Cambios de base en $\mathbb{R}^n$

13. Dados los sistemas

$$\mathbf{A} = \{(1,1,0), (-1,0,1), (0,-1,1)\} \text{ y } \mathbf{B} = \{(-1,2,1), (1,1,1), (1,-1,1)\}$$

- *a) Probar que* **A** *y* **B** *son bases de* $\mathbb{R}^3$.
- *b) Señale la matrices de cambio de base de* **A** *a* **B**, *y de* **B** *a* **A** *respectivamente.*
- *c) Dado el vector* **v** *de coordenadas* $(1,-1,1)$ *en la base* **A**, *encontrar sus coordenadas en la base* **B**.
- *d) Dado el vector* **w** *de coordenadas* $(1,1,-1)$ *en la base* **B**, *encontrar sus coordenadas en la base* **A**.

Cambios de base en $\mathbb{R}^n$

Dados los sistemas

$\mathbf{A} = \{(1,1,0),(-1,0,1),(0,-1,1)\}$ *y* $\mathbf{B} = \{(-1,2,1),(1,1,1),(1,-1,1)\}$

a) Probar que **A** *y* **B** *son bases de* $\mathbb{R}^3$.

- **A** *y* **B** son bases ya que los determinantes de sus matrices asociado son no nulos

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2, \ |B| = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -4$$

Cambios de base en $\mathbb{R}^n$

Dados los sistemas

$$\mathbf{A} = \{(1,1,0),(-1,0,1),(0,-1,1)\} \text{ y } \mathbf{B} = \{(-1,2,1),(1,1,1),(1,-1,1)\}$$

a) Señale la matrices de cambio de base de **A** *a* **B**, *y de* **B** *a* **A** *respectivamente.*

Sabemos que

- $M_{\mathbf{A}\to\mathbf{E}} = A$, $M_{\mathbf{E}\to\mathbf{A}} = A^{-1}$
- $M_{\mathbf{B}\to\mathbf{E}} = B$, $M_{\mathbf{E}\to\mathbf{B}} = B^{-1}$

- Supongamos que X, X_A, X_B denotan las coordenadas de un vector genérico $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ respecto de la bases canónica **E** y las bases **A** y **B** respectivamente. Entonces

$$X_B = B^{-1}X, \quad X = AX_A$$

Cambios de bases en $\mathbb{R}^n$

- Supongamos que X, X_A, X_B denotan las coordenadas de un vector genérico $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ respecto de la bases canónica $\mathbf{E}$ y las bases $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ respectivamente. Entonces

$$X_B = B^{-1}X, \; X = AX_A$$

luego

$$X_B = B^{-1}X = B^{-1}(AX_A) = B^{-1}AX_A$$

- Podemos expresarlo como

$$M_{\mathbf{A}\to\mathbf{B}} = M_{\mathbf{E}\to\mathbf{B}} M_{\mathbf{A}\to\mathbf{E}} = B^{-1}A.$$

Cambios de base en $\mathbb{R}^n$

- Tenemos las bases

$$
\begin{aligned}
\mathbf{A} &= \{(1,1,0),(-1,0,1),(0,-1,1)\}\,,\\
\mathbf{B} &= \{(-1,2,1),(1,1,1),(1,-1,1)\}\,.
\end{aligned}
$$

- En este caso

$$
\begin{aligned}
M_{\mathbf{A}\to\mathbf{B}} &= B^{-1}A\\
&= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1\\ 2 & 1 & -1\\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2}\\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Cambios de base en $\mathbb{R}^n$

Luego

$$M_{\mathbf{A}\to\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{5}{4} & -1 & -\frac{3}{4} \\ -\frac{3}{4} & 1 & \frac{5}{4} \end{pmatrix}$$

(b) Dado el vector $\mathbf{v}$ *de coordenadas* $(1, -1, 1)$ *en la base* $\mathbf{A}$, *encontrar sus coordenadas en la base* $\mathbf{B}$.

- Aplicando la matriz

$$X_{\mathbf{B}} = M_{\mathbf{A}\to\mathbf{B}} X_{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{5}{4} & -1 & -\frac{3}{4} \\ -\frac{3}{4} & 1 & \frac{5}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Cambios de bases en $\mathbb{R}^n$

Tenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \{(1,1,0),(-1,0,1),(0,-1,1)\} \\ \mathbf{B} &= \{(-1,2,1),(1,1,1),(1,-1,1)\} \end{aligned}$$

y las coordenadas

$$x_{\mathbf{A}} = (1,-1,1)\,,\ x_{\mathbf{B}} = \left(-1, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

Finalmente queda comprobar que se refieren al mismo punto pasando a coordenadas canónicas:

- $-1\mathbf{b}_1 + \frac{3}{2}\mathbf{b}_2 - \frac{1}{2}\mathbf{b}_2 = -(-1,2,1) + \frac{3}{2}(1,1,1) - \frac{1}{2}(1,-1,1) = (2,0,0)$

Cambios de base en $\mathbb{R}^n$. Esquema general

- Dadas bases

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= \{\mathbf{a}_1 = (a_{11}, ..., a_{n1}), ..., \mathbf{a}_n = (a_{1n}, ..., a_{nn})\} \subset \mathbb{R}^n \\ \mathbf{B} &= \{\mathbf{b}_1 = (b_{11}, ..., b_{n1}), ..., \mathbf{b}_n = (b_{1n}, ..., b_{nn})\} \subset \mathbb{R}^n\end{aligned}$$

- Las matrices de cambio se pueden expresar en terminos de las matrices del sistema
  - $M_{\mathbf{A}\to\mathbf{B}} = M_{\mathbf{E}\to\mathbf{B}} M_{\mathbf{A}\to\mathbf{E}} = B^{-1}A.$
  - $M_{\mathbf{B}\to\mathbf{A}} = M_{\mathbf{A}\to\mathbf{B}}^{-1} = \left(B^{-1}A\right)^{-1} = A^{-1}B = M_{\mathbf{E}\to\mathbf{A}} M_{\mathbf{B}\to\mathbf{E}}.$