# Tema 4. Análisis de Fourier de señales y sistemas de tiempo discreto.

2015-2016

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70
www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comer
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos

# Índice


1. Transformada de Fourier de señales de tiempo discreto
   - Transformada de Fourier
   - Ejemplos de transformadas de Fourier
   - Tabla de Transformadas de Fourier
   - Propiedades de la transformada de Fourier
   - Transformada de Fourier de señales periódicas
2. Respuesta en frecuencia de sistemas LTI
   - Autofunciones de un sistema LTI


CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70
www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comer
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos

# Índice


1. Transformada de Fourier de señales de tiempo discreto
   - Transformada de Fourier
   - Ejemplos de transformadas de Fourier
   - Tabla de Transformadas de Fourier
   - Propiedades de la transformada de Fourier
   - Transformada de Fourier de señales periódicas
2. Respuesta en frecuencia de sistemas LTI
   - Autofunciones de un sistema LTI


CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70
www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comer
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos

# Análisis de Fourier de señales no periódicas

## Señal aperiodica (no periódica)

Se puede considerar que una señal aperiodica es una señal periódica con periodo infinito $\Rightarrow$ el desarrollo en serie de Fourier de señales periódicas puede generalizarse al caso no periódico.

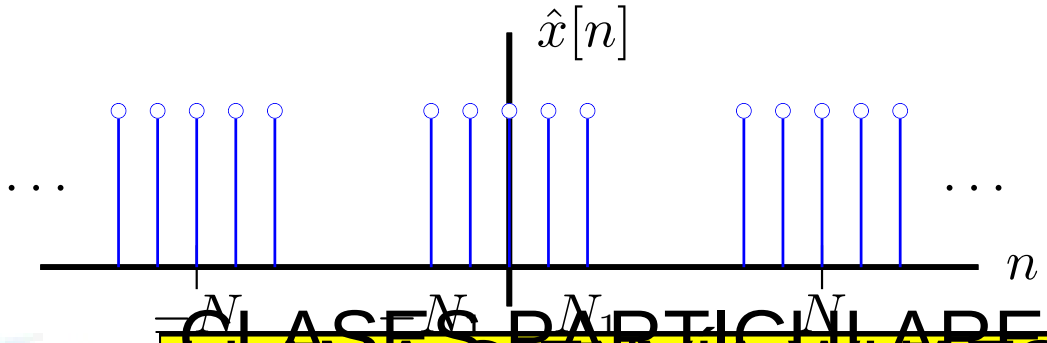
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70
www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comer
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos

# Análisis de Fourier de señales no periódicas

## Ejemplo del tren de pulsos rectangulares

$$Na_k = \begin{cases} \dfrac{\sin\left(k\Omega_0(N_1+\frac{1}{2})\right)}{\sin\left(k\frac{\Omega_0}{2}\right)}, & k \neq 0, \dot{N} \\ 2N_1+1, & k = 0, \dot{N} \end{cases}$$

$N$ es el periodo y $\Omega_0 = \frac{2\pi}{N}$ es la pulsación fundamental.




CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70
www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comer
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos

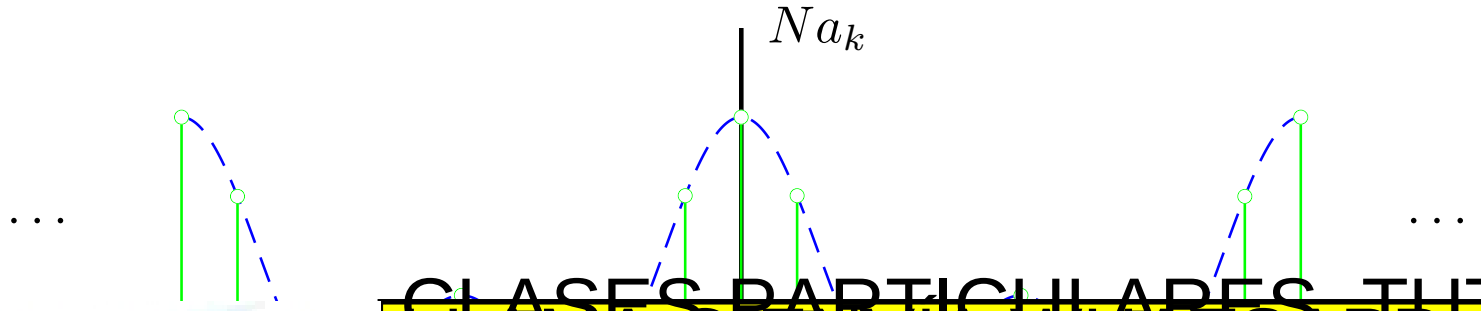
# Análisis de Fourier de señales no periódicas

Si representamos:

$$Na_k = \begin{cases} \dfrac{\sin\left(k\Omega_0(N_1+\frac{1}{2})\right)}{\sin\left(k\frac{\Omega_0}{2}\right)}, & k \neq 0, \dot{N} \\ 2N_1+1, & k = 0, \dot{N} \end{cases}$$

para distintos valores de $N$ veremos el efecto producido al separar cada vez más los pulsos.

$$N = 10, \;\; 2N_1 + 1 = 5$$




CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70
www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comer
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos

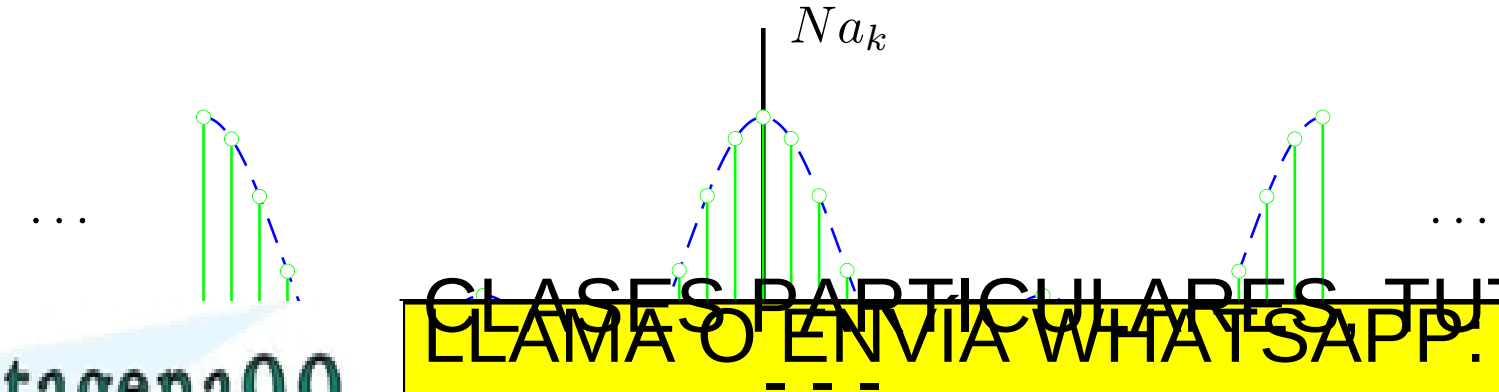
# Análisis de Fourier de señales no periódicas

Si representamos:

$$Na_k = \begin{cases} \dfrac{\sin\left(k\Omega_0(N_1+\frac{1}{2})\right)}{\sin\left(k\frac{\Omega_0}{2}\right)}, & k \neq 0, \dot{N} \\ 2N_1+1, & k = 0, \dot{N} \end{cases}$$

para distintos valores de $N$ veremos el efecto producido al separar cada vez más los pulsos.

$$N = 20, \quad 2N_1 + 1 = 5$$




CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70
www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comer
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos

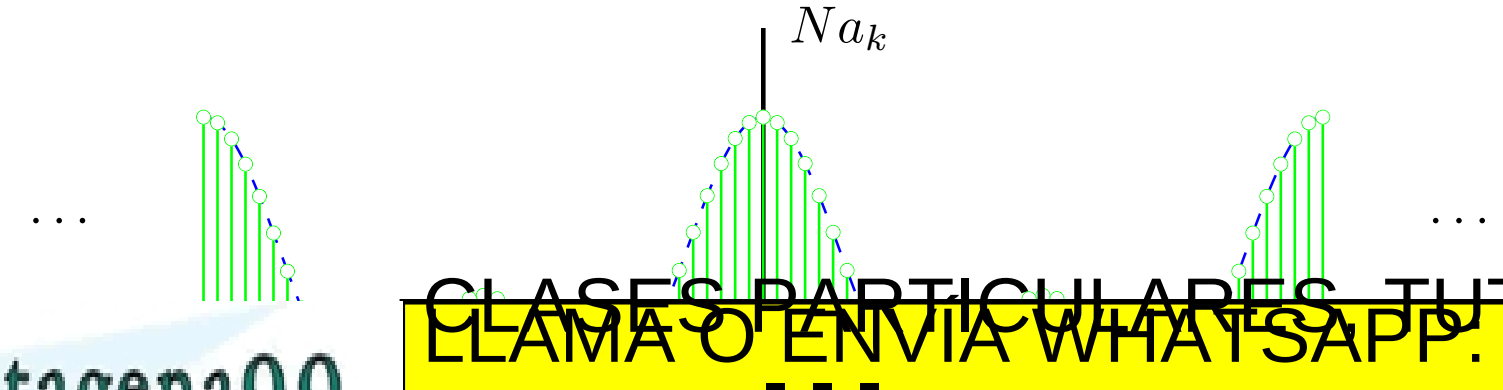
# Análisis de Fourier de señales no periódicas

Si representamos:

$$Na_k = \begin{cases} \dfrac{\sin\left(k\Omega_0(N_1+\frac{1}{2})\right)}{\sin\left(k\frac{\Omega_0}{2}\right)}, & k \neq 0, \dot{N} \\ 2N_1+1, & k = 0, \dot{N} \end{cases}$$

para distintos valores de $N$ veremos el efecto producido al separar cada vez más los pulsos.

$$N = 40, \;\; 2N_1 + 1 = 5$$




CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70
www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comer
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos

# Análisis de Fourier de señales no periódicas

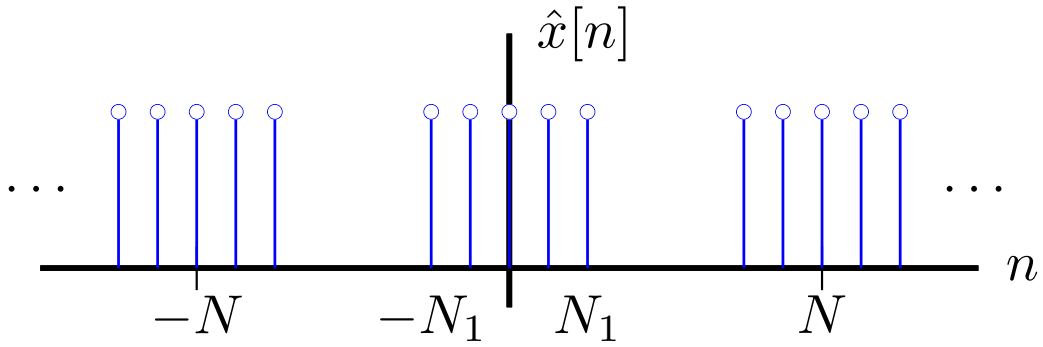
## Conclusiones

- La envolvente no depende del valor de $N$.
- El aumento de $N$ solo afecta al espaciado entre armónicos.
- En el límite $N \to \infty$ el espectro es la envolvente y la señal pierde la periodicidad.

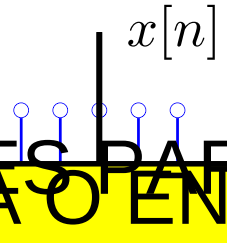
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70
www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comer
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos

# Transformada de Fourier

Consideremos una señal cualquiera periódica, $\hat{x}[n]$:




A partir de ella consideramos la versión aperiodica cuando $N = \infty$:




CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70
www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comer
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos

# Definición de la transformada de Fourier

## Señal periódica

La señal $\hat{x}[n]$ se puede desarrollar en serie de Fourier:

$$\hat{x}[n] = \sum_{k=<N>} a_k e^{jk\Omega_0 n}$$

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=<N>} \hat{x}[n] e^{-jk\Omega_0 n}$$

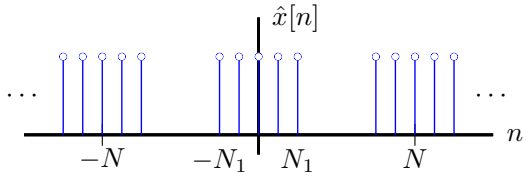
## Señal aperiódica

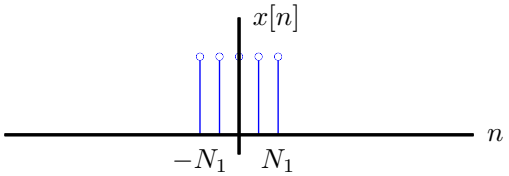
La señal $x[n]$ se puede expresar en términos de la transformada de Fourier:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega=-\infty}^{\infty} X(\Omega) e^{j\Omega n} d\Omega$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70
www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comer
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos

# Relación entre DSF y TF




## Consideración

Teniendo en cuenta que $x[n] = \hat{x}[n]$ para $|n| \leq N_1$ y que $x[n] = 0$ fuera de ese intervalo, tendremos:

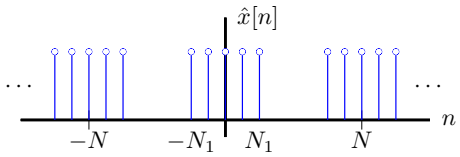
$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{N=-N_1}^{N_1} \hat{x}[n] e^{-jk\Omega_0 n} = \frac{1}{N} \sum_{N=-N_1}^{N_1} x[n] e^{-jk\Omega_0 n} =$$

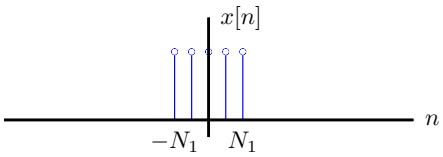
$$= \frac{1}{N} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-jk\Omega_0 n}$$

Teniendo en cuenta la transformada de $x[n]$:

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70
www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comer
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos

# Relación entre DSF y TF




## Consideración

Teniendo en cuenta que $x[n] = \hat{x}[n]$ para $|n| \leq N_1$ y que $x[n] = 0$ fuera de ese intervalo, tendremos:

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{N=-N_1}^{N_1} \hat{x}[n] e^{-jk\Omega_0 n} = \frac{1}{N} \sum_{N=-N_1}^{N_1} x[n] e^{-jk\Omega_0 n} =$$

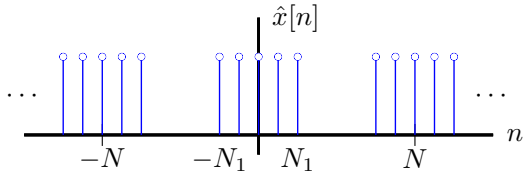
$$= \frac{1}{N} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-jk\Omega_0 n}$$

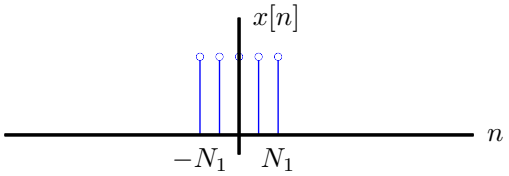
Teniendo en cuenta la transformada de $x[n]$:

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\Omega n}$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70
www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comer
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos

# Relación entre DSF y TF




## Consideración

Teniendo en cuenta que $x[n] = \hat{x}[n]$ para $|n| \leq N_1$ y que $x[n] = 0$ fuera de ese intervalo, tendremos:

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{N=-N_1}^{N_1} \hat{x}[n] e^{-jk\Omega_0 n} = \frac{1}{N} \sum_{N=-N_1}^{N_1} x[n] e^{-jk\Omega_0 n} =$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-jk\Omega_0 n}$$

los $a_k$ de la versión periódica se pueden expresar:

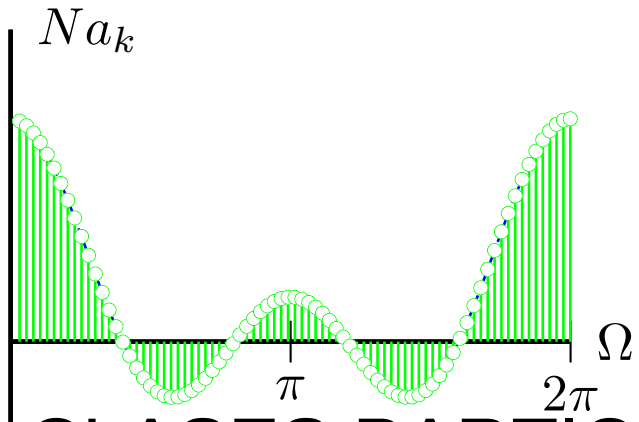
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70
www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comer
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos

# Relación entre DSF y TF

## Conclusión

- La TF de la aperiodica es la envolvente del DSF de la periódica.
- El DSF de la periódica es el muestreo de la TF de la aperiódica.

$$a_k = \frac{1}{N} X(k\Omega_0)$$




CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70
www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comer
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos

# Transformada de Fourier: definición

## Ecuación de análisis: Transformada de Fourier

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\Omega n}$$

## Ecuación de síntesis: Transformada inversa de Fourier

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(\Omega)e^{j\Omega n}d\Omega$$

## Condición de existencia

La TF existe siempre y cuando la señal sea de energía finita:

Cartagena99
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70
www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comer
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos

# Índice


1. Transformada de Fourier de señales de tiempo discreto
   - Transformada de Fourier
   - Ejemplos de transformadas de Fourier
   - Tabla de Transformadas de Fourier
   - Propiedades de la transformada de Fourier
   - Transformada de Fourier de señales periódicas
2. Respuesta en frecuencia de sistemas LTI
   - Autofunciones de un sistema LTI


CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70
www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comer
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos

# Ejemplos de transformadas de Fourier

**Ejemplo1**

Obtener la transformada de Fourier de la señal:

$$x[n] = a^n u[n] \ ; \ \ |a| < 1$$

**Resultado**

$$X(\Omega) = \frac{1}{1 - ae^{-j\Omega}}$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70
www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comer
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos

# Índice


1. Transformada de Fourier de señales de tiempo discreto
   - Transformada de Fourier
   - Ejemplos de transformadas de Fourier
   - Tabla de Transformadas de Fourier
   - Propiedades de la transformada de Fourier
   - Transformada de Fourier de señales periódicas
2. Respuesta en frecuencia de sistemas LTI
   - Autofunciones de un sistema LTI


CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70
www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comer
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos

# Tabla de Transformadas de Fourier

| Señal | Transformada |
|---|---|
| Señal Periódica, con periodo $N$ <br> $x[n] = \sum_{k=<N>} a_k e^{jk\Omega_0 n}$ | $X(\Omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \delta(\Omega - k\frac{2\pi}{N})$ |
| $x[n] = A$ | $X(\Omega) = 2\pi A \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - 2\pi k)$ |
| $x[n] = A\delta[n]$ | $X(\Omega) = A$ |
| $x[n] = A\delta[n - n_0]$ | $X(\Omega) = Ae^{-j\Omega n_0}$ |
| $x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(n - kN)$ | $X(\Omega) = \frac{2\pi}{N} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\Omega - \frac{2\pi k}{N}\right)$ |
| $x[n] = Ae^{j\Omega_0 n}$ | $X(\Omega) = 2\pi A \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - \Omega_0 - 2\pi k)$ |
| $x[n] = A\cos(\Omega_0 n)$ | $X(\Omega) = \pi A \sum_{k=-\infty}^{\infty} [\delta(\Omega - \Omega_0 - 2\pi k) + \delta(\Omega + \Omega_0 - 2\pi k)]$ |

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70
www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comer
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos

# Tabla de Transformadas de Fourier

| Señal | Transformada |
|---|---|
| Pulso rectangular de anchura $2N_1+1$ <br> $x[n]=\begin{cases} A, & \lvert n\rvert \le N_1 \\ 0, & \lvert n\rvert > N_1 \end{cases}$ | $X(\Omega)=\dfrac{A\sin\left(\Omega\left(N_1+\frac{1}{2}\right)\right)}{\sin\left(\frac{\Omega}{2}\right)}$ |
| $x[n]=\dfrac{\sin(\Omega_c n)}{\pi n}=\dfrac{\Omega_c}{\pi}\text{sinc}\left(\dfrac{\Omega_c n}{\pi}\right),\ 0<\Omega_c<\pi$ | $X(\Omega)=\begin{cases} 1, & \lvert\Omega\rvert<\Omega_c \\ 0, & \Omega_c<\lvert\Omega\rvert<\pi \end{cases}$ |
| $x[n]=u[n]$ | $X(\Omega)=\dfrac{1}{1-e^{-j\Omega}}+\sum_{k=-\infty}^{\infty}\pi\delta(\Omega-2\pi k)$ |
| $x[n]=a^n u[n],\ \lvert a\rvert<1$ | $X(\Omega)=\dfrac{1}{1-ae^{-j\Omega}}$ |
| $x[n]=(n+1)a^n u[n],\ \lvert a\rvert<1$ | $X(\Omega)=\dfrac{1}{(1-ae^{-j\Omega})^2}$ |
| $(n+r-1)!$ | [illegible] |

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70
www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comer
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos

# Índice


1. Transformada de Fourier de señales de tiempo discreto
   - Transformada de Fourier
   - Ejemplos de transformadas de Fourier
   - Tabla de Transformadas de Fourier
   - Propiedades de la transformada de Fourier
   - Transformada de Fourier de señales periódicas
2. Respuesta en frecuencia de sistemas LTI
   - Autofunciones de un sistema LTI


CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70
www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comer
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos

# Propiedades de la transformada de Fourier

| Propiedad | Señal | Transformada |
|---|---|---|
| | $x[n],\ y[n]$ | $X(\Omega),\ Y(\Omega)$ Periódicas con periodo $2\pi$ |
| Definición | $x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(\Omega)\, e^{j\Omega n} d\Omega$ | $X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, e^{-j\Omega n}$ |
| Señal periódica periodo $N$ | $x[n] = \sum_{k=<N>} a_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$ | $X(\Omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \delta\left(\Omega - k\frac{2\pi}{N}\right)$ |
| Señal periódica | $x[n] = x[n+N]$ | $a_k = \frac{1}{N} X\left(k\frac{2\pi}{N}\right) = \frac{1}{N} X(k\Omega_0)$ |
| Linealidad | $ax[n] + by[n]$ | $aX(\Omega) + bY(\Omega)$ |
| Desplazamiento en el tiempo | $x[n-n_0]$ | $X(\Omega)e^{-j\Omega n_0}$ |
| Modulación | $x[n]e^{j\Omega_0 n}$ | $X(\Omega - \Omega_0)$ |
| Conjugación | $x^*[n]$ | $X^*(-\Omega)$ |
| Inversión temporal | $x[-n]$ | $X(-\Omega)$ |
| Expansión temporal | $x_N[n] = \begin{cases} x[n/N] & n = \dot{N} \\ 0 & n \neq \dot{N} \end{cases}$ | $X(N\Omega)$ |
| Convolución | $x[n] * y[n]$ | $X(\Omega)Y(\Omega)$ |

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70
www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comer
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos

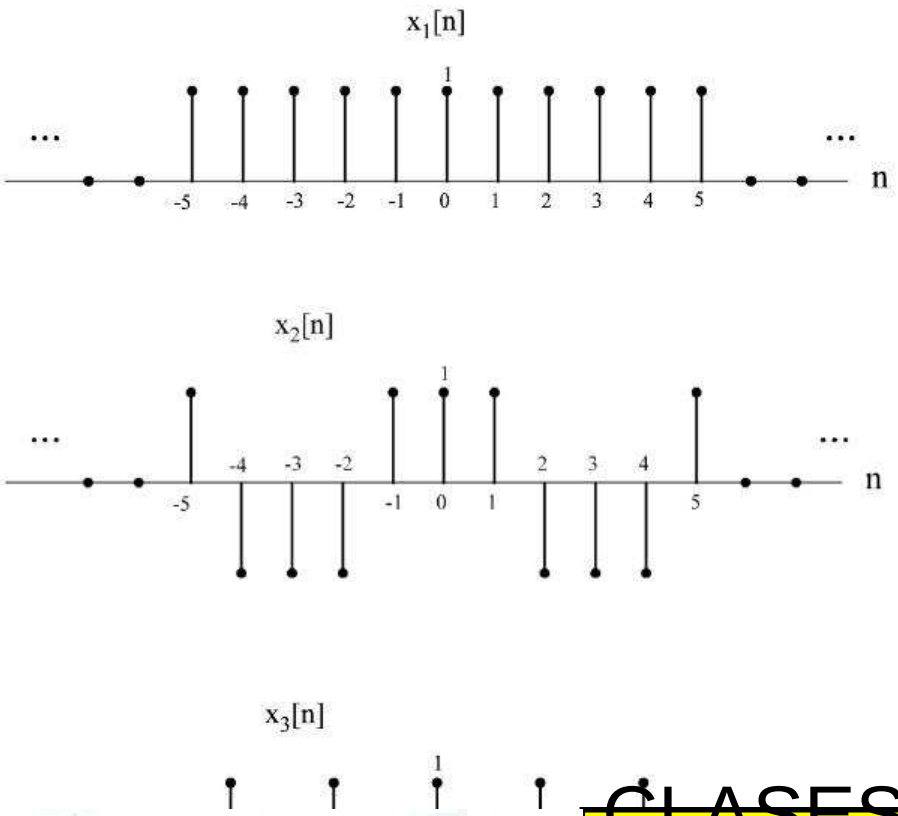
# Propiedades de la transformada de Fourier

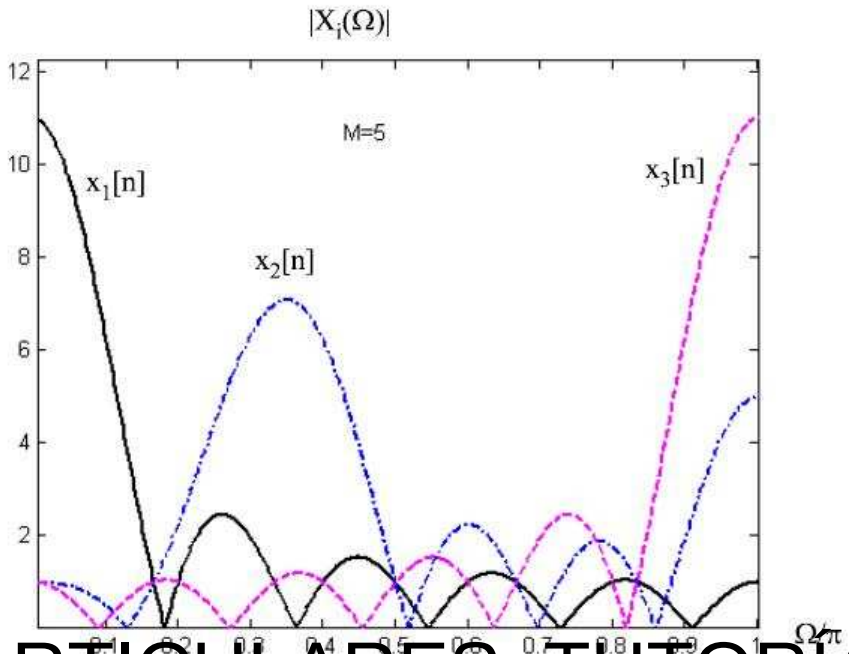
| Propiedad | Señal | Transformada |
|---|---|---|
| | $x[n]$, $y[n]$ | $X(\Omega)$, $Y(\Omega)$<br>Periódicas con periodo $2\pi$ |
| Acumulación | $\sum_{m=-\infty}^{n} x[m]$ | $\frac{X(\Omega)}{1-e^{-j\Omega}} + \pi X(0) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - 2\pi k)$ |
| Diferenciación en frecuencia | $nx[n]$ | $j\frac{dX(\Omega)}{d\Omega}$ |
| Simetría señales reales | $x[n]$ | $X(\Omega) = X^*(\Omega)$<br>$\mathrm{Re}\{X(\Omega)\} = \mathrm{Re}\{X(-\Omega)\}$<br>$\mathrm{Im}\{X(\Omega)\} = -\mathrm{Im}\{X(-\Omega)\}$<br>$\lvert X(\Omega)\rvert = \lvert X(-\Omega)\rvert$<br>$\varphi_{X(\Omega)}(\Omega) = -\varphi_{X(-\Omega)}(\Omega)$ |
| Simetría señales reales pares | $x[n]$ real y par | $X(\Omega)$ real y par |
| Simetría señales reales impares | $x[n]$ real y impar | $X(\Omega)$ imaginaria pura y impar |

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70
www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comer
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos

# Algunas propiedades interesantes

## Relación tiempo-frecuencia




CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70
www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comer
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos

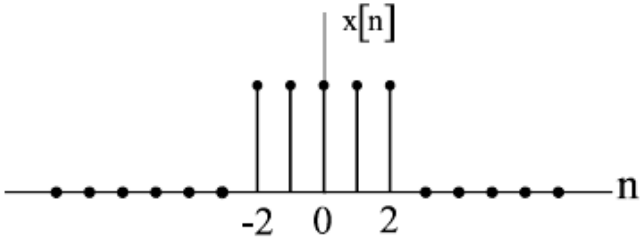
# Algunas propiedades interesantes

## Expansión en el tiempo

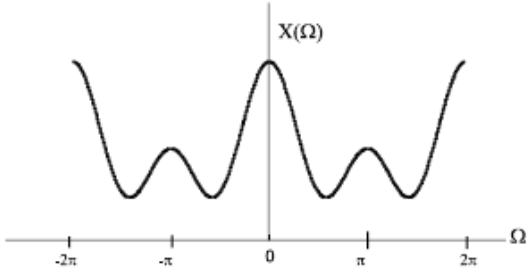
- Expansión en tiempo :

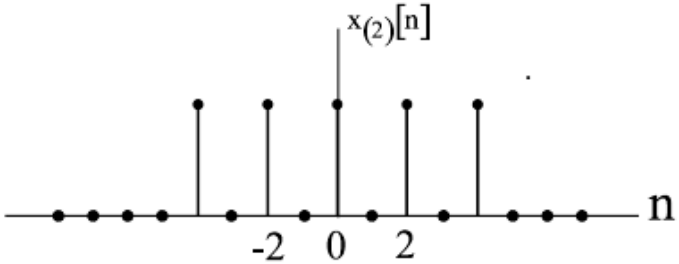
$$y[n] = x_{(k)}[n] = \begin{cases} x[n/k], & n \text{ multiplo de } k \\ 0, & \text{resto de valores} \end{cases} \xleftrightarrow{TF} Y(\Omega) = X(k\Omega)$$

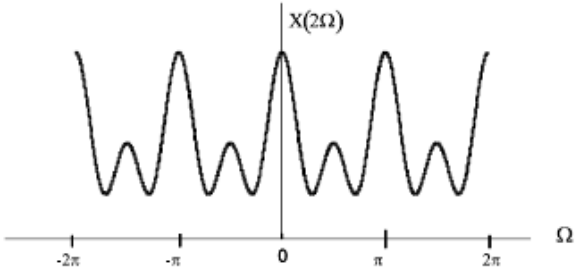
-Ejemplo :




$$X(\Omega) = \frac{sen\Omega\left(N_1 + \frac{1}{2}\right)}{sen\frac{\Omega}{2}}$$




X(3Ω)

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70
www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comer
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos

# Algunas propiedades interesantes

## Convolución

- Convolución :

$$p[n] = x[n] * y[n] \xleftrightarrow{TF} P(\Omega) = X(\Omega)\cdot Y(\Omega)$$

-Ejemplo : $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$ ; $y[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$

$$x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \xleftrightarrow{TF} X(\Omega) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega}}$$

$$y[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] \xleftrightarrow{TF} Y(\Omega) = \frac{1}{1-\frac{1}{3}e^{-j\Omega}}$$

$$p[n] = x[n] * y[n] \xleftrightarrow{TF} P(\Omega) = X(\Omega)\cdot Y(\Omega) = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3}e^{-j\Omega}\right)}$$

Cartagena99
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70
www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comer
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos

# Algunas propiedades interesantes

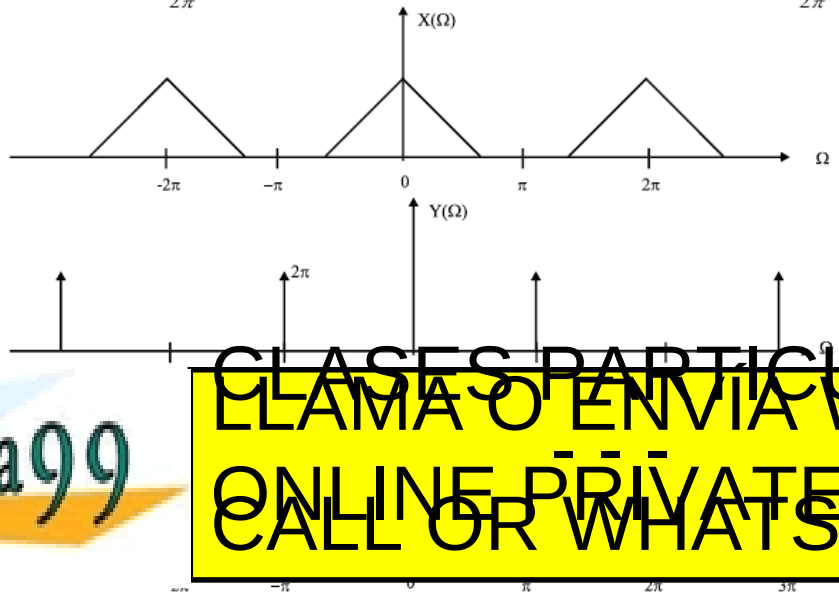
## Modulación

- Modulación : $p[n] = x[n]\cdot y[n] \xleftrightarrow{TF} P(\Omega) = \frac{1}{2\pi}\cdot X(\Omega)\otimes Y(\Omega) = \frac{1}{2\pi}\cdot \int_{2\pi} X(\varphi)\cdot Y(\Omega-\varphi)\,d\varphi$

-Ejemplo : Obtener la TF del producto de x[n] e y[n], (X(Ω): TF de x[n]).

$$y[n] = (-1)^n = e^{j\pi n} \xleftrightarrow{TF} Y(\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\cdot\delta(\Omega-\pi-2k\pi)$$

$$Z(\Omega) = \frac{1}{2\pi} X(\Omega)\otimes Y(\Omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(\varphi)\cdot 2\pi\delta(\Omega-\varphi-\pi)\,d\varphi = X(\Omega-\pi)\cdot\int_{2\pi}\delta(\Omega-\varphi-\pi)\,d\varphi = X(\Omega-\pi)$$




CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70
www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comer
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos

# Algunas propiedades interesantes

## Teorema de Parseval

Son aquellas en las cuales la energía es finita. Cumplen por tanto:

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 < \infty$$

En ese caso también se puede calcular la energía a partir de la transformada de Fourier:

$$E_x = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} |X(\Omega)|^2 d\Omega$$

Por esta razón, el módulo del espectro está relacionado con la distribución de la energía en la frecuencia.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70
www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comer
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos

# Índice


1. Transformada de Fourier de señales de tiempo discreto
   - Transformada de Fourier
   - Ejemplos de transformadas de Fourier
   - Tabla de Transformadas de Fourier
   - Propiedades de la transformada de Fourier
   - Transformada de Fourier de señales periódicas
2. Respuesta en frecuencia de sistemas LTI
   - Autofunciones de un sistema LTI


CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70
www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comer
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos

# Transformada de Fourier de señales periódicas

## Hasta ahora

- Señales periódicas $\rightarrow$ DSF
- Señales aperiódicas $\rightarrow$ TF

## Se puede calcular la TF de una señal periódica??

Sea la siguiente señal:

$$f[n] = e^{j\Omega_0 n} \leftrightarrow F(\Omega) = 2\pi \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - \Omega_0 - 2\pi r)$$

Si ahora consideramos la señal:

$$x[n] = \sum_{k=<N>} a_k e^{jk\Omega_0 n}$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70
www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comer
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos

# Transformada de Fourier de señales periódicas

**Proposición:**

La transformada de Fourier de una señal periódica consiste en un tren de impulsos (deltas) equiespaciados en frecuencia y con periodo $2\pi$.

## Expresión de la transformada

$$x[n] = \sum_{k=<N>} a_k e^{jk\Omega_0 n} \leftrightarrow X(\Omega) = \sum_{k=<N>} \sum_{r=-\infty}^{\infty} 2\pi a_k \delta(\Omega - k\Omega_0 - 2\pi r)$$

Cartagena99
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70
www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comer
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos

# Transformada de Fourier de señales periódicas. Ejemplo

Obtener la transformada de Fourier la señal:

$$x[n] = \sin\left(\frac{2\pi}{N}n\right) = \sin\left(\Omega_0 n\right)$$

Los coeficientes valen:

$$a_0 = 0,\ a_1 = \frac{1}{2j},\ a_2 = 0,\ \ldots,\ a_{N-1} = a_{-1} = \frac{-1}{2j}$$

La Transformada de Fourier:

$$X(\Omega) = \frac{\pi}{j}\left[\sum^{\infty} \delta(\Omega - \Omega_0 - 2\pi r) - \delta(\Omega - (N-1)\Omega_0 - 2\pi r)\right]$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70
www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comer
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos

# Transformada de Fourier de señales periódicas. Ejemplo

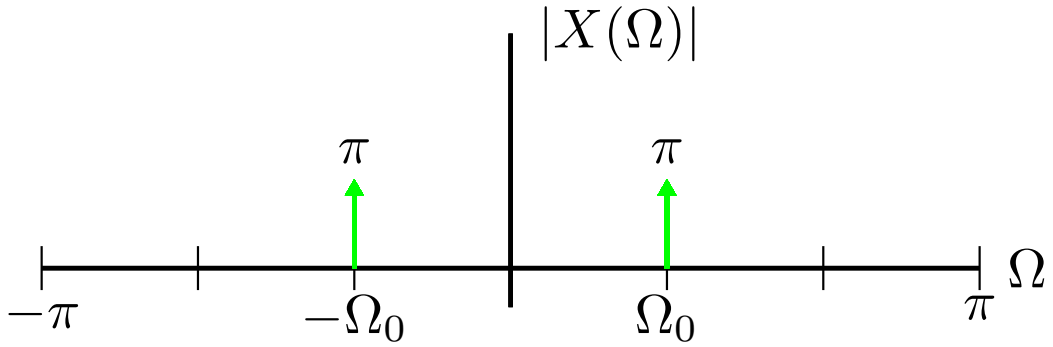



Figura: Módulo

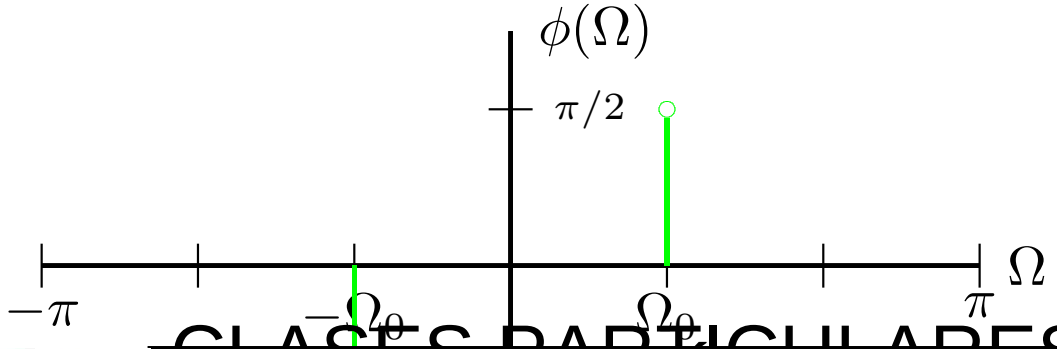



Figura: Fase

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70
www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comer
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos

# Índice


1. Transformada de Fourier de señales de tiempo discreto
   - Transformada de Fourier
   - Ejemplos de transformadas de Fourier
   - Tabla de Transformadas de Fourier
   - Propiedades de la transformada de Fourier
   - Transformada de Fourier de señales periódicas
2. Respuesta en frecuencia de sistemas LTI
   - Autofunciones de un sistema LTI


CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70
www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comer
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos

# Respuesta en frecuencia de sistemas LTI

## Dominio del tiempo

Sea un sistema LTI, la salida $y[n]$ es:

$$x[n] \longrightarrow \boxed{\begin{array}{c}\text{Sistema LTI}\\ h[n]\end{array}} \longrightarrow y[n] = x[n] * h[n]$$

## Dominio de la frecuencia

Si obtenemos las transformadas de Fourier de $x[n]$, $y[n]$, $h[n]$ y aplicamos la propiedad de la convolución de la transformada de Fourier:

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70
www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comer
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos

# Respuesta en frecuencia

**Despejando $H(\Omega)$:**

$$Y(\Omega) = H(\Omega) \cdot X(\Omega), \qquad H(\Omega) = \frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)} = |H(\Omega)| \cdot e^{j\phi_H(\Omega)}$$

- $H(\Omega)$ es la **respuesta en frecuencia del sistema**.
- $|H(\Omega)|$ es el módulo de la respuesta en frecuencia o respuesta en amplitud.
- La fase, $\phi_H(\Omega)$, se conoce como respuesta en fase.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70
www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comer
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos

# Respuesta en frecuencia

**Despejando $H(\Omega)$:**

$$Y(\Omega) = H(\Omega) \cdot X(\Omega), \qquad H(\Omega) = \frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)} = |H(\Omega)| \cdot e^{j\phi_H(\Omega)}$$

- $H(\Omega)$ es la **respuesta en frecuencia del sistema**.
- $|H(\Omega)|$ es el módulo de la respuesta en frecuencia o respuesta en amplitud.
- La fase, $\phi_H(\Omega)$, se conoce como respuesta en fase.

**Efecto de la respuesta en amplitud:**

Tiene un efecto de **filtrado**:

- si $|H(\Omega)|$ es nulo o casi nulo en unas determinadas frecuencias, esas se atenuarán en la salida

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70
www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comer
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos

# Respuesta en frecuencia

**Ejemplo de la respuesta en fase:**

Supongamos que $|H(\Omega)| = 1$ y la fase es lineal ($\phi_H(\Omega) = -\Omega n_0$):

$$H(\Omega) = |H(\Omega)| \cdot e^{j\phi_H(\Omega)} = e^{-j\Omega n_0} \Rightarrow Y(\Omega) = e^{-j\Omega n_0} X(\Omega)$$

En el dominio del tiempo:

$$y[n] = x[n - n_0]$$

Conclusión: en el dominio del tiempo se produce un desplazamiento sin distorsión de la señal

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70
www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comer
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos

# Sistemas definidos por ecuaciones en diferencias

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \, y\,[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k \, x\,[n-k]$$

Consideramos sistemas LTI causales (reposo inicial):

## Sistemas IIR (Infinite Impulse Response)

Se evalúan de forma recursiva:

$$y\,[n] = -\sum_{k=1}^{N} a_k \, y\,[n-k] + \sum_{k=0}^{M} b_k \, x\,[n-k]$$

donde se ha considerado $a_0 = 1$. Generalmente se implementan de un modo muy eficiente.
La respuesta en frecuencia es:

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70
www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comer
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos

# Sistemas definidos por ecuaciones en diferencias

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \, y\,[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k \, x\,[n-k]$$

Consideramos sistemas LTI causales (reposo inicial):

## Sistemas FIR (Finite Impulse Response)

son un caso particular con todos los $a_k = 0$ (excepto el $a_0 = 1$), se pierde la recursión,

$$y\,[n] = \sum_{k=0}^{M} b_k \, x\,[n-k]$$

Son interesantes porque pueden tener fase lineal. La respuesta en frecuencia es:

$$\sum_{k=0}^{M} b_k \, e^{-j\omega k} \, X(\omega) = \sum_{k=0}^{M} b_k \, e^{-j\omega k} \, X(\omega)$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70
www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comer
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos

# Índice


1. Transformada de Fourier de señales de tiempo discreto
   - Transformada de Fourier
   - Ejemplos de transformadas de Fourier
   - Tabla de Transformadas de Fourier
   - Propiedades de la transformada de Fourier
   - Transformada de Fourier de señales periódicas
2. Respuesta en frecuencia de sistemas LTI
   - Autofunciones de un sistema LTI


CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70
www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comer
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos

# Respuesta de un sistema LTI a una exponencial compleja

## Autofunción

$$x[n] = e^{j\Omega_0 n} \longrightarrow \boxed{\begin{array}{c}\text{Sistema LTI}\\ h[n]\end{array}} \longrightarrow y[n] = x[n] * h[n]$$

Las exponenciales complejas son autofunciones de los sistemas LTI:

$$x[n] = e^{j\Omega_0 n} \rightarrow y[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m] e^{j\Omega_0 (n-m)} = H(\Omega_0) \cdot e^{j\Omega_0 n}$$

$$H(\Omega_0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] e^{-j\Omega_0 n} \rightarrow \text{Autovalor (Respuesta en frecuencia)}$$

$$e^{j\Omega_0 n} \rightarrow \text{Autofunción}$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70
www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comer
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos

# Respuesta de un sistema LTI a una señal sinusoidal

Problema:

Si se introduce a la entrada una señal sinusoidal:

$$x[n] = A \cdot \cos(\Omega_0 n + \theta)$$

Se puede poner en forma exponencial mediante la relación de Euler:

$$x[n] = A \cdot \frac{1}{2}\left(e^{j(\Omega_0 n+\theta)} + e^{-j(\Omega_0 n+\theta)}\right) = \frac{A}{2} \cdot e^{j\theta} \cdot e^{j\Omega_0 n} + \frac{A}{2} \cdot e^{-j\theta} \cdot e^{-j\Omega_0 n}$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70
www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comer
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos

# Respuesta de un sistema LTI a una señal sinusoidal

Aplicando la propiedad de linealidad y de autofunción:

$$y[n] = H(\Omega_0) \cdot \frac{A}{2} \cdot e^{j\theta} \cdot e^{j\Omega_0 n} + H(-\Omega_0) \cdot \frac{A}{2} \cdot e^{-j\theta} \cdot e^{-j\Omega_0 n}$$

$$y[n] = |H(\Omega_0)| \cdot e^{j\phi(\Omega_0)} \cdot \frac{A}{2} \cdot e^{j\theta} \cdot e^{j\Omega_0 n} + |H(-\Omega_0)| \cdot e^{j\phi(-\Omega_0)} \cdot \frac{A}{2} \cdot e^{-j\theta} \cdot e^{-j\Omega_0 n}$$

## Consideración

Si $h[n]$ es real se cumplen las siguientes propiedades de la transformada:

$$H^*(\Omega_0) = H(-\Omega_0) \Rightarrow \begin{cases} |H(\Omega_0)| = |H(-\Omega_0)| \\ \phi(\Omega_0) = -\phi(-\Omega_0) \end{cases}$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70
www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comer
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos

# Respuesta de un sistema LTI a una señal sinusoidal

Usando esta propiedad:

$$y[n] = |H(\Omega_0)| \cdot e^{j\phi(\Omega_0)} \cdot \frac{A}{2} \cdot e^{j\theta} \cdot e^{j\Omega_0 n} + |H(\Omega_0)| \cdot e^{-j\phi(\Omega_0)} \cdot \frac{A}{2} \cdot e^{-j\theta} \cdot e^{-j\Omega_0 n}$$

Finalmente:

$$y[n] = |H(\Omega_0)| \frac{A}{2} \left( e^{j(\Omega_0 n + \theta + \phi(\Omega_0))} + e^{-j(\Omega_0 n + \theta + \phi(\Omega_0))} \right)$$

$$y[n] = A \cdot |H(\Omega_0)| \cdot \cos(\Omega_0 n + \theta + \phi(\Omega_0))$$

**Conclusión**

- El coseno es atenuado o amplificado por el módulo de la respuesta en frecuencia y se desfasa con la fase de la respuesta en frecuencia.
- En ambos casos la respuesta en frecuencia se evalúa en la frecuencia del coseno.

Cartagena99
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SC
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70
www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comer
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos