TEMA 5

TÉCNICAS DE PROTECCIÓN FRENTE A ERRORES (CODIFICACIÓN DE CANAL)

Índice

- Recordatorio
  - Capacidad de canal
- Introducción y definiciones
- Códigos bloque lineales
- Códigos convolucionales

Capacidad de canal - Canales digitales

- Modelo de canal discreto sin memoria (DMC)
  - Entrada y salida: variables aleatorias X e Y
  - Probabilidades de transición $p_{Y|X}(y_j|x_i)$
- Capacidad de canal

$$C = \max_{p_X(x_i)} I(X, Y) \text{ bits/uso}$$

  - Ejemplo: Canal binario simétrico (BER=ε)

$$C = 1 - H_b(\varepsilon) \text{ bits/uso}$$

Entropía binaria $H_b(p)$

Entropía de una v.a. binaria con $p_X(x_0) = p$ y $p_X(x_1) = 1 - p$

$$H_b(p) = -p \cdot \log_2(p) - (1-p)\log_2(1-p)$$

Capacidad de canal - Canal gausiano

- Capacidad sobre canal gausiano en las siguientes condiciones:
  - Potencia transmitida: P watt.
  - Potencia de ruido: P_N watt.
  - Ancho de banda: B Hz

$$C = \frac{1}{n} \log M = \frac{1}{2} \log \left(1 + \frac{P}{P_N} \right)$$

$$P_N = \int_{-B}^{B} \frac{N_o}{2} \, df = N_o B$$

$$C = \frac{1}{2} \cdot \log \left(1 + \frac{P}{N_o B} \right) \text{ bits/uso}$$

$$C = B \cdot \log (1 + SNR) \text{ bits/s}$$

Cotas

- Capacidad en función de B

$$\lim_{B\to\infty} C = \frac{P}{N_o}\log_2(e) = 1{,}44 \cdot \frac{P}{N_o}$$

- Sistema de comunicaciones práctico

$$R_b < B \cdot \log\left(1 + SNR\right) \text{ bits/s}$$

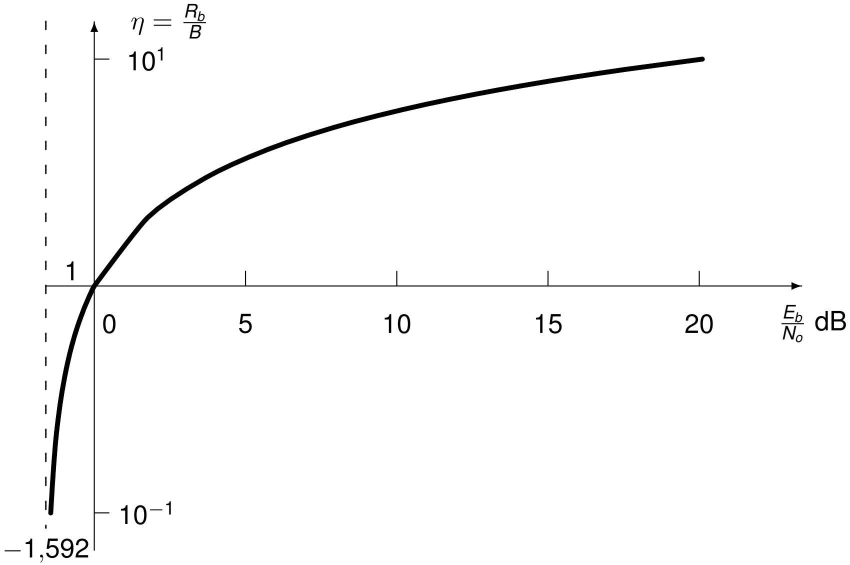
- Tasa binaria (eficiencia) espectral: $\eta = \frac{R_b}{B}$ bits/s/Hz
- Energía media por bit - $E_b = \frac{P}{R_b}$
- Relación $E_b/N_0 = \frac{SNR}{\eta}$

$$\eta < \log\left(1 + SNR\right), \qquad \eta < \log\left(1 + \eta \cdot \frac{E_b}{N_o}\right)$$

$$SNR > 2^\eta - 1, \qquad \frac{E_b}{N_o} > \frac{2^\eta - 1}{\eta}$$

Cuando $\eta \to 0$ $\qquad \frac{E_b}{N_o} = \ln 2 = 0{,}693 \approx -1{,}6 \text{ dB}$

Tasa binaria (eficiencia) espectral frente a E_b/N_0



Relación señal a ruido normalizada

- Cota inferior para *SNR*

$$SNR > 2^{\eta} - 1$$

- Definición de *SNR* normalizada

$$SNR_{norm} = \frac{SNR}{2^{\eta} - 1}$$

- Cota inferior sobre SNR_{norm}

$$SNR_{norm} > 1 \text{ (0 dB)}$$

Introducción

- Los sistemas de comunicaciones comenten errores
- Objetivo de un sistema de comunicaciones
  - BER $<$ Calidad
- Alternativas para reducción de los errores
  - Aumentar la energía de la señal
    - Limitaciones: Económicas, físicas, legales, interferencias, ...
  - Teorema de codificación de canales con ruido (Shannon)
    - Introducción de bits de redundancia
    - Tasa de codificación: R (bits de datos/bits transmitidos)
    - Capacidad del canal: C (bits/uso)
    - Posibilidad de reducción de la BER de forma arbitraria

$$R < C$$

Tipos de códigos

- Mecanismo de introducción de la redundancia
  - Códigos bloque
    - Bloques de k bits se codifican de forma independiente
    - Diccionario del código: k bits sin codificar / n bits codificados
    - Concepto clave: distancia entre palabras código
    - Ejemplo: código de repetición de orden $n-1$

Bits sin codificar ($k=1$)	Bits codificados (n)
1	11...1
0	00...0

  - Códigos convolucionales
    - Codificación continua mediante filtrado digital
- Capacidad del código
  - Códigos de detección de errores
  - Códigos de corrección de errores
- Estadístico para la decisión
  - Salida dura: decodificación a partir de los bits decididos $\hat{C}[\ell]$
  - Salida blanda: decodificación a partir de la salida del demodulador $q[n]$
    - Mejores prestaciones pero mayor complejidad
  - Borrado de bits: se “marcan” los bits/símbolos dudosos

Salida dura / salida blanda

- Ejemplo: código repetición orden 2, modulación 2-PAM
  - Asignación binaria sobre la constelación: $0 \equiv -1$ / $1 \equiv +1$
  - Observación blanda: $\boldsymbol{q} = \{-0{,}01,\ +1{,}2,\ -0{,}05\}$
  - Observación dura: $\hat{\boldsymbol{c}} = \{0,\ 1,\ 0\}$
- Decodificación
  - Decodificación dura: por mayoría $\hat{B} = 0$
  - Decodificación blanda: comparar la observación $\boldsymbol{q}$ con $\boldsymbol{q}_0\{-1,-1,-1\}$ y con $\boldsymbol{q}_1\{+1,+1,+1\}$

$$d(\boldsymbol{q},\boldsymbol{q}_0) = \sqrt{(-0{,}01-(-1))^2 + (+1{,}2-(-1))^2 + (-0{,}05-(-1))^2} = 2{,}59$$

$$d(\boldsymbol{q},\boldsymbol{q}_1) = \sqrt{(-0{,}01-(+1))^2 + (+1{,}2-(+1))^2 + (-0{,}05-(+1))^2} = 1{,}47$$

- Probabilidad de error para una BER=ε sobre la 2-PAM
  - Salida dura

$$P_e^{Dura} = 3 \cdot \varepsilon^2(1-\varepsilon) + \varepsilon^3, \qquad \varepsilon = Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0/2}}\right) = Q\left(\sqrt{2\frac{E_s}{N_0}}\right)$$

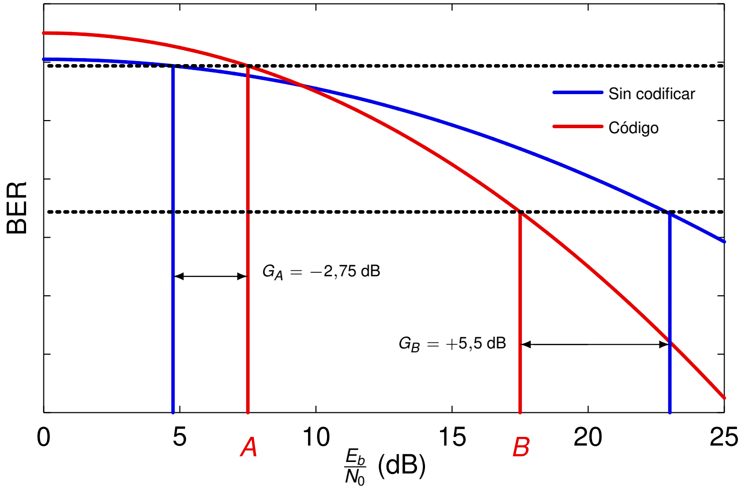
  - Salida blanda

$$P_e^{Blanda} = Q\left(\frac{d(\boldsymbol{q}_0,\boldsymbol{q}_1)}{2\sqrt{N_0/2}}\right) = Q\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{N_0/2}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{6E_s}{N_0}}\right)$$

Ganancia de codificación

- Definición: diferencia en decibelios entre las relaciones E_b/N_0 necesarias para alcanzar una determinada BER sin codificar y utilizando la codificación
  - E_b: Energía media por bit
- Permite comparar las prestaciones de distintos códigos
- Depende de la BER (o de E_b/N_0)
- Puede ser positiva a partir de un cierto valor de E_b/N_0

Ganancia de codificación



$A = 7{,}5$ dB $\quad$ $B = 17{,}5$ dB

Códigos bloque - Definiciones

- Codificación independiente de bloques de k bits
  - Conversión en bloques de n bits $\rightarrow$ Tasa $R = k/n$
- Definiciones para los bloques de bits
  - Información:

$$\boldsymbol{b}_i = [b_i[0], b_i[1], \cdots, b_i[k-1]], \;\; i = 0, 1, \cdots, 2^k - 1$$

  - Codificados:

$$\boldsymbol{c}_i = [c_i[0], c_i[1], \cdots, c_i[n-1]], \;\; i = 0, 1, \cdots, 2^k - 1$$

  - Diccionario del código: mensaje (palabra sin codificar) $\rightarrow$ palabra código

$$\boldsymbol{b}_i \rightarrow \boldsymbol{c}_i$$

- Peso de una palabra código $w(\boldsymbol{c}_i)$
  - Número de unos de la palabra
- Distancia de Hamming entre dos palabras código $d_H(\boldsymbol{c}_i, \boldsymbol{c}_j)$
  - Número de bits diferentes entre ambas palabras
- Distancia mínima del código: d_{min}
  - Mínima distancia de Hamming entre dos palabras código distintas

Estimador óptimo - Salida dura

- Observación condicionada a la transmisión de $\boldsymbol{c}_i$

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{c}_i + \boldsymbol{e}, \ \boldsymbol{e} = [e[0], e[1], \cdots, e[n-1]]$$

- Modelo probabilístico del patrón de error (BER = ε)

$$p_{E[j]}(e[j]) = \varepsilon^{e[j]} \cdot (1-\varepsilon)^{1-e[j]} = \begin{cases} \varepsilon, & e[j] = 1 \\ 1-\varepsilon, & e[j] = 0 \end{cases}$$

- Verosimilitud (probabilidad condicional de la observación)
  - Error: $e[j] = r[j] - c[j]$
  - Verosimilitud para cada bit dado el bit de la observación $r[j]$

$$p_{R[j]|C[j]}(r[j]|c[j]) = \varepsilon^{e[j]} \cdot (1-\varepsilon)^{1-e[j]} = \varepsilon^{r[j]-c_i[j]} \cdot (1-\varepsilon)^{1-(r[j]-c_i[j])}$$

  - Verosimilitud de una palabra código para la observación $\boldsymbol{r}$

$$p_{R|\boldsymbol{c}}(\boldsymbol{r}|\boldsymbol{c}_i) = \prod_{j=0}^{n-1} \varepsilon^{r[j]-c_i[j]} \cdot (1-\varepsilon)^{1-(r[j]-c_i[j])}$$

- Estimador de máxima verosimilitud (ML)

$$\hat{\boldsymbol{c}}_i = \arg\min_{\boldsymbol{c}_i} d_H(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{c}_i)$$

Capacidades de detección y corrección con salida dura

- Prestaciones dependen de distancias de Hamming
  - Un error no será detectado si los errores de transmisión lo transforman en otra palabra del código
  - Un error ocurre cuando el número de errores en la transmisión de la palabra codificada hace que la palabra recibida esté a una menor distacia de Hamming de otra palabra del código
- Prestaciones determinadas por la distancia mínima del código: d_{min}
  - Capacidad de detección:

$$d = d_{min} - 1 \text{ errores}$$

  - Capacidad de corrección:

$$t = \left\lfloor \frac{d_{min} - 1}{2} \right\rfloor \text{ errores}$$

Estimador óptimo - Salida blanda

- Constelación: M símbolos ($m = \log_2(M)$ bits/símbolo
- Secuencia de símbolos para una palabra código

$$\boldsymbol{c}_i \rightarrow \boldsymbol{A}_i = [A_i[0], A_i[1], \cdots, A_i[n' - 1]], \; n' = \frac{n}{m}$$

- Modelo probabilístico de la observación condicionada a transmitir $\boldsymbol{c}_i$

$$\boldsymbol{q} = \boldsymbol{A}_i + \boldsymbol{e}, \; \boldsymbol{e} = [e[0], e[1], \cdots, e[n' - 1]]$$

- Modelo probabilístico del error:

$$f_E(e[j]) = N(0, \sigma_z^2)$$

- Verosimilitud (probabilidad condicional de la observación):

$$f_{\boldsymbol{q}|\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{q}|\boldsymbol{A}_i) = N(\boldsymbol{A}_i, \sigma_z^2)$$

- Estimador de máxima verosimilitud: minimizar distancia euclídea

$$\hat{\boldsymbol{c}} = \arg \min_i d_E(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{A}_i)$$

Códigos bloque lineales

- Código $C(k, n)$
- Base del código: k palabras código linealmente independientes

$$\{\boldsymbol{g}_0, \boldsymbol{g}_1, \cdots, \boldsymbol{g}_{k-1}\}$$

$$\boldsymbol{g}_i = [g_i[0], g_i[1], \cdots, g_i[n-1]]$$

- Palabra código: combinación lineal de los k elementos de la base

$$\boldsymbol{c}_i = b_i[0] \cdot \boldsymbol{g}_0 + b_i[1] \cdot \boldsymbol{g}_1 + \cdots + b_i[k-1] \cdot \boldsymbol{g}_{k-1}$$

  Coeficientes de la expansión: k bits de información (sin codificar) $b_i[\ell]$

- Propiedades
  - Todos los elementos de la base pertenencen al código
  - $\boldsymbol{c}_0 = \mathbf{0} = [0, 0, \cdots, 0]$ pertenece al código
    - ⋆ Asociada a $\boldsymbol{b}_0 = \mathbf{0} = [0, 0, \cdots, 0]$
  - Toda combinación lineal de palabras código $\in C(k, n)$
  - Todas las palabras del código tienen a otra palabra a distancia d_{min}
  - Por tanto, $\boldsymbol{c}_0$ tiene otra palabra a d_{min}

$$d_{min} = \min_{\boldsymbol{c}_i \neq \boldsymbol{c}_0} w(\boldsymbol{c}_i)$$

Matriz generadora del código

- Agrupación de la base en una matriz $k \times n$

$$\boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{g}_0 \\ \boldsymbol{g}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{g}_{k-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_0[0] & g_0[1] & \cdots & g_0[n-1] \\ g_1[0] & g_1[1] & \cdots & g_1[n-1] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{k-1}[0] & g_{k-1}[1] & \cdots & g_{k-1}[n-1] \end{bmatrix}$$

- Obtención de las palabras código

$$\boldsymbol{c}_i = \boldsymbol{b}_i \cdot \boldsymbol{G}$$

- Códigos sistemáticos: el mensaje $\boldsymbol{b}_i$ forma parte de $\boldsymbol{c}_i$

$$\boldsymbol{c}_i = [\boldsymbol{b}_i | \boldsymbol{p}_i] \;\rightarrow\; \boldsymbol{G} = [\boldsymbol{I}_k | \boldsymbol{P}]$$

$$\boldsymbol{c}_i = [\boldsymbol{p}_i | \boldsymbol{b}_i] \;\rightarrow\; \boldsymbol{G} = [\boldsymbol{P} | \boldsymbol{I}_k]$$

Matriz generadora del código - Ejemplo

- Código $C(2,5)$

$$\boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Palabras código

$\boldsymbol{b}_i$	$\boldsymbol{c}_i$
0 0	0 0 0 0 0
0 1	1 0 1 0 1
1 0	0 1 1 1 0
1 1	1 1 0 1 1

- Código sistemático

Matriz generadora del código - Ejemplo

- Código $C(2,5)$

$$\boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Palabras código

$\boldsymbol{b}_i$	$\boldsymbol{c}_i$
0 0	0 0 0 0 0
0 1	1 0 1 0 1
1 0	0 1 1 1 0
1 1	1 1 0 1 1

- Código sistemático
- Distancia mínima del código: $d_{min} = 3$
  - Detecta 2 errores
  - Corrige 1 error

Matriz de chequeo de paridad

- Matriz $(n-k) \times n$: complemento ortogonal de $\boldsymbol{G}$

$$\boldsymbol{G} \cdot \boldsymbol{H}^T = \mathbf{0} \text{ matriz de } k \times (n-k) \text{ ceros}$$

- Códigos sistemáticos

$$\boldsymbol{G} = [\boldsymbol{I}_k | \boldsymbol{P}] \;\rightarrow\; \boldsymbol{H} = [\boldsymbol{P}^T | \boldsymbol{I}_{n-k}]$$

$$\boldsymbol{G} = [\boldsymbol{P} | \boldsymbol{I}_k] \;\rightarrow\; \boldsymbol{H} = [\boldsymbol{I}_{n-k} | \boldsymbol{P}^T]$$

- Identificación de palabras código

$$\boldsymbol{c}_i \cdot \boldsymbol{H}^T = \boldsymbol{b}_i \cdot \boldsymbol{G} \cdot \boldsymbol{H}^T = \mathbf{0} \text{ vector de } n-k \text{ ceros}$$

- Decodificación mediante síndrome
  - Modelo de transmisión: $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{c}_i + \boldsymbol{e}$ ($\boldsymbol{e}$: patrón de error)
  - Síndrome

$$\boldsymbol{s} = \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{H}^T = (\boldsymbol{c}_i + \boldsymbol{e}) \cdot \boldsymbol{H}^T = \boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{H}^T$$

  - Decodificación: Tabla de síndromes

Matriz de chequeo de paridad - Ejemplo

$$\boldsymbol{G} = \left[\begin{array}{ccc|cc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \rightarrow \boldsymbol{H} = \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

- Tabla de síndromes

e	***s***
0 0 0 0 0	0 0 0
1 0 0 0 0	1 0 0
0 1 0 0 0	0 1 0
0 0 1 0 0	0 0 1
0 0 0 1 0	0 1 1
0 0 0 0 1	1 0 1

Matriz de chequeo de paridad - Ejemplo

$$\boldsymbol{G} = \left[\begin{array}{ccc|cc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \rightarrow \boldsymbol{H} = \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

- Tabla de síndromes

e	***s***
0 0 0 0 0	0 0 0
1 0 0 0 0	1 0 0
0 1 0 0 0	0 1 0
0 0 1 0 0	0 0 1
0 0 0 1 0	0 1 1
0 0 0 0 1	1 0 1
¿?	1 1 0
¿?	1 1 1

Matriz de chequeo de paridad - Ejemplo

$$\boldsymbol{G} = \left[\begin{array}{ccc|cc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \rightarrow \boldsymbol{H} = \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

- Tabla de síndromes

$\boldsymbol{e}$	$\boldsymbol{s}$
0 0 0 0 0	0 0 0
1 0 0 0 0	1 0 0
0 1 0 0 0	0 1 0
0 0 1 0 0	0 0 1
0 0 0 1 0	0 1 1
0 0 0 0 1	1 0 1
¿?	1 1 0
¿?	1 1 1

$110 \rightarrow \boldsymbol{e}_1 = 11000$, $\boldsymbol{e}_2 = 00011$, $\boldsymbol{e}_3 = 10110$, $\boldsymbol{e}_4 = 01101$

Posibilidad: elegir uno de los dos patrones de dos errores

Ventaja de trabajar con G y H

- Número de palabras del código: 2^k
  - $k = 2$, $n = 5$: 4 palabras
  - $k = 247$, $n = 255$: $2^{247} \approx 2{,}26 \cdot 10^{74}$ palabras
- Número de síndromes posibles
  - $k = 2$, $n = 5$ ($t = 1$): 8 síndromes
  - $k = 247$, $n = 255$ ($t = 1$): 256 síndromes

Método de eliminación - Ejemplo

- Método para obtener una matriz de chequeo para un código no sistemático
- Sustitución de filas por combinaciones lineales de otras
  - 1ª fila: 1ª+2ª filas
  - 2ª fila: 1ª fila
- Código $C(2,5)$

$$\boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- Palabras código

$\boldsymbol{b}_i$	$\boldsymbol{c}_i$
0 0	0 0 0 0 0
0 1	0 1 1 1 0
1 0	1 1 0 1 1
1 1	1 0 1 0 1

- Mismas palabras códigos / distintas asignaciones
  - La misma matriz $\boldsymbol{H}$ es válida para generar la tabla de síndromes

Límite de Hamming

- Número de síndromes con redundancia $r = n - k$:

$$2^{n-k} = 2^r$$

- Límite de Hamming: para corregir t errores la mínima redundancia necesaria es

$$r \geq \log_2 V(n,t), \;\; V(n,t) = \sum_{j=0}^{t} \binom{n}{j}$$

  - $V(n,t)$: Esfera de Hamming de radio t
- Interpretación con número de síndromes disponibles

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{t} \leq 2^r$$

  - Igualdad: Códigos perfectos

Códigos perfectos

- Códigos de repetición (decisión por mayoría)
  - n impar, $k = 1$, $t = (n-1)/2$
- Códigos de Hamming
  - $n = 2^m - 1$, $k = 2^m - m - 1$, $t = 1$
  - Matriz de chequeo: en las columnas aparecen todas las posibles combinaciones binarias de $(n-k)$ bits, excepto la todo ceros
    - Ejemplo: Código Hamming (4,7)

$$\boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Código de Golay
  - $n = 23$, $k = 11$, $t = 3$

Prestaciones - Decodificación dura

- Probabilidad de error de bit (BER) en la transmisión: ε
- Se comenten errores cuando se excede la capacidad de corrección del código
- Código de corrección de t errores

$$P_e = \sum_{e=t+1}^{n} \binom{n}{e} \cdot \varepsilon^e \cdot (1-\varepsilon)^{n-e}$$

- Códigos que corrigen todos los patrones de t errores y a patrones de $t+1$ errores

$$P_e = \left[\binom{n}{t+1} - a\right] \cdot \varepsilon^{t+1} \cdot (1-\varepsilon)^{n-t-1} + \sum_{e=t+2}^{n} \binom{n}{e} \cdot \varepsilon^e \cdot (1-\varepsilon)^{n-e}$$

- Codificación tipo Gray o pseudo-Gray para SNR alta

$$BER \approx \frac{1}{k} P_e$$

Prestaciones - Decodificación blanda

- Probabilidad de error

$$P_e \approx c \cdot Q\left(\frac{d_{min}^E}{2\sqrt{N_0/2}}\right)$$

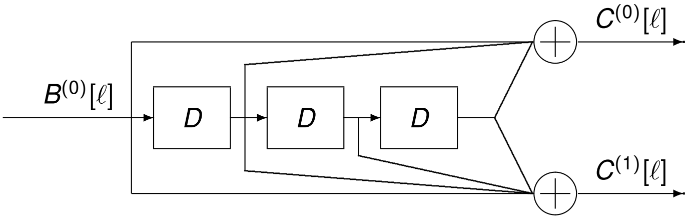
- d_{min}^E: mínima distancia euclídea entre las secuencias de símbolos correspondientes a dos palabras código diferentes
- c: máximo número de palabras de distancia mínima de una dada
  - Modulaciones binarias

$$d_E(\boldsymbol{c}_i, \boldsymbol{c}_j) = d(\boldsymbol{a}_0, \boldsymbol{a}_1)\sqrt{d_H(\boldsymbol{c}_i, \boldsymbol{c}_j)}$$

$$P_e \approx c \cdot Q\left(\frac{d(\boldsymbol{a}_0, \boldsymbol{a}_1)}{2\sqrt{N_0/2}}\sqrt{d_{min}^H}\right)$$

Códigos convolucionales

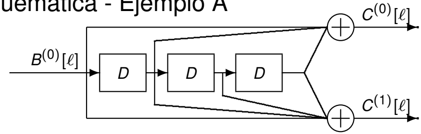
- Introducción de la redundancia mediante filtrado
  - Introducción de memoria
- Tasa $R = k/n$: banco de filtros con
  - k entradas
  - n salidas



- Notación:
  - Entradas: $B^{(i)}[\ell]$, con $i = 0, 1, \cdots, k-1$
  - Salidas: $C^{(j)}[\ell]$, con $j = 0, 1, \cdots, n-1$

Representaciones de los códigos convolucionales

- Representación esquemática - Ejemplo A



- Relación entrada salidas

$$C^{(0)}[\ell] = B^{(0)}[\ell] + B^{(0)}[\ell-1] + B^{(0)}[\ell-3]$$

$$C^{(1)}[\ell] = B^{(0)}[\ell] + B^{(0)}[\ell-1] + B^{(0)}[\ell-2] + B^{(0)}[\ell-3]$$

- Representación de secuencias con polinomios en D - Transformada D

$$B^{(i)}(D) = \sum_{\ell} B^{(i)}[\ell] \cdot D^{\ell}$$

  - Propiedad de la representación en D respecto a retardos

$$B^{(i)}[\ell-d] \leftrightarrow B^{(i)}(D) \cdot D^{d}$$

Representaciones de los códigos convolucionales (II)

- Notación mediante polinomios en D

$$C^{(0)}(D) = B^{(0)}(D)\left\{1 + D + D^3\right\}$$

$$C^{(1)}(D) = B^{(0)}(D)\left\{1 + D + D^2 + D^3\right\}$$

- Notación matricial (polinomios):

$$\boldsymbol{C}(D)_{1\times n} = \boldsymbol{B}(D)_{1\times k} \cdot \boldsymbol{G}(D)_{k\times n}$$

- Matriz generadora de tamaño $k \times n$
  - Cada elemento es un polinomio en D
  - Elemento fila i columna j: contribución a la salida j-ésima de la entrada i-ésima
  - Ejemplos
    - ★ Ejemplo anterior (A): $k = 1$, $n = 2$

$$\boldsymbol{G}(D) = \left[1 + D + D^3,\ 1 + D + D^2 + D^3\right]_{1\times 2}$$

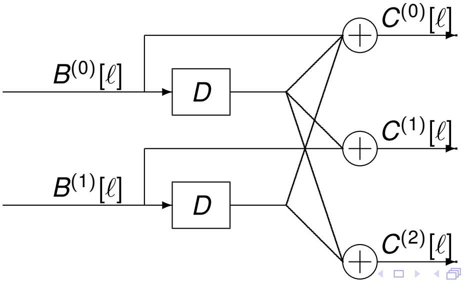
    - ★ Otro ejemplo (B): $k = 2$, $n = 3$

$$\boldsymbol{G}(D) = \begin{bmatrix} 1+D & D & D \\ D & 1 & D \end{bmatrix}$$

Paso a representación esquemática - Ejemplo B

$$\boldsymbol{G}(D) = \begin{bmatrix} 1+D & D & D \\ D & 1 & D \end{bmatrix}_{2\times 3}$$

- Número de entradas del banco de filtros:
  - Número de filas de la matriz $\boldsymbol{G}(D)$: $k = 2$
- Número de salidas del banco de filtros:
  - Número de columnas de la matriz $\boldsymbol{G}(D)$: $n = 3$
- Número de memorias (elementos de retardo) de cada entrada:
  - Máximo grado de los polinomios en su correspondiente fila



Parámetros de interés

- Memoria total del código: M_t
  - Número total de unidades de retardo (memorias)

$$M_t = \sum_{i=0}^{k-1} M^{(i)}$$

  - Memoria de la entrada i-ésima:

$$M^{(i)} = \max_j \text{grado}(g_{i,j}(D))$$

- Longitud de restricción: K
  - Máxima longitud de la respuesta al impulso del codificador (máximo número de instantes de tiempo en los que un bit afecta a la salida del codificador)

$$K = 1 + \max_{i,j} \text{grado}(g_{i,j}(D))$$

  - En general las prestaciones aumentan con K

Códigos sistemáticos

- Matriz de generación

$$\boldsymbol{G}(D) = [\boldsymbol{I}_k \; \boldsymbol{P}(D)]$$

  - Las entradas se “copian” en algunas de las salidas
  - Ejemplo (C)

$$\boldsymbol{G}(D) = \left[1, \; 1 + D + D^2\right]$$

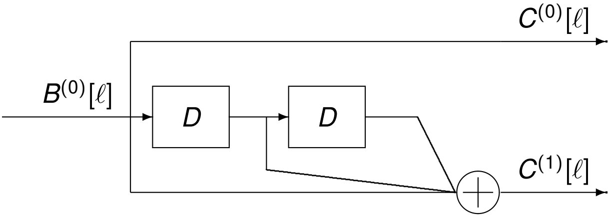


Diagrama de rejilla

- Definición del estado
  - Contenido de las memorias del codificador

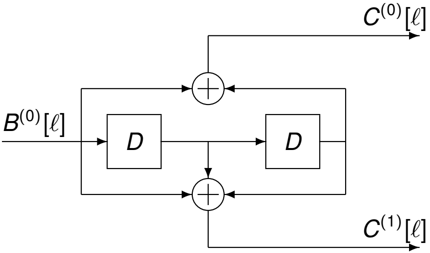
$$\psi[\ell] = [B^{(0)}[\ell-1], \cdots, B^{(0)}[\ell - M^{(0)}], \cdots, B^{(k-1)}[\ell-1], \cdots, B^{(k-1)}[\ell - M^{(k-1)}]]$$

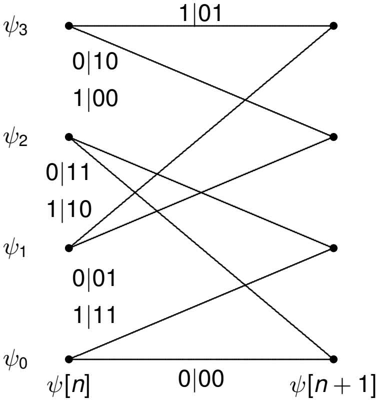
- Etiquetado de la rejilla
  - Bits a la entrada del codificador (sin codificar)
  - Bits a la salida del codificador (codificados)

$$B^{(0)}[\ell], B^{(1)}[\ell], \cdots B^{(k-1)}[\ell] \;\Big|\; C^{(0)}[\ell], C^{(1)}[\ell], \cdots C^{(n-1)}[\ell]$$

Ejemplo - Convolucional D

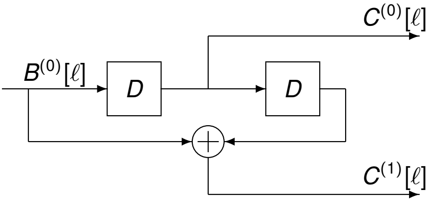
- Estado: $\psi[\ell] = \left[B^{(0)}[\ell-1], B^{(0)}[\ell-2]\right]$
- Estados: $\psi_0 = [0,0]$, $\psi_1 = [1,0]$, $\psi_2 = [0,1]$, $\psi_3 = [1,1]$

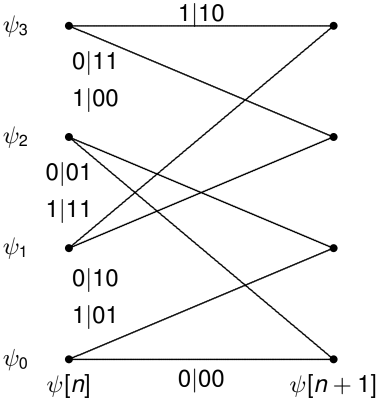




Ejemplo - Convolucional E

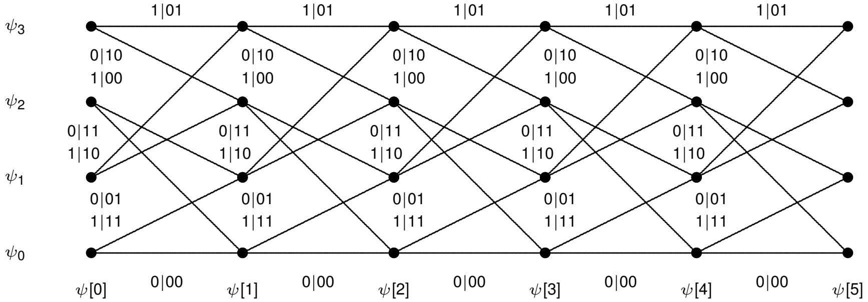
- Estado: $\psi[\ell] = \left[B^{(0)}[\ell-1], B^{(0)}[\ell-2]\right]$
- Estados: $\psi_0 = [0,0]$, $\psi_1 = [1,0]$, $\psi_2 = [0,1]$, $\psi_3 = [1,1]$





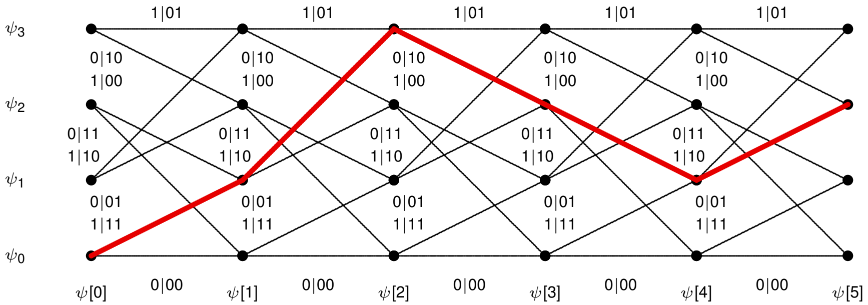
Secuencia de bits - Camino a través de la rejilla

- Secuencia de datos: $B^{(0)}[\ell] = [11010]$
- Estado inicial: ψ_0 (Se fija con el envío de una cabecera de bits)



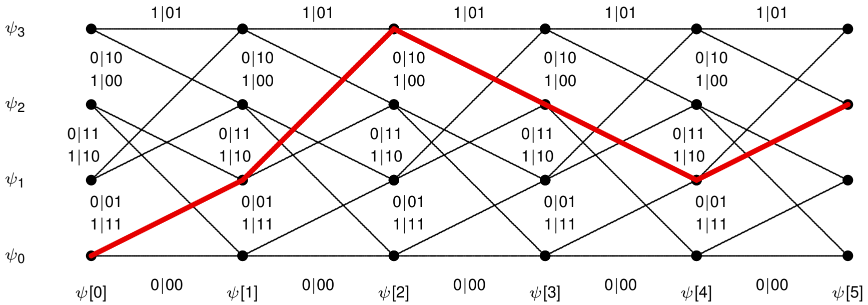
Secuencia de bits - Camino a través de la rejilla

- Secuencia de datos: $B^{(0)}[\ell] = [11010]$
- Estado inicial: ψ_0 (Se fija con el envío de una cabecera de bits)



Secuencia de bits - Camino a través de la rejilla

- Secuencia de datos: $B^{(0)}[\ell] = [11010]$
- Estado inicial: ψ_0 (Se fija con el envío de una cabecera de bits)



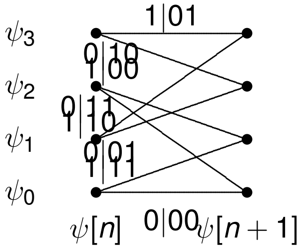
- Secuencia codificada: $C[k] = [11\ 10\ 10\ 00\ 01]$

Decodificación - Algoritmo de Viterbi

- Recuperación de la secuencia más verosímil
- Estados inicial/final
  - Cabecera de referencia (habitualmente ceros "*bit flushing*")
- Salida dura: observación de bits decididos
  - Secuencia con el menor número de bits codificados distintos a la observación
  - Métrica de rama: distancia de Hamming con la observación
- Salida dura: observación de $q[n]$
  - Secuencia cuyos símbolos asociados están a la menor distancia euclídea de la observación
  - Métrica de rama: $|q[n] - A[n]|^2$
    - Hay que tener en cuenta la constelación que se utiliza para hacer la conversión de las etiquetas de la rejilla básica a símbolos de la constelación ($A[n]$)
  - Mejores prestaciones que con salida blanda

Métricas de rama - Salida dura

- Secuencia recibida: $R[k] = [11\ 10\ 10\ 00\ 01]$



ψ_3

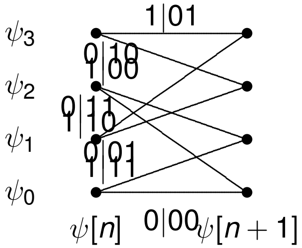
ψ_2

ψ_1

ψ_0

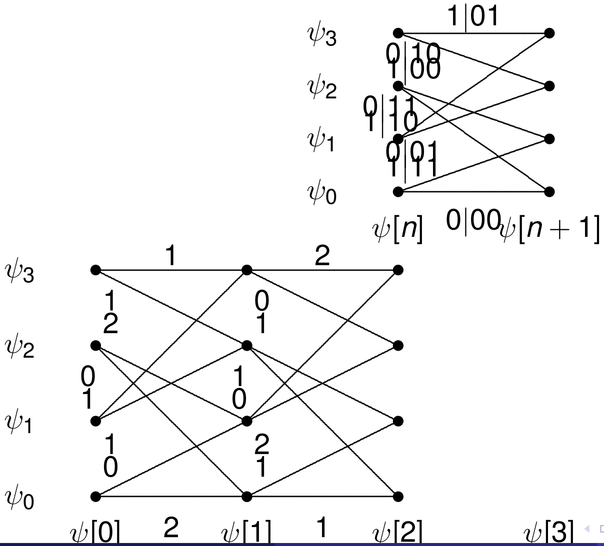
$\psi[0]$ $\psi[1]$ $\psi[2]$ $\psi[3]$ $\psi[4]$ $\psi[5]$

- Secuencia recibida: $R[k] = [11\ 10\ 10\ 00\ 01]$



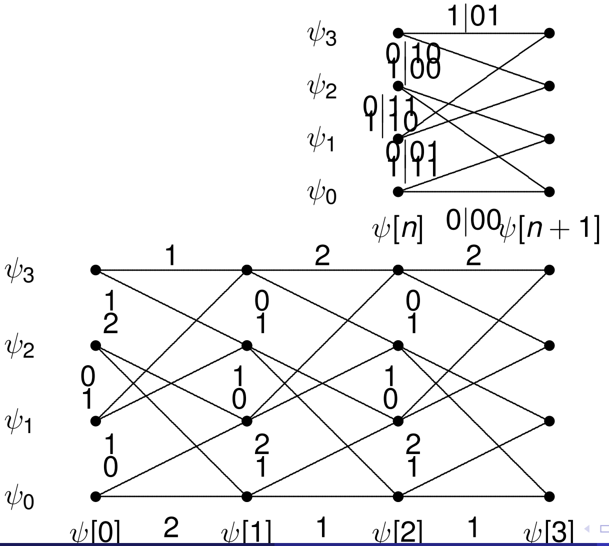
Métricas de rama - Salida dura

- Secuencia recibida: $R[k] = [11\ 10\ 10\ 00\ 01]$



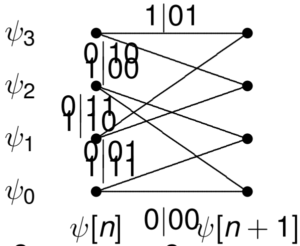
Métricas de rama - Salida dura

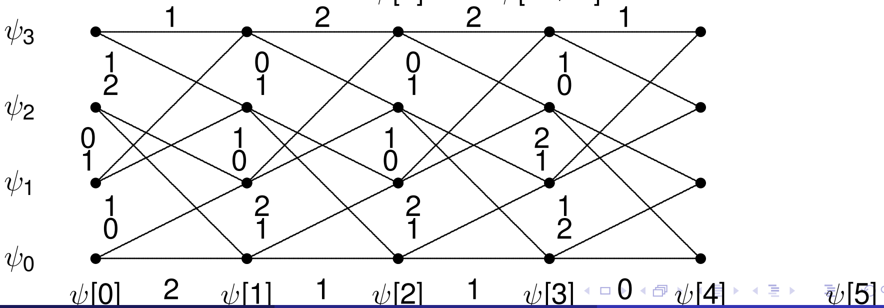
- Secuencia recibida: $R[k] = [11\ 10\ 10\ 00\ 01]$



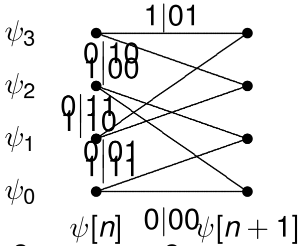
Métricas de rama - Salida dura

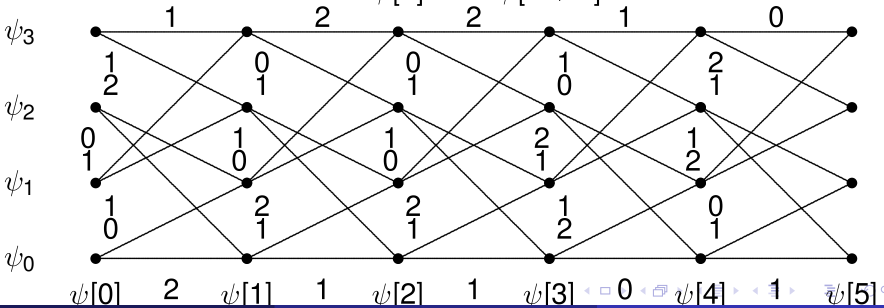
- Secuencia recibida: $R[k] = [11\ 10\ 10\ 00\ 01]$



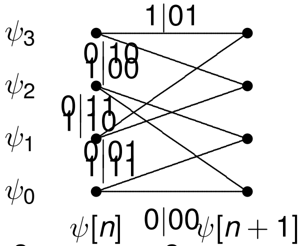


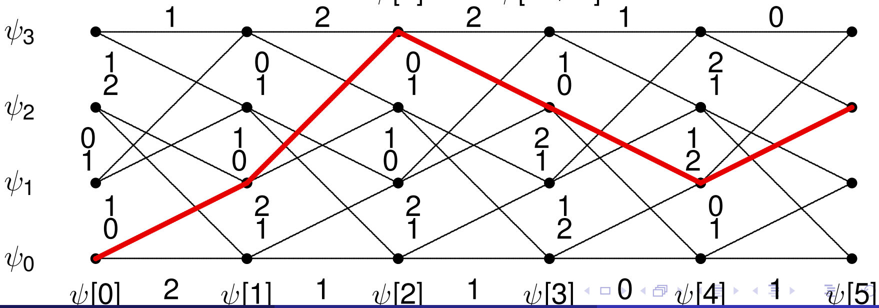
- Secuencia recibida: $R[k] = [11\ 10\ 10\ 00\ 01]$





- Secuencia recibida: $R[k] = [11\ 10\ 10\ 00\ 01]$





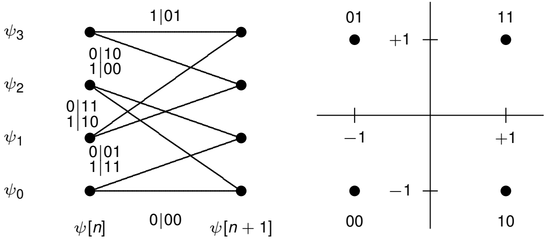
Métricas acumuladas en cada estado (Viterbi)

	$\psi[1]$	$\psi[2]$	$\psi[3]$	$\psi[4]$	$\psi[5]$
ψ_3	–	0	**2**/3	**3**/4	3/**2**
ψ_2	–	2	**0**/5	**3**/4	0/**0**
ψ_1	0	3	**3**/4	**0**/5	4/**3**
ψ_0	2	3	**3**/4	**2**/3	4/**3**

- Si no hay errores: camino con métrica acumulada nula

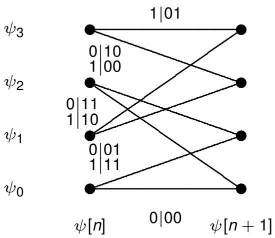
Métricas de rama - Salida blanda

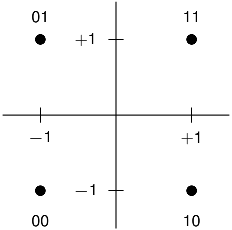
- Secuencia recibida: $q[n] = \begin{bmatrix} 1{,}1 \\ 0{,}9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1{,}1 \\ -0{,}8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}75 \\ -0{,}6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1{,}2 \\ -1{,}1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0{,}7 \\ 1{,}2 \end{bmatrix}$



Métricas de rama - Salida blanda

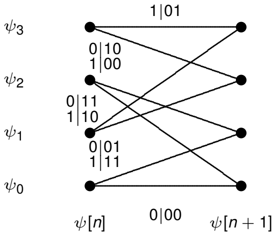
- Secuencia recibida: $q[n] = \begin{bmatrix} 1{,}1 \\ 0{,}9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1{,}1 \\ -0{,}8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}75 \\ -0{,}6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1{,}2 \\ -1{,}1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0{,}7 \\ 1{,}2 \end{bmatrix}$

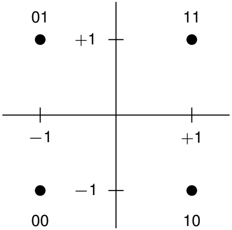


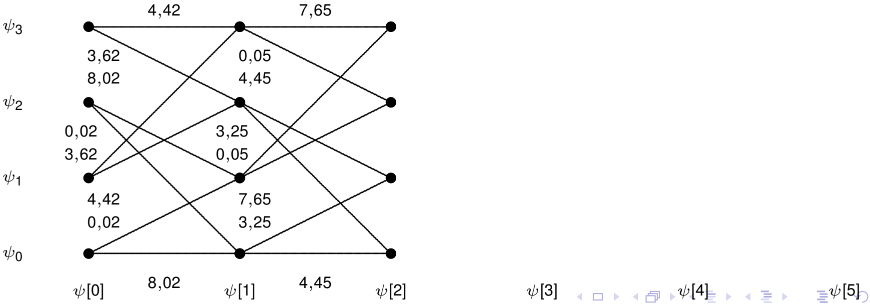


Métricas de rama - Salida blanda

- Secuencia recibida: $q[n] = \begin{bmatrix} 1{,}1 \\ 0{,}9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1{,}1 \\ -0{,}8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}75 \\ -0{,}6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1{,}2 \\ -1{,}1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0{,}7 \\ 1{,}2 \end{bmatrix}$

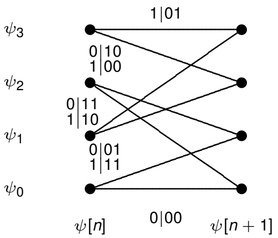


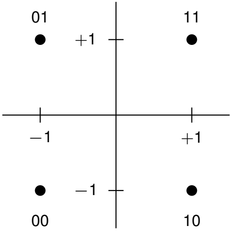


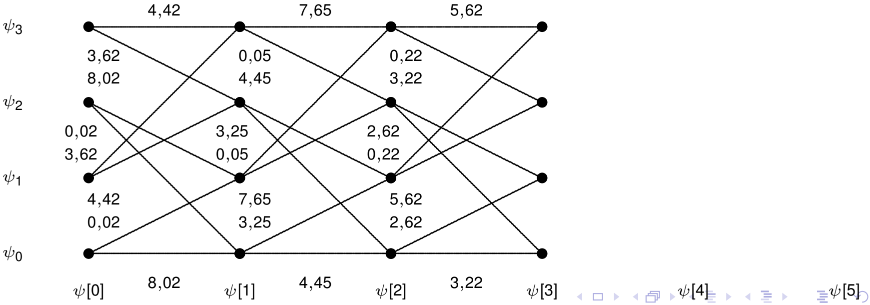


Métricas de rama - Salida blanda

- Secuencia recibida: $q[n] = \begin{bmatrix} 1{,}1 \\ 0{,}9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1{,}1 \\ -0{,}8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}75 \\ -0{,}6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1{,}2 \\ -1{,}1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0{,}7 \\ 1{,}2 \end{bmatrix}$

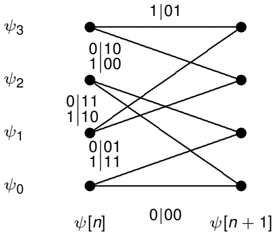


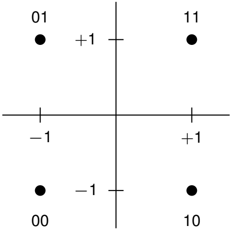


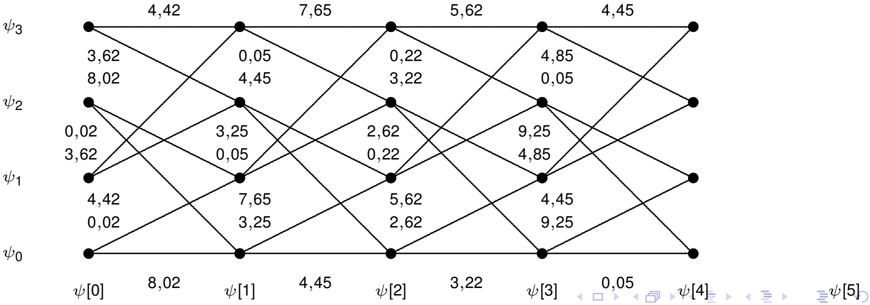


Métricas de rama - Salida blanda

- Secuencia recibida: $q[n] = \begin{bmatrix} 1{,}1 \\ 0{,}9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1{,}1 \\ -0{,}8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}75 \\ -0{,}6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1{,}2 \\ -1{,}1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0{,}7 \\ 1{,}2 \end{bmatrix}$

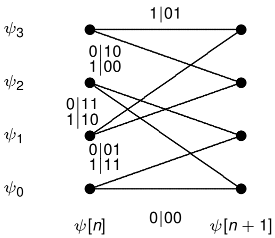


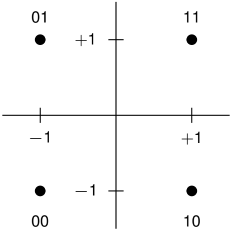


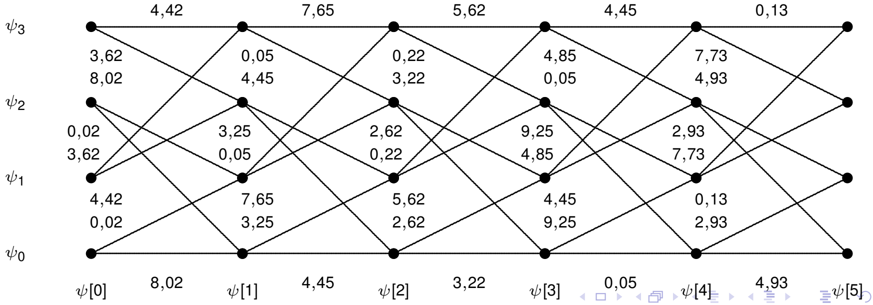


Métricas de rama - Salida blanda

- Secuencia recibida: $q[n] = \begin{bmatrix} 1{,}1 \\ 0{,}9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1{,}1 \\ -0{,}8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}75 \\ -0{,}6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1{,}2 \\ -1{,}1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0{,}7 \\ 1{,}2 \end{bmatrix}$

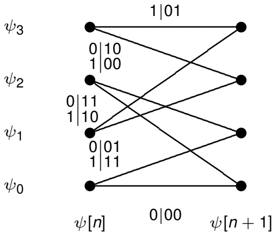


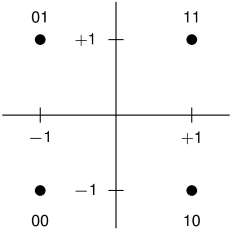


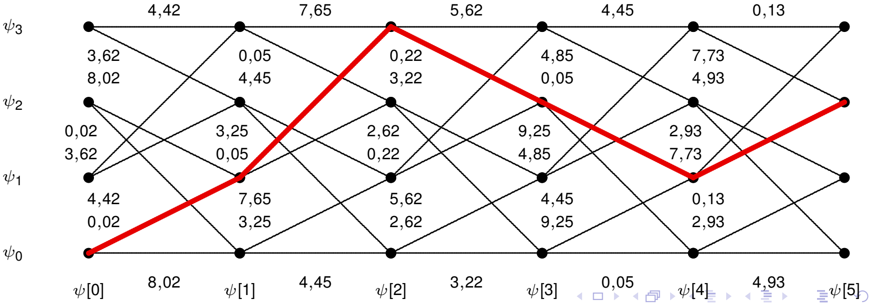


Métricas de rama - Salida blanda

- Secuencia recibida: $q[n] = \begin{bmatrix} 1{,}1 \\ 0{,}9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1{,}1 \\ -0{,}8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}75 \\ -0{,}6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1{,}2 \\ -1{,}1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0{,}7 \\ 1{,}2 \end{bmatrix}$







Métricas acumuladas en cada estado (Viterbi)

	$\psi[1]$	$\psi[2]$	$\psi[3]$	$\psi[4]$	$\psi[5]$
ψ_3	–	0,07	**5,69**/11,49	**10,14**/15,74	10,27/**8,07**
ψ_2	–	7,67	**0,29**/16,89	**10,54**/15,34	17,87/**0,47**
ψ_1	0,02	11,27	**10,89**/15,09	**0,34**/19,54	15,47/**12,47**
ψ_0	8,02	12,47	**10,29**/15,69	**9,54**/10,34	**13,47**/14,47

Prestaciones

- Salida dura

$$P_e \approx c \cdot \sum_{e=t+1}^{n \cdot z} \binom{n \cdot z}{e} \cdot \varepsilon^e \cdot (1 - \varepsilon)^{n \cdot z - e}$$

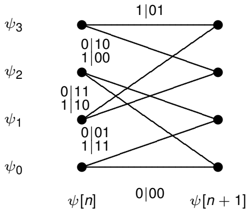
  - D^H_{min}: mínima distancia de Hamming entre salidas para secuencias distintas
  - z: longitud del evento erróneo de distancia mínima
  - $t = \left\lfloor \frac{D^H_{min} - 1}{2} \right\rfloor$ (capacidad de corrección sobre $n \cdot z$ bits)
  - c: número de errores del evento erróneo a D^H_{min}
  - ε: probabilidad de error de bit del sistema (BER)
- Salida blanda

$$P_e \approx c \cdot Q\left(\frac{D^E_{min}}{2\sqrt{N_0/2}} \right)$$

  - D^E_{min}: mínima distancia euclídea entre salidas para secuencias distintas

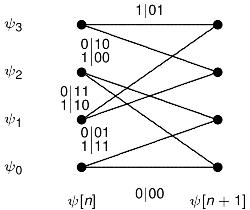
Calculo de D^H_{min}

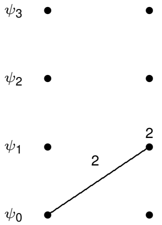
- Comparación con la secuencia de todo ceros
  - Métrica de rama: número de unos en los n bits codificados
- Puede usarse Viterbi para calcular distancias sobre sucesos erróneos



Calculo de D^H_{min}

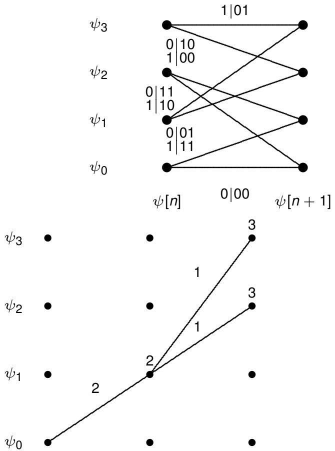
- Comparación con la secuencia de todo ceros
  - Métrica de rama: número de unos en los n bits codificados
- Puede usarse Viterbi para calcular distancias sobre sucesos erróneos





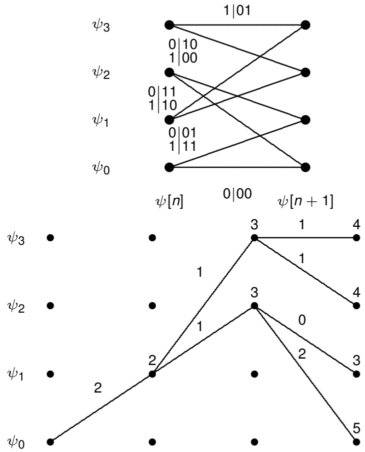
Calculo de D^H_{min}

- Comparación con la secuencia de todo ceros
  - Métrica de rama: número de unos en los n bits codificados
- Puede usarse Viterbi para calcular distancias sobre sucesos erróneos



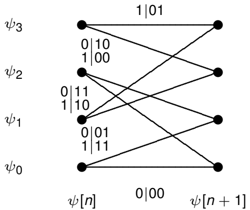
Calculo de D^H_{min}

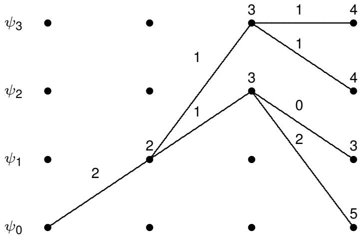
- Comparación con la secuencia de todo ceros
  - Métrica de rama: número de unos en los n bits codificados
- Puede usarse Viterbi para calcular distancias sobre sucesos erróneos



Calculo de D^H_{min}

- Comparación con la secuencia de todo ceros
  - Métrica de rama: número de unos en los *n* bits codificados
- Puede usarse Viterbi para calcular distancias sobre sucesos erróneos





$$D^H_{min} = 5$$

$$z = 3$$