TEMA 2. CARACTERÍSTICAS DE LAS VARIABLES ALEATORIAS

El capítulo trata de obtener una serie de características o medidas sobre una variable aleatoria X que está especificada a través de su función de probabilidad y que nos resuman la información más relevante sobre la variable aleatoria en cuesti6n. Recordemos que con las medidas que se obtenían en la estadística descriptiva, perseguíamos objetivos similares.

El alumno debe siempre cuestionarse si está en presencia de una variable aleatoria de tipo discreto o continuo. Y si sobre la variable aleatoria en cuestión conocemos su función de probabilidad (bien sea la función de cuantía, o la función de distribución, o la función de densidad de probabilidad), estaremos entonces en posesión de la información máxima. Cualquier probabilidad que puedan pedimos sobre esa variable aleatoria podemos obtenerla ya que disponemos de la máxima información.

2.1 Al finalizar el tema el alumno debe conocer........

- ✓ El. Las medidas de posición, dispersión y forma de una variable aleatoria.
- ✓ Valor esperado de una variable aleatoria, unidimensional o bidimensional, y propiedades.
- ✓ Los momentos de una variable aleatoria, unidimensional o bidimensional.

2.2 Características de las variables aleatorias.

Una vez que hemos definido una variable aleatoria y hemos construido su función de cuantía o densidad (en el caso de variables aleatorias discretas o continuas), un simple examen de la gráfica de la distribución de la variable aleatoria puede ser interesante ya que contiene toda la información sobre sus propiedades probabilísticas. Sin embargo existe otra alternativa que reduce al máximo la información disponible y permite realizar un análisis de la variable aleatoria de forma más simple, esta alternativa consiste en obtener algunas medidas numéricas y gráficas que resuman las características de dicha distribución, dando así sentido a toda la información de forma exacta y clara. En este caso, podemos comparar distintas distribuciones de probabilidad comparando los valores característicos correspondientes a esas distribuciones.

$$Medidas \begin{cases} Posición & \begin{cases} Centralización: Media,\ Mediana,\ Moda \\ Posición: Cuantiles,\ Percentiles, ... \end{cases} \\ Dispersión & \{ Varianza,\ Desviación\ Típica,\ Coeficiente\ de\ Variación \\ Forma & \{ Coeficiente\ de\ Asímetria\ y\ Curtosis \end{cases}$$

Las medidas tendencia central (media, mediana o moda) nos indican el centro de la distribución de frecuencias, es un valor que se puede tomar como representativo de todos los datos. Asimismo las medidas de posición, los cuantiles, son valores de la distribución que la dividen en partes iguales, es decir en intervalos, que comprenden el mismo número de valores.

Las medidas de dispersión (varianza, desviación típica o coeficiente de variación) cuantifican la separación, la dispersión, la variabilidad de los valores de la distribución respecto al valor central, indican hasta que punto las medidas de tendencia central son representativas como síntesis de la información.

Las medidas de forma (coeficiente de asimetría o curtosis) contrastan la forma que tiene la representación gráfica, bien sea el histograma o el diagrama de barras, de la distribución de los datos con la distribución normal.

2.3 Momentos de una variable aleatoria unidimensional.

Los momentos son operadores matemáticos que nos proporcionarán información sobre las propiedades de la distribución de la variable aleatoria. Cuantificando los momentos, si existen, podemos tener medidas, tanto de posición como de dispersión o forma.
Los momentos se pueden calcular respecto al origen de la distribución o respeto a la media de la distribución.

Momentos respecto al origen:

Los momentos respecto al origen se definen como $\alpha_r = E[x^r]$, *para* $r = 1,2,\cdots$, en el caso de variables aleatorias discretas y continuas tenemos:

$$\alpha_r = E[x^r] = \sum_j x_j^r P(x_j) \quad , \quad \forall\, r = 1,2,\cdots \quad \text{para } x \text{ discreta.}$$

$$\alpha_r = E[x^r] = \int_{-\infty}^{\infty} x^r f(x)\,dx \quad , \quad \forall\, r = 1,2,\cdots \quad \text{para } x \text{ continua.}$$

Los momentos respecto al origen de uso común son:

- Para $r = 0$ tenemos $\alpha_0 = E[x^0] = 1$
- Para $r = 1$ tenemos α_1 , es lo que definimos como valor esperado o esperanza matemática de una distribución. Se llama media de la distribución de x, o simplemente la media de la variable aleatoria, representando la tendencia central de la variable aleatoria.
- Para $r = 2$ tenemos α_2 , también llamado momento de orden dos respecto al origen.
- El resto de los momentos tienen escaso interés.

Valor esperado o esperanza matemática α_1:

La idea de la media es la de un promedio de todos los valores de la variable aleatoria, en este caso debemos tener en cuenta que no todos los valores de la variable tienen que ser igualmente de probables. Del mismo modo, también debemos examinar su existencia puesto que para ello es necesario que sean absolutamente convergentes los factores que lo componen.

Esta definición también se puede aplicar a una función de la variable aleatoria:

$$\alpha_{1r} = E[g(x)] = \sum_j g(x_j) P(x_j) \quad , \quad \forall\, r = 1,2,\cdots \quad \text{para } x \text{ discreta.}$$

$$\alpha_1 = E[g(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x)\,dx \quad , \quad \forall\, r = 1,2,\cdots \quad \text{para } x \text{ continua.}$$

Sus propiedades son las siguientes:

1. La esperanza de una constante es la propia constante: $\alpha_1 = E[k] = k$.
2. $\alpha_1 = E[k + x] = k + E[x]$
3. $\alpha_1 = E[k\ x] = k\ E[x]$
4. Se ve afectado por un cambio de origen y escala.

5. $\alpha_1 = E[x+y-z] = E[x]+E[y]-E[z]$
6. Si una variable aleatoria está acotada $a \le x \le b$, entonces se verifica: $a \le E[x] \le b$.
7. Si una variable aleatoria presenta una distribución simétrica respecto a un valor k, si existe la esperanza será $E[x]=k$.

Momentos respecto a la media:

Los momentos respecto a la media se definen como $\mu_r = E\left[(x-E[x])^r\right]$, *para* $r = 1,2,\cdots$ en el caso de variables aleatorias discretas y continuas tenemos:

$$\mu_r = E\left[(x-E[x])^r\right] = \sum \left(x_j - E[x]\right)P\left(x_j\right)^r \quad , \forall \quad r = 1,2,\cdots \text{ para x discreta.}$$

$$\mu_r = E\left[(x-E[x])^r\right] = \int_{-\infty}^{\infty} (x-E[x])^r f(x)dx, \ \forall \quad r = 1,2,\cdots \text{ para x continua}$$

Los momentos respecto a la media de uso común son:

- Para $r=1$ tenemos $\mu_1 = E\left[(x-E[x])^1\right] = 0$
- Para $r=2$, tenemos $\mu_2 = E\left[(x-E[x])^2\right] = Var[x]$, que se llama varianza de la distribución de la variable aleatoria, o simplemente varianza de x, la raíz cuadrada positiva de la varianza: $+\sqrt{Var[x]} = \sigma$, se llama desviación típica. Ambas medidas son consideradas como medidas de dispersión de los valores de la variable aleatoria respecto a su media. La varianza también podemos calcularla estableciendo una relación respecto a los momentos del origen: $\mu_2 = E[x^2] - (E[x])^2$.
- Como en el caso anterior, los restantes momentos en la mayoría de los casos tienen escasa utilidad.

Varianza de una variable aleatoria μ_2:

Es importante complementar la información que proporciona la media sobre el valor esperado de la variable aleatoria, con una medida de la dispersión de los valores de la variable aleatoria alrededor de dicha media. La varianza (o su raíz cuadrada, la desviación típica) es la media cuadrática de la dispersión, si la varianza es pequeña será porque las desviaciones de la variable aleatoria en torno a su media son pequeñas. Pero no debemos olvidar que la media y la desviación típica, están muy influenciadas por las observaciones atípicas y por la asimetría de una distribución, son buenos descriptores de las distribuciones simétricas y son especialmente útiles en el caso de las distribuciones normales que ya veremos.

Las propiedades de la varianza son las siguientes:

1. La varianza (momento de orden dos respecto de la media) se puede expresar utilizando momentos respecto del origen:
   $\mu_2 = E[x^2] - (E[x])^2 = \alpha_2 - (\alpha_1)^2 = Var[x]$.
2. La varianza de una constante es cero $\mu_2 = Var[k] = 0$
3. $\mu_2 = Var[x + k] = Var[x]$
4. $\mu_2 = Var[k\ x] = k^2\ Var[x]$
5. Se ve afectada por el cambio de escala pero no por el cambio de origen.
6. Si x e y son dos variables aleatorias:

$\mu_2 = Var[x \pm y] = Var[x] + Var[y]$ si x e y son independientes.

$\mu_2 = Var[x \pm y] = Var[x] + Var[y] \pm 2\, Cov(x, y)$ si x e y no son independientes.

La definición de $Cov(x, y)$ se estudiará cuando veamos las variables aleatorias bidimensionales.

Coeficiente de variación:

Como hemos visto la varianza y la desviación típica son medidas de la dispersión de una variable entorno a la media, y sus unidades de medida (en el caso de la media y la desviación típica) son las mismas que las de la variable objeto de análisis. ¿Qué sucede si queremos comparar variables aleatorias con diferentes unidades de medida, o poblaciones y muestras también bastante diferentes? (situación bastante habitual en Estadística), los resultados no serian comparables, no tendría ningún sentido. El problema no se resuelve tomando las mismas escalas para ambas variables, sino utilizando una medida adimensional que no se vea afectada por las unidades de medida.

El coeficiente de variación elimina la dimensionalidad de las variables y tiene en cuenta la proporción existente entre la media y desviación típica, es por tanto una medida relativa de la dispersión. Cuanto menor sea este coeficiente, la distribución de la variable medida es más homogénea. Se define del siguiente modo:

$$CV = \frac{\sigma}{E[x]}$$

Sus propiedades son las siguientes:

1. Sólo se debe calcular para variables con todos los valores positivos.
2. No es invariante ante cambios de origen, pero si ante cambios de escala. Es decir, si tenemos dos variables aleatorias x e y donde: $y = ax + b$:
    a. $E[y] = E[ax + b] = aE[x] + b$
    b. $Var[y] = Var[ax + b] = a^2 Var[x] \Rightarrow \sigma_y = \sqrt{a^2 Var[x]} = a\sigma_x$
    c. $CV_y = \frac{\sigma_y}{E[y]} = \frac{\cancel{a}\sigma_x}{\cancel{a}E[x] + b}$

Tipificación de una variable aleatoria:

Tipificar una variable aleatoria x es transformarla mediante un cambio de origen $E[x]$ y un cambio de escala σ *;* es decir hay que restarle la media y dividirla por la desviación típica:

$$T = \frac{x - E[x]}{\sigma}$$

La nueva variable tipificada es adimensional, no tiene asociada ninguna unidad de medida y se puede comparar directamente con otras variables tipificadas. La variable tipificada tendrá la distribución de probabilidad que le corresponda, pero siempre con media nula y desviación típica la unidad.

2.4 Otras medidas de posición.

Las medidas más utilizadas para analizar la posición o dispersión de una variable son la media y la desviación típica, pero existen otras que suelen utilizarse con cierta frecuencia.

Otras medidas de posición:

- La moda: es el valor de la variable aleatoria que aparece con mayor frecuencia. Es decir, el valor de la variable aleatoria más probable que hace máxima la función de probabilidad o de densidad según tengamos variables aleatorias discretas o continuas.

- Los cuantiles: Dividen la distribución en dos partes, a la izquierda del valor están todos los valores de la variable aleatoria que son menores o iguales que x_i, y a la derecha quedan todos los valores que son mayores o iguales que x_i.

$$P(X \leq x_i) \geq i \quad y \quad P(X \geq x_i) \geq 1 - i \quad si\ X\ es\ discreta$$
$$P(X \leq x_i) = i \quad y \quad F(x_i) = i \quad si\ X\ es\ continua$$

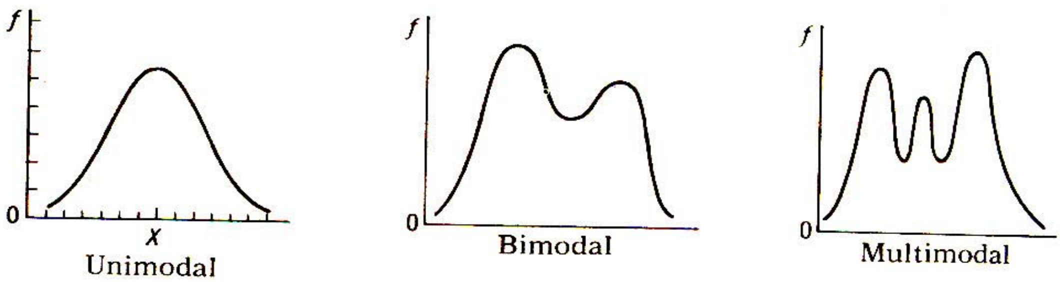
Dentro de los cuantiles tenemos:

- La mediana: La mediana, a diferencia de la media no busca el valor central, sino que busca determinar el valor de la variable aleatoria que divide la los valores en dos mitades iguales (sólo puede ser un único valor), considerando que todos los valores de la variable aleatoria están ordenados en sentido creciente. Su cálculo varía dependiendo del tipo de variable aleatoria ya sea discreta o continua.
- Los cuartiles: La mediana, separa en dos mitades el conjunto ordenado de observaciones. Podemos aún dividir cada mitad en dos, de tal manera que resulten cuatro partes iguales. Cada una de esas divisiones se conoce como Cuartil y lo simbolizaremos mediante la letra *Q* agregando un subíndice según a cual de los cuatro cuartiles nos estemos refiriendo. Se llama primer cuartil Q_1 alque contiene los datos más pequeños, este cuartil, corresponde al menor valor que supera – o que deja por debajo de él- a la cuarta parte de los datos.. El tercer cuartil es el menor valor que supera – o que deja por debajo de él- a las tres cuartas partes de las observaciones. Con esta terminología, la mediana es el segundo cuartil Q_2 y el cuarto cuartil Q_4 coincide con el valor que toma el último dato, después de ordenados.
- Los deciles dividen la distribución de la variable aleatoria en décimas y percentiles que dividen al distribución de la variable aleatoria en centésimas.

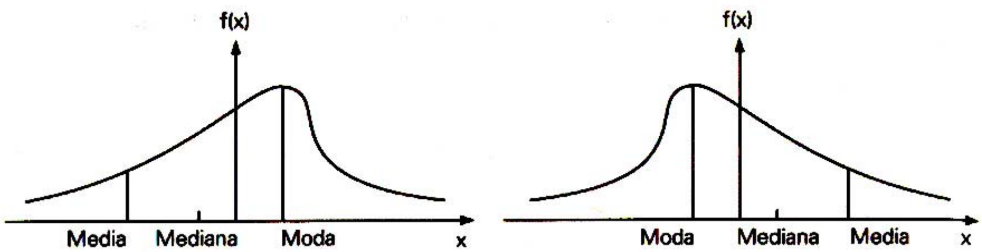
2.5 Medidas de forma.

En general, una distribución de frecuencias quedará bastante bien caracterizada cuando conocemos de ella algún índice de tendencia central y de variabilidad, pero quedará todavía mejor caracterizada si conocemos su grado de simetría o asimetría y su apuntamiento. Mediante las medidas de forma podemos obtener información del perfil de la función de probabilidad o densidad de la variable aleatoria. Las medidas que vamos a dar de forma son adimensionales e invariante a cambios de origen y escala.

Una primera característica de la forma de la distribución que a simple vista podemos ver en un histograma es el número de puntas (modas) que tiene la distribución. Si una distribución tiene una sola punta o moda se llama unimodal, si tiene dos puntos se llama bimodal. Es importante señalar que la determinación del número de puntas queda a juicio del investigador, según sea la importancia que de a las diferencias en la frecuencia de las categorías.



Una segunda característica de la forma de la distribución viene dada por su grado de simetría. La idea de simetría es bastante sencilla. Sabemos que la mediana divide al histograma en dos áreas de la misma superficie. Pues bien, decimos que una distribución de frecuencias es simétrica cuando una de las áreas es imagen de la otra. Si la distribución es asimétrica y unimodal, la mediana y la moda no coinciden.



.

Para determinar si una distribución es simétrica tememos el Coeficiente de Asimetría de Fisher, que se define como:

$\gamma_1 = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$, siendo μ_3 el momento de 3º orden respecto de la media y σ^3 la desviación típica al cubo.

a. Si $\gamma_1 < 0$ distribución asimétrica a la izquierda.

b. Si $\gamma_1 = 0$ distribución simétrica o casi simétrica respecto a la mediana.

c. Si $\gamma_1 > 0$ distribución asimétrica a la derecha.

Otro rasgo importante de la forma de una distribución se refiere al grado de apilamiento de los datos alrededor de un punto de la distribución. La curtosis hace referencia precisamente al grado de apuntamiento de una distribución.

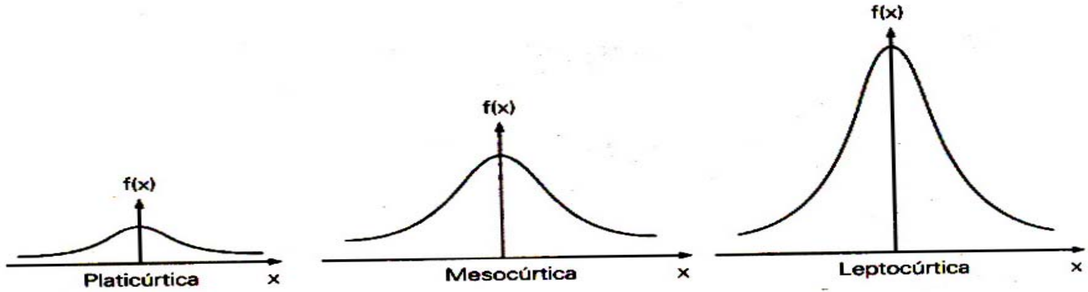
Para determinar este grado de apuntamiento de la distribución tememos el Coeficiente de Curtosis de Fisher, que se define como:

$\gamma_2 = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3$, siendo μ_4 el momento de 4º orden respecto de la media y σ^4 la desviación típica a la cuarta.

a. Si $\gamma_2 < 0$ Si la distribución de frecuencias es más uniforme, la forma de la curva es más achatada y se denomina platicurtica.

b. Si $\gamma_1 = 0$ En este caso la distribución tiene el mismo tipo de concentración que la distribución normal, se dice que es mesocúrtica.

c. Si $\gamma_1 > 0$ Para una distribución unimodal y simétrica, la forma leptocúrtica aparece cuando presenta un apuntamiento relativo alto, es decir, cuando se tiene una distribución de frecuencias altamente concentrada.



2.6 La función generatriz de momentos.

La función generatriz de momentos m se utiliza para identificar la función de distribución de una variable aleatoria y se define como:

- Distribución discreta: $$m(t) = E(e^{tx}) = \sum_{i=1}^{n} e^{tx_i} \, p(X = x_i)$$
- Distribución continua: $$m(t) = E(e^{tx}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f(x)dx$$

Si m es diferenciable en el punto 0, para calcular esperanzas:

$$\alpha_1 = E[x] \quad , \alpha_2 = E\left[x^2\right] \quad , \; para \quad r = 1,2,\cdots \; ....$$

$$\alpha_r = E(x^r) = \left| \frac{\partial^r m(t)}{\partial^r t} \right|_{t=0}$$

Si X y Y son independientes:

$$m_{x+y}(t) = m_x(t).m_y(t)$$

2.7 Momentos de una variable aleatoria bidimensional.

Igual que en el caso de la variable aleatoria unidimensional para las bidimensionales los momentos son operadores matemáticos que nos proporcionarán información sobre las propiedades de la distribución de la variable aleatoria bidimensional. Cuantificando los momentos, si existen, podemos tener diferentes medidas.

Los momentos se pueden calcular respecto al origen de la distribución o respeto a la media de la distribución.

Momentos respecto al origen:

Los momentos respecto al origen se definen como:

$\alpha_{rs} = E\left[x^r y^s\right] \quad , \; para \quad r = 0,1,2,\cdots \quad , s = 0,1,2,\cdots ,$ en el caso de variables aleatorias discretas y continuas tenemos:

$$\alpha_{rs} = E\left[x^r y^s\right] = \sum_j \sum_i x_j^r y_i^s P\left(x_j y_i\right) \quad , \quad \forall\, r, s = 0,1,2,\cdots \qquad \text{para} \qquad (x, y)$$

discreta.

$$\alpha_{rs} = E\left[x^r y^s\right] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^r y^s f\left(x\, y\right) dx\, dy \quad , \quad \forall\, r, s = 0,1,2,\cdots \qquad \text{para} \quad (x, y)$$

continua.

Los momentos respecto al origen de uso común son:

- Para $r = 0$ y $s = 1$ tenemos $\alpha_{01} = E\left[x^0 y^1\right] = E[y]$
- Para $r = 1$ y $s = 0$ tenemos $\alpha_{10} = E\left[x^1 y^0\right] = E[x]$
- Para $r = 0$ y $s = 2$ tenemos $\alpha_{02} = E\left[x^0 y^2\right] = E\left[y^2\right]$
- Para $r = 2$ $s = 0$ tenemos $\alpha_{20} = E\left[x^2 y^0\right] = E\left[x^2\right]$
- Para $r = 1$ $s = 1$ tenemos $\alpha_{11} = E\left[x^1 y^1\right] = E[x\, y]$, también conocido como valor esperado o esperanza matemática.
- El resto de los momentos tienen escaso interés.

Valor esperado o esperanza matemática α_{11}:

Esta definición también se puede aplicar a una función de la variable aleatoria:

$$\alpha_{11} = E[x\, y] = \sum_j \sum_i x_j y_i\, P\left(x_j y_i\right) \quad , \quad \text{para } (x, y) \text{ discreta.}$$

$$\alpha_{11} = E[x\, y] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x\, y\, f\left(x\, y\right) dx\, dy \quad , \quad \text{para } (x, y) \text{ continua.}$$

Sus propiedades son las siguientes:

1. Si x e y son dos variables aleatorias con esperanza conocida y a y b son dos constantes cualesquiera, entonces : $\alpha_{11} = E[ax + by] = aE[x] + bE[y]$.
2. Si x e y son dos variables aleatorias independientes con esperanza conocida, entonces : $\alpha_{11} = E[x\, y] = E[x]\, E[y]$.

Momentos respecto a la media:

Los momentos respecto a la media se definen como $\mu_{rs} = E\left[(x - E[x])^r \left(y - E(y)^s\right)\right]$, *para* $r = 1,2,\cdots, s = 0,1,2,\cdots$ en el caso de variables aleatorias discretas y continuas tenemos:

$$\mu_{rs} = E\left[(x - E[x])^r \left(y - E(y)^s\right)\right] = \sum \left(x_j - E[x]\right)^r \left(y_i E(y)\right)^s P\left(x_j y_i\right) \quad , \forall \quad r, s = 1,2,\cdots$$

para (x, y) discreta.

$$\mu_{rs} = E\left[(x - E[x])^r \left(y - E(y)^s\right)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - E[x]))^r \left(y - E(y)^s\right) f(x, y) dx\, dy, \ \forall \quad r, s = 1,2,\cdots$$

para (x, y) continua

Los momentos respecto a la media de uso común son:

- Para $r = 0$ y $s = 1$ tenemos $\mu_{01} = E\left[(x - E[x])^0 \left(y - E(y)^1\right)\right] = 0$
- Para $r = 1$ y $s = 0$ tenemos $\mu_{10} = E\left[(x - E[x])^1 \left(y - E(y)^0\right)\right] = 0$
- Para $r = 0$ y $s = 2$ tenemos $\mu_{02} = E\left[(x - E[x])^0 \left(y - E(y)^2\right)\right] = Var[y]$
- Para $r = 2$ $s = 0$ tenemos $\mu_{20} = E\left[(x - E[x])^2 \left(y - E(y)^0\right)\right] = Var[x]$
- Para $r = 1$ $s = 1$ tenemos, $\mu_{11} = E\left[(x - E[x])^1 \left(y - E(y)^1\right)\right] = Cov[x, y]$
- Como en el caso anterior, los restantes momentos en la mayoría de los casos tienen escasa utilidad.

Covarianza de una variable aleatoria μ_{11}:

Cuando analizábamos las variables unidimensionales considerábamos, entre otras medidas importantes, la media y la varianza. La covarianza es una manera de generalizar la varianza pero en el caso de variables aleatorias bidimensionales. Permite dar una medida de la fuerza de la relación lineal existente entre dos variables aleatorias (x, y). Se define como:

$$\mu_{11} = E\left[(x - E[x])^1 \left(y - E(y)^1\right)\right] = E[(x - \alpha_{10})(y - \alpha_{01})] = \alpha_{11} - \alpha_{10}\ \alpha_{01} = Cov[x, y],$$

también la podemos definir de una forma más sencilla $\mu_{11} = E[x, y] - E[x]\, E[y]$ y se denota como $Cov[x , y]$, σ_{xy} o μ_{xy}.

Interpretación geométrica de la covarianza:

1. Si $Cov[x, y] > 0$ hay dependencia directa (positiva), es decir, las dos variables crecen o decrecen a la vez.

2. Si $Cov[x, y] < 0$ hay dependencia inversa o negativa, es decir, cuando una variable crece la otra tiende a decrecer o viceversa.

3. Si $Cov[x,y]=0$ Una covarianza 0 se interpreta como la no existencia de una relación lineal entre las dos variables estudiadas, sino de cualquier otro tipo, de la misma forma también se puede interpretar que las variables aleatorias son independientes. Ante estas dos situaciones, es importante tener cuidado con la interpretación que podamos hacer sobre una covarianza nula.

Las propiedades de la covarianza son las siguientes:

1. La covarianza se puede expresar utilizando momentos respecto del origen: $\mu_{11}=\alpha_{11}-\alpha_{10}\ \alpha_{01}=Cov[x,y]$.
2. Si x e y son dos variables aleatorias independientes: $Cov[x,y]=0$
3. Si x e y son dos variables aleatorias, como se vio en el apartado de la varianza:

$Var[x \pm y]=Var[x]+Var[y]$ si x e y son independientes $Cov[x,y]=0$.

$Var[x \pm y]=Var[x]+Var[y] \pm 2\,Cov(x,y)$ si x e y no son independientes.

4. La $Cov[x,y]=Cov[y,x]$
5. La $Cov[x,x]=Var[x]$
6. La $Cov[x,a]=0$, para cualquier número real a.
7. Si x , y , z son variables aleatorias:

$$Cov[x+y,z]=Cov[z,x+y]=Cov(x,z)+\mathrm{cov}(y,z)$$

Coeficiente de correlación:

El coeficiente de correlación de Pearson es un índice estadístico que mide la fuerza de la relación lineal que existe entre dos variables aleatorias cuantitativas. A diferencia de la covarianza, el coeficiente de correlación de Pearson es independiente de la escala de medida de las variables aleatorias. Se define como:

$$\rho_{xy}=\frac{Cov[x,y]}{\sqrt{Var[x]Var[y]}}=\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x\ \sigma_y}$$

Las propiedades del coeficiente de correlación son las siguientes:

1. Si x e y son dos variables aleatorias independientes: $\rho_{xy}=0$

Por las propiedades de la Covarianza, si x e y son dos variables aleatorias independientes $Cov[x,y]=0$, y por lo tanto $\rho_{xy}=\dfrac{0}{\sqrt{Var[x]Var[y]}}=0$

2. Si x e y son dos variables aleatorias cuyas varianzas existen y son distintas de cero entonces: $-1 \leq \rho_{xy} \leq 1$. Para:

   a. Si $\rho_{xy} = 0$, no existe ninguna correlación podemos decir que las variables están incorrelacionadas. El índice indica, por tanto, una independencia total entre las dos variables, es decir, que la variación de una de ellas no influye en absoluto en el valor que pueda tomar la otra.

   b. Si $\rho_{xy} = 1$, existe una correlación positiva perfecta. El índice indica una dependencia total entre las dos variables denominada *relación directa*: cuando una de ellas aumenta, la otra también lo hace en idéntica proporción.

   c. Si $\rho_{xy} = -1$, existe una correlación negativa perfecta. El índice indica una dependencia total entre las dos variables llamada *relación inversa*: cuando una de ellas aumenta, la otra disminuye en idéntica proporción.

   d. Si $0 < \rho_{xy} < 1$, existe una correlación positiva.

   e. Si $-1 < \rho_{xy} < 0$, existe una correlación negativa.