#### Estructura vectorial de $\mathbb{R}^n$



 $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$  con las operaciones vectoriales de suma de vectores + y producto por escalares es un espacio vectorial ya que verifica:

•  $(\mathbb{R}^n, +)$  es un grupo abeliano. Para todos  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ :

Cartagena99

ELAMES PENTILS WHATES FED TO BE 145 PENLINER WHATES AFFE SON SERVE FARS OF THE SERVE

vww.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el la información en el la informac

#### Estructura vectorial de $\mathbb{R}^n$



 $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$  con las operaciones vectoriales de suma de vectores + y producto por escalares es un espacio vectorial ya que verifica:

• Para todo  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ , se tiene:

$$\lambda \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \lambda \cdot \mathbf{u} + \lambda \cdot \mathbf{v}$$
 Distributiva respecto a la suma de  $\mathbb{R}^n$   $(\lambda + \mu) \cdot \mathbf{v} = \lambda \cdot \mathbf{u} + \mu \cdot \mathbf{v}$  Distributiva respecto a la suma de  $\mathbb{R}$   $\lambda(\mu \cdot \mathbf{u}) = (\lambda \mu) \cdot \mathbf{u}$  Asociativa respecto al producto de  $\mathbb{R}$ 

Cartagena99

 $1 \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u}$ 

ELAMES PENTILS WHATS A FELTOS FARS

1 es el elemento neutro de ℝ

#### Subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^n$



- Los **subespacios vectoriales** de  $\mathbb{R}^n$  son aquellos conjuntos que conservan las operaciones vectoriales.
- Es decir,  $\mathbb{A} \subset \mathbb{R}^n$  es un subespacio vectorial si para todos escalares  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ,  $\mathbf{v} = (v_1, ..., v_n)$ ,  $\mathbf{w} = (w_1, ..., w_n) \in \mathbf{A}$  se tiene

$$\lambda \mathbf{V} + \mu \mathbf{W} = (\lambda \mathbf{V}_1 + \mu \mathbf{W}_1, ..., \lambda \mathbf{V}_p + \mu \mathbf{W}_p) \in \mathbf{A}$$

Por ejemplo,

$$\mathbf{A} = \{(x,0) : x \in \mathbb{R}\}$$

es un subespacio vectorial de  $\mathbb{R}^2$  ya que para todos  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ,  $\mathbf{v} = (v_1, 0), \mathbf{w} = (w_1, 0) \in \mathbf{A}$ , se tiene





ww.cartagena99.com no se hace rasponsable de la información contenida en el la información contenida en el la información comenida en el la cumento es inclia o le sida al la el contenida en el la cumento es inclia o le sida al la el cumento es inclia o le sida al la el cumento es inclia o le sida al la cumento es inclia o le sida al la cumento es inclia o le sida al la cumento es inclia o la cumento es inclia de la cumento es inclia d

#### Subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^n$



- Los **subespacios vectoriales** de  $\mathbb{R}^n$  son aquellos conjuntos que conservan las operaciones vectoriales.
- Es decir,  $\mathbb{A} \subset \mathbb{R}^n$  es un subespacio vectorial si para todos escalares  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ,  $\mathbf{v} = (v_1, ..., v_n)$ ,  $\mathbf{w} = (w_1, ..., w_n) \in \mathbb{A}$  se tiene

$$\lambda \mathbf{v} + \mu \mathbf{w} = (\lambda \mathbf{v}_1 + \mu \mathbf{w}_1, ..., \lambda \mathbf{v}_n + \mu \mathbf{w}_n) \in \mathbb{A}$$

En cambio.

$$\mathbb{A} = \{(1, x) : x \in \mathbb{R}\}$$

**no** es un subespacio vectorial de  $\mathbb{R}^2$  ya que si tomamos por ejemplo  $\lambda = 1$ ,  $\mu = 1$ ,  $\mathbf{v} = (1, 1)$ ,  $\mathbf{w} = (1, -2) \in \mathbb{A}$ , se tiene





### Subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$



- En  $\mathbb{R}^2$ , los subespacios vienen dados por
  - R<sup>2</sup>
     G[v] = {λv :λ ∈ R}, dado v ∈ R<sup>2</sup>.
  - $\bullet$  {**0**} = {(0,0)}
- En  $\mathbb{R}^3$ , los subespacios vienen dados por
  - $ightharpoonup \mathbb{R}^2$ .
  - $G[\{\mathbf{v}\}] = \{\lambda \mathbf{v} : \lambda \in \mathbb{R}\}, \text{ dado } \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2.$
  - ▶  $G[\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}\}] = \{\lambda \mathbf{v_1} + \mu \mathbf{v_2}: \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}, \text{ dados } \{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}\} \in \mathbb{R}^2$  linealmente independientes.
  - $\{\mathbf{0}\} = \{(0,0)\}.$
- En este sentido
  - $ightharpoonup \mathbb{R}^2$  (resp.  $\mathbb{R}^3$ ),  $\{\mathbf{0}\}$  son los denominados *subespacios impropios*.
- Cartagena 99

  Ca

#### Subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^n$



- En general los subespacios vectoriales de  $\mathbb{R}^n$  se corresponden con los conjuntos generados por un conjunto de vectores.
- Las siguientes afirmaciones son equivalentes:
  - $ightharpoonup \mathbb{A} \subset \mathbb{R}^n$  es un subespacio vectorial de  $\mathbb{R}^n$ 
    - Existe un conjunto de vectores  $\{\mathbf{v}_1,...,\mathbf{v}_k\} \subset \mathbb{R}^n$  tales que

$$\mathbb{A} = G[\{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k\}] = \{\lambda_1 \mathbf{v}_1 + ... + \lambda_k \mathbf{v}_k : \lambda_1, ..., \lambda_k \in \mathbb{R}\}$$

 Al conjunto {v<sub>1</sub>,...,v<sub>k</sub>} se le denomina conjunto o sistema de generadores de A.

# Cartagena99



## Sistemas de generadores



Sea el subespacio vectorial

$$\mathbb{B} = \{(x, y, 0) : x \in \mathbb{R}\} = \{x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) : x, y \in \mathbb{R}\}$$

• Los vectores  $\{(1,0,0),(0,1,0)\}$  constituyen un sistema generador de  $\mathbb{B}$ , pero también lo es

$$\{(1,0,0),(0,1,0),(1,1,0)\}$$

ya que  $\{(1,0,0),(0,1,0),(1,1,0)\}\subset \mathbb{B}$  y podemos encontrar siempre una combinación lineal

Cartagena99

Cartagena99

Cartagena99

Cartagena99

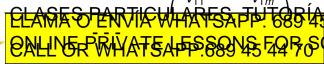
#### Base de un subespacio vectorial



Sea  $\mathbb{A} \subset \mathbb{R}^n$  un subespacio vectorial.

- Un conjunto de generadores linealmente independiente es una **base**.
- Es decir,  $\mathbf{S} = \{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k\}$  es una base de  $\mathbb{A}$  si:
  - $\blacktriangle = G[\{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k\}].$ 
    - Y<sub>1</sub>,..., V<sub>k</sub> son linealmente independientes.
- Tma de la base. El número de elementos de cualquier base de A es un número fijo y se denomina dimensión del espacio. En este caso dim A = k.
- Matricialmente, la dimensión coincide con el rango de la matriz asociada

# Cartagena 99



#### Bases y coordenadas

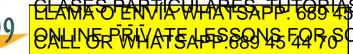


• Todo elemento de  $v \in \mathbb{A}$  se expresa de manera única. Existen únicos  $(\lambda_1, ..., \lambda_k) \in \mathbb{R}^k$  tal que

$$\mathbf{V} = \lambda_1 \mathbf{V}_1 + ... + \lambda_k \mathbf{V}_k$$

• A los escalares  $\lambda_1, ..., \lambda_k$  se le dice coordenadas de **v** con respecto de la base  $\{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k\}$ 

## Cartagena99



### Bases y coordenadas



#### Sea el subespacio vectorial

$$\mathbb{B} = \{(x, y, 0) : x \in \mathbb{R}\} = \{x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) : x, y \in \mathbb{R}\},\$$

- Los vectores  $\mathbf{B} = \{(1,0,0),(0,1,0)\}$  constituyen una base de  $\mathbb{B}$ .
- Un  $(x, y, 0) \in \mathbb{B}$  genérico se puede expresar como

$$(x, y, 0) = x \cdot (1, 0, 0) + y \cdot (0, 1, 0)$$

en donde  $\lambda_1 = x$ ,  $\lambda_2 = y$  coordenadas únicas.

# Cartagena 99



com no se hace responsable de la información

### Bases y coordenadas



#### Sea el subespacio vectorial

$$\mathbb{B} = \{(x, y, 0) : x \in \mathbb{R}\} = \{x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) : x, y \in \mathbb{R}\},\$$

- $\mathbf{B} = \{(1,0,0),(0,1,0),(1,1,0)\}$  es sistema generador pero no base al ser los vectores linealmente dependientes.
- Por ejemplo,  $\mathbf{v} = (1, 1, 0)$  admite dos representaciones

$$(1,1,0) = 1 \cdot (1,0,0) + 1 \cdot (0,1,0) + 0 \cdot (1,1,0)$$

$$(1,1,0) = \frac{1}{2} \cdot (1,0,0) + \frac{1}{2} \cdot (0,1,0) + \frac{1}{2} \cdot (1,1,0)$$

# Cartagena99



#### Base canónica de $\mathbb{R}^n$



El conjunto

$$\mathbf{E} = \{\mathbf{e}_1 = (1, 0, ..., 0), \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, ..., 0), ...., \mathbf{e}_n = (0, 0, 0, ..., 1)\}$$

es un sistema generador y linealmente independiente de  $\mathbb{R}^n$ ,

- luego base. • A  $\mathbf{E} = \{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n\}$  se le denomina base canónica de  $\mathbb{R}^n$ .
- Cuando denotamos un vector  $(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$  estamos considerando implícitamente dicha base.

$$(x_1,...,x_n) = x_1(1,0,...,0) + x_2(0,1,0,...,0) + ... + x_n(0,0,0,...,1)$$

