Tema 6. Campo electromagnético y radiación.

Problemas resueltos.

Problema 1.- Consideremos un condensador de placas paralelas de superficie A, inmerso en agua de mar y sometido a un voltaje $V(t) = V_0 \cos(2\pi\nu t)$. Para una frecuencia de $\nu = 4 \times 10^8$ Hz el agua de mar tiene una permitividad $\epsilon = 81\epsilon_0$, una permebailidad de $\mu = \mu_0$ y una resistividad $\rho = 0,23$ $\Omega\cdot$ m. ¿Cuál es la razón entre la amplitud de la corriente de conducción y la amplitud de la corriente de desplazamiento a esa frecuencia?

Solución:

El flujo eléctrico entre las placas del condensador se obtiene directamente a partir del campo eléctrico y de la superficie de las placas. Dado que el campo eléctrico en el interior del condensador es

$$E = \frac{V}{d},$$

siendo d la separación entre las placas, la corriente de desplazamiento puede escribirse por tanto como

$$I_d(t) = \epsilon A \frac{dE}{dt} = \epsilon A \frac{d}{dt}\left[\frac{V_0 \cos(2\pi\nu t)}{d}\right] = \frac{\epsilon A V_0}{d}\left[-2\pi\nu \cos(2\pi\nu t)\right].$$

La amplitud de esta corriente es entonces

$$I_{d,0} = \frac{2\pi\nu\epsilon A V_0}{d}.$$

Por otra parte, la resistencia del agua que está entre las placas del condensador es

$$R = \frac{\rho d}{A}$$

y la intensidad que traviesa de una placa a la otra, debida al voltaje $V(t)$, es

$$I(t) = \frac{V}{R} = \frac{VA}{\rho d}.$$

En consecuencia, al razón entre las **amplitudes** de ambas corrientes es

$$\frac{I_{d,0}}{I_0} = \frac{V_0 A}{\rho d}\,\frac{d}{2\pi\nu\epsilon V_0} = \frac{1}{2\pi\nu\epsilon\rho} = 2,41.$$

Problema 2.- El campo eléctrico de una onda electromagnética en el vacío está dado por

$$\mathbf{E}(x,t) = 30\cos\left(2\pi \times 10^8\ t - \frac{2\pi}{3}x\right)\mathbf{j}$$

donde E se mide en V/m, t en segundos y x en metros. Determine:
– la frecuencia de la onda, f,
– la longitud de onda λ,
– la dirección de propagación de la onda,
– la dirección del campo magnético.

Solución:
El vector de onda y la frecuencia del campo son

$$k = \frac{2\pi}{3}\ \mathrm{m}^{-1}, \qquad\qquad \omega = 2\pi \times 10^8\ \mathrm{s}^{-1}$$

Por consiguiente,

- $f = \dfrac{\omega}{2\pi} = 10^8$ Hz. Nota: a la frecuencia se le suele denominar también ν.
- $\lambda = \dfrac{2\pi}{k} = 3$ m.
- La onda se propaga a lo largo de la dirección positiva del eje x.
- Utilizando la regla de la mano derecha, y dado que el campo $\mathbf{E}$ se encuentra en la dirección y, el campo magnético $\mathbf{B}$ se encuentra en la dirección z. La onda se propaga en la dirección positiva de las x.

Problema 3.- Se sabe que la intensidad de radiación de un dipolo eléctrico es proporcional a $\sin^2\theta/r^2$, donde θ es el ángulo formado por el momento dipolar eléctrico (situado a lo largo del eje Z, véase la figura) y el vector de posición $\vec{r}$. Sea I_1 la intensidad de la radiación a una distancia $r = 10$ m y a un ángulo θ de $90°$. Representar la variación de la intensidad (en función de I_1) con el ángulo θ cuando $r = 10$, 20 y 30 m.

Solución:
En la figura se ha dibujado, sobre el eje Z, el dipolo cuya oscilación produce la radiación (se trata de las varillas conductores rayadas, separadas por una pequeña abertura; véase el texto de Tipler y Mosca, 6ª edición, páginas 1042 y siguientes).

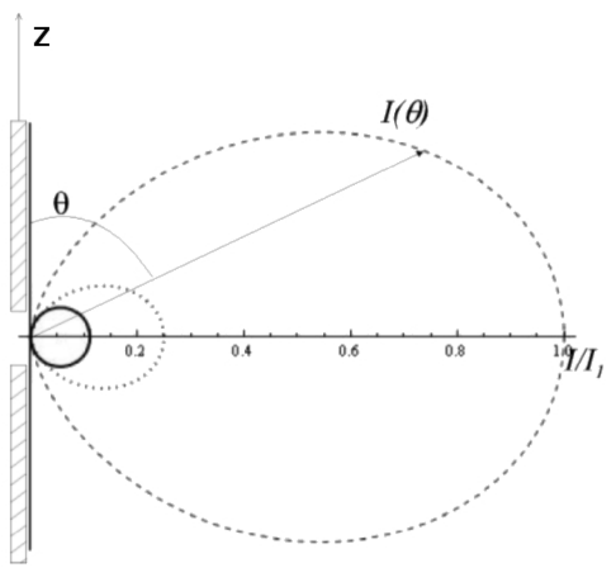

Figura 1: Intensidad de la radiación electromagnética producida por una antena

El resto de la figura muestra la representación polar de la radiación electromagnética $\sin^2\theta/r^2$ producida por una antena dipolar eléctrica situada a lo largo del eje Z en función del ángulo azimutal θ, para una distancia de 10 m (línea de trazo discontinuo), 20 m (línea de trazo con puntos) y 30 m (línea de trazo continuo). Nota: la intensidad está normalizada a I_1, la intensidad máxima a 10 m (que aparece a $\theta = 90°$).

Como se observa, en todos los casos la intensidad es máxima perpendicularmente a la antena (esto es, para $\theta = 90^o$) y mínima a lo largo de la misma (para $\theta = 0°$ y $\theta = 180°$).

Note también que, como el dipolo se encuentra orientado en la dirección z con su centro en el origen, la intensidad es nula a lo largo del eje Z y máxima en el plano XY (correspondiente a $\theta = 90°$).

Problema 4.- Una onda electromagnética plana se propaga a lo largo del eje x. En un instante determinado, la magnitud del campo eléctrico en un punto dado es igual a 0,6 V/m, y apunta hacia abajo. ¿Cuáles son la magnitud y la dirección del campo magnético en ese instante? Realizar un esquema mostrando el campo eléctrico, el campo magnético y la dirección de propagación.

Solución:

Si el campo eléctrico viene dado por

$$\mathbf{E}(x,t) = E_0 \sin(kx + \omega t)\ \mathbf{k}.$$

la expresión para el campo magnético es

$$\mathbf{B}(x,t) = -B_0 \sin(kx + \omega t)\ \mathbf{i}.$$

Nota: si no ve la razón para ello, lea de nuevo con cuidado el ejemplo 32-6 del libro de Tipler y Mosca.

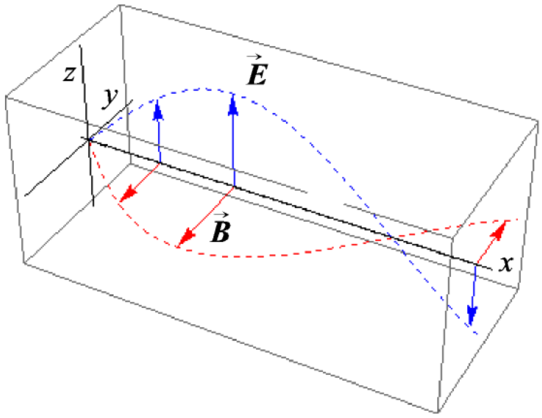

Figura 2: Gráfica de las intensidades de los campos eléctrico y magnético como función del tiempo en un punto dado

En la figura se muestran la magnitud y la dirección de los campos eléctrico y magnético en función del tiempo.

En el momento en que el campo eléctrico tiene un valor $E = 0,6$ V/m, la magnitud del campo magnético es

$$B = \frac{E}{c} = \frac{0,6 \text{ V/m}}{3 \times 10^8 \text{ m/s}} = 2 \times 10^{-9} \text{ T}.$$

Problema 5.- A una distancia de 8,5 km de un transmisor de radio que irradia de manera uniforme en todas las direcciones, la amplitud del campo eléctrico oscilante es $E_0 = 0,13$ V/m. ¿Cuál es la densidad de energía a esa misma distancia? ¿Cuál es la potencia total irradiada por el transmisor de radio?

Solución:

La intensidad I de la onda electromagnética es la potencia media por unidad de área. Si llamamos u_m a la densidad media de energía electromagnética, la intensidad viene dada por

$$I = u_m c = \frac{E_{\text{eficaz}} B_{\text{eficaz}}}{\mu_0},$$

expresión en la que se ha dejado claro que la densidad media de energía u_m viene determinada por los valores eficaces de los campos eléctrico y magnético.

Los valores eficaces se obtiene directamente de las amplitudes E_0 y B_0 de los campos como

$$E_{\text{eficaz}} = \frac{1}{\sqrt{2}} E_0 \qquad\qquad B_{\text{eficaz}} = \frac{1}{\sqrt{2}} B_0,$$

de manera que la intensidad a la distancia que indica el enunciado es (resultado en W/m^2)

$$I = u_m c = |\mathbf{S}|_m = \frac{1}{2\mu_0}\ E_0 B_0 = \frac{1}{2\mu_0 c}\ E_0^2 = \frac{(0,13 \text{ V/m})^2}{2 \times 4\pi \times 10^{-7} \text{ N/A}^2\ \times 3 \times 10^8 \text{ m/s}} = 2,2 \times 10^{-5} \text{ W/m}^2$$

($\mathbf{S} = \dfrac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{\mu_0}$ es el vector de Poynting).

Para obtener la potencia total, es necesario multiplicar la intensidad por el área sobre la que se distribuye la onda de radio. Es decir, sobre el área de una esfera de radio $R = 8,5 \times 10^3$ m. Por consiguiente,

$$P_{\text{total}} = I \times 4\pi R^2 \simeq 20 \text{ kW}.$$

Por otra parte, la densidad de energía media de la onda electromagnética es entonces

$$u_m = \frac{I}{c} = 7{,}47 \times 10^{-14} \text{ J/m}^2.$$

Problema 6.- El flujo medio de energía de la luz solar que llega perpendicularmente a la Tierra se conoce como *constante solar* y su valor es de aproximadamente 1300 W/m^2.[1]
(a) Si la luz solar es absorbida en su totalidad por la superficie de la Tierra, ¿cuál es la presión ejercida sobre la misma?
(b) Y si la Tierra reflejara de manera perfecta la radiación, ¿cuál sería la presión ejercida sobre la superficie en ese caso?
(c) ¿Son estas presiones comparables a la presión atmosférica?

Solución:
La presión de radiación sobre la superficie de la Tierra es

$$P_r = \frac{I}{c} = \frac{1,3 \times 10^3}{3 \times 10^8} = 4,3 \times 10^{-6} \text{ N/m}^2.$$

(a) Si la superficie absorbe completamente la luz solar, la presión ejercida sobre la superficie de la Tierra es igual a la presión de radiación, $P_r = 4,3 \times 10^{-6}$ N/m^2.

(b) Si la onda se refleja completamente, la presión ejercida es el doble de la presión de radiación, es decir $2I/c$, ya que en la *colisión* el intercambio de momento es el doble que en el caso anterior.[2] Por lo tanto, la presión en este caso es $8,6 \times 10^{-6}$ N/m^2.

(c) Como la presión atmosférica es $1,03 \times 10^5$ N/m^2, la presión de la luz solar sobre una Tierra perfectamente reflectora es $\dfrac{8,6 \times 10^{-6}}{1,03 \times 10^5} = 8,3 \times 10^{-11}$, que es aproximadamente 10 órdenes de magnitud menor.

Por consiguiente, en ambos casos el resultado es una cantidad despreciable frente a la presión atmosférica.

[1] La constante solar es la cantidad de energía recibida en la parte externa de la atmósfera terrestre debida a la radiación solar, por unidad de tiempo y unidad de superficie, medida en un plano perpendicular a los rayos solares.

[2] En caso de necesidad, consulte por ejemplo la sección *Energía y momento de una onda electromagnética* del libro de Tipler y Mosca.