#### Sistemas lineales. 2<sup>a</sup> parte

Seguimos intentando resolver el sistema lineal

$$AX = B$$

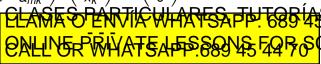
en donde  $A \in \mathcal{M}_{m \times k}$ ,  $B \in \mathbb{R}^m$ . Vamos a estudiar el caso

$$rango(A^*) = rango(A) = I < k$$
.

 Consideremos el sistema lineal AX = B. En particular, consideremos el sistema lineal asociado homogéneo

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \longleftrightarrow AX = O$$

Cartagena 99



www.cartagena99.com.no se hace rasponsable de la información contenida en la información contenida en la información contenida en la información contenida en el documento es inicita o le significación de la contenida en el documento es inicita o le significación contenida en el documento es inicita o le significación contenida en el documento es inicita o le significación contenida en el documento estructura el documento el documento estructura el documento el documento



Sistema homogéneo asociado

$$AX = O$$

Podemos observar que se cumple lo siguiente:

- $\mathbf{0} = (0, ..., 0)$  siempre es solución. Dicha solución es la única si l = k.
- Si I < k, siempre vamos a encontrar soluciones no nulas del sistema homogéneo.

## Cartagena99



vww.cartagena99.com no se hace rasponsable de la información contenida en e si la información comenida en el documento es incita o designa al labación derectio



Sea X una solución arbitraria de AX = B y como I < k existe  $\mathbf{v} = (v_1, ..., v_k) \neq \mathbf{0}$  tal que AV = O. En dicho caso

$$A(X + \lambda V) = AX + \lambda AV = B + O = B$$

para cualquier  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Esto prueba que la recta

$$\mathbf{x} + \mathbf{G}[\{\mathbf{v}\}] = \{\mathbf{x} + \lambda \mathbf{v} : \lambda \in \mathbb{R}\}$$

es también solución del sistema. Recordemos que usamos la notación

$$extbf{ extit{G}}[\{ extbf{ extit{v}}\}] = \{\lambda extbf{ extit{v}}: \lambda \in \mathbb{R}\}$$

# Cartagena99

ELAMES PENTILS WHARES PLY TOOK TO COME TO COME

En el caso

$$\left(\begin{array}{ccc} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} 1 \\ -1 \end{array}\right)$$

- Recordemos que  $\mathbf{x} = (0, 0, 1)$  era solución del sistema.
- Por otro lado, el vector  $\mathbf{v} = (0, 1, 1)$  es solución del sistema homogéneo

$$\left(\begin{array}{ccc} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array}\right)$$

Por tanto todos los elementos de la siguiente recta son soluciones

del sistema AY R

Cartagena99

Cartagena99

Cartagena99

vww.cartagena99.com no se hace rasponsable de la información contenida en el la contenida en el la



• La condición  $rango(A^*) = rango(A) = I < k$  asegura que existen

$$\{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_{k-l}\}$$

linealmente independientes que son soluciones del sistema homogéneo. El conjunto de soluciones Sol viene caracterizado por el "espacio afín"

por el "espacio afin" 
$$\mathrm{Sol} = \mathbf{x} + G[\{\mathbf{v}_1,...,\mathbf{v}_{k-l}\}] = \{\mathbf{x} + \lambda_1 \mathbf{v}_1 + ... + \lambda_{k-l} \mathbf{v}_{k-l} : \lambda_1,...,\lambda_{k-l} \in \mathbb{R}\},$$

en donde

Cartagena99 Cartag

www.cartagena99.com.no.se.hace responsable de la información contenida en e

#### Sistemas lineales. Tma Rouché-Frobenius



#### En suma:

- Tma Rouché-Frobenius. Si  $rango(A^*) = rango(A) = I < k$ , el sistema es compatible indeterminado con k I parámetros.
- Los conjuntos de soluciones son
  - puntos
  - rectasplanos
  - ۲
  - hiperplanos

Tienen por tanto una interpretación geométrica.

Cartagena99

ELAMES PENTIL WHATSAFE TO THE TOOL TO THE

vww.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el documento es filcita o lesiona el descrito en contenida en el documento es filcita o lesiona el descrito en contenida en el documento es filcita de la información contenida en el documento en el documento en el documento el documento en el documento en el documento el doc

#### Sistemas lineales. Tma Rouché-Frobenius



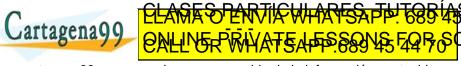
En el caso del sistema anterior

$$\left(\begin{array}{ccc} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} 1 \\ -1 \end{array}\right)$$

como rango( $A^*$ ) = rango(A) = 2 < 3, el sistema es compatible determinada con 1 parámetro. Luego podemos asegurar que el conjunto solución viene dado por la recta

Sol = 
$$\{(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 1) + \lambda(0, 1, 1) : \lambda \in \mathbb{R}\}$$





## Sistema lineales. Un ejemplo



#### Ejercicio: Resolver

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

#### En este caso

rango 
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2$$
, rango  $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix} = 2$ 

Cartagena99 

### Sistemas lineales. Un ejemplo

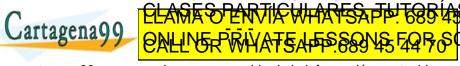


rango 
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix} = 2$$

Por operaciones elementales se puede ver que

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & 3 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

Dos filas linealmente independientes, luego rango 2.



#### Sistemas lineales. Un ejemplo

מפח

- Luego  $rango(A^*) = rango(A) = 2 < 3$ , Sistema compatible indeterminado con un parámetro .
- La tercera fila es combinación de la otras dos, podemos eliminarla.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} - x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Directamente

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en e

### Sistemas lineales. Un ejemplo



$$\left(\begin{array}{ccc} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} 0 \\ 5 \end{array}\right)$$

La solución viene dada por

$$x_2 = \frac{5}{3} + \frac{x_3}{3}, \ x_1 = \frac{5}{3} - \frac{2}{3}x_3.$$

Luego si denotamos el parámetro  $\lambda = x_3$ 

$$\mathrm{Sol} \;\; = \;\; \left\{ \left( \frac{5}{3} - \frac{2}{3}\lambda, \frac{5}{3} + \frac{\lambda}{3}, \lambda \right) : \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

501 =

#### Sistemas lineales. Conclusiones



- Teorema de Rouché-Frobenius es un resultado de clasificación, no indica si un sistema lineal es resoluble o no, a partir de plantearlo como un problema de combinación lineal entre vectores de  $\mathbb{R}^n$ .
- El conjunto solución de un sistema lineal AX = B es un conjunto afín
  - punto (0 parámetros)
  - recta (1 parámetro)
  - plano (2 parámetros)

cuya parte vectorial viene dada por el **núcleo** o  $\mathit{Ker}$  de la matriz  $\mathit{A}$ 

Cartagena 99

ELAME SPENTIL WHATES FLITE BY 45 ENLIVER WILLIAMS SOUS FARS

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en e

#### Sistemas lineales. Conclusiones



- Para resolver algorítmicamente un sistema lineal se suele usar el *Algoritmo de Gauss-Jordan*.
- El Algoritmo de Gauss-Jordan, no es más que multiplicar por determinadas matrices (matrices elementales) a ambos lados del sistema lineal

Enlace vídeo sobre operaciones elementales

Curso 0 Matemática, UNED 1

Enlace a curso 0. Algebra y Geometría

Cartagena99

ELAMES PENTIL WHARES PH. 188 45 PENLINGER WHARES PH. 188 45 PENCING PROPERTY PROPERT

vww.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en a