$$\Rightarrow P^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&8\\0&\frac{-1}{3}&\frac{-1}{3}\\0&\frac{1}{3}&\frac{4}{3}\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}3&6&24\\0&-1&-1\\0&1&4\end{pmatrix}\ \text{y}\ P^{-1}AP=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}3&6&24\\0&-1&-1\\0&1&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&4&16\\0&5&8\\0&-2&-5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&-6\\0&-4&-1\\0&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&3&0\\0&0&-3\end{pmatrix}.$$