Manual de

Métodos Matemáticos I

Federico Finkel Morgenstern y Artemio González López

Madrid, octubre de 2012

Índice general

Capítulo 1

Funciones analíticas

1.1 Propiedades algebraicas de los números complejos

Definición 1.1. $\mathbb{C} = \left\{\mathbb{R}^2, +, \cdot\right\}$, con la **suma** y el **producto** definidos por

$$\boxed{\begin{aligned}(x_1, y_1) + (x_2, y_2) &= (x_1 + x_2, y_1 + y_2)\\ (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) &= (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1).\end{aligned}}$$

Justificación:

- La suma y la multiplicación de los pares de la forma $(x, 0) \in \mathbb{C}$ coinciden con la de los números reales $x \in \mathbb{R}$

  $\Longrightarrow$ podemos identificar el complejo $(x, 0)$ con el número real $x \in \mathbb{R}$

  $\Longrightarrow$ podemos identificar $\mathbb{R}$ con el subconjunto $\{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{C}$ (*eje real*)

  Nótese que para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ se tiene $\lambda(x, y) = (\lambda, 0)(x, y) = (\lambda x, \lambda y)$

- $\mathrm{i} \equiv (0, 1) \Longrightarrow \mathrm{i}^2 = \mathrm{i} \cdot \mathrm{i} = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) \equiv -1$

- $(x, y) = (x, 0) + y(0, 1) \equiv x + \mathrm{i}\, y$

  $$\Longrightarrow \quad \boxed{(x_1 + \mathrm{i}\, y_1)(x_2 + \mathrm{i}\, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + \mathrm{i}(x_1 y_2 + x_2 y_1)}\,,$$

  que es la fórmula usual para multiplicar los números complejos $x_1 + \mathrm{i}\, y_1$ y $x_2 + \mathrm{i}\, y_2$.

- Si $z = x + \mathrm{i}\, y$ $(x, y \in \mathbb{R})$, se define

  $$\operatorname{Re} z = x, \qquad \operatorname{Im} z = y$$

  (partes *real* e *imaginaria* del complejo z)

- Al ser $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ (como *conjuntos*), la **igualdad** en $\mathbb{C}$ se define mediante

  $$z \equiv x + \mathrm{i}\, y = w \equiv u + \mathrm{i}\, v \Longleftrightarrow x = u, y = v\,.$$

  En particular,

  $$z = x + \mathrm{i}\, y = 0 \Longleftrightarrow x = y = 0.$$

Proposición 1.2. $\mathbb{C}$ *es un* **cuerpo***: para todo $z, w, s \in \mathbb{C}$ se cumple*

$$\begin{aligned}
z + w &= w + z & z\, w &= w\, z\\
z + (w + s) &= (z + w) + s & z\,(w\, s) &= (z\, w)\, s\\
z + 0 &= z & 1\, z &= z\\
\exists -z \in \mathbb{C} \text{ t.q. } z + (-z) &= 0 & z \neq 0 \Longrightarrow \exists z^{-1} \in \mathbb{C} \text{ t.q. } z\, z^{-1} &= 1
\end{aligned}$$

$$z(w + s) = z\, w + z\, s.$$

Demostración. Obviamente, $z = x + \mathrm{i}\,y \implies -z = -x - \mathrm{i}\,y$. La existencia de inverso respecto del producto para todo $z = x + \mathrm{i}\,y \neq 0$ se deduce del siguiente cálculo:

$$\begin{aligned}
z^{-1} = u + \mathrm{i}v \implies z\,z^{-1} &= (x\,u - y\,v) + \mathrm{i}\,(x\,v + y\,u) = 1 \\
&\iff \begin{cases} x\,u - y\,v = 1 \\ y\,u + x\,v = 0 \end{cases} \\
&\iff u = \frac{x}{x^2+y^2}, \quad v = -\frac{y}{x^2+y^2} \quad (\text{nótese que } z \neq 0 \implies x^2+y^2 \neq 0) \\
&\iff z^{-1} = \frac{x}{x^2+y^2} - \mathrm{i}\,\frac{y}{x^2+y^2}.
\end{aligned}$$

Las demás propiedades se comprueban fácilmente a partir de la definición de las operaciones en $\mathbb{C}$. $\square$

- Como en todo cuerpo, los inversos $-z$ y z^{-1} (si $z \neq 0$) del número $z \in \mathbb{C}$ respecto de la suma y el producto son *únicos*.

Notación: $\dfrac{z}{w} \equiv z\,w^{-1}$, $\quad z^n = \underbrace{z \cdot z \cdot \cdots \cdot z}_{n \text{ veces}}$ $\quad (n \in \mathbb{N})$.

- $\mathbb{C}$ *no* es un cuerpo ordenado: si lo fuera,

$$\mathrm{i}^2 = \mathrm{i} \cdot \mathrm{i} = -1 \geqslant 0.$$

1.1.1 Raíces cuadradas (método algebraico)

Si $z = x + \mathrm{i}\,y$, queremos hallar todos los $w \equiv u + \mathrm{i}v \in \mathbb{C}$ tales que $w^2 = z$:

$$\begin{aligned}
w^2 = z \iff & u^2 - v^2 + 2\mathrm{i}uv = x + \mathrm{i}\,y \\
\iff & \begin{cases} u^2 - v^2 = x \\ 2\,u\,v = y \end{cases} \\
\implies & x^2 + y^2 = (u^2+v^2)^2 \implies u^2 + v^2 = \sqrt{x^2+y^2} \\
\implies & u^2 = \frac{1}{2}\Big(x + \sqrt{x^2+y^2}\Big), \quad v^2 = \frac{1}{2}\Big(-x + \sqrt{x^2+y^2}\Big)
\end{aligned}$$

Como (por la segunda ecuación) el signo de uv ha de coincidir con el de y, de esto se sigue que

$$w = \begin{cases} \pm\left(\sqrt{\frac{x+\sqrt{x^2+y^2}}{2}} + \mathrm{i}\,\operatorname{sgn} y\,\sqrt{\frac{-x+\sqrt{x^2+y^2}}{2}}\right), & y \neq 0 \\ \pm\sqrt{x}, & y = 0, \ x \geqslant 0 \\ \pm\mathrm{i}\sqrt{-x}, & y = 0, \ x < 0. \end{cases}$$

Las raíces cuadradas de un número complejo $z \neq 0$ son por tanto *dos* números complejos distintos (de signos opuestos). Las raíces cuadradas de z son *reales* si y sólo si $z \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, e **imaginarias puras** si y sólo si $z \in \mathbb{R}^-$.

Ejemplo: Las raíces cuadradas de $3 - 4\,\mathrm{i}$ son

$$\pm\left(\sqrt{\frac{8}{2}} - \mathrm{i}\sqrt{\frac{2}{2}}\right) = \pm(2 - \mathrm{i}).$$

- Cualquier ecuación cuadrática con coeficientes *complejos* se puede resolver utilizando la fórmula usual:

$$\boxed{a\,z^2 + b\,z + c = 0 \iff z = \frac{1}{2a}\left(-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}\right)}, \qquad a, b, c \in \mathbb{C}\,,\ a \neq 0,$$

  donde $\pm\sqrt{b^2 - 4ac}$ denota las dos raíces cuadradas del número complejo $b^2 - 4ac$. En efecto, basta completar el cuadrado:

$$a\,z^2 + b\,z + c = a\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{1}{4a}\,(b^2 - 4ac)$$

  y aplicar el resultado anterior sobre la existencia de raíces cuadradas en $\mathbb{C}$.

  Ejemplo 1.3. Las soluciones de la ecuación $z^2 - 8\mathrm{i}z - (19 - 4\mathrm{i}) = 0$ son los complejos

$$4\mathrm{i} \pm \sqrt{-16 + 19 - 4\mathrm{i}} = 4\mathrm{i} \pm \sqrt{3 - 4\mathrm{i}} = 4\mathrm{i} \pm (2 - \mathrm{i}) = \begin{cases} 2 + 3\mathrm{i} \\ -2 + 5\mathrm{i}\,. \end{cases}$$

- El teorema del *binomio de Newton* es válido en el campo complejo:

$$\boxed{(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}}, \qquad a, b \in \mathbb{C},\ n \in \mathbb{N}\,.$$

  En efecto, como en el caso real la demostración de esta identidad sólo utiliza las propiedades de cuerpo de los números complejos.

1.1.2 Módulo y conjugación

Geométricamente, los números complejos se pueden identificar con los puntos del *plano* haciendo corresponder al complejo $z = x + \mathrm{i}\,y$ el punto de coordenadas (x, y). De ahí que el conjunto $\mathbb{C}$ reciba el nombre de **plano complejo.** Es también corriente cuando se utiliza esta representación geométrica de $\mathbb{C}$ denominar *eje real* al eje horizontal y *eje imaginario* al vertical (fig. 1.1).

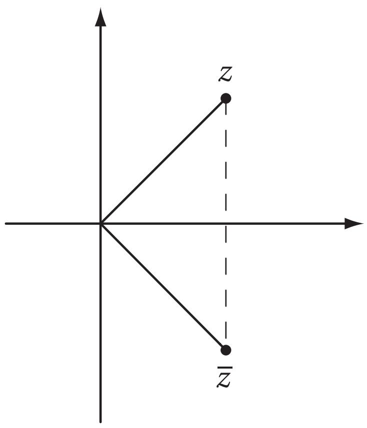

Figura 1.1: Plano complejo.

- Si $z = x + \mathrm{i}\,y \in \mathbb{C}$, se definen el *módulo* y el *complejo conjugado* de z respectivamente como sigue:

$$\begin{cases} |z| = \sqrt{x^2 + y^2} & \text{(distancia de } z \text{ al origen)} \\ \bar{z} = x - \mathrm{i}\,y & \text{(reflexión de } z \text{ respecto del eje real)} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z+\bar{z}), \qquad \operatorname{Im} z = \frac{1}{2\mathrm{i}}(z-\bar{z})}.$$

El número $z \in \mathbb{C}$ es *real* si y sólo $z = \bar{z}$, e *imaginario puro* si y sólo $z = -\bar{z}$.

- *Propiedades:*

  i) $\bar{\bar{z}} = z$

  ii) $\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$

  iii) $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w} \implies \overline{1/z} = 1/\bar{z}$ (si $z \neq 0$)

  iv) $|\bar{z}| = |z|$

  v) $z\bar{z} = |z|^2 \implies \begin{cases} z \neq 0 \implies z^{-1} = \dfrac{\bar{z}}{|z|^2} \\ |z| = 1 \iff \bar{z} = z^{-1} \end{cases}$

  vi) $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$ (elevar al cuadrado) $\implies \left|z^{-1}\right| = |z|^{-1}$ (si $z \neq 0$)

  vii) $w \neq 0 \implies \overline{z/w} = \bar{z}/\bar{w}, \quad |z/w| = |z| / |w|$ (consecuencia de iii) y vi))

  viii) $|\operatorname{Re} z| \leqslant |z|\,, \quad |\operatorname{Im} z| \leqslant |z|$ (i.e., $-|z| \leqslant \operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z \leqslant |z|$)

- *Desigualdad triangular:* $\boxed{|z+w| \leqslant |z| + |w|}$

  En efecto:

$$\begin{aligned} |z+w|^2 &= (z+w)(\overline{z+w}) = |z|^2 + |w|^2 + (z\bar{w} + \bar{z}w) = |z|^2 + |w|^2 + 2\operatorname{Re}(z\bar{w}) \\ &\leqslant |z|^2 + |w|^2 + 2\,|z\bar{w}| = |z|^2 + |w|^2 + 2\,|z|\,|w| = (|z| + |w|)^2. \end{aligned}$$

- Consecuencias:

  i) $||z| - |w|| \leqslant |z - w|$

  En efecto:

$$|z| = |(z-w) + w| \leqslant |z-w| + |w| \Longrightarrow |z| - |w| \leqslant |z-w|\ ,$$

  y cambiando z por w se obtiene la desigualdad $|w| - |z| \leqslant |z-w|$.

  ii) $|z| > |w| \implies \dfrac{1}{|z-w|} \leqslant \dfrac{1}{|z| - |w|}$

1.1.3 Argumento

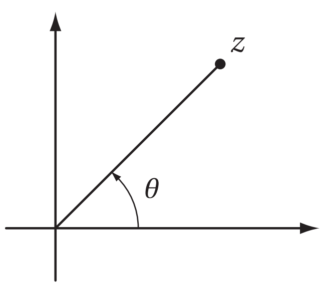

Figura 1.2: Definición de argumento.

- Dado $0 \neq z \in \mathbb{C}$, existe $\theta \in \mathbb{R}$ t.q.

$$z = |z|\,(\cos\theta + \mathrm{i}\operatorname{sen}\theta) \qquad \text{(cf. Fig. 1.2).}$$

Geométricamente, el número θ es el ángulo que forma el eje real positivo con el vector z, y está por tanto definido módulo un múltiplo entero de 2π. Por ejemplo,

$$z = \mathrm{i} \implies \theta \in \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \pm 2\pi, \frac{\pi}{2} \pm 4\pi, \dots\right\} = \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Definición 1.4. $\arg z$ (**argumento** de z): *cualquier* $\theta \in \mathbb{R}$ t.q. $z = |z|\,(\cos\theta + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\theta)$.

En otras palabras, $\arg z$ es *cualquiera* de los ángulos orientados formados por el eje real positivo con el vector z. Por tanto $\arg z$ toma *infinitos* valores, que difieren entre sí en un *múltiplo entero* de 2π. Nótese, en particular, que arg ***no** es una función*.
Ejemplo:

$$\arg \mathrm{i} \in \left\{\tfrac{\pi}{2} + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\}, \qquad \arg(-1-\mathrm{i}) \in \left\{\tfrac{5\pi}{4} + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\} = \left\{-\tfrac{3\pi}{4} + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

- Para que θ sea *único,* basta imponerle la condición adicional de que pertenezca a un cierto intervalo semiabierto I de longitud 2π (como $[0,2\pi)$, $(-\pi,\pi]$, $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, etc.). Escoger este intervalo I se conoce como tomar la **determinación** del argumento $\arg_I$. Nótese, en particular, que

$$\arg_I : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to I$$

es una *función*.

Definición 1.5. $\arg_I(z) \equiv$ *único* valor de $\arg z$ que pertenece al intervalo I

Ejemplo: $\arg_{[0,2\pi)}(-1-\mathrm{i}) = \frac{5\pi}{4}$, $\arg_{(-\pi,\pi]}(-1-\mathrm{i}) = -\frac{3\pi}{4}$.

- **Determinación principal** del argumento:

$$\boxed{\operatorname{Arg} \equiv \arg_{(-\pi,\pi]}}$$

Ejemplo:

z	1	$1+i$	i	$-1+\mathrm{i}$	-1	$-1-\mathrm{i}$	$-\mathrm{i}$	$1-\mathrm{i}$
$\operatorname{Arg} z$	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π	$-3\pi/4$	$-\pi/2$	$-\pi/4$

- Claramente, $\operatorname{Arg} : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to (-\pi,\pi]$ es una función *discontinua* en $\mathbb{R}^- \cup \{0\}$. Análogamente, $\arg_{[0,2\pi)}$ es discontinua en $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$. En general, la determinación $\arg_{[\theta_0,\theta_0+2\pi)}$ (ó $\arg_{(\theta_0,\theta_0+2\pi]}$) es discontinua en la semirrecta cerrada que forma un ángulo θ_0 con el eje real positivo.

- Forma *trigonométrica* ó *polar* de los números complejos:

$$z \neq 0 \implies z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\theta), \qquad r = |z|, \quad \theta = \arg z.$$

- $z, w \neq 0$; $z = w \iff \big(|z| = |w|, \quad \arg z = \arg w \mod 2\pi\big)$.

- Interpretación geométrica del producto en $\mathbb{C}$: si $z_k = r_k(\cos\theta_k + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\theta_k) \neq 0$ ($k = 1,2$) entonces

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1(\cos\theta_1 + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\theta_1)\, r_2(\cos\theta_2 + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\theta_2) \\ &= r_1 r_2 \left[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \mathrm{sen}\,\theta_1\,\mathrm{sen}\,\theta_2) + \mathrm{i}(\cos\theta_1\,\mathrm{sen}\,\theta_2 + \mathrm{sen}\,\theta_1\cos\theta_2)\right] \\ &= r_1 r_2\left[\cos(\theta_1+\theta_2) + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}(\theta_1+\theta_2)\right] \end{aligned}$$

De este cálculo se sigue que $|z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2|$ (propiedad vi) de la pág. 4), junto con

$$\boxed{\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2 \mod 2\pi}. \tag{1.1}$$

- Nótese que, en general, $\operatorname{Arg}(z_1 z_2) \neq \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2$. Por ej.,

$$\operatorname{Arg}(-\mathrm{i}) = -\frac{\pi}{2} \neq \operatorname{Arg}(-1) + \operatorname{Arg}\mathrm{i} = \frac{3\pi}{2}\,.$$

- Consecuencias: si $z, w \neq 0$ se cumple

$$\begin{aligned}
(zz^{-1} = 1 \implies) &\qquad \arg(z^{-1}) = -\arg z \mod 2\pi \\
(z\bar{z} = |z|^2 \geqslant 0 \implies) &\qquad \arg(\bar{z}) = -\arg z \mod 2\pi \\
\implies &\qquad \arg(z/w) = \arg z - \arg w \mod 2\pi.
\end{aligned}$$

1.1.4 Fórmula de de Moivre

- Si $z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\operatorname{sen}\theta)$, a partir de (1.1) se demuestra por inducción la *fórmula de de Moivre*

$$\boxed{z^n = r^n\big[\cos(n\theta) + \mathrm{i}\operatorname{sen}(n\theta)\big], \quad n \in \mathbb{N}}\,.$$

- $z^{-1} = r^{-1}\big[\cos(-\theta) + \mathrm{i}\operatorname{sen}(-\theta)\big] \implies$ la fórmula vale para todo $n \in \mathbb{Z}$.
- La fórmula de de Moivre permite expresar $\cos(n\theta)$ y $\operatorname{sen}(n\theta)$ como un polinomio en $\cos\theta$ y $\operatorname{sen}\theta$. Por ejemplo:

$$\begin{aligned}
(\cos\theta + \mathrm{i}\operatorname{sen}\theta)^3 &= \cos(3\theta) + \mathrm{i}\operatorname{sen}(3\theta) \\
&= (\cos^3\theta - 3\cos\theta\operatorname{sen}^2\theta) + \mathrm{i}(3\cos^2\theta\operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen}^3\theta)
\end{aligned}$$

$$\implies \begin{cases} \cos(3\theta) = \cos^3\theta - 3\cos\theta\operatorname{sen}^2\theta \\[2ex] \operatorname{sen}(3\theta) = 3\cos^2\theta\operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen}^3\theta. \end{cases}$$

1.1.5 Raíces n-ésimas

Si $z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\operatorname{sen}\theta) \neq 0$ y $n \in \mathbb{N}$, las raíces n-ésimas de z son las soluciones $w \in \mathbb{C}$ de la ecuación $w^n = z$:

$$\begin{aligned}
w \neq 0 \implies & \ w = \rho(\cos\varphi + \mathrm{i}\operatorname{sen}\varphi) \\
w^n = \rho^n\big[\cos(n\varphi) &+ \mathrm{i}\operatorname{sen}(n\varphi)\big] = r(\cos\theta + \mathrm{i}\operatorname{sen}\theta) \\
\iff & \begin{cases} \rho^n = r \iff \rho = \sqrt[n]{r} \equiv r^{1/n} \\[2ex] n\varphi = \theta + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\iff \boxed{w = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + \mathrm{i}\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right], \quad k = 0, 1, \dots, n-1} \tag{1.2}$$

(ya que k y $k + ln$, con $l \in \mathbb{Z}$, dan lugar al mismo número w).

$\therefore$ *Un número complejo no nulo tiene n raíces n-ésimas distintas. En particular, $\sqrt[n]{z}$ no es una función.*

Ejemplo: las raíces cúbicas de i son los números

$$\begin{aligned}
w &= \cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}\right), \quad k = 0, 1, 2 \\
\iff w &= \frac{1}{2}(\sqrt{3} + \mathrm{i}),\ \frac{1}{2}(-\sqrt{3} + \mathrm{i}),\ -\mathrm{i}.
\end{aligned}$$

- Geométricamente, las n raíces n-ésimas de un número $z \neq 0$ son los vértices de un polígono regular de n lados inscrito en la circunferencia de centro 0 y radio $\sqrt[n]{|z|}$.
- En particular, las n raíces n-ésimas de la unidad ($z = 1$) son los números

$$\varepsilon_{n,k} = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\left(\frac{2k\pi}{n}\right), \quad k = 0, 1, \ldots, n-1$$

- Nótese que por la fórmula de de Moivre, $\varepsilon_{n,k} = (\varepsilon_n)^k$, siendo $\varepsilon_n \equiv \varepsilon_{n,1} = \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right)$.

Ejemplo: las raíces sextas de la unidad son

$$\begin{aligned}\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]^k &= \frac{1}{2^k}(1+\mathrm{i}\sqrt{3})^k, \quad k = 0, 1, \ldots, 5\\ &= 1,\ \frac{1}{2}(1+\mathrm{i}\sqrt{3}),\ \frac{1}{2}(-1+\mathrm{i}\sqrt{3}),\ -1,\ -\frac{1}{2}(1+\mathrm{i}\sqrt{3}),\ \frac{1}{2}(1-\mathrm{i}\sqrt{3}).\end{aligned}$$

Ejercicio. Sea $z \in \mathbb{C}$ no nulo.

i) Probar que sus raíces n-ésimas están dadas por

$$\omega_0 \cdot (\varepsilon_n)^k, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1,$$

siendo ω_0 una raíz n-ésima cualquiera de z.

ii) Probar que la suma de todas las raíces n-ésimas de z es 0.

1.2 Funciones elementales

1.2.1 Función exponencial

Si $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^t &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}\\ \cos t &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k}}{(2k)!}\\ \mathrm{sen}\, t &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!}.\end{aligned}$$

Si $z = x + \mathrm{i}\,y \in \mathbb{C}$ (con $x, y \in \mathbb{R}$), la propiedad $\mathrm{e}^{t_1+t_2} = \mathrm{e}^{t_1}\mathrm{e}^{t_2}$ sugiere definir $\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^x\mathrm{e}^{\mathrm{i}y}$. A su vez, procediendo formalmente se obtiene

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{\mathrm{i}y} &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{i}^n \frac{y^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{i}^{2k} \frac{y^{2k}}{(2k)!} + \mathrm{i} \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{i}^{2k} \frac{y^{2k+1}}{(2k+1)!}\\ &= \cos y + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\, y \quad (\text{ya que } \mathrm{i}^{2k} = (\mathrm{i}^2)^k = (-1)^k).\end{aligned}$$

Definición 1.6. Para todo $z = x + \mathrm{i}\,y \in \mathbb{C}$ (con $x, y \in \mathbb{R}$), definimos

$$\boxed{\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^x(\cos y + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\, y)}\,.$$

Nota: Si $z \in \mathbb{R}$, la exponencial compleja se reduce obviamente a la exponencial real.

Valores particulares:

$$\boxed{\mathrm{e}^0 = 1,\ \ \mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}/2} = \mathrm{i},\ \ \mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}} = -1,\ \ \mathrm{e}^{3\pi\mathrm{i}/2} = -\mathrm{i},\ \ \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}} = 1}\,.$$

Propiedades: Para todo $z, w \in \mathbb{C}$ se tiene

i) $|\mathrm{e}^z| = \mathrm{e}^{\operatorname{Re} z}$, $\quad \arg(\mathrm{e}^z) = \operatorname{Im} z \mod 2\pi$, $\quad \overline{\mathrm{e}^z} = \mathrm{e}^{\bar{z}}$.

ii) $\mathrm{e}^{z+w} = \mathrm{e}^z \mathrm{e}^w$.

iii) $\mathrm{e}^z \neq 0$, para todo $z \in \mathbb{C}$.

iv) $\mathrm{e}^z = 1 \iff z = 2k\pi\mathrm{i}$, con $k \in \mathbb{Z}$.

v) e^z es una función periódica, cuyos períodos son los números $2k\pi\mathrm{i}$ con $k \in \mathbb{Z}$.

Demostración:

i) Consecuencia inmediata de la definición.

ii) Si $z = x + \mathrm{i}y$, $w = u + \mathrm{i}v$, de la propiedad anterior y la ecuación (1.1) se sigue que

$$\mathrm{e}^z \mathrm{e}^w = \mathrm{e}^x \mathrm{e}^u \left[\cos(y+v) + \mathrm{i} \operatorname{sen}(y+v)\right] = \mathrm{e}^{x+u} \left[\cos(y+v) + \mathrm{i} \operatorname{sen}(y+v)\right] = \mathrm{e}^{z+w}.$$

iii) $\mathrm{e}^z \mathrm{e}^{-z} = \mathrm{e}^0 = 1 \implies (\mathrm{e}^z)^{-1} = \mathrm{e}^{-z}$.

iv) $\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^x(\cos y + \mathrm{i} \operatorname{sen} y) = 1 \iff \mathrm{e}^x = 1,\ y = 0 \mod 2\pi \iff x = 0,\ y = 2k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$.

v) $\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{z+w} \iff \mathrm{e}^w = 1 \iff w = 2k\pi\mathrm{i}\ (k \in \mathbb{Z})$.

- $z = |z|\, \mathrm{e}^{\mathrm{i} \arg z}$.
- De la definición de la exponencial compleja y la fórmula (1.2) se sigue que las raíces n-ésimas de $z \neq 0$ están dadas por

$$\boxed{\sqrt[n]{|z|}\, \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{n}(\arg z + 2k\pi)}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1} \tag{1.3}$$

1.2.2 Funciones trigonométricas e hiperbólicas

Si y es real entonces

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}y} = \cos y + \mathrm{i} \operatorname{sen} y, \quad \mathrm{e}^{-\mathrm{i}y} = \cos y - \mathrm{i} \operatorname{sen} y \implies \cos y = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}y} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}y}\right), \quad \operatorname{sen} y = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}y} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}y}\right).$$

Definición 1.7. Para todo $z \in \mathbb{C}$ se define

$$\boxed{\cos z = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}\right), \quad \operatorname{sen} z = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}\right)}.$$

Evidentemente, si z es real $\cos z$ y $\operatorname{sen} z$ se reducen a las correspondientes funciones reales.

Propiedades: para todo $z, w \in \mathbb{C}$ se tiene

i) $\cos(-z) = \cos(z)$, $\quad \operatorname{sen}(-z) = -\operatorname{sen} z$.

ii) $\overline{\cos z} = \cos \bar{z}$, $\quad \overline{\operatorname{sen} z} = \operatorname{sen} \bar{z}$.

iii) $\cos(z+w) = \cos z \cos w - \operatorname{sen} z \operatorname{sen} w$, $\quad \operatorname{sen}(z+w) = \operatorname{sen} z \cos w + \cos z \operatorname{sen} w$.

iv) $\cos z = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} \pm z\right)$.

v) $\cos^2 z + \operatorname{sen}^2 z = 1$.

vi) $\operatorname{sen} z = 0 \iff z = k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$, $\cos z = 0 \iff z = \frac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

vii) $\cos z$ y $\operatorname{sen} z$ son funciones periódicas de período $2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$.

Demostración:

i) Inmediato.

ii) Consecuencia de $\overline{\mathrm{e}^{w}} = \mathrm{e}^{\overline{w}}$.

iii) Por ejemplo,

$$\begin{aligned}\cos z \cos w - \operatorname{sen} z \operatorname{sen} w &= \frac{1}{4}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}\right)\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}w} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}w}\right) + \frac{1}{4}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}\right)\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}w} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}w}\right)\\ &= \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}\mathrm{e}^{\mathrm{i}w} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}w}) = \cos(z+w).\end{aligned}$$

iv) Caso particular del apartado iii).

v) Hacer $w = -z$ en la fórmula para $\cos(z+w)$.

vi) $\operatorname{sen} z = 0 \iff \mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z} = 0 \iff \mathrm{e}^{2\mathrm{i}z} = 1 \iff 2\mathrm{i}z = 2k\pi\mathrm{i}$ $(k \in \mathbb{Z}) \iff z = k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$. Del apartado iv) se sigue la fórmula correspondiente para los ceros de cos.

vii) Por el apartado iv), basta probar la afirmación para la función sen. De la identidad

$$\operatorname{sen}(z+w) - \operatorname{sen} z \equiv \operatorname{sen}\left(z + \frac{w}{2} + \frac{w}{2}\right) - \operatorname{sen}\left(z + \frac{w}{2} - \frac{w}{2}\right) = 2\operatorname{sen}\left(\frac{w}{2}\right)\cos\left(z + \frac{w}{2}\right)$$

se sigue que $\operatorname{sen}(z+w) - \operatorname{sen} z = 0$ para *todo* z si y sólo si $\operatorname{sen}(w/2) = 0$ (tomar $z = -w/2$). Por el apartado anterior, esto es equivalente a que w sea un múltiplo entero de 2π.

Como en el caso real, a partir de sen y cos se definen las demás funciones trigonométricas:

$$\begin{aligned}\tan z &= \frac{\operatorname{sen} z}{\cos z}, \quad \sec z = \frac{1}{\cos z} \qquad \left(z \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right);\\ \cot z &= \frac{\cos z}{\operatorname{sen} z} = \frac{1}{\tan z}, \quad \csc z = \frac{1}{\operatorname{sen} z} \qquad (z \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}).\end{aligned}$$

Funciones hiperbólicas: para todo $z \in \mathbb{C}$ se define

$$\boxed{\cosh z = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{z} + \mathrm{e}^{-z}\right), \quad \operatorname{senh} z = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{z} - \mathrm{e}^{-z}\right)}.$$

$\implies$ $\boxed{\cosh z = \cos(\mathrm{i}z), \quad \operatorname{senh} z = -\mathrm{i}\operatorname{sen}(\mathrm{i}z)}$

- De estas igualdades se deducen las propiedades de las funciones hiperbólicas. Por ejemplo:

$$\cosh^2 z - \operatorname{senh}^2 z = \cos^2(\mathrm{i}z) + \operatorname{sen}^2(\mathrm{i}z) = 1.$$

- Las demás funciones hiperbólicas se definen análogamente al caso trigonométrico. Por ejemplo,

$$\tanh z \equiv \frac{\operatorname{senh} z}{\cosh z} = -\mathrm{i}\tan(\mathrm{i}z) \quad \left(z \neq \frac{\pi\mathrm{i}}{2} + k\pi\mathrm{i},\ k \in \mathbb{Z}\right), \quad \text{etc.}$$

- $\operatorname{sen} z = \operatorname{sen}(x + \mathrm{i}y) = \operatorname{sen} x \cos(\mathrm{i}y) + \cos x \operatorname{sen}(\mathrm{i}y) = \operatorname{sen} x \cosh y + \mathrm{i}\cos x \operatorname{senh} y$.

  En particular, nótese que $\operatorname{sen} z$ es real si z es real, o si $z = \frac{\pi}{2} + \mathrm{i}y + k\pi$ con $y \in \mathbb{R}$ arbitrario y $k \in \mathbb{Z}$. Análogamente, $\cos z$ es real si $z \in \mathbb{R}$, o si $z = \mathrm{i}y + k\pi$ con $y \in \mathbb{R}$ arbitrario y $k \in \mathbb{Z}$.

Ejercicio. Si $z = x + \mathrm{i}y$ (con $x, y \in \mathbb{R}$), probar que

$$|\operatorname{sen} z|^2 = \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{senh}^2 y, \qquad |\cos z|^2 = \cos^2 x + \operatorname{senh}^2 y.$$

Deducir las desigualdades $|\operatorname{senh} y| \leqslant |\operatorname{sen} z| \leqslant \cosh y$, $|\operatorname{senh} y| \leqslant |\cos z| \leqslant \cosh y$. En particular, nótese que sen y cos *no están acotadas* en $\mathbb{C}$.

1.2.3 Logaritmos

- En $\mathbb{R}$, $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ (donde $\exp(t) \equiv \mathrm{e}^t$) es una aplicación biyectiva. Su inversa es la función $\log : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$. Por definición,

$$\log x = y \iff x = \mathrm{e}^y \quad (\implies x > 0).$$

- En $\mathbb{C}$, exp *no* es invertible al no ser inyectiva (por ser periódica). Por definición, los posibles logaritmos de $z \in \mathbb{C}$ son *todos* los números complejos w tales que $\mathrm{e}^w = z$. Se tiene entonces:

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^w = z \quad &\implies \quad z \neq 0;\\
w = u + \mathrm{i}v \quad &\implies \quad \mathrm{e}^u(\cos v + \mathrm{i}\operatorname{sen} v) = z \neq 0\\
&\iff \begin{cases} \mathrm{e}^u = |z| \iff u = \log|z| \\ v = \arg z \mod 2\pi \end{cases}\\
&\iff w = \log|z| + \mathrm{i}\arg z \mod 2\pi\mathrm{i}.
\end{aligned}$$

Si $z \neq 0$, la ecuación $\mathrm{e}^w = z$ tiene por tanto *infinitas* soluciones, que difieren entre sí en múltiplos enteros de $2\pi\mathrm{i}$. A cada uno de estos (infinitos) w se les denomina **logaritmos** de $z \neq 0$. En otras palabras,

$$\boxed{z \neq 0 \implies \log z = \log|z| + \mathrm{i}\arg z + 2k\pi\mathrm{i}, \quad k \in \mathbb{Z}}\,.$$

Nótese, en particular, que log (al igual que arg) *no* es una función.

- Ejemplo:

$$\log(-2\mathrm{i}) = \log 2 - \frac{\pi\mathrm{i}}{2} + 2k\pi\mathrm{i}\,, \quad k \in \mathbb{Z}\,,$$

donde $\log 2 \in \mathbb{R}$ es el logaritmo *real* de 2.

Notación: En general, si $x \in \mathbb{R}^+$ denotaremos por $\log x$ el logaritmo real de x.

Definición 1.8. Si I es un intervalo semiabierto de longitud 2π, se define la **determinación** I del logaritmo mediante

$$\boxed{\log_I z = \log|z| + \mathrm{i}\arg_I z, \qquad \forall z \neq 0}\,.$$

Por ejemplo, $\log_{[0,2\pi)}(-2\mathrm{i}) = \log 2 + \frac{3\pi\mathrm{i}}{2}$.

- Nótese que $\log_I : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} s \in I\} \equiv \mathbb{R} \times I$ es una *función.*
- La **determinación principal** del logaritmo se define por

$$\boxed{\mathrm{Log} = \log_{(-\pi,\pi]}}\,.$$

Ejemplo: $\mathrm{Log}(-2\mathrm{i}) = \log 2 - \dfrac{\pi\mathrm{i}}{2}$, $\mathrm{Log}(-1) = \pi\mathrm{i}$, $\mathrm{Log}(-1-\mathrm{i}) = \dfrac{1}{2}\log 2 - \dfrac{3\pi\mathrm{i}}{4}$.

Propiedades:

i) Para todo $z \neq 0$, $\mathrm{e}^{\log_I z} = z$.

ii) $\log_I(\mathrm{e}^w) = w \mod 2\pi\mathrm{i}$. En particular, $\log_I(\mathrm{e}^w) = w \iff \operatorname{Im} w \in I$.

iii) $\log_I : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \times I$ es biyectiva, siendo su inversa la función $\exp : \mathbb{R} \times I \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ definida por $\exp(z) = \mathrm{e}^z$.

iv) $z, w \neq 0 \implies \log_I(z \cdot w) = \log_I z + \log_I w \mod 2\pi\mathrm{i}$.

Demostración:

i) $z \neq 0 \Longrightarrow \mathrm{e}^{\log_I z} = \mathrm{e}^{\log|z| + \mathrm{i}\arg_I z} = \mathrm{e}^{\log|z|}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\arg_I z} = |z|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\arg_I z} = z$.

ii) Si $w = u + \mathrm{i}v$ entonces

$$\log_I(\mathrm{e}^w) = \log(\mathrm{e}^u) + \mathrm{i}\arg_I(\mathrm{e}^w) = u + \mathrm{i}v \equiv w \mod 2\pi\mathrm{i}\,.$$

ya que $|\mathrm{e}^w| = \mathrm{e}^u$, $\arg_I(\mathrm{e}^w) = \operatorname{Im} w \mod 2\pi$. Por otra parte, del cálculo anterior se sigue que

$$\log_I(\mathrm{e}^w) = w \Longleftrightarrow \arg_I(\mathrm{e}^w) = v \Longleftrightarrow v \equiv \operatorname{Im} w \in I\,.$$

iii) Para establecer la biyectividad de $\log_I$, hay que probar que para todo w con $\operatorname{Im} w \in I$ existe un único $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tal que $\log_I z = w$. Esto es cierto por los apartados anteriores, siendo $z = \mathrm{e}^w \equiv \exp(w)$.

iv) Las exponenciales de ambos miembros coinciden; por tanto, esta propiedad se sigue de la propiedad ii). Otra forma de deducirla es observando que

$$\begin{aligned}
\log_I(zw) &= \log|zw| + \mathrm{i}\arg_I(zw)\\
&= \log|z| + \log|w| + \mathrm{i}(\arg_I z + \arg_I w) \mod 2\pi\mathrm{i}\\
&= (\log|z| + \mathrm{i}\arg_I z) + (\log|w| + \mathrm{i}\arg_I w) \mod 2\pi\mathrm{i}\\
&\equiv \log_I z + \log_I w \mod 2\pi\mathrm{i}.
\end{aligned}$$

Nota: En general, $\operatorname{Log}(zw) \neq \operatorname{Log} z + \operatorname{Log} w$. Por ejemplo,

$$\operatorname{Log}(-\mathrm{i}) = -\frac{\pi\mathrm{i}}{2} \neq \operatorname{Log}(-1) + \operatorname{Log}\mathrm{i} = \pi\mathrm{i} + \frac{\pi\mathrm{i}}{2} = \frac{3\pi\mathrm{i}}{2}.$$

1.2.4 Potencias

Si $a, b \in \mathbb{C}$ y $a \neq 0, \mathrm{e}$, definimos

$$\boxed{a^b = \mathrm{e}^{b\log a}\,, \quad \text{donde} \quad \log a = \log_I a + 2k\pi\mathrm{i},\ \ k \in \mathbb{Z}}\,.$$

Por tanto, en general a^b denota un *conjunto* de números complejos:

$$a^b = \mathrm{e}^{2kb\pi\mathrm{i}}\mathrm{e}^{b\log_I a}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Más concretamente, se demuestra que:

i) $b \in \mathbb{Z} \implies a^b$ tiene un valor *único*:

$$\begin{cases}
\underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{b \text{ veces}} & \text{si } b > 0,\\
1\,, & \text{si } b = 0\\
\underbrace{a^{-1} \cdot a^{-1} \cdot \cdots \cdot a^{-1}}_{-b \text{ veces}}\,, & \text{si } b < 0\,.
\end{cases}$$

ii) Si $b = p/q \in \mathbb{Q}$, con $p \in \mathbb{Z}$ y $1 < q \in \mathbb{N}$ primos entre sí, entonces $a^b = a^{p/q}$ toma exactamente q valores (las q raíces q-ésimas de a^p).

iii) Si $b \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}$, a^b tiene infinitos valores que difieren entre sí en un factor de la forma $\mathrm{e}^{2kb\pi \mathrm{i}}$, con $k \in \mathbb{Z}$.

Ejemplo:

$$\begin{aligned}(-1+\mathrm{i})^{\mathrm{i}} &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}[\operatorname{Log}(-1+\mathrm{i})+2k\pi \mathrm{i}]} = \mathrm{e}^{-2k\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{1}{2}\log 2+\frac{3\pi \mathrm{i}}{4}\right)} \quad (k \in \mathbb{Z})\\ &= \mathrm{e}^{\frac{5\pi}{4}+2n\pi}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{2}\log 2} \quad (n \in \mathbb{Z}).\end{aligned}$$

- Si $a \neq 0, \mathrm{e}$, cada determinación de log define una *función* $a_I^z \equiv \mathrm{e}^{z \log_I a}$.

Ejercicio. Dados $a, b \in \mathbb{C}$ con $a \neq 0, \mathrm{e}$, estudiar si se cumple la igualdad

$$a^{b+c} = a^b a^c.$$

1.3 Ecuaciones de Cauchy–Riemann

1.3.1 Conceptos topológicos básicos

i) Un **entorno** de $a \in \mathbb{C}$ es cualquier disco abierto de centro $a \in \mathbb{C}$ y radio $r > 0$

$$D(a; r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| < r\}.$$

Denotaremos por $\overline{D}(a; r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| \leqslant r\}$ el correspondiente disco cerrado.

ii) **Entorno perforado** de $a \in \mathbb{C} \equiv D(a; r) - \{a\} = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - a| < r\}$.

iii) $A \subset \mathbb{C}$ es **abierto** si contiene un entorno de cada uno de sus puntos:

$$\forall a \in A,\ \exists r > 0 \quad \text{t.q.} \quad D(a; r) \subset A.$$

iv) $A \subset \mathbb{C}$ **cerrado** $\iff \mathbb{C} \setminus A$ es abierto.

v) $A \subset \mathbb{C}$ es **compacto** $\iff A$ es cerrado y **acotado** (se dice que A es acotado si $\exists R > 0$ t.q. $A \subset D(0; R)$).

vi) $A \subset \mathbb{C}$ *abierto* es **conexo** si para todo par de puntos $z, w \in A$ hay una curva *continua* $\gamma : [0, 1] \to A$ t.q. $\gamma(0) = z$, $\gamma(1) = w$. [*Nota:* de hecho, se puede demostrar que en la definición anterior se puede sustituir la palabra “continua” por “diferenciable” o incluso C^∞.]

vii) Una **región** es un subconjunto abierto conexo y no vacío de $\mathbb{C}$.

1.3.2 Límites

Notación:

$$\begin{cases} f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ z = x + \mathrm{i}y \mapsto f(z) \equiv u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y). \end{cases}$$

Nota: La notación $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *no* implica que f esté definida en todo $\mathbb{C}$.

- $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ (la parte real e imaginaria de f, resp.) son funciones escalares *reales.*

Definición 1.9. Si $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ está definida en un entorno perforado de $a \in \mathbb{C}$ y $l \in \mathbb{C}$, diremos que $\lim_{z \to a} f(z) = l$ si

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 \ \text{ t.q. } \ 0 < |z - a| < \delta \implies |f(z) - l| < \varepsilon.$$

- Al ser el módulo del número complejo $w = u + \mathrm{i}v$ igual a la norma del vector $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, la definición anterior de límite coincide con la usual para una función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

Propiedades:

i) Si existe $\lim_{z\to a} f(z)$, dicho límite es único.

ii) $\lim_{z\to a} f(z) = l \iff \lim_{(x,y)\to a} u(x, y) = \operatorname{Re} l$ y $\lim_{(x,y)\to a} v(x, y) = \operatorname{Im} l$.

iii) $\exists \lim_{z\to a} f(z), \lim_{z\to a} g(z) \implies \lim_{z\to a} [f(z) + g(z)] = \lim_{z\to a} f(z) + \lim_{z\to a} g(z)$.

iv) $\exists \lim_{z\to a} f(z), \lim_{z\to a} g(z) \implies \lim_{z\to a} [f(z)g(z)] = \lim_{z\to a} f(z) \cdot \lim_{z\to a} g(z)$.

v) $\exists \lim_{z\to a} g(z) \neq 0 \implies \lim_{z\to a} \dfrac{1}{g(z)} = \dfrac{1}{\lim_{z\to a} g(z)}$.

Demostración:
i)–iii) son propiedades conocidas de los límites de funciones $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$
iv)–v) se demuestran como en el caso real, reemplazando el valor absoluto por el módulo.

1.3.3 Continuidad

Definición 1.10. Supongamos que $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ está definida en un entorno de $a \in \mathbb{C}$. Diremos que f es **continua** en a si

$$\lim_{z\to a} f(z) = f(a)\,.$$

Diremos que $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es continua en $A \subset \mathbb{C}$ si y sólo si f es continua en todos los puntos de A.

Propiedades:

i) f y g continuas en $a \implies f + g$ y fg continuas en a.

ii) Si, además, $g(a) \neq 0$, entonces f/g es continua en a.

iii) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ continua en a y $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ continua en $f(a) \implies h \circ f$ continua en a.

Demostración:
i)–ii) son consecuencia inmediata de las propiedades de los límites iii)–v), mientras que iii) se demuestra como en el caso de funciones $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

- Los *polinomios* y las *funciones racionales* son funciones continuas en todos los puntos de su dominio.

1.3.4 Derivabilidad

Definición 1.11.

- $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida en un *entorno* de $a \in \mathbb{C}$ es **derivable** en a si existe

$$\boxed{\lim_{z\to a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a} \equiv f'(a)}\,.$$

El número $f'(a) \in \mathbb{C}$ se denomina **derivada** de f en a.

- $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es **analítica** (u **holomorfa**) en un *abierto* A si es derivable en todos los puntos de A.
- f es analítica en un conjunto *arbitrario* B si es analítica en un abierto $A \supset B$ o, equivalentemente, si es analítica en un entorno de cada punto de B.

En particular, f es analítica en un punto $a \in \mathbb{C}$ si es derivable en un *entorno* de a. Nótese, por tanto, que f *analítica en* a es más fuerte que f *derivable en* a.

Proposición 1.12. *$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ derivable en $a \in A \implies f$ continua en a.*

Demostración. En efecto,

$$\lim_{z\to a}[f(z) - f(a)] = \lim_{z\to a}\left[\frac{f(z) - f(a)}{z - a} \cdot (z - a)\right] = \lim_{z\to a}\frac{f(z) - f(a)}{z - a} \cdot \lim_{z\to a}(z-a) = f'(a)\cdot 0 = 0.$$

□

Propiedades algebraicas:
Si $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ y $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ son derivables en $z \in \mathbb{C}$, y $a, b \in \mathbb{C}$, se tiene:

i) $af + bg$ es derivable en z, siendo $(af + bg)'(z) = af'(z) + bg'(z)$ (*linealidad*).

ii) fg es derivable en z, siendo $(fg)'(z) = f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$ (*regla de Leibniz*).

iii) Si $g(z) \neq 0$, f/g es derivable en z, siendo

$$(f/g)'(z) = \frac{g(z)f'(z) - f(z)g'(z)}{g(z)^2}.$$

- Los polinomios y las funciones racionales son derivables en todos los puntos de su dominio, y sus derivadas se calculan como en el caso real.

1.3.5 Ecuaciones de Cauchy–Riemann

- Si $a = a_1 + \mathrm{i}a_2 \in \mathbb{C}$, denotaremos por $M_a : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la aplicación lineal definida por

$$M_a \cdot z = a\,z\,, \qquad \forall z \in \mathbb{R}^2 \equiv \mathbb{C}\,.$$

Al ser

$$M_a \cdot (1,0) \equiv M_a \cdot 1 = a \equiv (a_1, a_2)\,, \qquad M_a \cdot (0,1) \equiv M_a \cdot \mathrm{i} = \mathrm{i}a = -a_2 + \mathrm{i}a_1 \equiv (-a_2, a_1)\,,$$

la matriz de M_a en la base canónica de $\mathbb{R}^2$ es $\begin{pmatrix} a_1 & -a_2 \\ a_2 & a_1 \end{pmatrix}$.

- Recordemos que una función $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida en un entorno de $z_0 \in \mathbb{C}$ es diferenciable *en sentido real* en z_0 si existe una *aplicación lineal* $Df(z_0) : \mathbb{R}^2 \equiv \mathbb{C} \to \mathbb{R}^2 \equiv \mathbb{C}$ tal que

$$\boxed{\lim_{z\to z_0}\frac{|f(z) - f(z_0) - Df(z_0)\cdot(z - z_0)|}{|z - z_0|} = 0}\,.$$

(Nótese de nuevo que el *módulo* de $z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}$ es la *norma* del correspondiente vector $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.) A la aplicación $Df(z_0)$ se le denomina *derivada en sentido real* de f en z_0. La matriz de $Df(z_0)$ en la base canónica de $\mathbb{R}^2$, llamada la *matriz jacobiana* de f en z_0, está dada por

$$Jf(z_0) = \begin{pmatrix} u_x(z_0) & u_y(z_0) \\ v_x(z_0) & v_y(z_0) \end{pmatrix},$$

donde hemos utilizado la notación habitual $u_x \equiv \dfrac{\partial u}{\partial x}$, y análogamente u_y, v_x, v_y.

Teorema 1.13. *Sea* $f = u + \mathrm{i}v : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *definida en un entorno de* $z_0 = x_0 + \mathrm{i}y_0 \in \mathbb{C}$. *Entonces* f *es derivable en* z_0 si y sólo si *se cumplen las* dos *condiciones siguientes:*

i) f *es diferenciable* en sentido real *en* (x_0, y_0).

ii) *Se verifican las* **ecuaciones de Cauchy–Riemann**

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0), \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0).$$

Demostración.
$\Longrightarrow$) f es diferenciable (en sentido real) en $z_0 = (x_0, y_0)$ con derivada $Df(z_0) = M_{f'(z_0)}$, ya que

$$\begin{aligned}\lim_{z\to z_0} \frac{|f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)|}{|z - z_0|} &= \lim_{z\to z_0} \left| \frac{f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)}{z - z_0} \right| \\ &= \lim_{z\to z_0} \left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) \right| = 0\,,\end{aligned}$$

al ser f por hipótesis derivable en z_0. Denotemos abreviadamente $\dfrac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0)$ por u_x, y análogamente para las demás derivadas parciales de u y v en (x_0, y_0). Igualando la matriz de $Df(z_0)$ en la base canónica de $\mathbb{R}^2$ —es decir, la matriz jacobiana $Jf(z_0)$— con la de $M_{f'(z_0)}$ se obtiene

$$\begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{Re} f'(z_0) & -\operatorname{Im} f'(z_0) \\ \operatorname{Im} f'(z_0) & \operatorname{Re} f'(z_0) \end{pmatrix},$$

de donde se deducen las ecs. de Cauchy–Riemann, junto con las relaciones

$$f'(z_0) = u_x + \mathrm{i}v_x = \frac{1}{\mathrm{i}}(u_y + \mathrm{i}v_y).$$

$\Longleftarrow$) Por las ecs. de Cauchy–Riemann, la matriz jacobiana de f en z_0 es de la forma

$$\begin{pmatrix} u_x & -v_x \\ v_x & u_x \end{pmatrix},$$

y por tanto dicha matriz es igual a la del operador lineal M_c, con $c \equiv u_x + \mathrm{i}v_x$. De esto se sigue que $Df(z_0) = M_c$, es decir $Df(z_0) \cdot (z - z_0) = c(z - z_0)$, y por tanto

$$0 = \lim_{z\to z_0} \frac{|f(z) - f(z_0) - c(z - z_0)|}{|z - z_0|} = \lim_{z\to z_0} \left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - c \right| \implies \lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = c\,.$$

Esto demuestra que f es derivable (en sentido complejo) en z_0, siendo

$$f'(z_0) = c \equiv u_x + \mathrm{i}v_x = \frac{1}{\mathrm{i}}(u_y + \mathrm{i}v_y),$$

donde la última igualdad es consecuencia de las ecuaciones de Cauchy–Riemann. □

- De la demostración del teorema se sigue que si $f = u + \mathrm{i}v$ es derivable en $z_0 = x_0 + \mathrm{i}y_0$ entonces

$$\boxed{\begin{aligned} f'(z_0) &= u_x(x_0, y_0) + \mathrm{i}v_x(x_0, y_0) \equiv \frac{\partial f}{\partial x}(z_0) \\ &= \frac{1}{\mathrm{i}}\big(u_y(x_0, y_0) + \mathrm{i}v_y(x_0, y_0)\big) \equiv \frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\partial f}{\partial y}(z_0). \end{aligned}}$$

Estas igualdades se deducen también fácilmente de la definición de derivada 1.11 (ejercicio). Nótese también que las ecuaciones de Cauchy–Riemann son equivalentes a la relación

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = \frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\partial f}{\partial y}(z_0)}\,.$$

• El teorema anterior puede formularse también de la siguiente forma alternativa:

Teorema 1.14. *$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida en un entorno de $z_0 = x_0 + \mathrm{i}\,y_0 \in \mathbb{C}$ es derivable en z_0 si y sólo si se cumplen las dos condiciones siguientes:*

i) f es diferenciable en sentido real en (x_0, y_0)

ii) Existe $c \in \mathbb{C}$ tal que $Df(x_0, y_0) = M_c$.

Además, si se cumplen las condiciones anteriores entonces $f'(z_0) = c$.

Una consecuencia inmediata del Teorema 1.13 es la siguiente

Proposición 1.15. *Si $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es analítica en una* región *A, y $f'(z) = 0$ para todo $z \in A$, entonces f es constante en A.*

Demostración. En efecto, f derivable (en sentido complejo) en $z \in A$ implica que f es diferenciable en sentido real en dicho punto, siendo $Df(z) = M_{f'(z)} = 0$. El resultado anterior se sigue entonces de su análogo para funciones $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. □

1.3.6 Derivabilidad de las funciones elementales

Derivabilidad de la función exponencial.

$f(z) = \mathrm{e}^z \implies u(x, y) = \mathrm{e}^x \cos y,\ v(x, y) = \mathrm{e}^x \operatorname{sen} y \implies u$ y v de clase C^∞ en $\mathbb{R}^2 \implies f$ diferenciable en sentido real en todo $\mathbb{R}^2$. Además,

$$u_x = \mathrm{e}^x \cos y = v_y, \quad u_y = -\mathrm{e}^x \operatorname{sen} y = -v_x.$$

Por tanto, e^z es derivable (en sentido complejo) en $\mathbb{C}$, siendo

$$\boxed{(\mathrm{e}^z)' = u_x + \mathrm{i}v_x = \mathrm{e}^x \cos y + \mathrm{i}\mathrm{e}^x \operatorname{sen} y = \mathrm{e}^z}\,, \qquad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Regla de la cadena:

Proposición 1.16. *Si $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es derivable en z y $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es derivable en $f(z)$, entonces $g \circ f$ es derivable en z, y se tiene*

$$(g \circ f)'(z) = g'\big(f(z)\big) \cdot f'(z). \tag{1.4}$$

Demostración. En efecto, utilizando la continuidad de f en z y el hecho de que g está definida en un entorno de $f(z)$ (por ser derivable en dicho punto), es fácil ver que $g \circ f$ está definida en un entorno de z. Además, por el teorema anterior f y g son derivables en sentido real en z y $f(z)$, resp., siendo

$$Df(z) = M_{f'(z)}\,, \qquad Dg\big(f(z)\big) = M_{g'(f(z))}\,.$$

Por la regla de la cadena para funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$, $g \circ f$ es derivable en sentido real en z, y se tiene:

$$D(g \circ f)(z) = Dg\big(f(z)\big) \cdot Df(z) = M_{g'(f(z))} \cdot M_{f'(z)} = M_{g'(f(z))f'(z)}\,,$$

que implica (1.4) por el Teorema 1.14. □

Derivabilidad de las funciones trigonométricas e hiperbólicas.

De las propiedades de la derivada compleja (linealidad y regla de la cadena) y la derivabilidad de la función exponencial $f(z) = \mathrm{e}^z$ se sigue que sen y cos son derivables en $\mathbb{C}$, siendo

$$\boxed{(\operatorname{sen} z)' = \frac{\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{i}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}} = \cos z, \quad (\cos z)' = \frac{1}{2}(\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{i}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}) = -\operatorname{sen} z}.$$

De estas fórmulas se deduce la derivabilidad de las restantes funciones trigonométricas en todos los puntos de sus dominios. Por ejemplo,

$$(\tan z)' = \frac{\cos^2 z + \operatorname{sen}^2 z}{\cos^2 z} = \sec^2 z, \quad \forall z \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \ \ (k \in \mathbb{Z}).$$

Al igual que en el caso real, la derivabilidad de la exponencial junto con la regla de la cadena proporciona inmediatamente la derivabilidad de las funciones senh y cosh, junto con las fórmulas usuales para derivar dichas funciones:

$$\boxed{(\operatorname{senh} z)' = \cosh z\,, \qquad (\cosh z)' = \operatorname{senh} z}.$$

De nuevo, de estas fórmulas se deduce la derivabilidad de las restantes funciones hiperbólicas en todos los puntos de sus dominios. Por ejemplo,

$$(\tanh z)' = \frac{\cosh^2 z - \operatorname{senh}^2 z}{\cosh^2 z} = \operatorname{sech}^2 z, \quad \forall z \neq \frac{\pi \mathrm{i}}{2} + k\pi\mathrm{i} \ \ (k \in \mathbb{Z}).$$

Teorema de la función inversa:

Teorema 1.17. *Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analítica en el abierto A (con f' continua en A). Si $a \in A$ y $f'(a) \neq 0$, existen sendos abiertos $U \ni a$ y $V \ni f(a)$ tales que $U \subset A$, f' no se anula en U y $f : U \to V$ es* biyectiva. *Además, $f^{-1} : V \to U$ es* analítica *en V, siendo*

$$(f^{-1})'(w) = \frac{1}{f'\big(f^{-1}(w)\big)}, \quad \forall w \in V.$$

Nota: Veremos más adelante (Sección 2.3.3) que si f es analítica en A entonces f' es automáticamente continua en A.

Demostración. f es derivable en sentido real en todo $z \in A$, y su matriz jacobiana

$$Jf(z) = \begin{pmatrix} u_x(z) & -v_x(z) \\ v_x(z) & u_x(z) \end{pmatrix}$$

tiene determinante $u_x^2(z)+v_x^2(z) = |f'(z)|^2$. En particular, de esto se sigue que $\det Df(a) = |f'(a)|^2 \neq 0$. Por el teorema de la función inversa para funciones $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ (nótese que la continuidad de f' implica la continuidad de las derivadas parciales de u y v), hay sendos abiertos $U \ni a$ y $V \ni f(a)$ tales que $U \subset A$, $f : U \to V$ es biyectiva, Df es invertible en U y $f^{-1} : V \to U$ es diferenciable en sentido real en V, con

$$D(f^{-1})(w) = \big[Df\big(f^{-1}(w)\big)\big]^{-1}, \quad \forall w \in V.$$

Nótese que f' no se anula en U, al ser $|f'(z)|^2 = \det Df(z)$. Llamando $z = f^{-1}(w)$ se tiene, por el Teorema 1.14:

$$D(f^{-1})(w) = [Df(z)]^{-1} = M_{f'(z)}^{-1} = M_{1/f'(z)}\,.$$

De nuevo por el Teorema 1.14, de esto se deduce que f^{-1} es derivable en sentido complejo en w, con derivada $1/f'(z)$. □

Derivabilidad de $\log_I$.

- $\operatorname{Log} : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \{z \in \mathbb{C} : -\pi < \operatorname{Im} z \leqslant \pi\}$ es discontinua en $\mathbb{R}^- \cup \{0\}$ (por la discontinuidad de Arg), y por tanto *no* es derivable en dicho conjunto.

- Sin embargo, Log es derivable en el abierto $B = \mathbb{C} \setminus (\mathbb{R}^- \cup \{0\})$. En efecto, Log es la inversa *global* de
$$\exp : A = \{z \in \mathbb{C} : -\pi < \operatorname{Im} z < \pi\} \to B,$$
y exp satisface las condiciones del teorema de la función inversa en todo punto de A ($\exp' = \exp$ no se anula y es continua en A).

- Si $z \in A$ y $w = e^z \in B$, hay dos abiertos $U \ni z$ y $V \ni w$ tales que $\exp : U \subset A \to V$ es invertible en U, y
$$(\exp^{-1})'(w) = \frac{1}{\exp'(z)} = \frac{1}{e^z} = \frac{1}{w}.$$
Al ser $U \subset A$ se tiene $\exp^{-1} = \operatorname{Log}$, y por tanto
$$\boxed{(\operatorname{Log} w)' = \frac{1}{w}, \quad \forall w \in \mathbb{C} \setminus (\mathbb{R}^- \cup \{0\})}\,.$$
Del mismo modo se prueba la derivabilidad de $\log_I$ (con $I = [y_0, y_0 + 2\pi)$ ó $(y_0, y_0 + 2\pi]$) en el abierto $\mathbb{C} \setminus (\{w : \arg w = y_0 \mod 2\pi\} \cup \{0\})$, siendo de nuevo $\log_I'(w) = 1/w$.

1.3.7 Funciones armónicas

Definición 1.18. Una función $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es **armónica** en el abierto $A \subset \mathbb{R}^2$ si $u \in C^2(A)$, y se cumple
$$\nabla^2 u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \text{ en } A.$$

Proposición 1.19. *Si $f : A \to \mathbb{C}$ es analítica en el abierto A entonces $u = \operatorname{Re} f$ y $v = \operatorname{Im} f$ son armónicas en A. (Se dice entonces que u y v son funciones* **armónicas conjugadas** *en A).*

Demostración. En efecto, veremos más adelante (Sección 2.3.3) que f analítica en $A \implies u, v \in C^\infty(A)$. De las ecuaciones de Cauchy–Riemann se sigue entonces que
$$u_{xx} = \frac{\partial v_y}{\partial x} = v_{yx} = v_{xy} = -\frac{\partial u_y}{\partial y} = -u_{yy},$$
y análogamente para v. (Nótese que $v_{xy} = v_{yx}$, por ser v de clase $C^2(A)$.) □

Proposición 1.20. *Si $u : \mathbb{R}^2 \equiv \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ es armónica en el abierto A, $z_0 \in A$ y $U \subset A$ es un entorno de z_0, hay una función $f : U \to \mathbb{C}$ analítica en U tal que $\operatorname{Re} f = u$.*

Demostración. En efecto, si $z = x + \mathrm{i}y \in U$ entonces $v = \operatorname{Im} f$ debería cumplir:

$$\begin{aligned}
&v_y = u_x \implies v(x,y) = \int_{y_0}^{y} u_x(x,t)\,dt + h(x);\\
&v_x(x,y) = \int_{y_0}^{y} u_{xx}(x,t)\,dt + h'(x) = -\int_{y_0}^{y} u_{yy}(x,t)\,dt + h'(x)\\
&\quad = -u_y(x,y) + u_y(x,y_0) + h'(x) = -u_y(x,y) \iff h'(x) = -u_y(x,y_0)\\
&\quad \implies h(x) = -\int_{x_0}^{x} u_y(t,y_0)\,dt + c \qquad (c \in \mathbb{R})\\
&\quad \implies \boxed{v(x,y) = \int_{y_0}^{y} u_x(x,t)\,dt - \int_{x_0}^{x} u_y(t,y_0)\,dt + c}\,, \qquad \forall (x,y) \in U\,. \qquad (1.5)
\end{aligned}$$

Si v está dada por la fórmula anterior la función $f = u + \mathrm{i}v$ cumple por construcción las ecuaciones de Cauchy–Riemann en U, y es diferenciable en sentido real en dicho conjunto (al ser u, y por tanto v, de clase C^2 en U) $\implies$ f es analítica en U.

$\square$

- La proposición anterior garantiza la existencia de una *armónica conjugada de* u en cualquier disco abierto contenido en A (aunque no necesariamente en todo A, como veremos a continuación).

- En una *región*, la armónica conjugada v (si existe) está determinada a menos de una constante. En efecto, si v_1 y v_2 son armónicas conjugadas de la misma función armónica u en la región A, las funciones $f_1 = u + \mathrm{i}v_1$ y $f_2 = u + \mathrm{i}v_2$ son analíticas en A, por lo que $f = f_1 - f_2 = \mathrm{i}(v_1 - v_2)$ también es analítica en A. Al ser $\operatorname{Re} f = 0$ en A, las ecuaciones de Cauchy–Riemann implican que las derivadas parciales de $\operatorname{Im} f$ se anulan en A. Por ser A una región, $\operatorname{Im} f = v_1 - v_2$ ha de ser constante en A.

- Podemos reescribir la fórmula (1.5) para la armónica conjugada v como

  $$v(z) = \int_{\gamma_0} (u_x \, \mathrm{d}y - u_y \, \mathrm{d}x) + c \equiv \int_{\gamma_0} (-u_y, u_x) \cdot \mathbf{dr} + c\,, \qquad \forall z \in U\,,$$

  donde $\mathbf{dr} \equiv (\mathrm{d}x, \mathrm{d}y)$ y γ_0 es la línea quebrada formada por el segmento horizontal que une $z_0 \equiv x_0 + \mathrm{i}y_0$ con $x + \mathrm{i}y_0$ y el segmento vertical que une este último punto con $z \equiv x + \mathrm{i}y$. Como el campo vectorial $(-u_y, u_x)$ es *conservativo* (al ser u armónica), esta integral de línea es *independiente del camino,* por lo que también podemos escribir

  $$v(z) = \int_{\gamma} (u_x \, \mathrm{d}y - u_y \, \mathrm{d}x) + c\,, \qquad \forall z \in U\,,$$

  donde γ es *cualquier* curva (C^1 a trozos) contenida en U que une z_0 con z.

- La existencia de armónica conjugada de una función armónica en un abierto A no está asegurada *globalmente* en A. Consideremos, por ejemplo, la función $u : A = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definida por $u(x,y) = \frac{1}{2}\log(x^2 + y^2)$. Si U es un disco abierto cualquiera contenido en A entonces la función $\log_I z = \log|z| + \mathrm{i}\arg_I z$ es analítica en U, si escogemos la determinación I de forma que la semirrecta en que $\arg_I$ es discontinuo no corte a U. Por tanto $\operatorname{Re}\log_I = u$ es armónica en U, y $v = \arg_I z + c$ (con $c \in \mathbb{R}$) es una armónica conjugada de u en U. Esto prueba, en particular, que u es armónica en todo A, como se puede comprobar fácilmente calculando sus derivadas parciales.

  Veamos ahora que u *no* admite una armónica conjugada definida en todo A. En efecto, si existiera f analítica en A con $\operatorname{Re} f = u$ entonces f y Log (p. ej.) diferirían en una constante (imaginaria pura) en la región $B = \mathbb{C} \setminus (\mathbb{R}^- \cup \{0\}) \subset A$ (ya que Log es analítica en B, y $\operatorname{Re}\operatorname{Log} z = u(z)$). Pero esto es imposible, ya que si $x < 0$ se tendría (al ser f continua en A y $f = \operatorname{Log} + c$ en B)

$$2\pi\mathrm{i} = \lim_{y \to 0+} \left[\operatorname{Log}(x + \mathrm{i}y) - \operatorname{Log}(x - \mathrm{i}y) \right] = \lim_{y \to 0+} \left[f(x + \mathrm{i}y) - f(x - \mathrm{i}y) \right] = f(x) - f(x) = 0\,.$$

Capítulo 2

El teorema de Cauchy

2.1 Integración sobre arcos

- Si $h_1, h_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son integrables (por ej., continuas) en $[a,b] \subset \mathbb{R}$ y $h = h_1 + \mathrm{i}h_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, definimos
$$\int_a^b h \equiv \int_a^b h(t)\ \mathrm{d}t = \int_a^b h_1(t)\ \mathrm{d}t + \mathrm{i}\int_a^b h_2(t)\ \mathrm{d}t \in \mathbb{C}.$$
Ejemplo: $\displaystyle\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{it}\ \mathrm{d}t = \int_0^{\pi} \cos t\ \mathrm{d}t + \mathrm{i}\int_0^{\pi} \operatorname{sen} t\ \mathrm{d}t = 2\mathrm{i}.$

- Una **curva continua** es una aplicación $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ continua en $[a,b]$ (i.e., $\operatorname{Re}\gamma$ e $\operatorname{Im}\gamma$ son continuas en $[a,b]$).

- Una curva continua γ es C^1 **a trozos** si existe una subdivisión *finita* $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_{n-1} < a_n = b$ de $[a,b]$ tal que γ' existe y es continua en cada subintervalo $[a_{i-1}, a_i]$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$.
En otras palabras, γ es continua en $[a,b]$ y C^1 en $[a,b] \setminus \{a_0, \ldots, a_n\}$, y existen $\lim_{t\to a+}\gamma'(t)$, $\lim_{t\to b-}\gamma'(t)$ y $\lim_{t\to a_i\pm}\gamma'(t)$ para $i = 1, \ldots, n-1$, aunque los límites por la izquierda y por la derecha en a_i no necesariamente coincidan.

- En lo que sigue, denominaremos **arcos** a las curvas continuas C^1 a trozos.

Definición 2.1. Si $f : A \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es continua en el abierto A y $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ es un arco tal que $\gamma([a,b]) \subset A$, definimos
$$\boxed{\int_\gamma f \equiv \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_a^b f\big(\gamma(t)\big)\gamma'(t)\,\mathrm{d}t \equiv \sum_{i=1}^n \int_{a_{i-1}}^{a_i} f\big(\gamma(t)\big)\gamma'(t)\,\mathrm{d}t \in \mathbb{C}}\,.$$

Nótese que $f\big(\gamma(t)\big)\gamma'(t)$ es continua en cada uno de los subintervalos $[a_{i-1}, a_i]$, por lo que cada una de las integrales que aparecen en la fórmula anterior tiene sentido.

- Si $f = u + \mathrm{i}v$ y $\gamma(t) = x(t) + \mathrm{i}y(t)$, entonces
$$\begin{aligned}\int_\gamma f &= \int_a^b \big[u\big(x(t),y(t)\big) + \mathrm{i}v\big(x(t),y(t)\big)\big]\big[x'(t) + \mathrm{i}y'(t)\big]\,\mathrm{d}t\\ &= \int_a^b \big[u\big(x(t),y(t)\big)\,x'(t) - v\big(x(t),y(t)\big)\,y'(t)\big]\,\mathrm{d}t\\ &\quad + \mathrm{i}\int_a^b \big[u\big(x(t),y(t)\big)\,y'(t) + v\big(x(t),y(t)\big)\,x'(t)\big]\,\mathrm{d}t\\ &= \boxed{\int_\gamma (u\ \mathrm{d}x - v\ \mathrm{d}y) + \mathrm{i}\int_\gamma (v\ \mathrm{d}x + u\ \mathrm{d}y)}\,.\end{aligned}$$

2.1.1 Propiedades de $\int_\gamma f$

Linealidad. Para todo $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ se cumple

$$\boxed{\int_\gamma (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_\gamma f + \mu \int_\gamma g}.$$

Cadenas. Si $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ es un arco, se define el **arco opuesto** $-\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ mediante

$$(-\gamma)(t) = \gamma(a+b-t), \qquad \forall t \in [a,b].$$

En otras palabras, $-\gamma$ difiere de γ únicamente en el *sentido* en que está recorrida. Si $\gamma([a,b]) \subset A$ abierto y $f : A \to \mathbb{C}$ es continua en A se cumple

$$\begin{aligned} \int_{-\gamma} f &= \int_a^b f\big(\gamma(a+b-t)\big)\big(-\gamma'(a+b-t)\big)\,\mathrm{d}t \overset{s=a+b-t}{=} \int_b^a f\big(\gamma(s)\big)\gamma'(s)\,\mathrm{d}s \\ &= -\int_a^b f\big(\gamma(s)\big)\gamma'(s)\,\mathrm{d}s = -\int_\gamma f. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Si $\gamma_1 : [a,b] \to \mathbb{C}$ y $\gamma_2 : [c,d] \to \mathbb{C}$ son arcos con $\gamma_1(b) = \gamma_2(c)$, definimos el arco $\gamma_1 + \gamma_2 : [a, b+d-c] \to \mathbb{C}$ mediante

$$(\gamma_1+\gamma_2)(t) = \begin{cases} \gamma_1(t), & t \in [a,b] \\ \gamma_2(c-b+t), & t \in [b, b+d-c]. \end{cases}$$

Si $\gamma_1([a,b]), \gamma_2([c,d]) \subset A$ abierto y $f : A \to \mathbb{C}$ es continua en A, es inmediato comprobar que

$$\boxed{\int_{\gamma_1+\gamma_2} f = \int_{\gamma_1} f + \int_{\gamma_2} f}. \tag{2.2}$$

De forma análoga se define el arco $\gamma_1 + \cdots + \gamma_n$ si el extremo final de cada arco γ_i coincide con el inicial del arco siguiente γ_{i+1}, siendo de nuevo

$$\int_{\gamma_1+\cdots+\gamma_n} f = \sum_{i=1}^n \int_{\gamma_i} f.$$

Del mismo modo, si γ_1 y γ_2 son arcos tales que el extremo final de γ_1 coincide con el de γ_2, se define $\gamma_1 - \gamma_2 = \gamma_1 + (-\gamma_2)$. Combinando las ecuaciones (2.1) y (2.2) se obtiene

$$\int_{\gamma_1-\gamma_2} f \equiv \int_{\gamma_1+(-\gamma_2)} f = \int_{\gamma_1} f + \int_{-\gamma_2} f = \int_{\gamma_1} f - \int_{\gamma_2} f\,.$$

De las consideraciones anteriores se sigue que

$$\boxed{\int_{\varepsilon_1\gamma_1+\cdots+\varepsilon_n\gamma_n} f = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \int_{\gamma_i} f},$$

donde $\varepsilon_i = \pm 1$ para cada i, y se supone que el extremo final de $\varepsilon_i\gamma_i$ coincide con el inicial de $\varepsilon_{i+1}\gamma_{i+1}$. A la expresión $\varepsilon_1\gamma_1 + \cdots + \varepsilon_n\gamma_n$ se le denomina **cadena**.

Invariancia bajo reparametrizaciones. Si $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ es un arco, una **reparametrización** de γ es una curva $\tilde\gamma : [\tilde a, \tilde b] \to \mathbb{C}$ de la forma $\tilde\gamma = \gamma \circ \phi$, siendo $\phi : [\tilde a, \tilde b] \to \phi([\tilde a, \tilde b]) = [a,b]$ una aplicación de clase C^1 en $[\tilde a, \tilde b]$ con derivada *positiva* en $(\tilde a, \tilde b)$.

Nótese que, al ser $\phi' > 0$ en $(\tilde{a}, \tilde{b})$, el cambio de parámetro ϕ es una función *creciente* en $[\tilde{a}, \tilde{b}]$, y por tanto (al ser ϕ suprayectiva por hipótesis) $\phi(\tilde{a}) = a$, $\phi(\tilde{b}) = b$. Evidentemente, si γ es C^1 a trozos también lo es $\tilde{\gamma}$, y $\gamma([a,b]) = \tilde{\gamma}([\tilde{a}, \tilde{b}])$. Por tanto, $\tilde{\gamma}$ es un arco con la misma imagen que γ. Además, al ser ϕ monótona creciente los arcos γ y $\tilde{\gamma}$ están recorridos en el mismo sentido.

Ejemplo: $\tilde{\gamma}(s) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}s}$ $\left(s \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right]\right)$ es una reparametrización de $\gamma(t) = -t + \mathrm{i}\sqrt{1-t^2}$ $\left(t \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]\right)$. En efecto, $\tilde{\gamma}(s) = \gamma(-\cos s)$, siendo en este caso $\phi(s) = -\cos s$ de clase C^1 y $\phi'(s) = \operatorname{sen} s > 0$ en $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right]$.

Proposición 2.2. *Si* $\tilde{\gamma} : [\tilde{a}, \tilde{b}] \to \mathbb{C}$ *es una reparametrización de* $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$*,* $\gamma([a,b]) \subset A$*, y* $f : A \to \mathbb{C}$ *es continua en el abierto* A*, se cumple:*

$$\int_{\tilde{\gamma}} f = \int_{\gamma} f.$$

Demostración. Sea $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \phi$, con $\phi : [\tilde{a}, \tilde{b}] \to [a,b] \equiv [\phi(\tilde{a}), \phi(\tilde{b})]$. Entonces se tiene:

$$\int_{\tilde{\gamma}} f = \int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} f\big(\tilde{\gamma}(s)\big)\tilde{\gamma}'(s)\,\mathrm{d}s = \int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} f\big(\gamma(\phi(s))\big)\gamma'\big(\phi(s)\big)\phi'(s)\,\mathrm{d}s \overset{t=\phi(s)}{=} \int_a^b f\big(\gamma(t)\big)\gamma'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\gamma} f.$$

□

2.1.2 Integral respecto de la longitud de arco

Si $f : A \to \mathbb{C}$ es continua en al abierto A y $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ es un arco con $\gamma([a,b]) \subset A$, se define

$$\boxed{\int_{\gamma} f(z)\,|\mathrm{d}z| = \int_a^b f\big((\gamma(t)\big)\left|\gamma'(t)\right|\,\mathrm{d}t}\,.$$

- Nótese que si $\gamma(t) = x(t) + \mathrm{i}\,y(t)$ entonces $|\gamma'(t)|\,\mathrm{d}t = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\,\mathrm{d}t$ es el elemento de longitud de arco $\mathrm{d}s$ a lo largo de la curva γ. Por tanto si $f = u + \mathrm{i}v$ entonces

$$\boxed{\int_{\gamma} f(z)\,|\mathrm{d}z| = \int_{\gamma} u\,\mathrm{d}s + \mathrm{i}\int_{\gamma} v\,\mathrm{d}s}\,.$$

- En particular,

$$\boxed{\int_{\gamma} |\mathrm{d}z| = \int_{\gamma} \mathrm{d}s = l(\gamma) \equiv \textit{longitud de } \gamma}\,.$$

Propiedades:

i) $\displaystyle\int_{\gamma} \big(\lambda f(z) + \mu g(z)\big)\,|\mathrm{d}z| = \lambda \int_{\gamma} f(z)\,|\mathrm{d}z| + \mu \int_{\gamma} g(z)\,|\mathrm{d}z|, \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}.$

ii) $\displaystyle\int_{-\gamma} f(z)\,|\mathrm{d}z| = \int_{\gamma} f(z)\,|\mathrm{d}z|.$

iii) $\displaystyle\int_{\varepsilon_1\gamma_1 + \cdots + \varepsilon_n\gamma_n} f(z)\,|\mathrm{d}z| = \sum_{i=1}^{n} \int_{\gamma_i} f(z)\,|\mathrm{d}z|.$

iv) Si $\tilde{\gamma}$ es una reparametrización de γ, entonces $\displaystyle\int_{\tilde{\gamma}} f(z)\,|\mathrm{d}z| = \int_{\gamma} f(z)\,|\mathrm{d}z|.$

Desigualdad fundamental: $\boxed{\left|\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z\right| \leqslant \int_\gamma |f(z)|\,|\mathrm{d}z|}$.

En particular, si $\max\limits_{t\in[a,b]} \left|f\big(\gamma(t)\big)\right| = M$ entonces

$$\left|\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z\right| \leqslant M\, l(\gamma).$$

En efecto, la segundad desigualdad es consecuencia de la primera (por las propiedades de la integral de funciones reales de una variable real). Si $\int_\gamma f = 0$, la primera desigualdad se cumple trivialmente. En caso contrario, llamando $\theta = \operatorname{Arg}(\int_\gamma f)$ se tiene:

$$\begin{aligned}\left|\int_\gamma f\right| &= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\int_\gamma f = \operatorname{Re}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\int_\gamma f\right) = \int_a^b \operatorname{Re}\left[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} f\big(\gamma(t)\big)\gamma'(t)\right]\mathrm{d}t\\ &\leqslant \int_a^b \left|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} f\big(\gamma(t)\big)\gamma'(t)\right|\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b \left|f\big(\gamma(t)\big)\right|\left|\gamma'(t)\right|\,\mathrm{d}t \equiv \int_\gamma |f(z)|\,|\mathrm{d}z|\,.\end{aligned}$$

2.1.3 Teorema fundamental del Cálculo. Independencia del camino

Lema 2.3. *Si $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ es derivable en $t \in \mathbb{R}$ (es decir, si $\operatorname{Re}\gamma, \operatorname{Im}\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son derivables en t) y $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es derivable en $\gamma(t)$, entonces $f \circ \gamma$ es derivable en t, con derivada*

$$(f\circ\gamma)'(t) = f'\big(\gamma(t)\big)\,\gamma'(t)\,.$$

Demostración. Por el Teorema 1.13, la función f es diferenciable en sentido real en $\gamma(t)$, siendo $Df\big(\gamma(t)\big) = M_{f'(\gamma(t))}$. La regla de la cadena para funciones $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ implica que la función compuesta $f\circ\gamma$ es derivable en t, con derivada

$$(f\circ\gamma)'(t) = Df\big(\gamma(t)\big)\,\gamma'(t) = M_{f'(\gamma(t))}\,\gamma'(t) \equiv f'\big(\gamma(t)\big)\,\gamma'(t)\,.$$

□

Teorema fundamental del Cálculo. *Sea $F : A \to \mathbb{C}$ analítica en el abierto A (con F' continua en A). Si $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ es un arco con $\gamma([a,b]) \subset A$ entonces se cumple:*

$$\int_\gamma F' = F\big(\gamma(b)\big) - F\big(\gamma(a)\big).$$

En particular, si el arco γ es **cerrado** *(i.e., $\gamma(b) = \gamma(a)$) se tiene*

$$\int_\gamma F' = 0.$$

Nota: Veremos más adelante (Sección 2.3.3) que si F es analítica en A entonces F' es automáticamente continua en dicho conjunto.

Demostración.

$$\int_\gamma F' = \int_a^b F'\big(\gamma(t)\big)\,\gamma'(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b (F\circ\gamma)'(t)\,\mathrm{d}t = F\big(\gamma(b)\big) - F\big(\gamma(a)\big),$$

por el teorema fundamental del Cálculo para funciones $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ aplicado a las partes real e imaginaria de $F\circ\gamma$. □

Independencia del camino. *Si* $f : A \to \mathbb{C}$ *es continua en una* región A*, las siguientes afirmaciones son* equivalentes*:*

i) $\int_\gamma f$ *es* **independiente del camino***:* $\int_{\gamma_1} f = \int_{\gamma_2} f$ *para todo par de arcos* γ_1 *y* γ_2 *contenidos en* A *con los mismos extremos.*

ii) $\int_\Gamma f = 0$ *para todo arco* cerrado Γ *contenido en* A*.*

iii) f *admite una* **antiderivada** (*o* **primitiva**) *en* A*, es decir, existe* $F : A \to \mathbb{C}$ *analítica en* A *y tal que* $F'(z) = f(z)$ *para todo* $z \in A$*.*

Demostración.

ii) $\Longrightarrow$ i) Si γ_1 y γ_2 son dos arcos contenidos en A que unen $z_1 \in A$ con $z_2 \in A$ entonces $\Gamma = \gamma_1 - \gamma_2$ es un arco cerrado, y por tanto

$$\int_{\gamma_1} f - \int_{\gamma_2} f = \int_{\gamma_1 - \gamma_2} f = \int_\Gamma f = 0\,.$$

i) $\Longrightarrow$ ii) Al ser el arco Γ cerrado, su opuesto $-\Gamma$ tiene los mismos extremos que Γ. Aplicando la propiedad i) se obtiene

$$\int_\Gamma f = \int_{-\Gamma} f = -\int_\Gamma f \quad \Longrightarrow \quad \int_\Gamma f = 0\,.$$

iii) $\Longrightarrow$ i) Por el teorema fundamental del Cálculo (ya que $F' = f$ es continua por hipótesis).

i) $\Longrightarrow$ iii) Fijemos (arbitrariamente) un punto $z_0 \in A$. Si z es un punto cualquiera de A, por ser A una *región* hay un arco γ contenido en A que une z_0 con z. Definimos entonces

$$F(z) = \int_\gamma f.$$

Nótese que, en virtud de i), F *no* depende de la curva $\gamma \subset A$ que utilicemos para unir z_0 con z.

Probemos finalmente que F es diferenciable en todo punto $z \in A$, con $F'(z) = f(z)$. Si $\varepsilon > 0$, al ser A abierto y f continua en A, existe $\delta > 0$ tal que $|f(\zeta) - f(z)| < \varepsilon$ si $\zeta \in D(z;\delta) \subset A$. Dado un punto cualquiera $w \in D(z;\delta)$ distinto de z, sea $L \subset D(z;\delta) \subset A$ el segmento que une z con w. Entonces se tiene:

$$F(w) - F(z) = \int_{\gamma + L} f - \int_\gamma f = \int_L f.$$

Por el teorema fundamental del Cálculo, $w - z = \int_L d\zeta$ (ya que $1 = \zeta'$), y por tanto $(w - z)f(z) = f(z)\int_L d\zeta = \int_L f(z)\,d\zeta$. Luego

$$\left|\frac{F(w) - F(z)}{w - z} - f(z)\right| = \frac{|F(w) - F(z) - (w - z)f(z)|}{|w - z|} = \frac{\left|\int_L f(\zeta)\,d\zeta - \int_L f(z)\,d\zeta\right|}{|w - z|}$$
$$= \frac{\left|\int_L [f(\zeta) - f(z)]\,d\zeta\right|}{|w - z|} < \frac{\varepsilon\, l(L)}{|w - z|} = \varepsilon.$$

□

2.2 Teorema de Cauchy

2.2.1 Teorema de Cauchy–Goursat

- Un arco cerrado $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ es **simple** si $a < s < t < b \Longrightarrow \gamma(s) \neq \gamma(t)$.

Teorema de Cauchy (versión original). *Si γ es un arco cerrado simple y $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es analítica* con derivada continua *en γ y en el interior de γ, entonces* $\int_\gamma f = 0$.

Demostración. Por el teorema de Green (orientando la curva en sentido antihorario, de modo que el interior D de γ quede a la izquierda de γ), si $f = u + \mathrm{i}v$ se tiene

$$\int_\gamma f \,\mathrm{d}z = \int_\gamma (u \,\mathrm{d}x - v \,\mathrm{d}y) + \mathrm{i} \int_\gamma (v \,\mathrm{d}x + u \,\mathrm{d}y) = -\int_D (u_y + v_x) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y + \mathrm{i} \int_D (u_x - v_y) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = 0,$$

en virtud de las ecuaciones de Cauchy–Riemann. □

- Este resultado es insuficiente, ya que no hace falta suponer que f' sea *continua* (probaremos que esta hipótesis se deduce de la *analiticidad* de f). Además, el resultado es válido para arcos mucho más generales que los cerrados simples.

Teorema de Cauchy–Goursat para un rectángulo. *Sea R un rectángulo* cerrado *con los lados paralelos a los ejes, y sea ∂R la frontera de R. Si $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es analítica en R se cumple:*

$$\int_{\partial R} f = 0.$$

Demostración. Orientemos ∂R en sentido antihorario (obviamente, el resultado es independiente de la orientación de ∂R). Si dividimos R en cuatro subrectángulos congruentes $R^{(i)}$ ($i = 1, \dots, 4$) (también orientados en sentido antihorario) entonces

$$\int_{\partial R} f = \sum_{i=1}^{4} \int_{\partial R^{(i)}} f\,,$$

ya que las integrales a lo largo de los lados interiores de los rectángulos $R^{(i)}$ se cancelan a pares. Por tanto, existe $k \in \{1, \dots, 4\}$ tal que

$$\left| \int_{\partial R} f \right| \leqslant 4 \left| \int_{\partial R^{(k)}} f \right|.$$

Llamemos $R_1 = R^{(k)}$. Repitiendo indefinidamente el proceso anterior, obtenemos una sucesión de rectángulos cerrados encajados $R_0 \equiv R \supset R_1 \supset R_2 \supset \cdots \supset R_n \supset R_{n+1} \supset \dots$ tales que

$$\left| \int_{\partial R_{n-1}} f \right| \leqslant 4 \left| \int_{\partial R_n} f \right| \implies \left| \int_{\partial R} f \right| \leqslant 4^n \left| \int_{\partial R_n} f \right|, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Además, si P_i y D_i denotan respectivamente el perímetro y la diagonal del i-ésimo rectángulo y $P \equiv P_0$, $D \equiv D_0$, se tiene:

$$P_i = \frac{P}{2^i}, \quad D_i = \frac{D}{2^i}, \qquad \forall i \in \mathbb{N}.$$

Por el teorema de encaje de Cantor, $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} R_n = \{a\}$, con $a \in R$ (ya que $R_n \subset A$ para todo n). Nótese que

$$z \in R_n \implies |z - a| \leqslant D_n = 2^{-n} D,$$

al ser $a \in R_n$ cualquiera que sea $n \in \mathbb{N}$. Si $\varepsilon > 0$, tomemos $\delta > 0$ suficientemente pequeño de modo que f sea analítica en $D(a;\delta)$ y además se verifique

$$\left| f(z) - f(a) - (z - a) f'(a) \right| < \varepsilon \, |z - a|\,, \quad \forall z \in D(a;\delta), \;\; z \neq a.$$

(Nótese que, por hipótesis, f es derivable en un entorno de cada punto de R.) Escojamos ahora n suficientemente grande para que $D_n = 2^{-n}D < \delta$, de modo que $R_n \subset D(a;\delta)$. Nótese que, por el teorema fundamental del Cálculo,

$$\int_{\partial R_n} \mathrm{d}z = \int_{\partial R_n} z\, \mathrm{d}z = 0.$$

De esto se sigue que

$$\begin{aligned} \left|\int_{\partial R} f\right| &\leqslant 4^n \left|\int_{\partial R_n} f\right| = 4^n \left|\int_{\partial R_n} \big[f(z) - f(a) - f'(a)(z-a)\big]\,\mathrm{d}z\right| \\ &< 4^n \int_{\partial R_n} \varepsilon\,|z-a|\,|\mathrm{d}z| \leqslant 4^n \cdot 2^{-n} D\varepsilon \cdot P_n = 4^n \cdot 2^{-n} D\varepsilon \cdot 2^{-n} P = PD\varepsilon. \end{aligned}$$

Como $\varepsilon > 0$ es arbitrario y PD es constante, el teorema está demostrado. □

Teorema de Cauchy–Goursat generalizado. *Sea a un punto interior a R, y supongamos que la función $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es analítica en $R \setminus \{a\}$ y $\lim_{z\to a}[(z-a)f(z)] = 0$. Entonces $\int_{\partial R} f = 0$.*

Demostración. Sea $Q \subset R$ un cuadrado con lados paralelos a los ejes coordenados de centro a y lado $l > 0$ suficientemente pequeño de forma que que $|(z-a)f(z)| < \varepsilon$ si $z \in Q \setminus \{a\}$. Prolongando los lados de Q podemos subdividir el rectángulo R en 9 subrectángulos $R_0 \equiv Q, R_1, \dots, R_8$. Por tanto

$$\int_{\partial R} f = \int_{\partial Q} f + \sum_{i=1}^{8} \int_{\partial R_i} f\,.$$

La función f es analítica en cada uno de los rectángulos R_i, ya que $a \notin R_i \subset R$. Por el teorema de Cauchy–Goursat $\int_{\partial R_i} f = 0$ si $i = 1, \dots, 8$, y por tanto

$$\left|\int_{\partial R} f\right| = \left|\int_{\partial Q} f\right| < \varepsilon \int_{\partial Q} \frac{|\mathrm{d}z|}{|z-a|} \leqslant \varepsilon \cdot \frac{2}{l} \cdot 4l = 8\varepsilon\,,$$

lo que demuestra el teorema. □

2.2.2 Homotopía. Teorema de Cauchy. Teorema de la deformación

- Sea $A \subset \mathbb{C}$ una región, y sean γ_1 y γ_2 dos curvas continuas contenidas en A con los mismos extremos $z_1, z_2 \in A$ ($z_1 \neq z_2$), ó dos curvas cerradas continuas contenidas en A. Diremos que γ_1 es **homótopa** a γ_2 en A si se puede deformar *de manera continua* hasta transformarse en γ_2 *sin salirse de A*. En el primer caso (*homotopía de curvas abiertas con extremos fijos*), los extremos de todas las curvas deformadas han de mantenerse iguales a z_1 y z_2, mientras que en el segundo (*homotopía de curvas cerradas*) todas las curvas deformadas han de ser cerradas.

- Es importante observar que el concepto de homotopía *depende de la región A* considerada. En otras palabras, dos curvas homótopas en una cierta región A pueden no serlo en otra región A'.

- Nótese que un punto $z_0 \in A$ es una curva cerrada constante: $\gamma(t) = z_0$, $\forall t \in [a,b]$. En particular, $\int_{z_0} f = 0$ para toda f.

Teorema de Cauchy. *Sea γ un arco cerrado homótopo a un punto en una región A. Si $f : A \to \mathbb{C}$ es analítica en A se cumple*

$$\int_\gamma f = 0. \tag{2.3}$$

Idea de la demostración. Supongamos, por sencillez, que $\gamma \subset A$ es un arco cerrado simple. Al ser γ homótopo a un punto en A, es intuitivamente claro (y puede probarse rigurosamente) que el interior D de γ está contenido en A. Dado $\varepsilon > 0$, recubramos el plano con una malla de cuadrados cerrados Q_j de lados paralelos a los ejes de longitud $\delta > 0$, y denotemos por J el conjunto de índices tal que $Q_j \subset D$ si $j \in J$. (El conjunto J es finito, ya que D es acotado al ser la imagen del arco γ un compacto). Puede probarse que si δ se escoge suficientemente pequeño se cumple

$$\left| \int_\gamma f - \int_{\partial Q} f \right| < \varepsilon , \tag{2.4}$$

donde ∂Q es la frontera de $Q \equiv \bigcup_{j \in J} Q_j$ orientada positivamente[1]. Por otra parte, es claro que

$$\int_{\partial Q} f = \sum_{j \in J} \int_{\partial Q_j} f \tag{2.5}$$

(donde ∂Q_j es la frontera del cuadrado Q_j orientada positivamente), ya que las integrales a lo largo de los lados de los cuadrados Q_j que no pertenecen a ∂Q se cancelan a pares. Al ser $Q_j \subset D \subset A$ para todo $j \in J$ y f analítica en A, el teorema de Cauchy–Goursat implica que

$$\int_{\partial Q_j} f = 0 , \qquad \forall j \in J ,$$

y por tanto de (2.4) y (2.5) se deduce que

$$\left| \int_\gamma f \right| < \varepsilon .$$

Al ser $\varepsilon > 0$ arbitrario, el teorema está demostrado. □

Definición 2.4. Una *región* $A \subset \mathbb{C}$ es **simplemente conexa** si toda curva cerrada continua γ contenida en A es homótopa a un punto en A.

Nota: Intuitivamente, una región simplemente conexa es un abierto que “consta de un sólo trozo” y “no tiene agujeros”. Por ejemplo, $\mathbb{C}$ o un disco abierto son regiones simplemente conexas. Un disco abierto sin uno de sus puntos no lo es. Sin embargo, el plano complejo menos una semirrecta es simplemente conexo.

Aplicando el teorema de Cauchy a una región *simplemente conexa* se deducen los dos corolarios siguientes:

Corolario 2.5. *Si $A \subset \mathbb{C}$ es una región* simplemente conexa *y $f : A \to \mathbb{C}$ es analítica en A entonces*

$$\int_\gamma f = 0,$$

para todo arco cerrado γ contenido en A.

Demostración. En efecto, si A es una región simplemente conexa todo arco cerrado γ contenido en A es homótopo a punto en dicho conjunto, por lo que $\int_\gamma f = 0$ en virtud del teorema de Cauchy. □

Corolario 2.6. *Si $f : A \to \mathbb{C}$ es analítica en una región* simplemente conexa *A entonces f admite una primitiva en A.*

[1] Puede suponerse, sin pérdida de generalidad, que γ está orientada positivamente, ya que $\int_\gamma f = 0 \iff \int_{-\gamma} f = 0$.

Demostración. Por el corolario anterior, $\int_\gamma f = 0$ para todo arco cerrado γ contenido en A. Esto implica que f tiene una primitiva en A, en virtud de la equivalencia ii) $\Longleftrightarrow$ iii) del teorema sobre la independencia del camino de la pág. 25. □

Con ayuda del teorema de Cauchy se prueba el siguiente resultado más general, de fundamental importancia en el análisis complejo:

Teorema de la deformación. *Sean γ_1 y γ_2 dos arcos homótopos en una región A, y sea $f : A \to \mathbb{C}$ analítica en A. Entonces se verifica*

$$\int_{\gamma_1} f = \int_{\gamma_2} f.$$

Idea de la demostración. Supongamos, en primer lugar, que $\gamma_1, \gamma_2 \subset A$ son dos arcos homótopos en A con los mismos extremos $z_1 \neq z_2$. Es intuitivamente claro que $\gamma_1 - \gamma_2$ es un arco cerrado homótopo a un punto en A. Por el teorema de Cauchy,

$$0 = \int_{\gamma_1 - \gamma_2} f = \int_{\gamma_1} f - \int_{\gamma_2} f\,,$$

lo que demuestra el teorema en este caso. Sean a continuación $\gamma_1, \gamma_2 \subset A$ dos arcos cerrados homótopos en A. Supongamos, por sencillez, que γ_1 y γ_2 son ambos simples y (por ejemplo) γ_1 está contenido en el interior de γ_2 (cf. la Fig. 2.1 izda.). Al ser γ_1 y γ_2 homótopos en A, es intuitivamente claro que el conjunto D limitado por ambos arcos está enteramente contenido en A. Sean $z_1 \in \gamma_1$ y $z_2 \in \gamma_2$, y llamemos L al segmento que une z_1 con z_2. El arco $L + \gamma_2 - L - \gamma_1$ es cerrado, está contenido en A (ya que $L \subset D \subset A$) y es homótopo a un punto en dicha región (cf. la Fig. 2.1 drcha.). Por el teorema de Cauchy,

$$0 = \int_{L+\gamma_2-L-\gamma_1} f = \int_L f + \int_{\gamma_2} f - \int_L f - \int_{\gamma_1} f = \int_{\gamma_2} f - \int_{\gamma_1} f\,,$$

lo que demuestra el teorema también en este caso. □

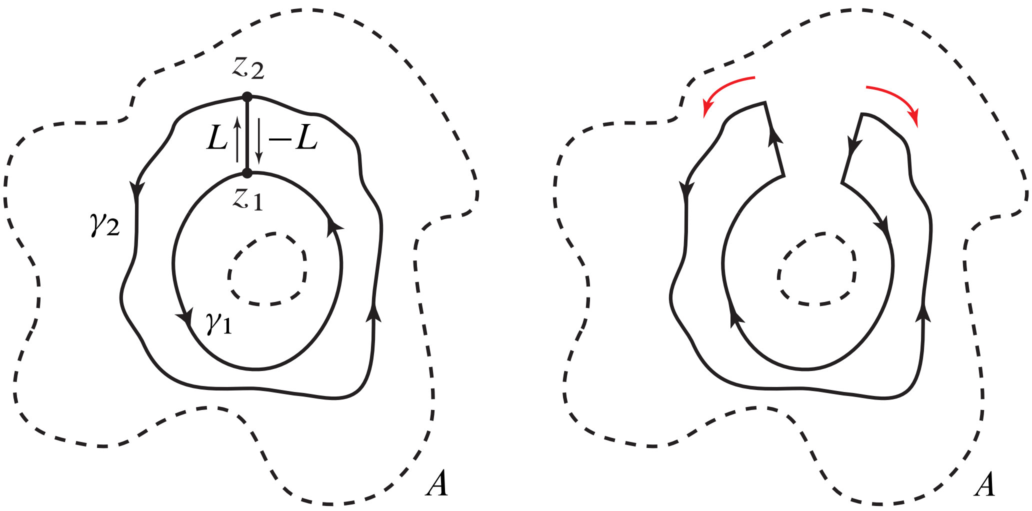

Figura 2.1: Arcos homótopos γ_1 y γ_2 (izda.) y curva intermedia de la deformación del arco cerrado $L + \gamma_2 - L - \gamma_1$ en un punto (drcha.).

Necesitaremos también la siguiente generalización del teorema de Cauchy, que se prueba utilizando el teorema de la deformación junto con el teorema de Cauchy–Goursat generalizado:

Teorema de Cauchy generalizado. *Sea $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ un arco cerrado homótopo a un punto en una región A, y sea $z_0 \in A \setminus \gamma([a,b])$. Si f es analítica en $A \setminus \{z_0\}$ y $\lim_{z\to z_0} [(z - z_0) f(z)] = 0$ entonces $\int_\gamma f = 0$.*

Idea de la demostración. Si z_0 es exterior a la curva, entonces γ es homótopa a un punto en la región $A \setminus \{z_0\}$, e $\int_\gamma f = 0$ por el teorema de Cauchy aplicado a dicha región. Si, por el contrario, z_0 es interior a γ, al ser dicha curva homótopa a un punto en A puede probarse que existe un cuadrado suficientemente pequeño $Q \subset A$ centrado en z_0 tal que γ es homótopa a ∂Q en $A \setminus \{z_0\}$. Por el teorema de la deformación aplicado a f en la región $A \setminus \{z_0\}$,

$$\int_\gamma f = \int_{\partial Q} f = 0\,,$$

donde la última igualdad es consecuencia del teorema de Cauchy–Goursat generalizado. □

2.3 Fórmula integral de Cauchy y sus consecuencias

2.3.1 Índice

- Si γ es un arco cerrado y $a \notin \gamma$, definimos el **índice** de a respecto de γ mediante

$$\boxed{n(\gamma, a) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{z - a}}\,.$$

- Si γ es una circunferencia de centro a y radio $r > 0$ recorrida m veces en sentido antihorario ($\gamma(t) = a + r\,e^{it}$, con $t \in [0, 2m\pi]$) entonces

$$n(\gamma, a) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2m\pi} \frac{i r e^{it}}{r e^{it}}\, dt = m.$$

  Análogamente, si γ es la circunferencia de centro a y radio $r > 0$ recorrida m veces en sentido horario,

$$n(\gamma, a) = -m.$$

  En virtud del teorema de la deformación, esto sugiere que $n(\gamma, a)$ es el *número de vueltas que da la curva γ alrededor de a,* contando como positivas las vueltas dadas en sentido antihorario.

Ejemplo: Si z_0 es un punto *exterior* a una circunferencia (o a cualquier curva cerrada simple) γ, entonces $(z - z_0)^{-1}$ es analítica en $A = \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ y γ es homótopa a un punto en $A \implies n(\gamma, z_0) = 0$, por el teorema de Cauchy.

Proposición 2.7. *$n(\gamma, z_0)$ es un entero.*

Demostración. Supongamos, por sencillez, que $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ es C^1 en $[a,b]$. Si definimos

$$h(t) = \int_a^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - z_0}\, ds\,,$$

entonces $n(\gamma, z_0) = h(b)/(2\pi i)$. Por otra parte, h es derivable en $[a,b]$ (el integrando es continuo, ya que el denominador no se anula), y

$$h'(t) = \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z_0} \implies \frac{d}{dt}\left(e^{-h(t)}\,[\gamma(t) - z_0]\right) = 0, \quad \forall t \in [a,b].$$

Por tanto $e^{-h(t)}\big(\gamma(t)-z_0\big)$ es constante en $[a,b]$, de donde se deduce (al ser $h(a)=0$) que

$$\gamma(a)-z_0 = e^{-h(b)}(\gamma(b)-z_0) = e^{-h(b)}(\gamma(a)-z_0) \overset{z_0\notin\gamma}{\Longrightarrow} e^{-h(b)} = 1 \implies h(b) = 2n\pi i,\ \ n\in\mathbb{Z}.$$

□

2.3.2 Fórmula integral de Cauchy

El siguiente resultado, que se prueba fácilmente con ayuda del teorema de Cauchy generalizado, es uno de los pilares del análisis complejo:

Fórmula integral de Cauchy. *Sea $f : A \to \mathbb{C}$ analítica en una región A, sea γ un arco homótopo a un punto en A, y sea $a \in A$ un punto que no esté sobre γ. Entonces se verifica*

$$n(\gamma,a)\cdot f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-a}\,dz\,.$$

Demostración. La función

$$g(z) = \begin{cases} \dfrac{f(z)-f(a)}{z-a}, & z\neq a \\ f'(a), & z = a \end{cases}$$

es analítica en $A\setminus\{a\}$ y $\lim_{z\to a}[(z-a)g(z)] = \lim_{z\to a}[f(z)-f(a)] = 0$ (ya que f es continua en a al ser derivable en dicho punto). Por el teorema de Cauchy generalizado,

$$0 = \int_\gamma g = \int_\gamma \frac{f(z)-f(a)}{z-a}\,dz = \int_\gamma \frac{f(z)}{z-a}\,dz - f(a)\int_\gamma \frac{dz}{z-a} = \int_\gamma \frac{f(z)}{z-a}\,dz - f(a)\cdot 2\pi i n(\gamma,a).$$

□

Si $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ es una función analítica en un abierto A y $z\in A$, podemos aplicar la fórmula integral de Cauchy a la circunferencia γ de centro z y radio r suficientemente pequeño para que $D(z;2r)\subset A$, ya que γ es homótopa a un punto en $D(z;2r)$ y, por tanto, en A. Si orientamos la circunferencia γ positivamente (en sentido antihorario) entonces $n(\gamma,z)=1$, y por tanto la fórmula integral de Cauchy permite expresar $f(z)$ como

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\,dw.$$

Derivando esta fórmula *formalmente* respecto de z bajo el signo integral obtenemos

$$f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{(w-z)^{k+1}}\,dw, \qquad \forall k\in\mathbb{N}\,. \tag{2.6}$$

En particular, si se verifica (2.6) f *es infinitas veces diferenciable en cualquier punto* $z\in A$. Veamos a continuación cómo se justifica rigurosamente la derivación bajo la integral que conduce a la ecuación (2.6):

Lema 2.8. *Consideremos la* integral de tipo Cauchy

$$G(z) = \int_\gamma \frac{g(w)}{w-z}\,dw,$$

donde $g:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ es una función continua *sobre un arco γ (no necesariamente cerrado) y $z\notin\gamma([a,b])$. Entonces G es infinitas veces derivable en todo punto $z_0\notin\gamma([a,b])$, siendo*

$$G^{(k)}(z_0) = k!\int_\gamma \frac{g(w)}{(w-z_0)^{k+1}}\,dw. \tag{2.7}$$

Demostración. La demostración es por inducción sobre k.
i) Supongamos, en primer lugar, que $k = 1$. Sea $z_0 \notin \gamma([a, b])$, y definamos

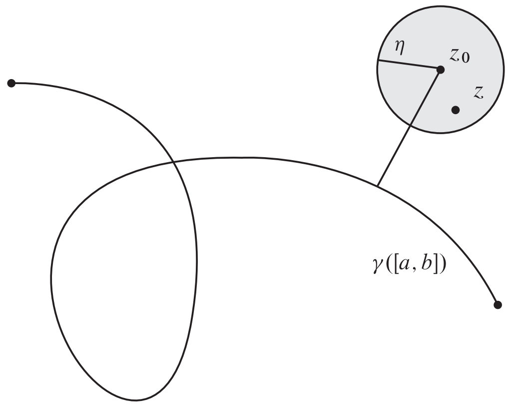

Figura 2.2: integral de tipo Cauchy

$$2\eta = \min_{t\in[a,b]} |\gamma(t) - z_0| > 0, \quad M = \max_{t\in[a,b]} \left|g\big(\gamma(t)\big)\right| .$$

Nótese que $\eta > 0$ y $M < \infty$ por la continuidad de γ y $g \circ \gamma$ en el compacto $[a, b]$. Si $z \in D(z_0; \eta)$ con $z \neq z_0$ se tiene

$$\frac{G(z) - G(z_0)}{z - z_0} = \int_\gamma \frac{1}{z - z_0} \left[\frac{1}{w - z} - \frac{1}{w - z_0} \right] g(w)\, \mathrm{d}w.$$

Pero

$$\frac{1}{z - z_0} \left[\frac{1}{w - z} - \frac{1}{w - z_0} \right] = \frac{1}{(w - z)(w - z_0)} = \frac{1}{(w - z_0)^2} \frac{w - z_0}{w - z} = \frac{1}{(w - z_0)^2} \left(1 + \frac{z - z_0}{w - z} \right). \tag{2.8}$$

Si w está sobre la curva γ, por definición de M y η se tiene:

$$|g(w)| \leqslant M\, , \qquad |w - z_0| \geqslant 2\eta\, , \qquad |w - z| \geqslant \eta\, .$$

Por tanto

$$\begin{aligned} \left| \frac{G(z) - G(z_0)}{z - z_0} - \int_\gamma \frac{g(w)}{(w - z_0)^2}\, \mathrm{d}w \right| &= |z - z_0| \left| \int_\gamma \frac{g(w)}{(w - z_0)^2 (w - z)}\, \mathrm{d}w \right| \\ &\leqslant |z - z_0| \cdot \frac{M\, l(\gamma)}{4\eta^2 \cdot \eta} \xrightarrow[z\to z_0]{} 0. \end{aligned}$$

ii) Supongamos ahora el lema cierto para $k = 1, \dots, n - 1$, y probémoslo para $k = n$. Veamos, en primer lugar, que $G^{(n-1)}$ es continua en $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \gamma([a, b])$. En efecto, por la hipótesis de inducción se tiene

$$G^{(n-1)}(z) = (n - 1)! \int_\gamma \frac{g(w)}{(w - z)^n}\, \mathrm{d}w\, .$$

Multiplicando la primera identidad (2.8) por $1/(w - z)^{n-1}$ se obtiene

$$\frac{1}{(w - z)^n} = \frac{1}{(w - z)^{n-1}(w - z_0)} + \frac{z - z_0}{(w - z)^n (w - z_0)}\, ,$$

y por tanto

$$G^{(n-1)}(z) - G^{(n-1)}(z_0) = (n-1)!\left[\int_\gamma \frac{g(w)}{(w-z)^{n-1}(w-z_0)}\,\mathrm{d}w - \int_\gamma \frac{g(w)}{(w-z_0)^n}\,\mathrm{d}w\right] + (n-1)!\,(z-z_0)\int_\gamma \frac{g(w)}{(w-z)^n(w-z_0)}\,\mathrm{d}w\,. \tag{2.9}$$

Por la hipótesis de inducción aplicada a $g(w)/(w-z_0)$ (que también es continua sobre γ, ya que $z_0 \notin \gamma([a,b])$), la función

$$\int_\gamma \frac{g(w)}{(w-z)^{n-1}(w-z_0)}\,\mathrm{d}w$$

es derivable, y por tanto continua, si $z \in \mathbb{C} \setminus \gamma([a,b])$, lo cual implica que el término entre corchetes en el miembro derecho de (2.9) tiende a 0 si $z \to z_0$. En cuanto a la integral que aparece en el segundo término del MD de dicha ecuación, procediendo como en el caso $k = 1$ se demuestra que

$$\left|\int_\gamma \frac{g(w)}{(w-z)^n(w-z_0)}\,\mathrm{d}w\right| \leqslant \frac{M\,l(\gamma)}{2\eta^{n+1}}\,, \qquad \forall z \in D(z_0;\eta)\,,$$

lo que prueba que el segundo término del MD de (2.9) también tiende a 0 si $z \to z_0$.

Veamos, por último, que $G^{(n-1)}$ es derivable en z_0. En efecto, si $z \in D(z_0;\eta)\setminus\{z_0\}$ dividiendo (2.9) por $z - z_0$ se obtiene

$$\frac{G^{(n-1)}(z) - G^{(n-1)}(z_0)}{z-z_0} = \frac{(n-1)!}{z-z_0}\left[\int_\gamma \frac{g(w)}{(w-z)^{n-1}(w-z_0)}\,\mathrm{d}w - \int_\gamma \frac{g(w)}{(w-z_0)^n}\,\mathrm{d}w\right] + (n-1)!\int_\gamma \frac{g(w)}{(w-z)^n(w-z_0)}\,\mathrm{d}w\,. \tag{2.10}$$

De nuevo por la hipótesis de inducción aplicada a $g(w)/(w-z_0)$, cuando $z \to z_0$ el primer término del MD de esta identidad tiende a

$$\begin{aligned}(n-1)!\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\bigg|_{z=z_0}\int_\gamma \frac{g(w)}{(w-z)^{n-1}(w-z_0)}\,\mathrm{d}w &= (n-1)\,\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}z^{n-1}}\bigg|_{z=z_0}\int_\gamma \frac{g(w)}{(w-z)(w-z_0)}\,\mathrm{d}w\\ &= (n-1)(n-1)!\int_\gamma \frac{g(w)}{(w-z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}w\,.\end{aligned}$$

En cuanto al segundo término de (2.10), de lo probado anteriormente sobre la continuidad de $G^{(n-1)}(z_0)$ aplicado ahora a la integral de tipo Cauchy

$$\int_\gamma \frac{g(w)}{(w-z)^n(w-z_0)}\,\mathrm{d}w$$

se sigue que esta última integral es una función continua en z_0, y por tanto tiende a

$$\int_\gamma \frac{g(w)}{(w-z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}w\,.$$

cuando $z \to z_0$. De lo anterior se sigue que $G^{(n-1)}$ es derivable en z_0, siendo

$$\begin{aligned}G^{(n)}(z_0) &= (n-1)(n-1)!\int_\gamma \frac{g(w)}{(w-z_0)^{n+1}} + (n-1)!\int_\gamma \frac{g(w)}{(w-z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}w\\ &= n!\int_\gamma \frac{g(w)}{(w-z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}w\,.\end{aligned}$$

□

2.3.3 Fórmula integral de Cauchy para las derivadas

A partir del lema anterior es fácil probar el siguiente teorema, que generaliza la fórmula integral de Cauchy a las derivadas de todos los órdenes de una función analítica:

Fórmula integral de Cauchy para las derivadas. *Sea $f : A \to \mathbb{C}$ una función analítica en una región A. Entonces f es* infinitas veces derivable *en cualquier punto de A. Además, si $\gamma : [a,b] \to A$ es un arco cerrado homótopo a un punto en A y $z_0 \in A \setminus \gamma([a,b])$ se verifica*

$$n(\gamma, z_0) \cdot f^{(k)}(z_0) = \frac{k!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{(w-z_0)^{k+1}}\,dw, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{2.11}$$

Demostración. Sea $z_0 \in A \setminus \gamma([a,b])$, y sea D cualquier entorno de z_0 contenido en A que no corte a γ (por ejemplo, el disco $D(z_0;\eta)$ definido en la demostración del lema anterior). Al ser $n(\gamma,z)$ una integral de tipo Cauchy (con $g = 1/2\pi i$), es una función continua de z para todo $z \in D$, y como es un número *entero* ha de ser *constante* en dicho entorno. Por tanto, si

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\,dw\,, \qquad z \in D,$$

entonces (en virtud de la fórmula integral de Cauchy)

$$F(z) = n(\gamma,z) f(z) = n(\gamma,z_0) f(z)\,, \qquad \forall z \in D\,. \tag{2.12}$$

Como F es también de tipo Cauchy, aplicando las ecs. (2.7) y (2.12) se obtiene

$$F^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{(w-z)^{k+1}}\,dw = n(\gamma,z_0) f^{(k)}(z)\,, \qquad \forall z \in D\,.$$

Haciendo $z = z_0$ se deduce (2.11). □

A partir del teorema anterior se prueba fácilmente la siguiente propiedad fundamental de las funciones analíticas:

Teorema 2.9. *Si $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es* analítica *en un conjunto* arbitrario *C, entonces f es* infinitas veces derivable *en todo punto de C.*

Demostración. Dado un punto $z \in C$, basta aplicar el teorema anterior en un entorno A de z en que f sea analítica. □

El resultado anterior permite probar fácilmente el siguiente teorema, recíproco (parcial) del teorema de Cauchy:

Teorema de Morera. *Si $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es continua en una región A y $\int_\gamma f = 0$ para todo arco cerrado γ contenido en A, entonces f es analítica en A.*

Demostración. El teorema acerca de la independencia del camino implica que existe $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analítica en A tal que $f = F'$ en A. Como F es analítica en A, es infinitamente derivable en dicha región, y por tanto $f' = F''$ existe en todo punto de A. □

Ejercicio. ¿Es cierto el resultado anterior si sólo suponemos que $\int_\gamma f = 0$ para todo arco cerrado $\gamma \subset A$ *homótopo a un punto* en A?

2.3.4 Teorema de Liouville

La fórmula integral de Cauchy para las derivadas permite probar las siguientes desigualdades satisfechas por el módulo de las derivadas de una función analítica:

Desigualdades de Cauchy. *Sea f analítica en una región A, sea $a \in A$, y supongamos que $\overline{D}(a;R) \subset A$. Si $M(R) = \max_{|z-a|=R} |f(z)|$ se verifica*

$$\left|f^{(k)}(a)\right| \leqslant \frac{k!}{R^k}\, M(R), \qquad \forall k = 0, 1, 2, \dots.$$

Demostración. Nótese, en primer lugar, que la existencia del *máximo* de $|f|$ en la circunferencia está garantizada, al ser dicho conjunto compacto y f continua (por ser analítica en A). Si γ es la circunferencia de centro a y radio R orientado positivamente, entonces γ es homótopo a un punto en A y $n(\gamma, a) = 1$. La fórmula integral de Cauchy para la k-ésima derivada proporciona entonces

$$\left|f^{(k)}(a)\right| = \frac{k!}{2\pi}\left|\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-a)^{k+1}}\,\mathrm{d}z\right| \leqslant \frac{k!}{2\pi}\int_\gamma \frac{|f(z)|}{|z-a|^{k+1}}\,|\mathrm{d}z| \leqslant \frac{k!}{2\pi}\frac{M(R)}{R^{k+1}}\,2\pi R = \frac{k!}{R^k}\,M(R).$$

$\square$

A partir del resultado anterior se demuestra el siguiente teorema, esencial para el estudio de las propiedades globales de las funciones analíticas:

Teorema de Liouville. *Si $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es* **entera** *(es decir, analítica en todo $\mathbb{C}$) y $|f|$ está* acotado *en $\mathbb{C}$, entonces f es* constante.

Demostración. La hipótesis implica que existe $K > 0$ tal que $|f(z)| < K$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Si $a \in \mathbb{C}$, al ser f analítica en todo $\mathbb{C}$ podemos aplicar la desigualdad de Cauchy para la primera derivada a *cualquier* disco cerrado $\overline{D}(a;R)$, obteniendo

$$\left|f'(a)\right| < \frac{M(R)}{R} \leqslant \frac{K}{R}, \quad \forall R > 0\,.$$

Como la desigualdad anterior es válida para *todo* $R > 0$ de ella se deduce que $|f'(a)| = 0$ para todo $a \in \mathbb{C}$. Al ser $\mathbb{C}$ conexo, f ha de ser constante en $\mathbb{C}$. $\square$

El teorema de Liouville proporciona una de las demostraciones más sencillas del teorema fundamental del Álgebra:

Teorema fundamental del Álgebra. *Un polinomio de grado $n \geqslant 1$ tiene al menos una raíz en $\mathbb{C}$.*

Demostración. Sea $p(z) = \sum_{i=0}^{n} a_i z^i$, con $a_n \neq 0$ y $n \geqslant 1$. Si p no tuviera ninguna raíz, la función $f = 1/p$ sería entera. Probaremos que esto es imposible demostrando que en tal caso f sería también acotada en $\mathbb{C}$ y no constante, en contradicción con el teorema de Liouville.

Para probar que f está acotada, nótese que si $z \neq 0$

$$|p(z)| \geqslant |z|^n\left(|a_n| - \frac{|a_{n-1}|}{|z|} - \dots - \frac{|a_0|}{|z|^n}\right).$$

Como $\dfrac{|a_k|}{|z|^{n-k}} \xrightarrow[|z|\to\infty]{} 0$ $\;(k = 0, \dots, n-1)$, existe $M > 1$ tal que

$$|z| > M \implies \frac{|a_k|}{|z|^{n-k}} < \frac{|a_n|}{2n}, \quad k = 0, \dots, n-1.$$

Luego

$$|z| > M \implies |p(z)| > |z|^n \left(|a_n| - n \cdot \frac{|a_n|}{2n} \right) = \frac{|a_n|}{2}\,|z|^n > \frac{|a_n|}{2} > 0\,,$$

y por tanto

$$|z| > M \implies |f(z)| < \frac{2}{|a_n|}\,.$$

Por otra parte, al ser f por hipótesis analítica (y por tanto continua) en el disco cerrado de centro 0 y radio M, existe $c > 0$ tal que $|f(z)| \leqslant c$ si $|z| \leqslant M$. (Recuérdese que toda función $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continua en un conjunto compacto $K \subset \mathbb{R}^n$ está acotada en K.) Por tanto, hemos probado que

$$|f(z)| = \frac{1}{|p(z)|} \leqslant \max\left(\frac{2}{|a_n|}, c\right), \qquad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Esto contradice el teorema de Liouville, al ser $f \equiv 1/p$ entera y no constante (p no es constante, ya que $a_n \neq 0$ y $n \geqslant 1$). $\square$

Capítulo 3

Representación de funciones analíticas mediante series

3.1 Series de potencias. Teorema de Taylor

3.1.1 Sucesiones y series de números complejos

Definición 3.1. Una **sucesión** de números complejos $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ **converge** a $z \in \mathbb{C}$ ($\iff \lim_{n\to\infty} z_n = z$) si

$$\boxed{\forall\varepsilon > 0, \ \ \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{t.q.} \quad n \geqslant N \implies |z_n - z| < \varepsilon}\,.$$

- Nótese que la definición es idéntica a la del caso real, reemplazando el valor absoluto (o la norma) por el módulo.

Propiedades:

i) $\lim_{n\to\infty} z_n$, si existe, es único.

ii) $\lim_{n\to\infty} z_n = z \equiv x + \mathrm{i}y \iff \lim_{n\to\infty} \mathrm{Re}(z_n) = x, \ \lim_{n\to\infty} \mathrm{Im}(z_n) = y$.

iii) $\lim_{n\to\infty} z_n = z, \ \ \lim_{n\to\infty} w_n = w \quad \implies \quad \lim_{n\to\infty}(z_n + w_n) = z + w\,, \ \ \lim_{n\to\infty} z_n w_n = zw\,.$

iv) Si, además, $w_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $w \neq 0$, entonces $\lim_{n\to\infty} \dfrac{z_n}{w_n} = \dfrac{z}{w}\,.$

- **Criterio de Cauchy:**

$$\boxed{\exists \lim_{n\to\infty} z_n \iff \forall\varepsilon > 0, \ \ \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{t.q.} \quad n, m \geqslant N \implies |z_n - z_m| < \varepsilon}\,.$$

Demostración.

$\implies$) $|z_n - z_m| \leqslant |z_n - z| + |z_m - z|$

$\impliedby$) $z_n = x_n + \mathrm{i}y_n \implies |x_n - x_m| \leqslant |z_n - z_m|\,, \ |y_n - y_m| \leqslant |z_n - z_m| \implies \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ convergentes (sucesiones reales de Cauchy) $\implies \{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ convergente. □

Definición 3.2. La serie $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ **converge** a $s \in \mathbb{C}$ $\left(\iff \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} z_k = s\right)$ si la sucesión de **sumas parciales** $\left\{\sum_{k=1}^{n} z_k\right\}_{n=1}^{\infty}$ converge a s, es decir

$$\sum_{k=1}^{\infty} z_k = s \iff \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} z_k = s.$$

- $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ convergente $\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} z_n = 0$. En efecto,

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} z_k - \sum_{k=1}^{n-1} z_k\right) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} z_k - \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1} z_k = s - s = 0\,.$$

Definición 3.3. Se dice que $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ es **absolutamente convergente** si $\sum_{k=1}^{\infty} |z_k|$ es convergente.

Proposición 3.4. *Si $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ es absolutamente convergente entonces es convergente.*

Demostración. Es consecuencia del criterio de Cauchy, ya que si (por ej.) $m > n$ se tiene

$$\left|\sum_{k=1}^{m} z_k - \sum_{k=1}^{n} z_k\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{m} z_k\right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{m} |z_k| = \left|\sum_{k=1}^{m} |z_k| - \sum_{k=1}^{n} |z_k|\right|.$$

□

3.1.2 Sucesiones y series de funciones. Convergencia uniforme

Definición 3.5. Una **sucesión de funciones** $f_n : A \to \mathbb{C}$ definidas en un conjunto $A \subset \mathbb{C}$ ($n \in \mathbb{N}$) **converge puntualmente** a una función f en A si para todo $z \in A$ existe $\lim_{n\to\infty} f_n(z) = f(z)$. Análogamente, la **serie de funciones** $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ converge puntualmente a la función g en A si existe $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z) = g(z)$ para todo $z \in A$.

Definición 3.6. La sucesión de funciones $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ definidas en A **converge uniformemente a** f **en** A si

$$\boxed{\forall\varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{t.q.} \quad n \geqslant N \Longrightarrow |f_n(z) - f(z)| < \varepsilon,\ \ \textbf{para todo}\ \ z \in A}\,.$$

Análogamente, $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ converge uniformemente a g en A si la sucesión de funciones $\left\{\sum_{k=1}^{n} f_k\right\}_{n=1}^{\infty}$ converge uniformemente a g en A, es decir si

$$\boxed{\forall\varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{t.q.} \quad n \geqslant N \Longrightarrow \left|\sum_{k=1}^{n} f_k(z) - g(z)\right| < \varepsilon,\ \ \textbf{para todo}\ \ z \in A}\,.$$

- Obviamente, si una sucesión ó serie de funciones converge uniformemente a una función f en A entonces dicha sucesión o serie converge puntualmente en A a la misma función. Sin embargo, *la convergencia puntual de una sucesión o serie de funciones no implica, en general, su convergencia uniforme.*

- **Criterio de Cauchy para la convergencia uniforme:** $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge uniformemente en A si y sólo si

$$\boxed{\forall\varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{t.q.} \quad n, m \geqslant N \Longrightarrow |f_n(z) - f_m(z)| < \varepsilon,\ \ \textbf{para todo}\ \ z \in A}\,.$$

Demostración. En primer lugar, es claro que la convergencia uniforme de f_n a f en A implica el criterio de Cauchy. Para demostrar el recíproco nótese que, por el criterio de Cauchy para sucesiones numéricas, la sucesión $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge puntualmente a una función f en A. Haciendo tender m a infinito en la condición de Cauchy uniforme se prueba que si $n \geqslant N$ entonces $|f_n(z) - f(z)| \leqslant \varepsilon$ para todo $z \in A$. □

Análogamente, la serie $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k$ converge uniformemente a una función g en A si y sólo si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{t.q.} \quad m > n \geqslant N \Longrightarrow \left| \sum_{k=n+1}^{m} f_k(z) \right| < \varepsilon, \ \textbf{para todo} \ z \in A.$$

Criterio M de Weierstrass. *Sea $f_k : A \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ($k \in \mathbb{N}$) una sucesión de funciones, y supongamos que $|f_k(z)| \leqslant M_k$ para todo $z \in A$ y para todo $k \in \mathbb{N}$. Si la serie numérica $\sum_{k=1}^{\infty} M_k$ es convergente, entonces $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ converge absoluta y uniformemente en A.*

Demostración. Dado $\varepsilon > 0$, por el criterio de Cauchy para series numéricas existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$m > n \geqslant N \quad \Longrightarrow \quad \left| \sum_{k=n+1}^{m} M_k \right| < \varepsilon.$$

Pero entonces

$$m > n \geqslant N \quad \Longrightarrow \quad \left| \sum_{k=n+1}^{m} f_k(z) \right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{m} |f_k(z)| \leqslant \sum_{k=n+1}^{m} M_k = \left| \sum_{k=n+1}^{m} M_k \right| < \varepsilon, \quad \forall z \in A.$$

Por el criterio de Cauchy para la convergencia uniforme, $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ converge absoluta y uniformemente en A. □

- Si $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge *uniformemente* a f en A y $f_n : A \to \mathbb{C}$ es *continua* en A para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces f es *continua* en A. Análogamente, si f_n es continua en A para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ converge uniformemente a g en A entonces g es continua en A.

La demostración de este resultado es idéntica a la del caso real, sin más que reemplazar el valor absoluto por el módulo.

Lema 3.7. *Sea f_n continua en A para todo $n \in \mathbb{N}$. Si $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge* uniformemente *a f en un arco γ contenido en A entonces*

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \int_\gamma f_n = \int_\gamma f \equiv \int_\gamma \lim_{n\to\infty} f_n}\,.$$

En particular, si f_k es continua en A para todo $k \in \mathbb{N}$ y $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ converge uniformemente en γ se tiene

$$\boxed{\int_\gamma \sum_{k=1}^{\infty} f_k = \sum_{k=1}^{\infty} \int_\gamma f_k}\,.$$

Demostración. En primer lugar, nótese que f es continua en $\gamma \subset A$ al ser uniforme la convergencia de f_n a f en A, y por tanto existe la integral $\int_\gamma f$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$ para todo $z \in \gamma$ y $n \geqslant N$. Entonces se tiene:

$$n \geqslant N \implies \left| \int_\gamma f_n - \int_\gamma f \right| = \left| \int_\gamma (f_n - f) \right| \leqslant \int_\gamma |f_n(z) - f(z)|\,|dz| \leqslant \varepsilon\, l(\gamma)\,.$$

□

Definición 3.8. Diremos que una sucesión de funciones $f_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ **converge normalmente** en un abierto $A \subset \mathbb{C}$ a una función f si $f_n \to f$ uniformemente en cada disco cerrado contenido en A. Análogamente, la serie de funciones $\sum_{k=1}^{\infty} f_n$ converge normalmente a g en A si la sucesión de sumas parciales $\sum_{k=1}^{n} f_n$ converge uniformemente a g en cada disco cerrado contenido en A.

Evidentemente, si $A \subset \mathbb{C}$ es abierto se cumple

$$f_n \to f \text{ uniformemente en } A \implies f_n \to f \text{ normalmente en } A \implies f_n \to f \text{ puntualmente en } A$$

y análogamente

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n \to g \text{ uniformemente en } A \implies \sum_{n=1}^{\infty} f_n \to g \text{ normalmente en } A$$
$$\implies \sum_{n=1}^{\infty} f_n \to g \text{ puntualmente en } A\,,$$

siendo por supuesto $g = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$.

Teorema de la convergencia analítica. *Sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones analíticas en un abierto A tales que $f_n \to f$ normalmente en A. Entonces f es analítica en A, y $f_n' \to f'$ normalmente en A.*

Demostración. En primer lugar, por ser uniforme la convergencia de f_n a f en discos cerrados contenidos en A, f es continua en cada disco cerrado contenido en A, y por tanto es continua en A. Sea $\overline{D}(a;r) \subset A$. Si γ es un arco cerrado contenido en $D(a;r)$ entonces

$$\int_{\gamma} f = \lim_{n\to\infty} \int_{\gamma} f_n = 0,$$

por el Lema 3.7 y el teorema de Cauchy (f_n es analítica en $D(a;r) \subset A$ y $D(a;r)$ es simplemente conexo). Por el teorema de Morera, f es analítica en $D(a;r)$, y por tanto en A.

Para probar que $f_n' \to f'$ uniformemente en $\overline{D}(a;r)$, nótese que existe $R > r$ tal que $\overline{D}(a;R) \subset A$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|f_n(w) - f(w)| < \varepsilon$ para todo $w \in \overline{D}(a;R)$ y $n \geqslant N$. Si $z \in \overline{D}(a;r)$ y γ es la circunferencia de centro a y radio R (orientada positivamente) se tiene entonces, por la fórmula integral de Cauchy para la primera derivada:

$$\left|f_n'(z) - f'(z)\right| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_{\gamma} \frac{f_n(w) - f(w)}{(w-z)^2}\,\mathrm{d}w\right| \leqslant \frac{1}{2\pi}\frac{\varepsilon}{(R-r)^2}\,2\pi R = \frac{\varepsilon R}{(R-r)^2}, \qquad \forall n \geqslant N.$$

□

Corolario 3.9. *Sea $\sum_{k=1}^{\infty} g_k$ una serie de funciones analíticas en un abierto A normalmente convergente a una función g en A. Entonces g es analítica en A, y $\sum_{k=1}^{\infty} g_k'$ converge normalmente a g' en dicho abierto.*

En particular, nótese que

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\sum_{k=1}^{\infty} g_k = \sum_{k=1}^{\infty} g_k'(z) \quad \text{en } A}\,;$$

en otras palabras, si se cumplen las hipótesis del corolario precedente *la serie se puede derivar término a término en A.*

3.1.3 Series de potencias

Una **serie de potencias** centrada en $z_0 \in \mathbb{C}$ es una serie del tipo

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k, \qquad a_k \in \mathbb{C} \ \ (k = 0, 1, \dots). \tag{3.1}$$

Teorema de Abel. *Para toda serie de potencias* (3.1) *hay un* R *tal que* $0 \leqslant R \leqslant \infty$, *llamado el* **radio de convergencia** *de la serie, que cumple:*

i) *La serie converge* absoluta *y* normalmente *para* $|z - z_0| < R$.

ii) *La serie diverge si* $|z - z_0| > R$.

iii) *Si* $R > 0$, *la suma de la serie es una función* analítica *en el* ***disco de convergencia*** $D(z_0; R)$, *cuya derivada se obtiene derivando término a término la serie dada.*

Demostración. Claramente, de i) y ii) se sigue que R, si existe, es único. Probaremos que

$$R = \sup I \,, \qquad I \equiv \left\{ r \geqslant 0 : \{|a_n|\, r^n\}_{n=0}^{\infty} \text{ acotado} \right\}.$$

Nótese que si $\{|a_n|\, r^n\}_{n=0}^{\infty}$ está acotado también lo está $\{|a_n|\, \rho^n\}_{n=0}^{\infty}$ para todo $\rho \leqslant r$, por lo que el conjunto I es un *intervalo* con extremo inferior en 0. En particular, $R = \infty$ si $\{|a_n|\, r^n\}_{n=0}^{\infty}$ está acotado para todo $r \geqslant 0$. Con esta definición, la parte ii) es trivial: en efecto, si $|z - z_0| > R$ la sucesión

$$\left\{ |a_n|\, |z - z_0|^n \right\}_{n=0}^{\infty} = \{|a_n (z - z_0)^n|\}_{n=0}^{\infty}$$

no está acotada (ya que $|z - z_0| \notin I$), y por tanto el término general de la serie no tiende a cero cuando $n \to \infty$.

Para probar i), nótese en primer lugar que si $R = 0$ la serie diverge para todo $z \neq z_0$, y no hay nada que probar. Supongamos, por tanto, que $R > 0$, y sea $0 < r < R$. Entonces $r \in I$ (por definición de supremo), y (de nuevo por la definición de supremo) existen $r < \rho < R$ y $M > 0$ tal que $|a_n|\, \rho^n < M$ para todo n. Si $|z - z_0| \leqslant r$ se tiene:

$$|a_n (z - z_0)^n| = |a_n|\, \rho^n \left(\frac{|z - z_0|}{\rho} \right)^n \leqslant M \left(\frac{r}{\rho} \right)^n .$$

Por el criterio M de Weierstrass, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ converge absoluta y uniformemente en $\overline{D}(z_0; r)$; en particular, converge absolutamente en $D(z_0; R)$. De lo anterior también se deduce que la serie converge uniformemente en cada disco cerrado contenido en $D(z_0; R)$, ya que todo disco cerrado contenido en $D(z_0; R)$ está contenido en algún disco cerrado centrado en z_0 de radio menor que R. Esto demuestra el apartado i). El apartado iii) se sigue entonces del teorema de la convergencia analítica. □

• *El radio de convergencia de la derivada de una serie de potencias es igual al radio de convergencia de la serie.*

En efecto, por el teorema de Abel, basta ver que la serie $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k a_k (z - z_0)^{k-1}$ diverge si $|z - z_0| > R$, siendo R el radio de convergencia de la serie original $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$. Y, en efecto,

$$k\, |a_k|\, |z - z_0|^{k-1} = |z - z_0|^{-1} \cdot k\, |a_k|\, |z - z_0|^k \geqslant |z - z_0|^{-1} \cdot |a_k|\, |z - z_0|^k .$$

Por definición de R, el último término *no* está acotado cuando $|z - z_0| > R$. Luego el término general de la serie $\sum_{k=1}^{\infty} k a_k (z - z_0)^{k-1}$ no tiende a cero si $|z - z_0| > R$, por lo que dicha serie diverge si $|z - z_0| > R$.

Aplicando repetidamente el teorema de Abel y el resultado anterior se obtiene el siguiente

Teorema 3.10. *Sea* $0 < R \leqslant \infty$ *el radio de convergencia de la serie* $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$*. Entonces* f *es* infinitas veces derivable *en* $D(z_0; R)$*, y se cumple*

$$f^{(n)}(z) = \sum_{k=n}^{\infty} k(k-1)\cdots(k-n+1)a_k(z-z_0)^{k-n}$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty}(k+n)(k+n-1)\cdots(k+1)a_{k+n}(z-z_0)^k, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \ \ \forall z \in D(z_0; R),$$

siendo el radio de convergencia de todas estas series de potencias igual a R*. Además, los coeficientes* a_n *vienen dados por*

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}, \qquad \forall n = 0, 1, 2, \dots .$$

Corolario 3.11 (unicidad de las series de potencias)**.** *Si existe* $r > 0$ *tal que*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(z-z_0)^k, \qquad \forall z \in D(z_0, r),$$

entonces $a_k = b_k$ *para todo* $k = 0, 1, 2, \dots$*.*

Demostración. $a_k = b_k = f^{(k)}(z_0)/k!$, siendo $f(z)$ la suma de cualquiera de las dos series. □

• *Los criterios del cociente y de la raíz son válidos en el campo complejo.* En efecto, consideremos la serie $\sum_{k=0}^{\infty} z_k$, y supongamos que existe (o vale $+\infty$) $\lim_{n\to\infty} |z_{n+1}| \,/\, |z_n| \equiv c$. Si $c < 1$ la serie de reales no negativos $\sum_{k=0}^{\infty} |z_k|$ es convergente, por lo que la serie $\sum_{k=0}^{\infty} z_k$ converge absolutamente. Si, por el contrario, $c > 1$ (o $c = +\infty$) entonces $|z_n|$ no está acotado para $n \to \infty$, por lo que la serie $\sum_{k=0}^{\infty} z_k$ diverge (su término general no tiende a cero si $n \to \infty$). El criterio de la raíz se establece con un razonamiento análogo.

• Si existe (*o vale* $+\infty$) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$, *entonces* $\boxed{R = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|a_n|}{|a_{n+1}|}}$.

Análogamente, si existe (*o vale* $+\infty$) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ *entonces* $\boxed{R = 1/\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$.

Probemos, por ejemplo, la primera fórmula. Por el criterio del cociente, si $z \neq z_0$ la serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$ converge si

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|\,|z-z_0|^{n+1}}{|a_n|\,|z-z_0|^n} = |z-z_0| \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1,$$

y diverge si

$$|z-z_0| \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > 1.$$

Análogamente (aplicando el criterio de la raíz) se prueba la segunda fórmula.

• *El radio de convergencia* R *de la serie de potencias* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$ *se puede calcular mediante la* fórmula de Hadamard

$$\boxed{R = 1/\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}\,.$$

Nota: si $x_n \geqslant 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\limsup_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \sup\{x_k : k \geqslant n\}\,.$$

El límite superior siempre existe, vale infinito si y sólo si $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ no está acotada superiormente, y coincide con el límite ordinario cuando dicho límite existe.

Ejemplo 3.12. Consideremos la **serie geométrica** de razón $z \in \mathbb{C}$, dada por $\sum_{k=0}^{\infty} z^k$. Se trata de una serie de potencias centrada en $z_0 = 0$ y de radio de convergencia 1 (ya que $a_n = 1$ para todo n). Por tanto la serie es absolutamente convergente si el módulo de la razón es menor que uno, y divergente si es mayor que uno. Este resultado se puede probar de forma más elemental observando que si $|z| > 1$ el término general de la serie no está acotado (su módulo tiende a infinito para $n \to \infty$), por lo que la serie es divergente. Por el contrario, si $|z| < 1$ entonces la n-ésima suma parcial de la serie está dada por

$$\sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{1 - z},$$

ya que $|z|^{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ al ser $|z| < 1$. Nótese que la serie geométrica es divergente en todos los puntos de la frontera de su disco de convergencia, ya que si $|z| = 1$ el término general de la serie es de módulo 1, y por tanto no tiende a cero si k tiende a infinito. En definitiva,

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1 - z}, \qquad |z| < 1\,.$$

3.1.4 Teorema de Taylor

En la subsección anterior hemos visto que la suma de una serie de potencias es una función analítica en su disco de convergencia. Probaremos a continuación que, recíprocamente, una función analítica en un disco abierto puede representarse mediante una serie de potencias convergente en dicho disco:

Teorema de Taylor. *Si f es analítica en el disco $D(z_0; r)$ (con $r > 0$), entonces f admite el desarrollo en* **serie de Taylor**

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z - z_0)^k, \qquad \forall z \in D(z_0; r). \tag{3.2}$$

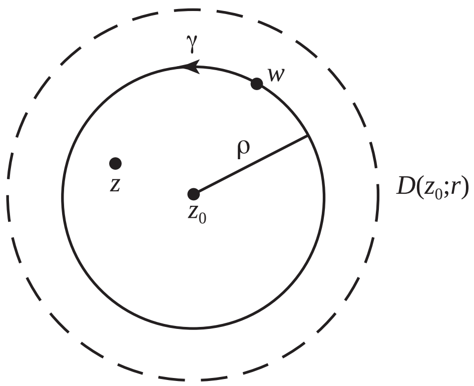

Figura 3.1: teorema de Taylor

Demostración. Fijemos un punto cualquiera $z \in D(z_0; r)$, y sea $\rho > 0$ tal que $|z - z_0| < \rho < r$. Si γ es la circunferencia de centro z_0 y radio ρ (orientada positivamente) se tiene, por la fórmula integral de Cauchy:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w - z}\, \mathrm{d}w.$$

Por otra parte,

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{w-z_0+z_0-z} = \frac{1}{w-z_0}\,\frac{1}{1-\dfrac{z-z_0}{w-z_0}} = \frac{1}{w-z_0}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^k ,$$

Nótese que la serie geométrica del miembro derecho es convergente, ya que $w \in \gamma \implies |z-z_0| < \rho = |w-z_0|$. Como $f(w)$ es analítica en γ, está acotada en γ (al ser γ un compacto), por lo que

$$\left|\frac{f(w)}{w-z_0}\right|\left|\frac{z-z_0}{w-z_0}\right|^k < \frac{M}{\rho}\left|\frac{z-z_0}{\rho}\right|^k , \qquad \forall w \in \gamma .$$

La serie *numérica* (es decir, independiente de w) $\frac{M}{\rho}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\left|\frac{z-z_0}{\rho}\right|^k$ es convergente (se trata de una serie geométrica de razón menor que 1). Por el criterio M de Weierstrass, la serie

$$g(w) \equiv \sum_{k=0}^{\infty}\frac{f(w)}{w-z_0}\left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^k$$

converge uniforme y absolutamente en γ. Integrando término a término (cf. el Lema 3.7) obtenemos

$$\begin{aligned} f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma g(w)\,dw &= \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=0}^{\infty}\int_\gamma \frac{f(w)}{(w-z_0)^{k+1}}\,(z-z_0)^k\,dw \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}(z-z_0)^k\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{(w-z_0)^{k+1}}\,dw = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^k, \end{aligned}$$

por la fórmula integral de Cauchy para la k-ésima derivada. □

Sea f analítica en un abierto no vacío $A \subset \mathbb{C}$. Si $z_0 \in A \neq \mathbb{C}$, definimos la **distancia de z_0 a la frontera ∂A de A** por

$$d(z_0;\partial A) = \inf\{|z-z_0| : z \in \partial A\} .$$

Es fácil probar que $d(z_0;\partial A) \in (0,\infty)$. Si $A = \mathbb{C}$, cuya frontera es el conjunto vacío, por convenio diremos que dicha distancia es infinita. Claramente, el disco abierto de centro z_0 y radio $d(z_0;\partial A)$ está contenido en A. Aplicando el teorema de Taylor a dicho disco se obtiene el siguiente

Corolario 3.13. *El radio de convergencia de la serie de Taylor centrada en $z_0 \in A$ de una función f analítica en A es* mayor o igual *que la distancia de z_0 a la frontera de A.*

- El radio de convergencia de la serie de Taylor de f (3.2) puede ser *estrictamente mayor* que $d(z_0;\partial A)$. Por ejemplo, esto ocurre si $f(z) = \operatorname{Log} z$ y $z_0 = -1 + i$ (véase el siguiente ejercicio).

Ejercicio. Probar que la serie de Taylor de $\operatorname{Log} z$ centrada en $-1+i$ tiene radio de convergencia $\sqrt{2}$, mientras que la distancia de $-1+i$ a la frontera de la región de analiticidad de Log es igual 1. ¿A qué función converge la serie de Taylor anterior en $D(-1+i;\sqrt{2})$?

Solución. La función $f(z) = \operatorname{Log} z$ es analítica en $A = \mathbb{C} \setminus (\mathbb{R}^- \cup \{0\})$, por lo que $\partial A = \mathbb{R}^- \cup \{0\}$. Si $z_0 = -1+i$ entonces

$$d(z_0;\partial A) = 1 \equiv d .$$

Por otra parte,

$$f'(z) = \frac{1}{z} \implies f^{(k)}(z) = (-1)^{k-1}\frac{(k-1)!}{z^k}, \qquad k = 1, 2, \dots .$$

Por tanto la serie de Taylor de f centrada en z_0 es

$$f(z) = \operatorname{Log}(z) = \operatorname{Log} z_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k\, z_0^k}(z - z_0)^k \tag{3.3}$$

(nótese que $\operatorname{Log}(z_0) = \frac{1}{2}\log 2 + \frac{3\pi \mathrm{i}}{4}$, aunque este hecho no es importante). Por el criterio de la raíz, el radio de convergencia de esta serie es

$$R = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{k|z_0|^k} = |z_0| \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{k} = |z_0| = \sqrt{2} > d = 1\,.$$

La serie de Taylor de Log centrada en $z_0 \equiv -1 + \mathrm{i}$ converge a $F(z) = \log_{[0,2\pi)}$ en $D(z_0; \sqrt{2})$. En efecto, f y F claramente coinciden en $D(z_0; 1)$, por lo que

$$F^{(k)}(z_0) = f^{(k)}(z_0)\,, \qquad k = 0\,,\ 1\,,\ \dots\,.$$

Por tanto la serie de Taylor de F centrada en z_0 coincide con la de f. Como F es analítica en el disco $D(z_0; \sqrt{2})$, $F(z)$ es igual a la suma de su serie de Taylor, es decir a la suma de la serie (3.3), en dicho disco.

Proposición 3.14. *Sea f analítica en A, sea $z_0 \in A$, y supongamos que f* no está acotada *en el disco de centro z_0 y radio $d(z_0; \partial A)$. Entonces el radio de convergencia de la serie de Taylor de f centrada en z_0 es* exactamente igual *a $d(z_0; \partial A)$.*

Demostración. Sea R el radio de convergencia de la serie de Taylor de f centrada en z_0, y supongamos que $R > d(z_0; \partial A) \equiv d$. Si

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z - z_0)^k\,, \qquad |z - z_0| < R\,,$$

entonces $F = f$ en $D(z_0; d)$. Por otra parte, F está acotada en $\overline{D}(z_0; d)$, ya que este disco cerrado es un conjunto compacto enteramente contenido en $D(z_0; R)$, y F es continua (analítica) en este último disco. En particular, F está acotada en el disco abierto $D(z_0; d)$. Pero esto contradice la hipótesis, ya que $F = f$ en $D(z_0; d)$. □

3.1.5 Ceros de funciones analíticas

En esta subsección resumiremos algunas propiedades fundamentales del conjunto de los ceros de una función analítica.

Proposición 3.15. *Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función analítica en un punto $a \in \mathbb{C}$, y supongamos que $f(a) = 0$. Entonces o bien f se anula idénticamente en un entorno de a, o bien f no se anula en un entorno reducido de dicho punto.*

Demostración. Si f es analítica en a entonces f es derivable en un cierto entorno $D(a; r) \equiv D$ de a. Por el teorema de Taylor,

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k (z - a)^k\,, \qquad |z - a| < r\,.$$

Si los coeficientes c_k son todos nulos, entonces $f = 0$ en D. En caso contrario, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$c_0 = \cdots = c_{n-1} = 0, \quad c_n \neq 0,$$

y por tanto

$$f(z)=\sum_{k=n}^{\infty}c_k(z-a)^k=(z-a)^n\sum_{k=0}^{\infty}c_{k+n}(z-a)^k\equiv(z-a)^n g(z)\,,\qquad |z-a|<r\,.$$

La función $g(z)$ es analítica en D (ya que es la suma de una serie de potencias convergente en D), y $g(a)=c_n\neq 0$. Al ser g continua en a, existe $0<\delta<r$ tal que $g(z)\neq 0$ para todo $z\in D(a;\delta)$. En particular, $f(z)=(z-a)^n g(z)$ no se anula en el entorno reducido $D(a;\delta)-\{a\}$ de a. □

• Sea, como antes, f analítica en $a\in\mathbb{C}$ y no idénticamente nula en un entorno de dicho punto. Si $f(a)=0$, por el lema anterior existe $n\in\mathbb{N}$ tal que

$$f(z)=(z-a)^n g(z)\,,$$

con g analítica y no nula en un entorno de a. Además, en este caso se tiene

$$f(a)=\cdots=f^{(n-1)}(a)=0,\quad f^{(n)}(a)\neq 0\,,$$

dado que $f^{(k)}(a)=k!c_k$. Se dice entonces que f tiene un **cero de orden** n en a.

• Con ayuda de la proposición anterior se puede probar la siguiente propiedad fundamental de las funciones analíticas, que es la base del **principio de prolongación analítica**:

Teorema 3.16. *Si $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ es analítica en una* región *A, y f se anula en un entorno de un punto $z_0\in A$, entonces f es idénticamente nula en todo A.*

3.2 Series de Laurent. Teorema de Laurent

3.2.1 Series de Laurent

Una serie de la forma

$$f(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{b_k}{(z-z_0)^k}\tag{3.4}$$

es una serie de potencias en la variable $w=(z-z_0)^{-1}$. Por tanto, si ρ es el radio de convergencia de esta serie de potencias y $R=1/\rho$ (con $0\leqslant R\leqslant\infty$), la serie (3.4) converge si $|z-z_0|>R$ y diverge si $|z-z_0|<R$, siendo la convergencia de la serie absoluta y uniforme en el exterior de cualquier disco $D(z_0;r)$ con $r>R$. Además, la función f es analítica en la región de convergencia $|z-z_0|>R$, ya que es la composición de la serie de potencias $g(w)\equiv\sum_{k=1}^{\infty}b_k\,w^k$, analítica para $|w|<\rho\equiv 1/R$, con la función $h(z)=(z-z_0)^{-1}$.

Consideremos a continuación la serie más general

$$f(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_{-k}}{(z-z_0)^k}+\sum_{k=0}^{\infty}a_k(z-z_0)^k\equiv\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k(z-z_0)^k.\tag{3.5}$$

La primera serie convergerá absolutamente a una función analítica para $|z-z_0|>R_1$, y la segunda si $|z-z_0|<R_2$. Por tanto, f estará definida y será analítica en la **corona circular**

$$C(z_0;R_1,R_2)=\{z:R_1<|z-z_0|<R_2\}\,,$$

llamada **corona de convergencia**, siempre y cuando $0\leqslant R_1<R_2\leqslant\infty$. Además (por los resultados sobre series de potencias) la convergencia de ambas series (3.5) es absoluta y uniforme en toda subcorona cerrada contenida en $C(z_0;R_1,R_2)$. Una serie del tipo (3.5) se denomina **serie de Laurent** centrada en z_0.

Proposición 3.17. *Si la serie de Laurent*

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

converge en la corona $C(z_0; R_1, R_2)$ *(con* $0 \leqslant R_1 < R_2 \leqslant \infty$*) entonces se tiene:*

$$\boxed{a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} \, dz\,, \qquad \forall n \in \mathbb{Z}}\,,$$

siendo γ_r *la circunferencia de centro* z_0 *y radio* r *(con* $R_1 < r < R_2$*) orientada positivamente.*

Demostración. En efecto, por definición de f se tiene:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} \, dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^{k-n-1} \, dz\,.$$

La serie bajo el signo integral es una serie de Laurent convergente en la corona $C(z_0; R_1, R_2)$, y por tanto converge *uniformemente* en la circunferencia γ_r (por las propiedades de las series de Laurent). Aplicando el Lema 3.7 se obtiene:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} \, dz = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} (z - z_0)^{k-n-1} \, dz\,.$$

Por el teorema fundamental del Cálculo, para todo entero $j \neq -1$ se tiene

$$\int_{\gamma_r} (z - z_0)^j \, dz = \int_{\gamma_r} \frac{d}{dz} \left[\frac{(z - z_0)^{j+1}}{j+1} \right] dz = 0\,,$$

y por tanto

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} \, dz = a_n \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{dz}{z - z_0} = a_n \cdot n(\gamma_r, z_0) = a_n\,.$$

□

Corolario 3.18 (unicidad de las series de Laurent)**.** *Si*

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z - z_0)^k\,, \qquad R_1 < |z - z_0| < R_2\,, \tag{3.6}$$

entonces $a_k = c_k$ *para todo* $k \in \mathbb{Z}$.

3.2.2 Teorema de Laurent

Por lo visto anteriormente, las series de Laurent son funciones analíticas en su corona de convergencia. Recíprocamente, probaremos a continuación que una función analítica en una corona es la suma de una serie de Laurent:

Teorema de Laurent. *Sea f una función analítica en la corona $C(z_0; R_1, R_2)$, con $0 \leqslant R_1 < R_2 \leqslant \infty$. Si $R_1 < r < R_2$, sea γ_r la circunferencia de centro z_0 y radio r orientada positivamente, y definamos*

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} \, dz, \qquad \forall k \in \mathbb{Z}. \tag{3.7}$$

Entonces f admite el ***desarrollo en serie de Laurent***

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \,, \qquad R_1 < |z - z_0| < R_2 \,, \tag{3.8}$$

donde la serie del miembro derecho converge absoluta y uniformemente en cada subcorona cerrada contenida en $C(z_0; R_1, R_2)$.

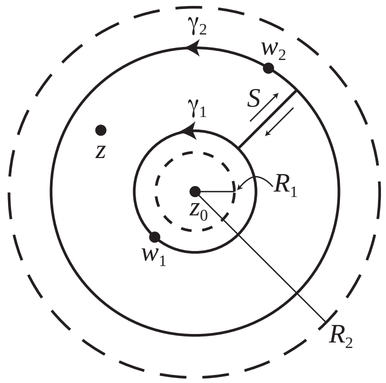

Figura 3.2: teorema de Laurent

Demostración. Sea $z \in C(z_0; R_1, R_2)$ y tomemos r_1 y r_2 tales que $R_1 < r_1 < |z - z_0| < r_2 < R_2$, de modo que la corona cerrada $\overline{A} = \overline{C}(z_0; r_1, r_2)$ está contenida en $C(z_0; R_1, R_2)$. Llamemos $\gamma_{r_1} \equiv \gamma_1$, $\gamma_{r_2} \equiv \gamma_2$. La curva cerrada $S + \gamma_2 - S - \gamma_1$ es homótopa a un punto en $C(z_0; R_1, R_2)$ (véase la fig. 3.2). Por la fórmula integral de Cauchy,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{S+\gamma_2-S-\gamma_1} \frac{f(w)}{w - z} \, dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(w)}{w - z} \, dw - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(w)}{w - z} \, dw \equiv f_2(z) - f_1(z) \,.$$

La demostración del teorema de Laurent consiste, básicamente, en desarrollar f_1 y f_2 como series de potencias en $(z - z_0)^{-1}$ y $z - z_0$, respectivamente. Para f_2, repitiendo el razonamiento que se utilizó para probar el teorema de Taylor se obtiene

$$f_2(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} f(w) \frac{1}{w - z_0} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{w - z_0} \right)^k dw = \sum_{k=0}^{\infty} (z - z_0)^k \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{k+1}} \, dw,$$

donde el último paso está justificado por la convergencia uniforme de la serie para $w \in \gamma_2$ ($w \in \gamma_2 \implies |z - z_0| / |w - z_0| = |z - z_0| / r_2 < 1$). En cuanto a f_1, basta observar que si $r_1 < |z - z_0|$ se tiene

$$\frac{1}{w - z} = -\frac{1}{z - z_0} \frac{1}{1 - \dfrac{w - z_0}{z - z_0}} = -\frac{1}{z - z_0} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{w - z_0}{z - z_0} \right)^k .$$

De nuevo, la convergencia de la serie geométrica del miembro derecho es uniforme para $w \in \gamma_1$, ya que

$$w \in \gamma_1 \implies \frac{|w - z_0|}{|z - z_0|} = \frac{r_1}{|z - z_0|} < 1 \,,$$

Aplicando el Lema 3.7 se obtiene

$$-f_1(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1} f(w)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(w-z_0)^k}{(z-z_0)^{k+1}}\,dw = \sum_{k=0}^{\infty}(z-z_0)^{-k-1}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1} f(w)(w-z_0)^k\,dw$$
$$= \sum_{n=-\infty}^{-1}(z-z_0)^n\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}\,dw.$$

Por el teorema de la deformación, $\int_{\gamma_r} f(w)(w-z_0)^{-n-1}\,dw$ es independiente de r si $R_1 < r < R_2$, lo que prueba (3.7)–(3.8). La corona de convergencia de la serie de Laurent (3.7)–(3.8) es por lo menos $C(z_0; R_1, R_2)$; por tanto, de las propiedades de las series de Laurent se deduce que la convergencia de dicha serie es absoluta y uniforme en toda subcorona cerrada centrada en z_0 y contenida en $C(z_0; R_1, R_2)$. □

3.3 Clasificación de singularidades aisladas

Definición 3.19. Una función $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tiene una **singularidad aislada** en $z_0 \in \mathbb{C}$ si f no es derivable en z_0, pero es analítica en algún entorno reducido $C(z_0; 0, r)$ (con $r > 0$) de z_0.

Por el teorema de Laurent, si f tiene una singularidad aislada en z_0 existe $r > 0$ tal que f admite un desarrollo en serie de Laurent (3.5) en $C(z_0; 0, r)$:

$$\boxed{f(z) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{b_k}{(z-z_0)^k} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k, \qquad \text{si } 0 < |z-z_0| < r}\,.$$

i) Si $b_k = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$, se dice que z_0 es una **singularidad evitable** de f.

ii) Si $b_p \neq 0$ y $b_k = 0$ para todo $k > p$, el punto z_0 es un **polo de orden** p para f.

iii) Finalmente, si existen infinitos coeficientes $b_k \neq 0$ se dice que f tiene una **singularidad esencial** en z_0.

Definición 3.20. La serie $\sum_{k=1}^{\infty} b_k(z-z_0)^{-k}$ se denomina **parte principal** del desarrollo de Laurent de f en z_0. Llamaremos también **residuo** de f en z_0 al coeficiente b_1:

$$\boxed{\operatorname{Res}(f; z_0) = b_1}\,.$$

- Si f tiene una singularidad evitable en z_0 entonces existe el límite

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = a_0\,. \tag{3.9}$$

Definiendo $f(z_0) = a_0$, la función f es analítica en $D(z_0; r)$ (ya que la serie de potencias que representa a f para $0 < |z-z_0| < r$ converge en dicho disco). Recíprocamente, si f es analítica en un entorno reducido de z_0 y se verifica (3.9) entonces f tiene una singularidad evitable en z_0. En efecto, (3.9) implica que

$$\boxed{\lim_{z\to z_0}\big[(z-z_0)f(z)\big] = 0}\,. \tag{3.10}$$

Aplicando el teorema de Cauchy generalizado se obtiene entonces

$$a_{-m} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} f(z)(z-z_0)^{m-1}\,dz = 0\,, \qquad \forall m \in \mathbb{N}\,.$$

Por tanto f *tiene una singularidad evitable en* z_0 *si y sólo si* $f(z)$ *tiene límite cuando* z *tiende a* z_0. De hecho, es válido el siguiente resultado, ligeramente más general:

Proposición 3.21. *Sea $z_0 \in \mathbb{C}$ una singularidad aislada de $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Entonces f tiene una singularidad evitable en z_0 si y sólo se verifica la condición* (3.10).

Demostración. En efecto, si f tiene una singularidad evitable en z_0 entonces f tiene límite en z_0, lo cual implica (3.10). Recíprocamente, si se verifica esta condición entonces el teorema de Cauchy generalizado implica que todos los coeficientes a_k con $k < 0$ del desarrollo de Laurent de f centrado en z_0 son nulos. □

Ejemplo 3.22. La función $f(z) = \operatorname{sen} z/z$, definida para todo $z \neq 0$, tiene una singularidad evitable en el origen. En efecto, aunque formalmente f no está definida (y por tanto no es analítica) en $z = 0$ se cumple la condición (3.10), ya que $\lim_{z\to 0}[z f(z)] = \lim_{z\to 0} \operatorname{sen} z = 0$. La serie de Laurent de f en la corona de analiticidad $C(0; 0, \infty)$ se calcula fácilmente a partir de la serie de Taylor de $\operatorname{sen} z$:

$$f(z) = \frac{1}{z}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k+1)!}, \qquad z \neq 0 .$$

Si definimos $f(0) = \lim_{z\to 0} f(z) = 1$, la función f está dada por la suma de la serie anterior para todo $z \in \mathbb{C}$, y es por tanto entera.

- Por definición, f tiene un polo de orden p en z_0 si y sólo si existe $r > 0$ tal que

$$0 < |z - z_0| < r \implies f(z) = \frac{1}{(z-z_0)^p}\Bigg(b_p + b_{p-1}(z-z_0) + \cdots + b_1(z-z_0)^{p-1} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^{k+p}\Bigg) \equiv \frac{F(z)}{(z-z_0)^p},$$

siendo F analítica en $D(z_0; r)$ y $F(z_0) = b_p \neq 0$. Por tanto *f tiene un polo de orden p en z_0 si y sólo si $(z-z_0)^p f(z)$ tiene una singularidad evitable en z_0, y*

$$\boxed{\exists \lim_{z\to z_0}\big[(z-z_0)^p f(z)\big] \neq 0}\,. \tag{3.11}$$

De hecho, puede probarse un resultado ligeramente más general:

Proposición 3.23. *Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analítica en un entorno reducido de z_0. Entonces f tiene un polo de orden p en z_0 si y sólo si se cumple la condición* (3.11).

Demostración. En efecto, por lo visto anteriormente la condición (3.11) se cumple cuando f tiene un polo de orden p en z_0. Recíprocamente, si se verifica dicha condición es claro que z_0 es una singularidad aislada de f, ya que (3.11) claramente implica que f no tiene limite cuando $z \to z_0$, y por tanto no es derivable en dicho punto. Además, de la Proposición 3.21 aplicada a $(z-z_0)^p f(z)$ se sigue que $(z-z_0)^p f(z)$ tiene una singularidad evitable en z_0. La observación que precede a esta proposición implica entonces que f tiene un polo de orden p en z_0. □

- Si f tiene un polo de orden p en z_0, entonces

$$f(z) = \frac{F(z)}{(z-z_0)^p}, \qquad 0 < |z - z_0| < r ,$$

con F analítica en $D(z_0; r)$ y $F(z_0) = b_p \neq 0$. Por continuidad, existe $0 < \delta \leqslant r$ tal que $F(z) \neq 0$ si $|z - z_0| < \delta$, y por tanto

$$\frac{1}{f(z)} = (z-z_0)^p \frac{1}{F(z)}, \qquad 0 < |z - z_0| < \delta ,$$

con $1/F$ analítica y no nula en $D(z_0; \delta)$. Luego $1/f$ tiene una singularidad evitable (cero de orden p) en z_0. Recíprocamente (véase la Sección 3.1.5) si f tiene un cero de orden $p > 0$ en z_0 entonces $1/f$ tiene un polo de orden p en z_0. Por tanto:

Proposición 3.24. *f tiene un polo de orden p en z_0 si y sólo si la función*

$$g(z) = \begin{cases} \frac{1}{f(z)}\,, & z \neq z_0 \\ 0\,, & z = z_0 \end{cases}$$

tiene un cero de orden p en z_0.

Ejemplo 3.25. Consideremos la función $f(z) = \csc^2 z$, analítica para $z \neq k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$. En este caso la función $g(z) = \operatorname{sen}^2 z$ tiene un cero doble en cada una de las singularidades (obviamente aisladas) $z = k\pi$ de f, ya que $\operatorname{sen} z$ tiene un cero simple[1] en dichos puntos (pues $\operatorname{sen}(k\pi) = 0$, $\cos(k\pi) = (-1)^k \neq 0$). Por tanto, f tiene un polo de orden dos en cada uno de los puntos $z = k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$.

• Supongamos que $f = g/h$, donde g y h son funciones analíticas en z_0 y con ceros de orden $n \geqslant 0$ y $m \geqslant 1$, respectivamente, en dicho punto. Si g y h no son idénticamente nulas, por lo visto en la Sección 3.1.5 existe $r > 0$ tal que

$$|z - z_0| < r \quad \Longrightarrow \quad g(z) = (z - z_0)^n G(z)\,, \quad h(z) = (z - z_0)^m H(z)\,,$$

con G y H analíticas y no nulas en $D(z_0; r)$. En particular, al ser $h(z) \neq 0$ en un entorno reducido de z_0, dicho punto es una singularidad aislada de f. Utilizando las expresiones anteriores para g y h se obtiene

$$0 < |z - z_0| < r \Longrightarrow f(z) = \frac{g(z)}{h(z)} = \frac{(z - z_0)^n G(z)}{(z - z_0)^m H(z)} \equiv (z - z_0)^{n-m} R(z),$$

siendo $R \equiv G/H$ analítica (cociente de funciones analíticas con $H(z) \neq 0$) y no nula en z_0 (ya que $G(z_0) \neq 0$). Luego:

i) Si $n \geqslant m$, f tiene una singularidad evitable (cero de orden $n - m$) en z_0.

ii) Si $n < m$, f tiene un polo de orden $m - n$ en z_0.

En particular, de lo anterior se deduce que *las singularidades del cociente de dos funciones analíticas no idénticamente nulas sólo pueden ser polos o singularidades evitables.*

Proposición 3.26. *Supongamos que $f = g \cdot h$, con g analítica en z_0 y $g(z_0) \neq 0$, y sea z_0 una singularidad aislada de h. Entonces z_0 es una singularidad aislada de f, del mismo tipo que lo es para h.*

Demostración. En efecto, es claro que f tiene una singularidad aislada en z_0, ya que si h es analítica en $C(z_0; 0, r)$ ($r > 0$) y g es analítica en $D(z_0; r)$ entonces $f \equiv g \cdot h$ es analítica en $C(z_0; 0, r)$. Además, f *no* puede ser derivable en z_0, ya que en tal caso $h = f/g$ sería derivable en dicho punto (al ser el cociente de dos funciones derivables en z_0, con denominador no nulo en z_0).

Si z_0 es una singularidad evitable de h entonces h coincide con una función analítica en un entorno reducido de z_0, y por tanto lo mismo ocurre con f. Luego en este caso f tiene también una singularidad evitable en z_0. Por otra parte, si h tiene un polo de orden p en z_0 entonces $h(z) = (z - z_0)^{-p} H(z)$, con H analítica en un entorno de z_0 y $H(z_0) \neq 0 \Longrightarrow f(z) = (z - z_0)^{-p} \cdot g(z)\, H(z) \equiv (z - z_0)^{-p} F(z)$, con $F = gH$ analítica en un entorno de z_0 y $F(z_0) = g(z_0)H(z_0) \neq 0 \Longrightarrow f$ tiene un polo de orden p en z_0. Por último, si h tiene una singularidad esencial en z_0 entonces lo mismo ha de ocurrir con f, ya que en caso contrario $h = \frac{1}{g} \cdot f$ tendría una singularidad evitable ó un polo en z_0 (nótese que $1/g$ es analítica en un entorno de z_0, al ser $g(z_0) \neq 0$). □

[1] Es inmediato probar que si $h(z)$ tiene un cero simple en un punto z_0 y $n \in \mathbb{N}$ entonces $h(z)^n$ tiene un cero de orden n en dicho punto.

Ejemplo 3.27. La función $f(z) = e^{1/z}$ es analítica en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, y tiene una singularidad esencial en el origen. En efecto,

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{1}{z^k}, \qquad \forall z \neq 0.$$

Por la unicidad de las series de Laurent, este es el desarrollo de Laurent de f en $C(0; 0, \infty)$. En particular, al ser

$$b_k = \frac{1}{k!} \neq 0, \qquad \forall k = 1, 2, \dots,$$

$z = 0$ es una singularidad esencial de f. Consideremos a continuación la función $f(z) = e^{\cot z}$, analítica en todo el plano complejo salvo en los puntos $z = k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$. Estos puntos son polos simples de $\cot z = \cos z / \operatorname{sen} z$ (ceros simples de $\operatorname{sen} z$ en que no se anula $\cos z$). Por tanto, en un entorno reducido de $k\pi$ se tiene

$$\cot z = \frac{c_k}{z - k\pi} + g_k(z),$$

con $c_k \neq 0$ y g_k analítica en dicho entorno[2]. En consecuencia,

$$e^{\cot z} = e^{\frac{c_k}{z-k\pi}} e^{g_k(z)},$$

con e^{g_k} analítica en $k\pi$ (composición de funciones analíticas) y no nula en dicho punto. Por la Proposición 3.26, f tiene una singularidad esencial en $k\pi$ para todo $k \in \mathbb{Z}$.

- *Si f tiene un polo en z_0 entonces*

$$\lim_{z \to z_0} |f(z)| = \infty; \tag{3.12}$$

en particular, $|f|$ no está acotado en un entorno reducido de z_0. Sin embargo, (3.12) *no* se cumple si f tiene una singularidad *esencial* en z_0. Por ejemplo, $f(z) = e^{1/z}$ tiene una singularidad esencial en el origen, y $f(z_n) = 1$ si $z_n = 1/(2n\pi i) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$. De hecho, la proposición siguiente implica que (3.12) *sólo se verifica si f tiene un polo en z_0*:

Teorema de Casorati–Weierstrass. *Si f tiene una* singularidad esencial *en z_0 y $a \in \mathbb{C}$, existe una sucesión $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $z_n \to z_0$ y $f(z_n) \to a$.*

Nota: de hecho, puede probarse (**teorema grande de Picard**) que para todo número complejo a, con a lo sumo una excepción, se puede encontrar una sucesión $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $z_n \to z_0$ y $f(z_n) = a$ para todo $n \in \mathbb{N}$ (cf. $f(z) = e^{1/z}$).

Ejercicio. Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función entera que satisface $\lim_{|z|\to\infty} |f(z)| = \infty$. Probar que f es un polinomio.

[2]Por el teorema de Laurent, la fórmula anterior es válida si $0 < |z - k\pi| < \pi$.

Capítulo 4

El método de integración de los residuos

4.1 Teorema de los residuos

El siguiente teorema es la base para la aplicación de los resultados de los dos capítulos anteriores al cálculo de integrales definidas en la recta real:

Teorema de los residuos. *Sean $z_1, \dots, z_n$ n puntos distintos pertenecientes a una región A, y sea γ un arco homótopo a un punto en A y tal que ningún z_i está sobre γ. Si f es analítica en $A \setminus \{z_1, \dots z_n\}$ entonces se tiene:*

$$\int_\gamma f = 2\pi \mathrm{i} \sum_{k=1}^{n} n(\gamma, z_k) \ \mathrm{Res}(f; z_k).$$

Demostración. Por el teorema de Laurent, para cada $i = 1, \dots, n$ hay un entorno reducido $C(z_i; 0, \varepsilon_i)$ de z_i en el que es válido el desarrollo

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} b_{ik}(z - z_i)^{-k} + \sum_{k=0}^{\infty} a_{ik}(z - z_i)^k \equiv S_i(z) + f_i(z), \qquad 0 < |z - z_i| < \varepsilon_i \ ,$$

con f_i analítica en el disco $D(z_i; \varepsilon_i)$. Además, por las propiedades de las series de Laurent la serie que define la parte principal $S_i(z)$ converge absolutamente a una función analítica en $\mathbb{C} \setminus \{z_i\}$, siendo la convergencia *uniforme* en el exterior de todo disco abierto centrado en z_i.

Veamos a continuación que la función

$$g(z) = f(z) - \sum_{k=1}^{n} S_k(z) \, ,$$

que claramente es analítica en $A \setminus \{z_1, \dots, z_n\}$, tiene en los puntos z_i ($i = 1, \dots, n$) singularidades evitables. En efecto, para cada $i = 1, \dots, n$ se tiene

$$g(z) = f_i(z) + S_i(z) - \sum_{k=1}^{n} S_k(z) = f_i(z) - \sum_{1 \leqslant k \neq i \leqslant n} S_k(z) \, ,$$

desarrollo válido en un entorno reducido suficientemente pequeño de z_i. Definiendo $g(z_i) = \lim_{z \to z_i} g(z)$, la función g es por tanto *analítica* en todo A, y por el teorema de Cauchy

$$\int_\gamma g = 0 \implies \int_\gamma f = \sum_{k=1}^{n} \int_\gamma S_k.$$

Consideremos ahora la integral $\int_\gamma S_k$. Al ser $\mathbb{C} \setminus \gamma$ abierto (en efecto, γ es compacto, y por tanto cerrado, al ser la imagen de un intervalo compacto $[a,b]$ bajo la aplicación continua que parametriza la curva), existe $\delta_k > 0$ tal que $D(z_k;\delta_k) \cap \gamma = \emptyset$. Por tanto, la serie de Laurent que define a S_k es uniformemente convergente en γ, lo que en virtud del Lema 3.7 nos permite escribir

$$\begin{aligned}\int_\gamma S_k &\equiv \int_\gamma \sum_{j=1}^{\infty} b_{kj}(z-z_k)^{-j}\,\mathrm{d}z = \sum_{j=1}^{\infty}\int_\gamma b_{kj}(z-z_k)^{-j}\,\mathrm{d}z = b_{k1}\cdot 2\pi\mathrm{i}n(\gamma,z_k)\\ &\equiv 2\pi\mathrm{i}\cdot n(\gamma,z_k)\ \operatorname{Res}(f;z_k)\,,\end{aligned}$$

ya que $\int_\gamma (z-z_k)^{-j} = 0$ para todo entero $j \neq 1$ por el teorema fundamental del Cálculo. Esto completa la demostración. $\square$

4.2 Métodos para el cálculo de residuos

• Sea $f(z) = g(z)/h(z)$, con g, h analíticas en un entorno de z_0, $g(z_0) \neq 0$, $h(z_0) = 0$ y $h'(z_0) \neq 0$. Entonces f tiene un *polo simple* en z_0 (cero simple del denominador en que el numerador no se anula), con residuo

$$\boxed{\operatorname{Res}(f;z_0) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}}\,.$$

En efecto, por el teorema de Taylor en un entorno de z_0 es válido el desarrollo

$$h(z) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{h^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^k = (z-z_0)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{h^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^{k-1} \equiv (z-z_0)\,H(z),$$

con H analítica en z_0 (serie de potencias convergente en un entorno de z_0) y $H(z_0) = h'(z_0)$. Por tanto

$$f(z) = \frac{1}{(z-z_0)}\cdot\frac{g(z)}{H(z)}.$$

Como g/H es analítica en z_0 (al ser $H(z_0) = h'(z_0) \neq 0$), aplicando de nuevo el teorema de Taylor se obtiene el desarrollo

$$\frac{g(z)}{H(z)} = \frac{g(z_0)}{H(z_0)} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k(z-z_0)^k = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k(z-z_0)^k\,,$$

y por tanto

$$f(z) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}\,\frac{1}{z-z_0} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\,(z-z_0)^{k-1}\,,$$

de donde se deduce que el residuo de f en z_0 es efectivamente igual a $\dfrac{g(z_0)}{h'(z_0)}$.

Ejemplo 4.1. Hallemos el valor de la integral

$$I = \int_{|z|=8} \tan z\ \mathrm{d}z\,.$$

La función $f(z) = \tan z$ es singular en los puntos $z_k = (2k+1)\frac{\pi}{2}$, con $k \in \mathbb{Z}$, ninguno de los cuales está sobre la circunferencia $|z| = 8$. Además, en el interior de cualquier disco abierto hay obviamente un número finito de singularidades de f, por lo que podemos aplicar el teorema de los residuos tomando como A un disco de radio mayor que 8. De esta forma obtenemos

$$I = 2\pi\mathrm{i}\sum_{|z_k|<8}\operatorname{Res}(\tan;z_k) = 2\pi\mathrm{i}\sum_{k=-3}^{2}\operatorname{Res}(\tan;z_k)\,,$$

ya que $\frac{5\pi}{2} < 8 < \frac{7\pi}{2}$. Para calcular el residuo de tan en la singularidad z_k, basta observar que dicha singularidad es un polo simple (ya que $\operatorname{sen} z_k \neq 0$ y $\cos'(z_k) = -\operatorname{sen} z_k \neq 0$), por lo que

$$\operatorname{Res}(\tan; z_k) = \frac{\operatorname{sen} z_k}{-\operatorname{sen} z_k} = -1\,.$$

Por tanto $I = 2\pi\mathrm{i} \cdot (-6) = -12\pi\mathrm{i}\,.$

- Si f tiene un *polo de orden n* en z_0 entonces

$$\boxed{\operatorname{Res}(f; z_0) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{n-1}}{\mathrm{d}z^{n-1}} \left[(z - z_0)^n\, f(z) \right]}\,. \tag{4.1}$$

En efecto, en un entorno reducido de z_0 es válido el desarrollo de Laurent

$$f(z) = \frac{b_n}{(z-z_0)^n} + \frac{b_{n-1}}{(z-z_0)^{n-1}} + \cdots + \frac{b_1}{z - z_0} + g(z),$$

con g analítica en z_0 (serie de potencias convergente). Por tanto, en un entorno reducido de z_0 se cumple

$$(z - z_0)^n f(z) = b_n + b_{n-1}(z - z_0) + \cdots + b_1(z - z_0)^{n-1} + G(z) \equiv F(z), \tag{4.2}$$

donde $G(z) = (z - z_0)^n g(z)$ es analítica en z_0 y tiene un cero de orden $\geqslant n$ en dicho punto, y F es analítica en z_0. Por el teorema de Taylor,

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(f; z_0) = b_1 = \frac{F^{(n-1)}(z_0)}{(n-1)!} &= \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \to z_0} F^{(n-1)}(z) \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{n-1}}{\mathrm{d}z^{n-1}} \left[(z - z_0)^n\, f(z) \right]. \end{aligned}$$

Nota: de la ecuación (4.2) se sigue que $(z - z_0)^n f(z)$ tiene una singularidad evitable en z_0, por lo que muchas veces la fórmula (4.1) se escribe (con un cierto abuso de notación) en la forma más sencilla

$$\operatorname{Res}(f; z_0) = \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{\mathrm{d}z^{n-1}} \left[(z - z_0)^n\, f(z) \right] \Big|_{z = z_0}.$$

Ejercicio. Si $f = g/h$ con g y h analíticas en z_0, $h(z_0) = h'(z_0) = 0$ y $g(z_0) \neq 0$, $h''(z_0) \neq 0$, probar que f tiene un *polo de orden* 2 en z_0, con residuo

$$\operatorname{Res}(f; z_0) = 2\frac{g'(z_0)}{h''(z_0)} - \frac{2}{3} \frac{g(z_0)\, h'''(z_0)}{[h''(z_0)]^2}.$$

Solución. La función f tiene claramente un polo doble en z_0, por lo que podemos aplicar la fórmula (4.1). Por el teorema de Taylor, en un entorno reducido de z_0 es válido el desarrollo

$$\frac{h(z)}{(z - z_0)^2} = h_2 + h_3(z - z_0) + H(z)\,,$$

con

$$h_2 = \frac{1}{2} h''(z_0)\,, \qquad h_3 = \frac{1}{6} h'''(z_0) \tag{4.3}$$

y H analítica en z_0 y con un cero de orden por lo menos 2 en dicho punto. Aplicando (4.1) se obtiene entonces

$$\operatorname{Res}(f; z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \left[\frac{g(z)}{h_2 + h_3(z - z_0) + H(z)} \right] = \frac{h_2\, g'(z_0) - h_3\, g(z_0)}{h_2^2}\,.$$

Teniendo en cuenta la ecuación (4.3) se obtiene la fórmula anunciada.

4.3 Cálculo de integrales definidas

En esta sección utilizaremos la notación

$$\boxed{H = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z \geqslant 0\}, \qquad L = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z \leqslant 0\}}$$

para denotar los semiplanos (cerrados) superior e inferior, respectivamente.

4.3.1 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$

- **Condiciones:**

  i) f analítica en $H \setminus \{z_1, \ldots, z_n\}$, con $z_k \in H \setminus \mathbb{R}$ (es decir, f sólo puede tener a lo sumo un número *finito* de singularidades en H, todas ellas *fuera del eje real*)

  ii) $\exists p > 1$, $R > 0$ y $M > 0$ t.q.

$$|f(z)| < \frac{M}{|z|^p}, \qquad \forall z \in H, \ \ |z| > R$$

- **Resultado:** $\boxed{2\pi\mathrm{i} \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}(f; z_k)}$.

(Nótese que la suma está extendida a las singularidades de f en el semiplano superior H.)

Demostración. Sea γ_r la semicircunferencia de radio r orientada positivamente, con $r > R$ lo suficientemente grande para que todas las singularidades de f en H estén en el interior de γ_r (véase la fig. 4.1).

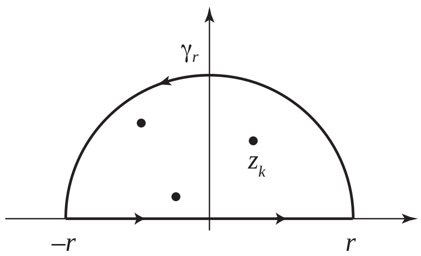

Figura 4.1: semicircunferencia γ_r

Al ser $n(\gamma_r, z_k) = 1$ para $k = 1, \ldots, n$, por el teorema de los residuos se tiene:

$$\int_{\gamma_r} f = 2\pi\mathrm{i} \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}(f; z_k) = \int_{-r}^{r} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^{\pi} f(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\,\mathrm{i}r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\,\mathrm{d}\theta. \tag{4.4}$$

Como $|f(x)| < M\,|x|^{-p}$ con $p > 1$ para $|x| > R$, la primera integral del miembro derecho converge a $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ cuando $r \to \infty$ (criterio de comparación). En cuanto a la segunda, su módulo está acotado por $M\pi r^{1-p}$, que tiende a 0 cuando $r \to \infty$. Haciendo r tender a infinito en (4.4) se obtiene por tanto el resultado anunciado.

$\square$

- **Notas:**

  i) Si f es analítica en $L \setminus \{z_1, \dots, z_n\}$, con $z_k \in L \setminus \mathbb{R}$, y se cumple la condición ii) de la página anterior en el semiplano inferior L, entonces

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, \mathrm{d}x = -2\pi \mathrm{i} \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}(f; z_k)}\,.$$

  El signo menos se debe a que en este hay que integrar f a lo largo de la semicircunferencia de centro 0 y radio r en el semiplano inferior recorrida en sentido *horario*, y por tanto $n(\gamma_r, z_k) = -1$.

  ii) Si $f = P/Q$, con $P \neq 0$ y Q polinomios y $Q(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, entonces f cumple las condiciones anteriores (tanto en H como en L) si y sólo si $\deg Q \geqslant \deg P + 2$.

- **Ejemplo:** $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\, \mathrm{d}x}{(x^2+4x+13)^2}$.

En este ejemplo

$$f(z) = \frac{z}{(z^2+4z+13)^2} \equiv \frac{P(z)}{Q(z)}\,,$$

con singularidades (polos dobles) en los ceros $z = -2 \pm 3\mathrm{i} \notin \mathbb{R}$ del denominador Q. Como $\deg Q = 4 \geqslant \deg P + 2 = 3$, se tiene

$$I \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\, \mathrm{d}x}{(x^2+4x+13)^2} = 2\pi \mathrm{i} \operatorname{Res}(f; -2+3\mathrm{i}).$$

La función f tiene un polo doble en $z_0 \equiv -2+3\mathrm{i}$, con residuo (cf. (4.1))

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\Big[(z-z_0)^2 f(z)\Big]\Big|_{z=z_0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\,\frac{z}{(z+2+3\mathrm{i})^2}\Big|_{z=-2+3\mathrm{i}} = \frac{1}{(6\mathrm{i})^2} - \frac{2(-2+3\mathrm{i})}{(6\mathrm{i})^3} = \frac{4}{(6\mathrm{i})^3} = \frac{4\mathrm{i}}{6^3}\,.$$

Por tanto $I = -\dfrac{8\pi}{6^3} = -\dfrac{\pi}{27}$.

4.3.2 Integrales trigonométricas: $\displaystyle\int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)\, \mathrm{d}\theta$

- **Condiciones:** $R(x, y)$ función racional de dos variables cuyo denominador no se anula en la circunferencia unidad $x^2 + y^2 = 1$.

- **Resultado:** $\boxed{2\pi \mathrm{i} \sum_{|z_k|<1} \operatorname{Res}(f; z_k)}$, siendo

$$f(z) = \frac{1}{\mathrm{i}z} R\left(\frac{1}{2}\left(z+z^{-1}\right), \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(z-z^{-1}\right)\right)$$

y denotando mediante z_k las singularidades de f (necesariamente en número finito, ya que f es una función racional).

Demostración. La función $f(z)$ no tiene singularidades en la circunferencia unidad γ, ya que si $\theta \in [0, 2\pi)$ entonces $f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) = -\mathrm{i}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} R(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$. Parametrizando $\int_\gamma f$ en la forma usual ($z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$) se obtiene

$$\int_\gamma f = \int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)\, \mathrm{d}\theta\,.$$

El resultado anunciado se sigue del teorema de los residuos, ya que al ser f una función racional de z tiene un número finito de singularidades en el interior de la circunferencia unidad. □

• **Ejemplo:** $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(5-3\,\mathrm{sen}\,\theta)^2}$.

En este caso

$$f(z) = \frac{1}{\mathrm{i}z\left[5-\frac{3}{2\mathrm{i}}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right]^2} = \frac{4\mathrm{i}z}{(3z^2-10\mathrm{i}z-3)^2} = \frac{4\mathrm{i}z}{9\left(z-\frac{\mathrm{i}}{3}\right)^2(z-3\mathrm{i})^2}.$$

Por tanto, la integral vale

$$I = -\frac{8\pi}{9}\,\mathrm{Res}\left(g;\frac{\mathrm{i}}{3}\right), \quad \text{con} \quad g(z) = \frac{z}{(z-3\mathrm{i})^2}\cdot\frac{1}{\left(z-\frac{\mathrm{i}}{3}\right)^2} \equiv \frac{h(z)}{\left(z-\frac{\mathrm{i}}{3}\right)^2}.$$

El residuo es igual a

$$h'(\mathrm{i}/3) = \frac{1}{\left(\frac{\mathrm{i}}{3}-3\mathrm{i}\right)^2} - \frac{\frac{2\mathrm{i}}{3}}{\left(\frac{\mathrm{i}}{3}-3\mathrm{i}\right)^3} = \frac{\frac{\mathrm{i}}{3}-3\mathrm{i}-\frac{2\mathrm{i}}{3}}{\left(\frac{\mathrm{i}}{3}-3\mathrm{i}\right)^3} = \frac{-\frac{10\mathrm{i}}{3}}{-\frac{8^3}{3^3}\mathrm{i}^3} = -\frac{10\cdot 3^2}{8^3}.$$

Luego $I = \dfrac{10\pi}{8^2} = \dfrac{5\pi}{32}$.

4.3.3 Transformadas de Fourier: $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{\mathrm{i}\omega x} f(x)\,dx$

• **Condiciones:**

i) $\omega > 0$

ii) f analítica en $H \setminus \{z_1,\dots,z_n\}$, con $z_k \in H\setminus\mathbb{R}$ (es decir, f tiene a lo sumo un número *finito* de singularidades en el semiplano superior, y ninguna de ellas pertenece al eje real)

iii) $|f(z)| \to 0$ cuando $|z|\to\infty$ en H, es decir

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists R>0 \ \text{ t.q. } \ |z|>R,\ z\in H \Longrightarrow |f(z)|<\varepsilon$$

• **Resultado:** $\boxed{2\pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}\left(e^{\mathrm{i}\omega z}f(z);z_k\right)}$.

(De nuevo, la suma sólo está extendida a las singularidades de f en el semiplano superior H.)

Demostración. Dado $\varepsilon>0$, sea γ el rectángulo de vértices $-x_1, x_2, x_2+\mathrm{i}y_1, -x_1+\mathrm{i}y_1$ (orientado positivamente), con x_1, x_2, y_1 mayores que R y lo suficientemente grandes para que todas las singularidades de f en H estén en el interior de γ (fig. 4.2).

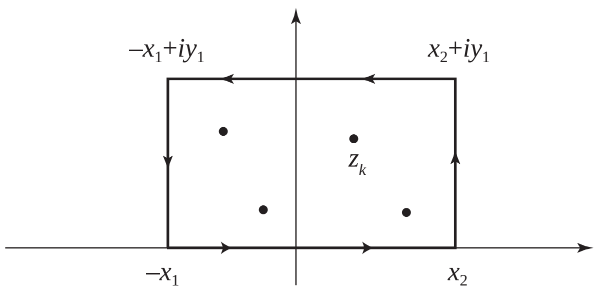

Figura 4.2: rectángulo γ

Entonces

$$\begin{aligned}
\int_\gamma e^{i\omega z} f(z)\, dz &= 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}\left(e^{i\omega z} f(z); z_k\right) \\
&= \int_{-x_1}^{x_2} e^{i\omega x} f(x)\, dx + i \int_0^{y_1} e^{i\omega(x_2+iy)} f(x_2+iy)\, dy \\
&\quad - \int_{-x_1}^{x_2} e^{i\omega(x+iy_1)} f(x+iy_1)\, dx - i \int_0^{y_1} e^{i\omega(-x_1+iy)} f(-x_1+iy)\, dy \\
&\equiv I_1 + I_2 - I_3 - I_4 .
\end{aligned}$$

Si y_1 se escoge lo suficientemente grande para que $(x_1 + x_2)e^{-\omega y_1} < 1/\omega$ se tiene:

$$\begin{aligned}
|I_2| &\leqslant \varepsilon \int_0^{y_1} e^{-\omega y}\, dy = \frac{\varepsilon}{\omega}(1 - e^{-\omega y_1}) < \frac{\varepsilon}{\omega}, \\
|I_3| &\leqslant \varepsilon\, (x_1 + x_2)\, e^{-\omega y_1} < \frac{\varepsilon}{\omega}, \\
|I_4| &\leqslant \frac{\varepsilon}{\omega}(1 - e^{-\omega y_1}) < \frac{\varepsilon}{\omega} .
\end{aligned}$$

Por tanto

$$\left| \int_{-x_1}^{x_2} e^{i\omega x} f(x)\, dx - 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}\left(e^{i\omega z} f(z); z_k\right) \right| < \frac{3\varepsilon}{\omega} .$$

Como $\varepsilon > 0$ es arbitrario, haciendo x_1 y x_2 tender a infinito por separado se demuestra que la integral converge al resultado deseado. □

- **Notas:**

  i) Si $\omega < 0$ y f cumple condiciones análogas a ii)–iii) en el semiplano *inferior* L se prueba de forma semejante que

  $$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} f(x)\, dx = -2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}\left(e^{i\omega z} f(z); z_k\right)},$$

  donde $z_1, \ldots, z_n$ son las singularidades de f en L (todas ellas con parte imaginaria negativa)

  ii) $f = P/Q$, con $P \neq 0$ y Q polinomios y $Q(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, cumple las condiciones anteriores (tanto en H como en L) si y sólo si $\deg Q \geqslant \deg P + 1$.

- **Ejemplo:** $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\cos(\omega x)}{x^4 + x^2 + 1}\, dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\omega x)}{x^4 + x^2 + 1}\, dx \equiv I(\omega), \quad \omega > 0 .$

La integral es la parte real de

$$J(\omega) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega x}}{x^4 + x^2 + 1}\, dx .$$

De hecho, al ser $\operatorname{sen}(\omega x)$ impar $\operatorname{Im} J(\omega) = 0$, y por tanto $I(\omega) = J(\omega)$. Podemos aplicar el resultado anterior a la función racional $f(z) = \frac{1}{2}(z^4 + z^2 + 1)^{-1}$ en el semiplano superior (f no tiene singularidades en el eje real). Las singularidades (polos) de f se calculan resolviendo la ecuación

$$z^4 + z^2 + 1 = 0 \iff z^2 = \frac{1}{2}(-1 \pm i\sqrt{3}) = e^{\pm \frac{2\pi i}{3}} \iff z = \pm e^{\pm \frac{\pi i}{3}} .$$

Las únicas singularidades en el semiplano superior son

$$z_1 = e^{\frac{\pi i}{3}} = \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3}), \qquad z_2 = -e^{-\frac{\pi i}{3}} = \frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3}) = -\overline{z}_1 .$$

El residuo de $e^{i\omega z} f(z)$ en cualquiera de estas singularidades z_k se calcula fácilmente, ya que $e^{i\omega z} f(z) = g(z)/h(z)$ con $g(z_k) \neq 0$, $h(z_k) = 0$ y $h'(z_k) \neq 0$:

$$\operatorname{Res}(f; z_k) = \frac{1}{4} \frac{e^{i\omega z_k}}{z_k(2z_k^2 + 1)} .$$

De esto se deduce que

$$I = \frac{\pi i}{2} \left[\frac{e^{i\omega z_1}}{z_1(2z_1^2 + 1)} - \frac{e^{-i\omega \overline{z}_1}}{\overline{z}_1(2\overline{z}_1^2 + 1)} \right] = -\pi \operatorname{Im} \left[\frac{e^{i\omega z_1}}{z_1(2z_1^2 + 1)} \right] \equiv -\pi \operatorname{Im} A .$$

Como

$$A = \frac{2e^{\frac{i\omega}{2}(1+i\sqrt{3})}}{(1 + i\sqrt{3})\, i\sqrt{3}} = \frac{2e^{\frac{\omega}{2}(i-\sqrt{3})}}{\sqrt{3}\,(i - \sqrt{3})} = -\frac{i + \sqrt{3}}{2\sqrt{3}}\, e^{\frac{\omega}{2}(i-\sqrt{3})},$$

se obtiene

$$I = -\pi \operatorname{Im} A = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}\omega} \left(\cos\frac{\omega}{2} + \sqrt{3} \operatorname{sen} \frac{\omega}{2} \right) , \qquad \omega > 0 .$$

4.3.4 Valor principal de Cauchy

Supongamos que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es no acotada en un entorno de $x_0 \in \mathbb{R}$, y que existen las integrales impropias $\int_{-\infty}^{b} f(x)\, dx$ y $\int_{c}^{\infty} f(x)\, dx$ para todo $b < x_0 < c$. En ese caso, se define la integral impropia $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx$ mediante

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{-\infty}^{x_0 - \varepsilon} f(x)\, dx + \lim_{\delta \to 0+} \int_{x_0 + \delta}^{\infty} f(x)\, dx .$$

Evidentemente, si la integral impropia existe entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = \lim_{\varepsilon \to 0+} \left[\int_{-\infty}^{x_0 - \varepsilon} f(x)\, dx + \int_{x_0 + \varepsilon}^{\infty} f(x)\, dx \right].$$

El miembro derecho de esta última expresión se denomina **valor principal de Cauchy** de la integral impropia:

$$\operatorname{VP} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = \lim_{\varepsilon \to 0+} \left[\int_{-\infty}^{x_0 - \varepsilon} f(x)\, dx + \int_{x_0 + \varepsilon}^{\infty} f(x)\, dx \right].$$

(Esta definición se generaliza de manera obvia al caso en que f tiene un número *finito* de singularidades en el eje real.) Por tanto, *si* existe la integral impropia entonces existe también su valor principal, y se verifica la igualdad

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = \operatorname{VP} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx .$$

Nótese, sin embargo, que el valor principal de Cauchy puede existir aunque no exista la integral impropia. Por ejemplo, si f es una función *impar* singular en $x_0 = 0$ pero integrable en ∞ entonces $\operatorname{VP} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 0$.

Lema 4.2. *Supongamos que f es una función analítica con un* polo simple *en $z_0 \in \mathbb{C}$, y sea γ_ε el arco de circunferencia $\gamma_\varepsilon(t) = z_0 + \varepsilon\, e^{it}$, con $t \in [t_0, t_0 + \alpha]$ (fig. 4.3). Entonces*

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{\gamma_\varepsilon} f = i\alpha \operatorname{Res}(f; z_0).$$

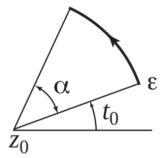

Figura 4.3: curva γ_ε

Demostración. En un entorno reducido de z_0 es válido el desarrollo de Laurent

$$f(z) = \frac{b_1}{z - z_0} + g(z), \qquad 0 < |z - z_0| < r,$$

con g analítica en $D(z_0; r)$. Si $0 < \varepsilon < r$ se tiene

$$\int_{\gamma_\varepsilon} f = b_1 \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{dz}{z - z_0} + \int_{\gamma_\varepsilon} g \,.$$

Pero

$$b_1 \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{dz}{z - z_0} = b_1 \int_{t_0}^{t_0+\alpha} \frac{i\varepsilon e^{it}}{\varepsilon e^{it}} \, dt = ib_1\alpha = i\alpha \operatorname{Res}(f; z_0),$$

mientras que, al ser g analítica en $D(z_0; r)$, $|g(z)| < M$ para $|z - z_0| \leqslant r/2$, y por tanto si $\varepsilon \leqslant r/2$ se tiene

$$\left| \int_{\gamma_\varepsilon} g \right| \leqslant M\varepsilon\alpha \xrightarrow[\varepsilon \to 0+]{} 0 \,.$$

□

- Supongamos que $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ satisface:

i) f analítica en $H \setminus \{z_1, \dots, z_n\}$, con $z_k \in H$ (es decir, f tiene a lo sumo un número *finito* de singularidades en el semiplano superior), siendo además las posibles singularidades de f en el eje real *polos simples*

Además, se verifica una de las dos condiciones siguientes:

ii) $\exists p > 1,\ R > 0,\ M > 0$ t.q. $|f(z)| < \dfrac{M}{|z|^p}$ si $|z| > R$ y $z \in H$

ii′) $f(z) = e^{i\omega z} g(z)$, con $\omega > 0$ y $|g(z)| \to 0$ cuando $|z| \to \infty$ en H

Entonces VP $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \, dx$ existe y está dado por

$$\boxed{\mathrm{VP} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \, dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_k > 0} \operatorname{Res}(f; z_k) + \pi i \sum_{z_k \in \mathbb{R}} \operatorname{Res}(f; z_k)} \,.$$

Demostración. Supongamos, por ejemplo, que f cumple las condiciones i) y ii). Por sencillez, nos restringiremos al caso en que f sólo tiene una singularidad x_0 en el eje real. Si $r > \max(|x_0|, R)$ es lo suficientemente grande y $\varepsilon > 0$ lo suficientemente pequeño para que todas las singularidades de f en $H - \{x_0\}$ estén en el interior de la curva γ de la fig. 4.4, integrando f a lo largo de dicha curva se tiene:

$$\int_\gamma f = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_k > 0} \operatorname{Res}(f; z_k) = \int_{-r}^{x_0-\varepsilon} f(x) \, dx - \int_{\gamma_\varepsilon} f + \int_{x_0+\varepsilon}^{r} f(x) \, dx + \int_{\gamma_r} f \,.$$

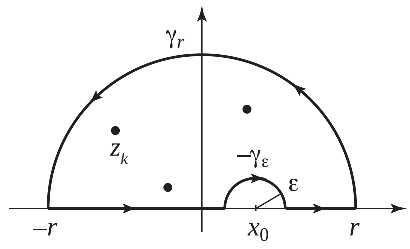

Figura 4.4: curva γ

Por la discusión de la Sección 4.3.1, las integrales $\int_{-\infty}^{x_0-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x$ y $\int_{x_0+\varepsilon}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ son convergentes, y

$$\lim_{r\to\infty} \int_{\gamma_r} f = 0.$$

Haciendo tender r a ∞ se obtiene por tanto

$$2\pi\mathrm{i} \sum_{\operatorname{Im} z_k>0} \operatorname{Res}(f; z_k) = \int_{-\infty}^{x_0-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{x_0+\varepsilon}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_{\gamma_\varepsilon} f\,.$$

El resultado anunciado se obtiene haciendo $\varepsilon \to 0+$ y utilizando el lema anterior con $\alpha = \pi$. □

- **Nota:** Si reemplazamos H por L y $\omega > 0$ por $\omega < 0$ en el enunciado anterior entonces

$$\boxed{\mathrm{VP}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = -2\pi\mathrm{i} \sum_{\operatorname{Im} z_k<0} \operatorname{Res}(f; z_k) - \pi\mathrm{i} \sum_{z_k\in\mathbb{R}} \operatorname{Res}(f; z_k)}\,.$$

- **Ejemplo:** $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,\mathrm{d}x \equiv I\,.$

Si definimos $f(x) = \operatorname{sen} x/x$ para $x \neq 0$ y $f(0) = 1$ entonces f es continua en 0 y par, y por tanto

$$I = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Esta integral *no* es del tipo estudiado en la Sección 4.3.1, ya que $|\operatorname{sen} z| = \left(\cosh^2 y - \cos^2 x\right)^{1/2} \to \infty$ más rápido que cualquier potencia de $|z|$ cuando $|y| \to \infty$. Tampoco se cumple la relación

$$I = \frac{1}{2}\operatorname{Im}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{x}\,\mathrm{d}x,$$

ya que la parte real de la integral del miembro derecho claramente diverge en 0 (el integrando se comporta como $1/x$ en el origen). Sin embargo,

$$\mathrm{VP}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x}\,\mathrm{d}x = 0$$

al ser $\cos x$ par, y

$$\mathrm{VP}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,\mathrm{d}x\,,$$

al ser convergente la integral del miembro derecho. Por tanto

$$I = \frac{1}{2}\operatorname{Im}\left[\mathrm{VP}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{x}\,\mathrm{d}x\right] = \frac{1}{2\mathrm{i}}\,\mathrm{VP}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{x}\,\mathrm{d}x\,.$$

La función $g(z) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}z}/z$ tiene un polo simple en el origen y cumple la condición ii′) de esta sección (con $\omega = 1 > 0$), por lo que

$$I = \frac{\pi}{2}\,\mathrm{Res}\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z};0\right) = \frac{\pi}{2}\,.$$

• **Ejemplo:** $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2}\,\mathrm{d}x \equiv I$.

En este caso

$$I = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int_{-\infty}^\infty \frac{1-\cos(2x)}{x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\,\mathrm{VP}\int_{-\infty}^\infty \frac{1-\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}}{x^2}\,\mathrm{d}x\,,$$

ya que

$$\mathrm{VP}\int_{-\infty}^\infty \frac{\operatorname{sen}(2x)}{x^2}\,\mathrm{d}x = 0$$

por ser el integrando una función impar. Si $g(z) = (1-\mathrm{e}^{2\mathrm{i}z})/z^2$ entonces

$$|g(z)| \leqslant \frac{1+\left|\mathrm{e}^{2\mathrm{i}z}\right|}{|z|^2} = \frac{1+\mathrm{e}^{-2\operatorname{Im} z}}{|z|^2} \leqslant \frac{2}{|z|^2}, \qquad \operatorname{Im} z \geqslant 0,\;\; z \neq 0,$$

y por tanto se cumple la condición ii) en el semiplano superior. Además, $z = 0$ es un polo simple de g (el numerador tiene un cero simple y el denominador uno doble en el origen), con residuo

$$\mathrm{Res}(g;0) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\big(1-2\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}\big)\bigg|_{z=0} = -2\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}\big|_{z=0} = -2\mathrm{i}.$$

Por tanto,

$$I = \frac{1}{4}\cdot\pi\mathrm{i}\cdot(-2\mathrm{i}) = \frac{\pi}{2}\,.$$

• **Ejemplo:** $\displaystyle\mathrm{VP}\int_{-\infty}^\infty \frac{\operatorname{sen} x\;\mathrm{d}x}{(x-1)(x^2+4)} \equiv I$.

Aquí

$$I = \operatorname{Im} J, \qquad J \equiv \mathrm{VP}\int_{-\infty}^\infty \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\;\mathrm{d}x}{(x-1)(x^2+4)}\,.$$

La función

$$f(z) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{(z-1)(z^2+4)}$$

es analítica en $\mathbb{C}\setminus\{1,\pm 2\mathrm{i}\}$, y la singularidad en $z = 1$ es claramente un polo simple. Además, se cumple claramente la condición ii′) en el semiplano superior ($\omega = 1 > 0$), por lo que

$$\begin{aligned} J &= \pi\mathrm{i}\,[\mathrm{Res}(f;1) + 2\,\mathrm{Res}(f;2\mathrm{i})] = \pi\mathrm{i}\left[\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}}}{5} + \frac{2\mathrm{e}^{-2}}{(2\mathrm{i}-1)\cdot 4\mathrm{i}}\right] = \pi\mathrm{i}\left[\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}}}{5} - \frac{\mathrm{e}^{-2}}{2(2+\mathrm{i})}\right] \\ &= \pi\mathrm{i}\left[\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}}}{5} - \frac{(2-\mathrm{i})\mathrm{e}^{-2}}{10}\right]. \end{aligned}$$

Por tanto

$$I = \frac{\pi}{5}\left(\cos 1 - \frac{1}{\mathrm{e}^2}\right).$$

Capítulo 5

Ecuaciones diferenciales ordinarias

5.1 Aspectos generales

Una **ecuación diferencial** es una relación entre una función incógnita u de una variable $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$, un número finito de derivadas parciales de u, y la propia variable $\mathbf{x}$, que ha de cumplirse idénticamente en cada punto de un abierto $D \subset \mathbb{R}^N$.

Ejemplo 5.1. La ecuación de Poisson

$$\frac{\partial^2 u(\mathbf{x})}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(\mathbf{x})}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u(\mathbf{x})}{\partial z^2} = \rho(\mathbf{x}) \,, \qquad \mathbf{x} \equiv (x, y, z) \,,$$

donde ρ (que en electrostática representa la densidad de carga) es una función conocida.

- En una ecuación diferencial, tanto u como sus derivadas parciales deben evaluarse en el mismo punto. Por ejemplo,
$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + u(x + 3, y) = 0$$
no es una ecuación diferencial.

Una ecuación diferencial donde la variable independiente $\mathbf{x}$ tiene varias componentes, es decir, donde $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_N)$ con $N > 1$, se dice que es una **ecuación en derivadas parciales** (EDP). En cambio, si $N = 1$ la ecuación diferencial se dice que es **ordinaria**. En esta asignatura nos centraremos principalmente en las ecuaciones diferenciales ordinarias, que definiremos más formalmente a continuación.

Definición 5.2. Una **ecuación diferencial ordinaria** (EDO) de orden n es una ecuación de la forma

$$\boxed{F\big(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\big) = 0}\,, \tag{5.1}$$

donde F está definida en un abierto $U \subset \mathbb{R}^{n+2}$ y $\dfrac{\partial F}{\partial y^{(n)}} \neq 0$ en U. Una **solución** de (5.1) es una función $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivable n veces en un intervalo abierto $D \subset \mathbb{R}$ tal que

$$\boxed{F\big(x, u(x), u'(x), \ldots, u^{(n)}(x)\big) = 0 \,, \qquad \forall x \in D}\,. \tag{5.2}$$

- La condición $\dfrac{\partial F}{\partial y^{(n)}} \neq 0$ en U se impone para que la ecuación sea verdaderamente de orden n. Cuando sea posible despejar explícitamente la derivada de mayor orden de la ecuación (5.1), es decir, si podemos reescribirla como
$$\boxed{y^{(n)} = f\big(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\big)}\,, \tag{5.3}$$
diremos que la ecuación está en **forma normal**.

- En esta parte de la asignatura supondremos siempre que la variable independiente x es real. Veremos (especialmente en el Capítulo 7) que al resolver ciertas ecuaciones aparecen de forma natural soluciones *complejas*, si bien la idea será combinar dichas soluciones complejas de modo que las soluciones de la ecuación se expresen finalmente en términos de funciones reales.

Ejemplo 5.3. La ecuación

$$y' = -k\,y\,, \qquad k > 0\,, \tag{5.4}$$

aparece al estudiar la desintegración de un material radioactivo, donde y representa la masa del material y x el tiempo.

Solución: nótese que $y = 0$ es solución de (5.4), mientras que si $y \neq 0$ se tiene

$$\frac{y'(x)}{y(x)} = -k \quad\Longrightarrow\quad \int \frac{y'(x)}{y(x)}\,\mathrm{d}x = -k\int \mathrm{d}x \quad\Longrightarrow\quad \log|y| = -kx + c \quad\Longrightarrow\quad |y| = \mathrm{e}^c\mathrm{e}^{-kx}$$
$$\Longrightarrow\quad y = \pm\mathrm{e}^c\mathrm{e}^{-kx}\,,$$

siendo c una constante arbitraria. Por tanto, cualquier solución de la ecuación (5.4) es de la forma

$$y = y_0\mathrm{e}^{-kx}\,, \tag{5.5}$$

donde y_0 es una constante arbitraria (en particular, si $y_0 = 0$ se obtiene la solución $y = 0$). Se dice que la expresión (5.5) es la **solución general** de la ecuación (5.4).

- Nótese que la solución general (5.5) de la ecuación (5.4) depende de una constante arbitraria. La solución general de una ecuación de orden n contiene n constantes arbitrarias.

5.2 Métodos elementales de integración

En esta sección nos restringiremos al caso más sencillo de las ecuaciones de primer orden. Supondremos además que la ecuación puede escribirse en forma normal

$$\boxed{y' = f(x,y)}\,. \tag{5.6}$$

Veremos a continuación distintos métodos elementales de integración que permiten resolver a algunos casos particulares importantes de la ecuación (5.6).

5.2.1 $y' = f(x)$

Si suponemos que f es continua en un intervalo abierto D, la ecuación se resuelve simplemente integrando ambos miembros a partir de un punto cualquiera $x_0 \in D$:

$$\boxed{y = \int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t + c}\,, \qquad c = y(x_0)\,. \tag{5.7}$$

Utilizando la notación de integral indefinida, a menudo escribiremos la solución como

$$y = \int^{x} f(t)\,\mathrm{d}t + c\,, \qquad \text{o incluso como} \qquad y = \int f(x)\,\mathrm{d}x + c\,.$$

De la expresión (5.7) se sigue que el **problema de valores iniciales**

$$y' = f(x)\,, \qquad y(x_0) = y_0$$

tiene la *solución única* $y = \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t + y_0$.

5.2.2 Ecuaciones de variables separadas

Son ecuaciones de la forma

$$\boxed{y' = \frac{f(x)}{g(y)}}, \tag{5.8}$$

donde f, g son continuas en sendos intervalos abiertos U, V, con $g(y) \neq 0$ para todo $y \in V$.

Solución: Si $y(x)$ es solución de la ecuación (5.8), entonces

$$\begin{aligned} g\big(y(x)\big)y'(x) = f(x) \quad &\Longrightarrow \quad \int_{x_0}^{x} g\big(y(s)\big)y'(s)\,\mathrm{d}s = \int_{x_0}^{x} f(s)\,\mathrm{d}s \\ &\underset{t=y(s)}{\Longrightarrow} \quad \int_{y(x_0)}^{y(x)} g(t)\,\mathrm{d}t = \int_{x_0}^{x} f(s)\,\mathrm{d}s \end{aligned}$$

Por tanto, cualquier solución de (5.8) satisface la **ecuación implícita**

$$\boxed{\int g(y)\,\mathrm{d}y = \int f(x)\,\mathrm{d}x + c}, \tag{5.9}$$

donde c es una constante arbitraria. Recíprocamente, derivando (5.9) respecto de x tomando a y como función de x, concluimos que cualquier función $y(x)$ que satisfaga la relación (5.9) es solución de la ecuación (5.8). Por tanto (5.9) es la solución general de (5.8).

La solución general (5.9) de la ecuación (5.8) está dada en la **forma implícita**

$$\phi(x,y) = c\,, \qquad \text{donde} \quad \phi(x,y) = \int g(y)\,\mathrm{d}y - \int f(x)\,\mathrm{d}x\,. \tag{5.10}$$

La relación $\phi(x,y) = c$ define implícitamente una familia uniparamétrica de curvas en el plano, correspondiendo cada curva a un valor fijo de c (si bien puede haber varias ramas con un mismo valor de c). Estas curvas se denominan **curvas integrales** de la ecuación (5.8). Por lo que acabamos de ver, una función $y(x)$ es solución de (5.8) si y sólo si su gráfica está contenida en una curva integral de la ecuación.

La función ϕ dada por (5.10) es de clase $C^1(U \times V)$ (ya que $\frac{\partial\phi}{\partial x} = -f(x)$ y $\frac{\partial\phi}{\partial y} = g(y)$ son continuas por hipótesis en U y V, respectivamente), y además $\frac{\partial\phi}{\partial y}$ no se anula en ningún punto de $U \times V$. Dado un punto (x_0, y_0) de $U \times V$, la curva integral de (5.8) que pasa por dicho punto se obtiene tomando $c = \phi(x_0, y_0)$ en (5.10). Por el **teorema de la función implícita**, existe un entorno de (x_0, y_0) donde la relación (5.10) define una *única* función derivable $y(x)$ tal que

$$\begin{aligned} &\text{i)} \quad y(x_0) = y_0\,, \\ &\text{ii)} \quad \phi\big(x, y(x)\big) = \phi\big(x_0, y_0\big), \qquad \forall x \in \operatorname{dom} y\,. \end{aligned}$$

En dicho entorno, la curva integral que pasa por (x_0, y_0) es por tanto la gráfica de una solución $y(x)$. Dicha función y es localmente (es decir, en un entorno del punto (x_0, y_0)) la única solución de la ecuación diferencial (5.8) que satisface la condición inicial $y(x_0) = y_0$. En otras palabras, el problema de valores iniciales asociado a la ecuación (5.8) posee *solución única local* si los datos iniciales (x_0, y_0) pertenecen a $U \times V$.

- El que la solución general de la ecuación de variables separadas (5.8) se exprese mediante una relación implícita (cf. ec. (5.10)) *no* es una propiedad característica de este tipo de ecuaciones. De hecho, a lo largo de esta sección veremos que en muchas ocasiones la solución general de la ecuación de primer orden (5.6) también se expresa mediante una relación implícita. En general no será posible despejar de ella y como función explícita de x, si bien normalmente el teorema de la función implícita garantizará la existencia local de dicha función.

Ejemplo 5.4. Consideremos la ecuación de variables separadas

$$y' = -\frac{x}{y}\,. \tag{5.11}$$

En nuestra notación, $f(x) = -x$, $g(y) = y$, $U = \mathbb{R}$, y o bien $V = \mathbb{R}^+$ o bien $V = \mathbb{R}^-$, pero no $V = \mathbb{R}$, ya que la función g se anula cuando $y = 0$. Procediendo como antes (o bien utilizando directamente la fórmula (5.9)), se obtiene la solución general de (5.11):

$$x^2 + y^2 = c\,, \qquad c > 0\,. \tag{5.12}$$

Por tanto en este caso las curvas integrales son circunferencias de radio $\sqrt{c} > 0$ centradas en el origen (ver Fig. 5.1). En particular, por cada punto del plano salvo el origen pasa una única curva integral. Cada curva integral contiene *dos* soluciones, dadas por las funciones

$$y = \pm\sqrt{c - x^2}\,, \qquad x \in (-\sqrt{c}, \sqrt{c})\,, \tag{5.13}$$

correspondiendo los signos $\pm$ a la elección $V = \mathbb{R}^\pm$. La ecuación (5.11) no está definida para $y = 0$, pero las soluciones (5.13) tienen límite (cero) cuando $x \to \pm\sqrt{c}\mp$ (aunque no son derivables en dichos puntos, al tener pendiente infinita). Nótese que por cada punto (x_0, y_0) del plano con $y_0 \neq 0$ pasa una única solución. En cambio, la curva integral que pasa por un punto de la forma $(x_0, 0)$, con $x_0 \neq 0$, no define a y como función de x en un entorno de dicho punto. Sin embargo, dicha curva sí define la función $x(y) = \operatorname{sgn} x_0 \sqrt{x_0^2 - y^2}$, $y \in (-|x_0|, |x_0|)$, solución de la ecuación

$$x' = -\frac{y}{x}\,. \tag{5.14}$$

La ecuación (5.14) se denomina **ecuación asociada** a (5.11).

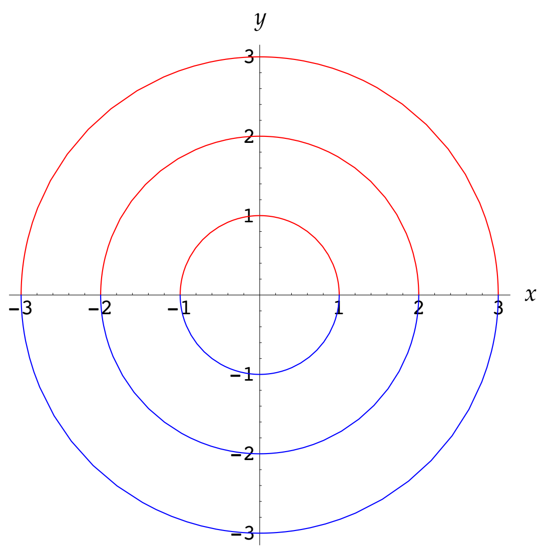

Figura 5.1: Curvas integrales de la ecuación $y' = -x/y$. Cada curva integral contiene dos soluciones, definidas en la ecuación (5.13), representadas en azul y rojo en la figura.

- En general, la ecuación asociada a la ecuación diferencial (5.6) es

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{f(x,y)}}\,. \tag{5.15}$$

  Evidentemente, las curvas integrales de la ecuación asociada son las mismas que las de la ecuación de partida.

Ejemplo 5.5. Consideremos ahora la ecuación

$$y' = -\frac{1+y^2}{1+x^2}\,, \tag{5.16}$$

que también es de variables separadas. En este caso $f(x) = -\frac{1}{1+x^2}$ y $g(y) = \frac{1}{1+y^2}$ son continuas y g nunca se anula, por lo que podemos tomar $U = V = \mathbb{R}$. La ecuación (5.16) se integra inmediatamente, con el resultado

$$\arctan y = -\arctan x + c\,, \tag{5.17}$$

donde $|c| < \pi$ para que la ecuación (5.17) tenga solución en y para algún valor de x. Si $c \neq \pm\frac{\pi}{2}$ y llamamos $C = \tan c$, tomando la tangente en ambos miembros de (5.17) se llega a la siguiente expresión para la solución de (5.16):

$$y = \tan(c - \arctan x) = \frac{C - x}{1 + Cx}\,. \tag{5.18}$$

Nótese que la constante C puede tomar cualquier valor real. Por otra parte, si $c = \pm\frac{\pi}{2}$ se tiene

$$y = \tan\Big(\pm\frac{\pi}{2} - \arctan x\Big) = \cot(\arctan x) = \frac{1}{x}\,, \qquad x \neq 0\,. \tag{5.19}$$

Nótese que esta solución se obtiene formalmente de (5.18) en el límite $C \to \pm\infty$.

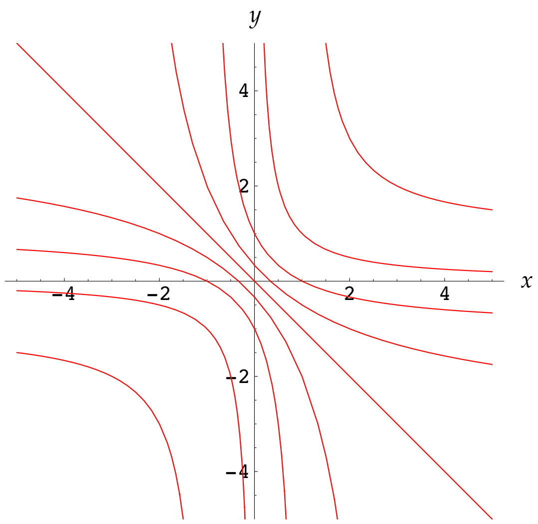

Figura 5.2: Soluciones de la ecuación $y' = -\frac{1+y^2}{1+x^2}$.

El problema de valores iniciales asociado a la ecuación (5.16) siempre posee solución única local. Efectivamente, si imponemos la condición inicial $y(x_0) = y_0$, de (5.18) concluimos que

$$C = \frac{x_0 + y_0}{1 - x_0 y_0}\,,$$

que tiene sentido salvo si $y_0 = 1/x_0$, en cuyo caso la solución correspondiente es $y = 1/x$.

- La única solución de la ecuación (5.16) que está definida en toda la recta real es $y = -x$, que corresponde a $C = 0$. La solución (5.19) y todas las demás soluciones (5.18) “explotan” para algún valor finito de x (concretamente para $x = 0$ y $x = -\frac{1}{C}$, respectivamente). Sin embargo, el miembro derecho de la ecuación (5.16) es continuo (de hecho de clase C^∞) en todo el plano. En general, el estudio de las singularidades de la función $f(x, y)$ no proporciona por sí sólo información acerca de las posibles singularidades de las soluciones de la ecuación diferencial (5.6).

5.2.3 Ecuaciones homogéneas

Son ecuaciones de la forma (5.6) con f continua en un abierto $U \subset \mathbb{R}^2$ y homogénea de grado cero, es decir

$$\boxed{f(\lambda x, \lambda y) = f(x, y)\,, \qquad \forall x, y \in U, \quad \forall \lambda \neq 0}\,. \tag{5.20}$$

Este tipo de ecuación se reduce a una de variables separadas mediante el cambio

$$\boxed{y = xu}\,, \qquad x \neq 0\,,$$

donde $u(x)$ es la nueva función incógnita. Efectivamente,

$$y' = u + xu' = f(x, xu) = f(1, u) \quad \Longrightarrow \quad u' = \frac{f(1,u) - u}{x}\,. \tag{5.21}$$

Si λ satisface la condición $f(1, \lambda) = \lambda$, entonces la ecuación (5.21) tiene la solución constante $u = \lambda$, que corresponde a $y = \lambda x$. En caso contrario, la ecuación (5.21) se resuelve separando variables e integrando, lo que conduce a la relación implícita

$$\boxed{\int \frac{\mathrm{d}u}{f(1,u) - u} = \log|x| + c\,, \qquad \text{con} \quad u = \frac{y}{x}}\,. \tag{5.22}$$

Ejemplo 5.6. Consideremos la ecuación

$$y' = \frac{y - 2x}{2y + x}\,. \tag{5.23}$$

Como

$$f(x, y) = \frac{y - 2x}{2y + x}$$

es homogénea de grado cero (y continua en todo el plano salvo en la recta $y = -x/2$) nos encontramos ante una ecuación homogénea. Es fácil comprobar que la ecuación $f(1, \lambda) = \lambda$ no tiene soluciones reales, por lo que ninguna recta por el origen es solución de (5.23). Como

$$\frac{1}{f(1,u) - u} = -\frac{2u + 1}{2(u^2 + 1)}\,,$$

la fórmula (5.22) conduce inmediatamente a

$$\log(1 + u^2) + \arctan u = c - 2\log|x|\,,$$

donde c es una constante arbitraria. Sustituyendo u por y/x y simplificando, obtenemos la siguiente expresión implícita para las curvas integrales de la ecuación (5.23):

$$\log(x^2 + y^2) + \arctan\frac{y}{x} = c\,. \tag{5.24}$$

Nótese que en este caso no es posible despejar explícitamente y como función de x. Sin embargo, si expresamos la relación (5.24) en coordenadas polares

$$x = r\cos\theta\,, \qquad y = r\,\mathrm{sen}\,\theta\,,$$

obtenemos inmediatamente

$$2\log r + \theta = c \quad \Longrightarrow \quad r = C\mathrm{e}^{-\theta/2}\,; \quad C = \mathrm{e}^{c/2} > 0\,. \tag{5.25}$$

Las curvas integrales son por tanto espirales donde la coordenada radial crece exponencialmente cuando el ángulo gira en el sentido de las agujas del reloj.

Para representar gráficamente estas espirales es conveniente determinar primero las isoclinas de la ecuación (5.23). En general, una **isoclina** de la ecuación de primer orden (5.6) es el lugar geométrico de los puntos en los cuales los vectores tangentes a las curvas integrales tienen todos una misma dirección. Las isoclinas se definen por tanto mediante la ecuación implícita

$$\boxed{f(x,y) = m}\,, \qquad m \in \mathbb{R} \text{ ó } m = \infty\,,$$

donde se admite que $m = \infty$ para incluir las isoclinas de tangente vertical. Para la ecuación (5.23) de este ejemplo, la ecuación de las isoclinas es

$$\frac{y-2x}{2y+x} = m. \tag{5.26}$$

Por tanto, en este caso las isoclinas son rectas por el origen, siendo la de pendiente m

$$y = \frac{m+2}{1-2m}\,x\,. \tag{5.27}$$

En particular, las isoclinas de pendiente $0, \infty, 1, -1$ son las rectas $y = 2x$, $y = -x/2$, $y = -3x$, $y = x/3$, respectivamente. En la Fig. 5.3 hemos representado estas isoclinas junto con las espirales (5.25) correspondientes a $c = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$. Nótese que cada espiral contiene infinitas soluciones de la ecuación (5.23), definida cada una de ellas en un intervalo de la forma (x_0, x_1), donde (x_0, y_0) y (x_1, y_1) son dos puntos de corte consecutivos entre la espiral y la isoclina de pendiente infinita $y = -x/2$.

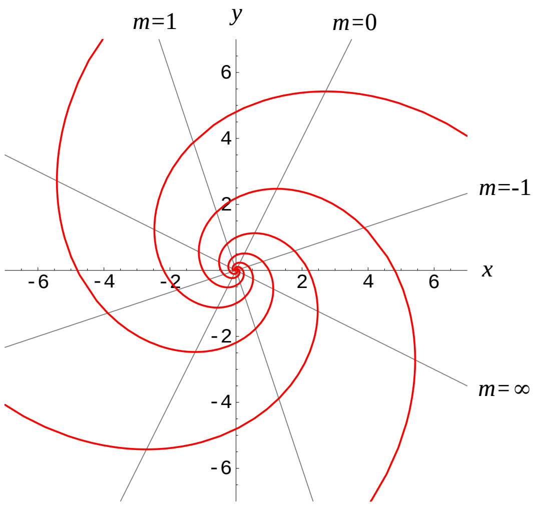

Figura 5.3: Curvas integrales de la ecuación $y' = \frac{y-2x}{2y+x}$ (en rojo) e isoclinas de pendiente $0, \infty, 1, -1$ (en gris).

5.2.4 Ecuaciones exactas

Una ecuación diferencial de la forma

$$\boxed{P(x,y) + Q(x,y)y' = 0}\,, \tag{5.28}$$

donde P, Q son funciones continuas en un abierto $U \subset \mathbb{R}^2$ y Q no se anula en U, se dice **exacta** si existe una función $F : U \to \mathbb{R}$ que verifica

$$\boxed{P(x,y) = F_x(x,y)\,, \qquad Q(x,y) = F_y(x,y)}\,, \qquad \forall (x,y) \in U\,. \tag{5.29}$$

Es decir, la ecuación (5.28) es exacta si $(P, Q) = \nabla F$ en U. En este caso, si $y(x)$ es una solución de (5.28), podemos reescribir dicha ecuación como

$$F_x\big(x, y(x)\big) + F_y\big(x, y(x)\big)y'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\, F\big(x, y(x)\big) = 0\,,$$

y por tanto las soluciones de la ecuación exacta (5.28)-(5.29) verifican

$$\boxed{F(x, y) = c}\,, \tag{5.30}$$

donde c es una constante. Recíprocamente, si se cumple (5.30) entonces, al ser $F_y = Q$ no nula en U, el teorema de la función implícita define a y como función de x en un entorno de cada punto de U, verificándose además la ecuación (5.28) de partida en el dominio de y. Por tanto, la solución general de (5.28)-(5.29) está dada por la ecuación (5.30), que define las *curvas de nivel* de F.

En caso de que las funciones P, Q sean de clase $C^1(U)$, una condición *necesaria* para que la ecuación (5.28) sea exacta es

$$\boxed{P_y(x, y) = Q_x(x, y)}\,, \qquad \forall (x, y) \in U\,, \tag{5.31}$$

ya que por el lema de Schwarz $F_{xy} = F_{yx}$ en U. La condición (5.31) es también *suficiente* si el abierto U es **simplemente conexo**, que en las aplicaciones será el caso más usual.

Veamos cómo determinar la función F suponiendo que la condición (5.31) se cumple en un rectángulo abierto $U = (a, b) \times (c, d)$. Sea (x_0, y_0) un punto de U. Integrando la ecuación $F_x = P$ obtenemos

$$F(x, y) = \int_{x_0}^{x} P(s, y)\,\mathrm{d}s + g(y)\,, \tag{5.32}$$

donde g depende sólo de y. Nótese que si $(x, y) \in U$ entonces todos las puntos de la forma (s, y) con $s \in [x_0, x]$ ó $[x, x_0]$ están también en U, y por tanto la integral de la fórmula anterior está bien definida. Derivando parcialmente (5.32) respecto de y y utilizando (5.31) se sigue que

$$F_y(x, y) = g'(y) + \int_{x_0}^{x} P_y(s, y)\,\mathrm{d}s = g'(y) + \int_{x_0}^{x} Q_x(s, y)\,\mathrm{d}s = g'(y) + Q(x, y) - Q(x_0, y)\,.$$

Imponiendo la segunda ecuación $F_y = Q$ obtenemos

$$g'(y) = Q(x_0, y) \quad \Longrightarrow \quad g(y) = \int_{y_0}^{y} Q(x_0, s)\,\mathrm{d}s\,, \tag{5.33}$$

salvo constante arbitraria. (Como antes, la integral de (5.33) está bien definida puesto que todos los puntos (x_0, s) están en U si $s \in [y_0, y]$ ó $[y, y_0]$.) Por tanto, en este caso la solución general (5.30) de la ecuación (5.28) viene dada por

$$\boxed{F(x, y) = \int_{x_0}^{x} P(s, y)\,\mathrm{d}s + \int_{y_0}^{y} Q(x_0, s)\,\mathrm{d}s = c}\,. \tag{5.34}$$

La función F de la última fórmula puede también expresarse en forma más compacta como la integral de línea

$$F(x, y) = \int_{\gamma_0} (P, Q) \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}\,, \tag{5.35}$$

donde γ_0 es la curva quebrada de la Fig. 5.4. Como el rectángulo U es simplemente conexo y se cumple la condición (5.31), la integral de línea del campo vectorial (P, Q) a lo largo de cualquier curva C^1 a trozos contenida en U es *independiente del camino seguido*. Por tanto podemos escribir

$$\boxed{F(x, y) = \int_{\gamma} (P, Q) \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}}\,, \tag{5.36}$$

donde γ es cualquier curva C^1 a trozos que vaya de (x_0, y_0) a (x, y) sin salirse de U (ver Fig. 5.4).

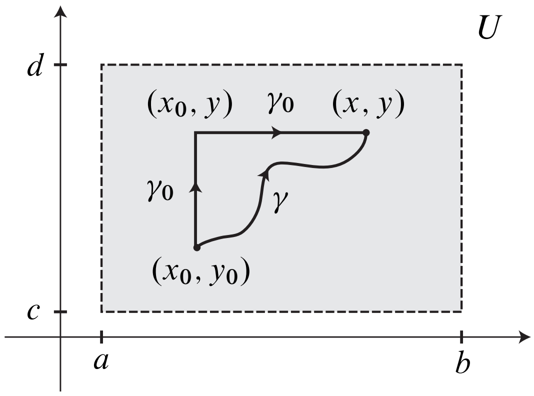

Figura 5.4: Caminos que unen (x_0, y_0) con (x, y) en U.

- De hecho, puede probarse que la fórmula (5.36) es válida en cualquier abierto simplemente conexo donde se cumpla la condición (5.31).

Ejemplo 5.7. Sea la ecuación

$$2xy + 1 + (x^2 + y)y' = 0\,, \tag{5.37}$$

que es de la forma (5.28) con $P = 2xy + 1$, $Q = x^2 + y$. Como $P_y = 2x = Q_x$, la ecuación es exacta en cualquiera de los abiertos simplemente conexos $U_\pm = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \gtrless -x^2\}$ donde Q no se anula. Buscamos por tanto una función F tal que $\nabla F = (P, Q)$, es decir

$$F_x = 2xy + 1 \quad \Longrightarrow \quad F = x^2 y + x + g(y)$$
$$F_y = x^2 + g'(y) = x^2 + y \quad \Longrightarrow \quad g'(y) = y \quad \Longrightarrow \quad g(y) = \frac{y^2}{2}\,,$$

salvo una constante. Por tanto las curvas integrales de la ecuación (5.37) verifican la ecuación implícita

$$2x^2 y + 2x + y^2 = c\,, \tag{5.38}$$

donde c es una constante arbitraria. Despejando y obtenemos dos expresiones

$$y_\pm = -x^2 \pm \sqrt{x^4 - 2x + c} \tag{5.39}$$

para cada valor de c (ver Fig. 5.5), donde el signo $\pm$ de la raíz corresponde a la elección del abierto $U_\pm$.

En ocasiones puede ser interesante discutir el comportamiento de las curvas integrales en función de la constante arbitraria que aparece en la expresión de la solución general. Por ejemplo, en este caso puede verse que si $c > \frac{3}{2\sqrt[3]{2}}$ cada expresión $y_\pm$ es una solución de la ecuación (5.37), definida en todo $\mathbb{R}$. En cambio, si $c < \frac{3}{2\sqrt[3]{2}}$ cada expresión $y_\pm$ determina *dos* soluciones de dicha ecuación, definidas en sendos intervalos $(-\infty, x_0)$ y (x_1, ∞), donde $x_0 < x_1$ son las dos raíces del polinomio $x^4 - 2x + c$ que aparece en el radicando de (5.39). Por último, si $c = \frac{3}{2\sqrt[3]{2}}$, cada expresión $y_\pm$ también determina dos soluciones de (5.37), definidas en los intervalos $(-\infty, \frac{1}{\sqrt[3]{2}})$ y $(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, \infty)$ respectivamente.

Consideremos de nuevo la ecuación (5.28) con P, Q de clase $C^1(U)$. Supongamos que $P_y \neq Q_x$ en U y por tanto la ecuación *no* es exacta. Si $\mu(x, y)$ es una función que no se anula en U, la ecuación

$$\mu(x, y)P(x, y) + \mu(x, y)Q(x, y)y' = 0 \tag{5.40}$$

es equivalente a la ecuación (5.28), ya que ambas tienen el mismo conjunto de soluciones. Si la ecuación (5.40) es exacta, se dice que la función μ es un **factor integrante** de la ecuación (5.28) de partida. En este caso podemos resolver (5.28) integrando (5.40) mediante el procedimiento discutido más arriba.

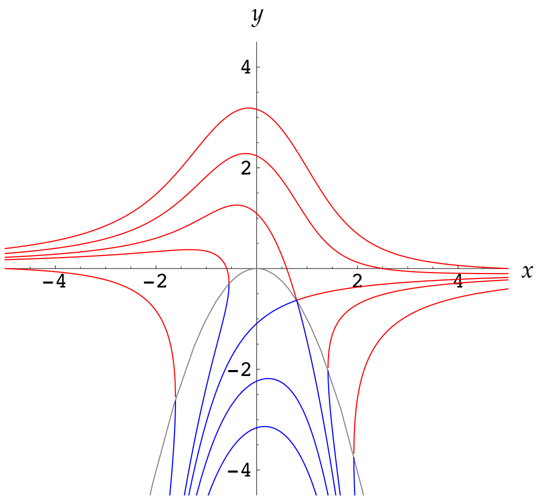

Figura 5.5: Curvas integrales (5.38) de la ecuación (5.37). La parábola $y = -x^2$ (en gris) es una isoclina de pendiente ∞, que divide al plano en dos abiertos simplemente conexos $U_\pm$ donde $Q = x^2 + y$ no se anula y las soluciones son de la forma $y_\pm$, respectivamente.

Si U es un abierto simplemente conexo y μ es de clase C^1, la condición necesaria y suficiente que debe cumplir dicha función para que la ecuación (5.40) sea exacta es

$$(\mu P)_y = (\mu Q)_x \,.$$

Es decir, μ debe ser solución de la ecuación en derivadas parciales de primer orden

$$\boxed{P(x,y)\,\mu_y - Q(x,y)\,\mu_x + \big[P_y(x,y) - Q_x(x,y)\big]\mu = 0}\,. \tag{5.41}$$

Aunque se demuestra que esta EDP siempre tiene solución, el problema es que la técnica habitual para resolverla requiere conocer precisamente la solución de la EDO (5.28) de partida. Sin embargo, podemos buscar soluciones *particulares* de (5.41) que dependan de un único argumento, tales como $\mu(x)$, $\mu(y)$, $\mu(x+y)$, $\mu(x^2+y^2)$, etc. En general estas funciones no serán solución de la EDP (5.41), a menos que P y Q satisfagan una condición apropiada. Por ejemplo, si

$$\boxed{\frac{P_y - Q_x}{Q} \equiv g(x)}\,, \tag{5.42}$$

entonces (5.41) admite un factor integrante del tipo $\mu(x)$. Efectivamente, si se cumple (5.42) y $\mu_y = 0$, la ecuación (5.41) se reduce a

$$\mu'(x) = g(x)\mu(x) \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{\mu(x) = c\mathrm{e}^{\int g(x)\,\mathrm{d}x}}\,. \tag{5.43}$$

Análogamente, si

$$\boxed{\frac{P_y - Q_x}{P} \equiv h(y)}\,, \tag{5.44}$$

entonces (5.41) admite como solución el factor integrante dependiente sólo de y

$$\boxed{\mu(y) = c\mathrm{e}^{-\int h(y)\,\mathrm{d}y}}\,, \tag{5.45}$$

Ejercicio. Probar que la ecuación (5.28) posee un factor integrante $\mu(r)$ función de $r = \sqrt{x^2+y^2}$ si y sólo si

$$\boxed{\frac{P_y - Q_x}{yP - xQ} = g(r)\,,}$$

y que en tal caso μ puede calcularse por la fórmula

$$\boxed{\mu(r) = c\,\mathrm{e}^{-\int r\,g(r)\,\mathrm{d}r}\,.}$$

Ejemplo 5.8. La ecuación

$$y(1-x) - \operatorname{sen} y + (x + \cos y)y' = 0\,, \tag{5.46}$$

no es exacta, ya que $P = y(1-x) - \operatorname{sen} y$, $Q = x + \cos y$ no satisfacen la condición (5.31). Sin embargo, como

$$\frac{P_y - Q_x}{Q} = -1 \equiv g(x)$$

no depende de y, de la ecuación (5.43) se sigue que $\mu(x) = \mathrm{e}^{-x}$ es un factor integrante de la ecuación (5.46) en cualquiera de los abiertos simplemente conexos

$$U_{\pm} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + \cos y \gtrless 0\}.$$

Buscamos por tanto una función F tal que $\nabla F = \mathrm{e}^{-x}(P, Q)$. En este caso resulta más sencillo comenzar integrando la ecuación $F_y = \mathrm{e}^{-x} Q$, que proporciona

$$\begin{aligned}
&F_y = \mathrm{e}^{-x}(x + \cos y) \quad \Longrightarrow \quad F = \mathrm{e}^{-x}(xy + \operatorname{sen} y) + h(x) \\
&F_x = \mathrm{e}^{-x}(y - xy - \operatorname{sen} y) + h'(x) = \mathrm{e}^{-x}\big(y(1-x) - \operatorname{sen} y\big) \quad \Longrightarrow \quad h'(x) = 0\,.
\end{aligned}$$

Por tanto podemos elegir

$$F(x,y) = \mathrm{e}^{-x}(xy + \operatorname{sen} y)\,,$$

de modo que las curvas integrales de la ecuación (5.37) verifican la ecuación trascendente

$$\mathrm{e}^{-x}(xy + \operatorname{sen} y) = c\,, \tag{5.47}$$

donde c es una constante arbitraria. En este caso no es posible despejar explícitamente y como función de x (aunque para $c = 0$ podemos despejar x como función de y). Sin embargo, el teorema de la función implícita garantiza que si $F_y(x_0, y_0) = \mathrm{e}^{-x_0}(x_0 + \cos y_0) \neq 0$, es decir si $(x_0, y_0) \in U_{\pm}$, entonces la ecuación (5.47) define a y como función de x en un entorno de (x_0, y_0).

5.2.5 Ecuaciones lineales

Son ecuaciones de la forma

$$\boxed{y' = a(x)y + b(x)}\,, \tag{5.48}$$

donde a y b son funciones continuas en un intervalo abierto U. La ecuación (5.48) se dice **homogénea** si $b \equiv 0$, e **inhomogénea** o **completa** en caso contrario. Veamos que la solución general de una ecuación lineal puede expresarse siempre mediante cuadraturas. En efecto, en el caso homogéneo

$$\boxed{y' = a(x)y} \tag{5.49}$$

admite la *solución trivial* $y = 0$, y si $y \neq 0$ podemos tratarla como una ecuación de variables separadas:

$$\frac{y'}{y} = a(x) \quad \Longrightarrow \quad \log|y| = \int a(x)\,\mathrm{d}x + c_0 \quad \Longrightarrow \quad |y| = \mathrm{e}^{c_0}\mathrm{e}^{\int a(x)\,\mathrm{d}x}\,.$$

La solución general de (5.49) es por tanto

$$\boxed{y = c\mathrm{e}^{\int a(x)\,\mathrm{d}x}}\,, \tag{5.50}$$

donde c es una constante arbitraria (o bien $c = \pm\mathrm{e}^{c_0}$, o bien $c = 0$ para la solución trivial).

- El conjunto de soluciones (5.50) de la ecuación homogénea (5.49) es un espacio vectorial de dimensión uno.

La ecuación inhomogénea (5.48) se resuelve mediante el **método de variación de constantes**, debido a Lagrange. El método consiste en probar como solución una función de la forma

$$y = c(x)\mathrm{e}^{A(x)}\,, \tag{5.51}$$

donde

$$A(x) = \int a(x)\,\mathrm{d}x$$

es un primitiva cualquiera (pero fija) de la función $a(x)$. Es decir, se trata de probar como solución la solución general de la ecuación homogénea reemplazando la constante c por una función incógnita $c(x)$. Sustituyendo (5.51) en la ecuación (5.48) obtenemos

$$c'(x)\mathrm{e}^{A(x)} + c(x)\mathrm{e}^{A(x)}a(x) = a(x)c(x)\mathrm{e}^{A(x)} + b(x)\,,$$

de donde

$$c'(x) = b(x)\mathrm{e}^{-A(x)} \quad\Longrightarrow\quad c(x) = c + \int b(x)\mathrm{e}^{-A(x)}\,\mathrm{d}x\,,$$

donde c es una constante arbitraria. Por tanto, la solución general de la ecuación completa (5.48) es

$$\boxed{y = c\mathrm{e}^{A(x)} + \mathrm{e}^{A(x)}\int b(x)\mathrm{e}^{-A(x)}\,\mathrm{d}x}\,. \tag{5.52}$$

- La expresión (5.52) muestra que la solución general de la ecuación (5.48) es de la forma

  $$y = y_{\mathrm{h}}(x) + y_{\mathrm{p}}(x)\,,$$

  donde y_{h} es la solución general de la ecuación homogénea e y_{p} es una solución particular de la ecuación completa.

Consideremos ahora el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} y' = a(x)y + b(x)\,, \\ y(x_0) = y_0\,, \end{cases} \tag{5.53}$$

donde $x_0 \in U$. Tomando como primitiva de $a(x)$ la función $A(x) = \int_{x_0}^{x} a(s)\,\mathrm{d}s$, de la expresión (5.52) se sigue inmediatamente que la única solución de (5.48) que verifica la condición inicial $y(x_0) = y_0$ es

$$\boxed{y = y_0\mathrm{e}^{\int_{x_0}^{x} a(s)\,\mathrm{d}s} + \mathrm{e}^{\int_{x_0}^{x} a(s)\,\mathrm{d}s}\int_{x_0}^{x} b(s)\mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{s} a(t)\,\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}s}\,.$$

Ejemplo 5.9. Sea la ecuación lineal inhomogénea

$$y' = \frac{y}{x} + x^2\,, \tag{5.54}$$

definida si $x \neq 0$. La solución general de la ecuación homogénea es

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{x} \quad\Longrightarrow\quad \log|y| = \log|x| + c_0 \quad\Longrightarrow\quad y = cx\,,$$

donde $c \in \mathbb{R}$ (el valor $c = 0$ proviene de la solución trivial $y \equiv 0$). Para la ecuación inhomogénea, probamos una solución particular de la forma $y_{\mathrm{p}} = c(x)x$, que conduce a

$$y_{\mathrm{p}}' = c'x + c = c + x^2 \quad\Longrightarrow\quad c = \frac{x^2}{2} \quad\Longrightarrow\quad y_{\mathrm{p}} = \frac{x^3}{2}\,.$$

Por tanto, la solución general de la ecuación (5.54) es

$$y = cx + \frac{x^3}{2}, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

Nótese que, aunque la ecuación diferencial (5.54) no está definida si $x = 0$, las soluciones obtenidas son analíticas en toda la recta real.

5.2.6 Ecuación de Bernoulli

Es una ecuación de la forma

$$\boxed{y' = a(x)y + b(x)y^r}, \qquad r \neq 0, 1, \tag{5.55}$$

siendo a, b continuas en un intervalo abierto U. La ecuación (5.55) no está definida para $y < 0$ a menos que $r = p/q$ sea un racional irreducible con q impar, ni para $y = 0$ cuando $r < 0$. La ecuación de Bernoulli puede transformarse en una ecuación lineal (y por tanto resoluble por cuadraturas) mediante el cambio de variable

$$\boxed{u = y^{1-r}}.$$

En efecto, derivando u respecto de x y utilizando (5.55) obtenemos

$$u' = (1-r)y^{-r}y' = (1-r)a(x)y^{1-r} + (1-r)b(x) = (1-r)a(x)u + (1-r)b(x),$$

que es lineal en la nueva variable u.

Ejemplo 5.10. La ecuación

$$y' = \frac{y - y^2}{x}, \tag{5.56}$$

es una ecuación de Bernoulli con $r = 2$. Una posible solución es $y \equiv 0$. Si $y \neq 0$, el cambio de variable apropiado es $u = 1/y$, que conduce a

$$u' = -\frac{y'}{y^2} = -\frac{1}{xy} + \frac{1}{x} = -\frac{u}{x} + \frac{1}{x}, \tag{5.57}$$

que es lineal en u. La solución general de la ecuación homogénea es

$$u_{\mathrm{h}} = \frac{c}{x}.$$

Para la ecuación completa, probamos una solución particular de la forma $u_{\mathrm{p}} = \frac{c(x)}{x}$, que conduce a

$$\frac{c'}{x} = \frac{1}{x} \quad \Longrightarrow \quad c = x \quad \Longrightarrow \quad u_{\mathrm{p}} = 1.$$

Luego la solución general de (5.57) es

$$u = u_{\mathrm{h}} + u_{\mathrm{p}} = \frac{x+c}{x},$$

y por tanto

$$y = \frac{x}{x+c}$$

es la solución general de (5.56). (La solución $y \equiv 0$ se obtiene formalmente en el límite $c \to \infty$.)

Ejercicio. Resolver la ecuación (5.56) tratándola como ecuación de variables separadas.

5.2.7 Ecuación de Riccati

La ecuación de Riccati

$$\boxed{y' = a(x) + b(x)y + c(x)y^2}\,, \qquad a, c \not\equiv 0\,, \tag{5.58}$$

con a, b, c continuas en un intervalo abierto U, es de gran importancia en Física Matemática por su estrecha relación con las ecuaciones lineales de segundo orden (como la ecuación de Schrödinger). En general no es posible resolver una ecuación de Riccati por cuadraturas. Sin embargo, si se conoce una solución particular $y_0(x)$ es posible reducirla a una ecuación lineal mediante el cambio de variable

$$\boxed{u = \frac{1}{y - y_0(x)}}\,.$$

Efectivamente,

$$\begin{aligned} u' &= -\frac{y' - y_0'(x)}{\big(y - y_0(x)\big)^2} = -\frac{b(x)\big(y - y_0(x)\big) + c(x)\big(y^2 - y_0^2(x)\big)}{\big(y - y_0(x)\big)^2} = -b(x)u - c(x)\,\frac{y + y_0(x)}{y - y_0(x)} \\ &= -\big[b(x) + 2c(x)y_0(x)\big]u - c(x)\,, \end{aligned}$$

que es una ecuación lineal en u.

Ejemplo 5.11. Consideramos la ecuación de Riccati

$$y' = y^2 - \frac{2}{x^2}\,. \tag{5.59}$$

Si probamos una solución particular de la forma $y = \lambda/x$, obtenemos

$$-\frac{\lambda}{x^2} = \frac{\lambda^2}{x^2} - \frac{2}{x^2} \quad \Longrightarrow \quad \lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda = -2, 1\,.$$

Tomamos como solución particular $y_0 = 1/x$. El cambio de variable

$$u = \frac{1}{y - 1/x} \tag{5.60}$$

conduce a la ecuación lineal

$$u' = -\frac{y' + 1/x^2}{(y - 1/x)^2} = -\frac{y^2 - 1/x^2}{(y - 1/x)^2} = -\frac{y + 1/x}{y - 1/x} = -\frac{2u}{x} - 1\,. \tag{5.61}$$

La solución general de la ecuación homogénea es

$$u_{\mathrm{h}} = \frac{C}{x^2}\,.$$

Para determinar una solución particular de la ecuación inhomogénea (5.61) podemos utilizar el método de variación de constantes, o más directamente, probar una solución de la forma $u_{\mathrm{p}} = kx$. Sustituyendo en (5.61) se obtiene

$$k = -2k - 1 \quad \Longrightarrow \quad k = -\frac{1}{3}\,.$$

Por tanto

$$u = \frac{C}{x^2} - \frac{x}{3} = -\frac{x^3 + c}{3x^2}\,, \qquad c = -3C\,,$$

es la solución general de (5.61). De (5.60) se sigue inmediatamente que

$$y = \frac{1}{x} - \frac{3x^2}{x^3 + c}\,.$$

es la solución general de (5.59).

Comentario. Como hemos mencionado más arriba, la ecuación de Riccati (5.58) está estrechamente relacionada con las ecuaciones lineales de segundo orden. Más concretamente, es posible convertir (5.58) en una ecuación lineal de segundo orden mediante el cambio de variable

$$y = -\frac{1}{c(x)}\,\frac{u'}{u}\,.$$

En efecto,

$$y' = -\frac{1}{c(x)}\,\frac{u''}{u} + \frac{c'(x)}{c(x)^2}\,\frac{u'}{u} + \frac{1}{c(x)}\,\frac{u'^2}{u^2} = a(x) - \frac{b(x)}{c(x)}\,\frac{u'}{u} + \frac{1}{c(x)}\,\frac{u'^2}{u^2}\,,$$

y por tanto u verifica la ecuación

$$\boxed{u'' - \left[b(x) + \frac{c'(x)}{c(x)}\right]u' + a(x)c(x)u = 0}\,.$$

En el próximo capítulo veremos que la solución general de esta ecuación es de la forma

$$u = k_1\,u_1(x) + k_2\,u_2(x)\,,$$

donde k_1, k_2 son constantes reales y u_1, u_2 son dos soluciones linealmente independientes, que en general no podrán determinarse de forma explícita. La solución general de la ecuación de Riccati de partida (5.58) se expresa en términos de u_1 y u_2 como

$$\boxed{y = -\frac{1}{c(x)}\,\frac{k_1 u_1'(x) + k_2 u_2'(x)}{k_1 u_1(x) + k_2 u_2(x)}}\,.$$

(Nótese que esta solución depende de una sóla constante arbitraria, o bien k_2/k_1, o bien k_1/k_2.)

5.3 Existencia y unicidad de soluciones

En esta sección estudiaremos la *existencia* y *unicidad* de solución del problema de valores iniciales

$$\begin{cases} y' = f(x,y)\,, \\ y(x_0) = y_0\,. \end{cases} \tag{5.62}$$

En distintos ejemplos de la sección anterior donde la función f era suficientemente regular hemos visto que este problema tiene solución única local. En esta sección enunciaremos sin demostración un resultado fundamental que garantiza la existencia de solución única (en general *local*) del problema de valores iniciales (5.62). Supondremos que la variable dependiente y y la función f son vectoriales[1], es decir, consideraremos el problema de valores iniciales para sistemas de ecuaciones de primer orden:

Definición 5.12. Un **sistema de** n **ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden en forma normal** para una función incógnita $y = (y_1, \dots, y_n)$ es una ecuación vectorial del tipo

$$\boxed{y' = f(x,y)}\,, \tag{5.63}$$

donde $f = (f_1, \dots, f_n)$ está definida en un abierto $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$ y toma valores en $\mathbb{R}^n$. Dado $(x_0, y_0) \in U$, el **problema de valores iniciales** asociado al sistema (5.63) consiste en determinar una solución $y(x)$ definida en un intervalo I que contenga a x_0 tal que

$$\boxed{y(x_0) = y_0}\,. \tag{5.64}$$

[1] De aquí en adelante prescindiremos de la notación vectorial, e.g., escribiremos simplemente y en lugar de $\mathbf{y}$.

- El sistema (5.63) es equivalente a las n ecuaciones escalares

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, \dots, y_n)\,, \\ \quad\vdots \\ y_n' = f_n(x, y_1, \dots, y_n)\,, \end{cases}$$

mientras que el dato inicial (5.64) corresponde a las n condiciones

$$y_1(x_0) = y_{01}\,,\ \dots\ , y_n(x_0) = y_{0n}\,.$$

- El problema de valores iniciales (5.63)–(5.64) incluye como caso particular el problema de valores iniciales asociado a una ecuación *escalar* de orden n en forma normal

$$\begin{cases} u^{(n)} = F\big(x, u, u', \dots, u^{(n-1)}\big)\,, \\ u(x_0) = u_0\,,\ u'(x_0) = u_1\,,\ \dots\ , u^{(n-1)}(x_0) = u_{n-1}\,. \end{cases} \tag{5.65}$$

En efecto, si introducimos las n variables dependientes

$$y_1 = u\,,\ y_2 = u'\,,\ \dots\ , y_n = u^{(n-1)}\,,$$

el problema de valores iniciales (5.65) puede reescribirse como el sistema de ecuaciones de primer orden

$$\begin{cases} y_1' = y_2\,, \\ \quad\vdots \\ y_{n-1}' = y_n\,, \\ y_n' = F(x, y_1, \dots, y_n)\,, \end{cases}$$

con la condición inicial

$$y_1(x_0) = u_0\,,\ y_2(x_0) = u_1\,, \dots\ , y_n(x_0) = u_{n-1}\,.$$

(Más en general, un sistema de m ecuaciones diferenciales ordinarias de orden n puede convertirse en un sistema de mn ecuaciones de primer orden.)

La existencia local de soluciones del problema de valores iniciales (5.63)–(5.64) está garantizada si la función f es *continua* en su abierto de definición, de acuerdo con el siguiente teorema:

Teorema de existencia de Peano. *Sea $f : U \to \mathbb{R}^n$ continua en el abierto $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$, y sea $(x_0, y_0) \in U$. Entonces el problema (5.63)–(5.64) tiene (al menos) una solución $y(x)$ definida en un intervalo de la forma $(x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$, para $\alpha > 0$ suficientemente pequeño.*

- El número α, que es función de (x_0, y_0), se puede estimar explícitamente, y depende esencialmente de lo grande que sea el valor de $\|f(x, y)\|$ en U.

La continuidad de la función f en el abierto U no garantiza la unicidad (ni siquiera local) de soluciones del problema de valores iniciales (5.63)–(5.64) con datos iniciales en U, tal y como ilustra el siguiente ejemplo:

Ejemplo 5.13. Sea el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} y' = 3y^{2/3}\,, \\ y(x_0) = y_0\,. \end{cases} \tag{5.66}$$

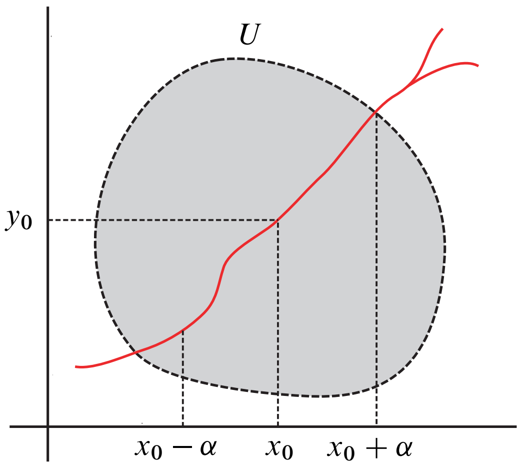

Figura 5.6: Si la función $f(x,y)$ satisface las hipótesis del teorema de existencia y unicidad en el abierto sombreado U, el problema de valores iniciales (5.63)–(5.64) tiene solución única definida en el intervalo $(x_0-\alpha, x_0+\alpha)$. No está garantizado que la solución esté definida o sea única fuera del abierto U.

Como $f(x,y) = 3y^{2/3}$ es continua en $U = \mathbb{R}^2$, el teorema de Peano garantiza que el problema (5.66) posee al menos una solución local cualquiera que sea el dato inicial (x_0, y_0). Veamos que si $y_0 = 0$ la solución no es única. En efecto, $y \equiv 0$ es una solución del problema (5.66) cuando $y_0 = 0$. Por otro lado, como la ecuación $y' = 3y^{2/3}$ es de variables separadas podemos integrarla inmediatamente, con el resultado

$$y = (x+c)^3, \qquad c \in \mathbb{R}. \tag{5.67}$$

En particular, $y = (x-x_0)^3$ es otra solución de (5.66) con $y_0 = 0$, que difiere de $y \equiv 0$ en cualquier intervalo abierto centrado en x_0.

El resultado fundamental que aplicaremos para establecer la existencia y unicidad local de soluciones del problema de valores iniciales (5.63)-(5.64) es el siguiente:

Teorema de existencia y unicidad. *Si la función $f : U \subset \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ y sus derivadas parciales $\frac{\partial f_i}{\partial y_j}$ $(1 \leqslant i, j \leqslant n)$ son continuas en el abierto U, entonces para todo $(x_0, y_0) \in U$ el problema de valores iniciales (5.63)–(5.64) tiene solución única en un intervalo de la forma $(x_0-\alpha, x_0+\alpha)$, con $\alpha > 0$ dependiente de (x_0, y_0).*

El teorema anterior es consecuencia de un resultado más general, conocido como *teorema de Picard–Lindelöf*, cuyo enunciado y demostración detallada puede verse por ejemplo en F. Finkel y A. González-López, *Manual de Ecuaciones Diferenciales I*, UCM, 2009[2]. En muchas ocasiones, utilizaremos el siguiente corolario directo del teorema de existencia y unicidad:

Corolario 5.14. *Si $f : U \subset \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ es de clase C^1 en el abierto U, el problema de valores iniciales (5.63)–(5.64) tiene solución única local para todo dato inicial $(x_0, y_0) \in U$.*

- Si se cumplen las hipótesis del teorema de existencia y unicidad (o de su Corolario 5.14), entonces ninguna solución puede cortar a otra solución dentro de U, ya que en caso contrario habría dos soluciones con el mismo dato inicial en U (ver Fig. 5.6).

- Las hipótesis del teorema de existencia y unicidad no son ni mucho menos *necesarias* para que el

[2] A partir de ahora citaremos abreviadamente esta referencia como [EDI2009].

problema de valores iniciales (5.63)–(5.64) tenga solución única. Por ejemplo, la función

$$f(x,y) = \begin{cases} -\dfrac{2y}{x} + 4x\,, & x \neq 0\,,\\ 0\,, & x = 0\,, \end{cases}$$

es discontinua en el eje vertical $x = 0$. Como la ecuación $y' = f(x,y)$ es lineal, se resuelve fácilmente con el resultado

$$y = \frac{c}{x^2} + x^2\,.$$

Por tanto, la ecuación diferencial $y' = f(x,y)$ con la condición inicial $y(0) = 0$ tiene la solución única $y = x^2$, correspondiente a $c = 0$. En cambio, si la condición inicial es $y(0) = y_0 \neq 0$, el problema de valores iniciales no tiene solución, ya que la única solución de la ecuación diferencial definida para $x = 0$ es $y = x^2$.

Ejemplo 5.15. Estudiemos por qué puntos del plano pasa una única curva integral de la ecuación diferencial

$$y' = \frac{y^2}{2x(y-x)}\,. \tag{5.68}$$

En primer lugar, nótese que la función

$$f(x,y) = \frac{y^2}{2x(y-x)}$$

es de clase C^1 en todo el plano excepto en las rectas $x = 0$, $y = x$. Por el teorema de existencia y unicidad, por todo punto $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ que no pertenezca a dichas rectas pasa una única solución, y por tanto una única curva integral. Para ver qué ocurre cuando el dato inicial (x_0, y_0) pertenece a las rectas $x = 0$ ó $y = x$, consideramos la ecuación asociada

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{2x(y-x)}{y^2}\,,$$

cuyas curvas integrales coinciden con las de la ecuación de partida. Al ser el miembro derecho de esta ecuación de clase C^1 en todo el plano salvo en la recta $y = 0$, del teorema de existencia y unicidad se deduce que por todo punto de las rectas $x = 0$ ó $y = x$ salvo el origen pasa una única curva integral de la ecuación (5.68) (con tangente vertical). De hecho, es inmediato comprobar que la recta $x = 0$ es una curva integral, al ser claramente solución de la ecuación asociada. (Nótese, sin embargo, que la recta $y = x$ *no* es una curva integral.)

El único punto del plano donde el teorema de existencia y unicidad no puede aplicarse ni a la ecuación de partida ni a su asociada es el origen. Para estudiar el comportamiento de las curvas integrales por este punto no hay más remedio que resolver la ecuación diferencial, que en este caso es posible al tratarse de una ecuación homogénea. Efectuando el cambio $y = xu$ en la ecuación se obtiene

$$xu' + u = \frac{u^2}{2(u-1)} \quad\Longrightarrow\quad xu' = \frac{u(2-u)}{2(u-1)}\,.$$

Esta última ecuación admite las soluciones particulares $u = 0$, $u = 2$, que corresponden a las soluciones lineales $y = 0$ e $y = 2x$. Si $u \neq 0, 2$, resolviendo la ecuación para u separando variables se obtiene

$$-\int \frac{2u-2}{u^2-2u}\,\mathrm{d}u = -\log|u^2 - 2u| = \log|x| + c_0 \quad\Longrightarrow\quad u(u-2) = \frac{c}{x}\,,\qquad c \in \mathbb{R}\,.$$

Deshaciendo el cambio se llega a la expresión

$$y(y-2x) = cx\,,$$

que incluye las soluciones particulares $y = 0$, $y = 2x$ para $c = 0$. Como la ecuación anterior se satisface idénticamente para $x = y = 0$ y c arbitrario, todas las curvas integrales tienen una rama que pasa por el origen. En definitiva, por todo punto del plano salvo el origen pasa una única curva integral, mientras que por el origen pasan infinitas (cf. la Fig. 5.7).

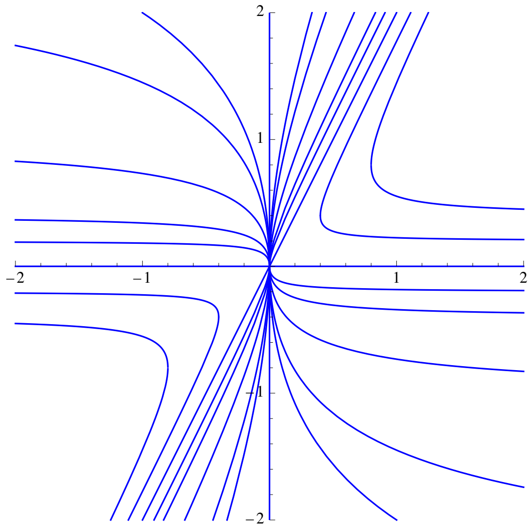

Figura 5.7: Curvas integrales de la ecuación (5.68).

Capítulo 6

Sistemas y ecuaciones diferenciales lineales

6.1 Espacio de soluciones de un sistema lineal

Definición 6.1. Un **sistema lineal de primer orden** es un sistema de n ecuaciones de la forma

$$\boxed{y' = A(x)\, y + b(x)}\,, \tag{6.1}$$

donde $A : \mathbb{R} \to M_n(\mathbb{R})$ es una función matricial y $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ es una función vectorial, es decir,

$$A(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(x) & \dots & a_{nn}(x) \end{pmatrix}, \qquad b(x) = \begin{pmatrix} b_1(x) \\ \vdots \\ b_n(x) \end{pmatrix}. \tag{6.2}$$

El sistema (6.1) se dice **homogéneo** si $b \equiv 0$, e **inhomogéneo** en caso contrario.

- El conjunto $M_n(\mathbb{R})$ de las matrices cuadradas de orden n con elementos de matriz reales es un espacio vectorial de dimensión n^2. La base canónica de dicho espacio es la formada por las matrices E_{ij} cuyo único elemento de matriz no nulo es un 1 en la fila i y la columna j. Las coordenadas de una matriz A en esta base son sus elementos de matriz a_{ij}.

- Recuérdese que una función vectorial $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ es continua en $x \in \mathbb{R}$ si y sólo si lo son sus componentes $b_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Análogamente, una función matricial $A : \mathbb{R} \to M_n(\mathbb{R})$ es continua en $x \in \mathbb{R}$ si y sólo si sus n^2 elementos de matriz $a_{ij} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son funciones continuas en x.

Por el teorema de existencia y unicidad visto en el capítulo anterior, si la función matricial A y la función vectorial b son continuas en un intervalo abierto I, entonces el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} y' = A(x)\, y + b(x)\,, \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{6.3}$$

asociado al sistema lineal (6.1) tiene solución única local para todo dato inicial $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}^n$. De hecho, puede probarse el siguiente resultado más general, cuya demostración puede consultarse en [EDI2009]:

Teorema 6.2. *Si $A : I \to M_n(\mathbb{R})$ y $b : I \to \mathbb{R}^n$ son continuas en un intervalo cualquiera $I \subset \mathbb{R}$, entonces el problema de valores iniciales (6.3) tiene solución única definida en* todo *el intervalo I para cualquier dato inicial $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}^n$.*

En lo que sigue supondremos que las funciones A y b del sistema lineal (6.1)-(6.2) son continuas en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$, y por tanto se cumplen las hipótesis del Teorema 6.2. Denotaremos por $\mathcal{S}$ el conjunto de soluciones del sistema (6.1), es decir,

$$\mathcal{S} = \{y : I \to \mathbb{R}^n \mid y'(x) = A(x)y(x) + b(x)\,,\ \forall x \in I\} \subset C^1(I, \mathbb{R}^n)\,.$$

Análogamente, llamaremos $\mathcal{S}_0$ al conjunto de soluciones del correspondiente sistema homogéneo

$$\boxed{y' = A(x)\,y}\,. \tag{6.4}$$

- Si φ^1, φ^2 son dos soluciones del sistema homogéneo (6.4), entonces cualquier combinación lineal $\lambda\varphi^1 + \mu\varphi^2$ con coeficientes $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ sigue siendo solución. En efecto,

  $$(\lambda\varphi^1+\mu\varphi^2)'(x) = \lambda\varphi^{1\prime}(x)+\mu\varphi^{2\prime}(x) = \lambda A(x)\varphi^1(x)+\mu A(x)\varphi^2(x) = A(x)\big(\lambda\varphi^1(x)+\mu\varphi^2(x)\big).$$

  En otras palabras, *el conjunto $\mathcal{S}_0$ de soluciones del sistema homogéneo* (6.4) *es un espacio vectorial real*. Esta importante propiedad de los sistemas lineales homogéneos se conoce como **principio de superposición lineal**.

- Al ser $A(x)$ una matriz real, si φ es una solución *compleja* del sistema homogéneo (6.4), entonces $\bar{\varphi}$ también es solución de dicho sistema. Análogamente, si φ es solución de (6.4), entonces $\operatorname{Re}\varphi$ e $\operatorname{Im}\varphi$ son ambas solución de dicho sistema. ¿Ocurre lo mismo para el sistema inhomogéneo (6.1)?

- La solución general del sistema inhomogéneo (6.1) es de la forma $y = y_{\mathrm{p}} + y_{\mathrm{h}}$, donde y_{p} es una solución particular fija de dicho sistema e y_{h} es la solución general del correspondiente sistema homogéneo (6.4). En efecto, si y es de la forma anterior es claramente solución de (6.1). Recíprocamente, si y es cualquier solución de dicho sistema, entonces $y - y_{\mathrm{p}}$ es obviamente solución del sistema homogéneo (6.4). En lenguaje más matemático, *el conjunto de soluciones del sistema inhomogéneo* (6.1) *es el espacio afín $\mathcal{S} = y_{\mathrm{p}} + \mathcal{S}_0$, donde y_{p} es un elemento fijo de $\mathcal{S}$.*

A partir del Teorema 6.2 de existencia y unicidad, probaremos a continuación que la dimensión del espacio de soluciones $\mathcal{S}_0$ del sistema homogéneo (6.4) es precisamente n:

Teorema 6.3. *El conjunto de soluciones del sistema homogéneo $y' = A(x)y$, con $y \in \mathbb{R}^n$, es un espacio vectorial real de dimensión n.*

Demostración. Sea $x_0 \in I$ un punto fijo pero arbitrario de I, y sea e_i el i-ésimo vector de la base canónica de $\mathbb{R}^n$. Veamos en primer lugar que, si denotamos por $Y^i(x)$ a la solución del problema de valores iniciales

$$\begin{cases} y' = A(x)y\,, \\ y(x_0) = e_i\,, \end{cases} \tag{6.5}$$

las funciones $\{Y^1(x), \dots, Y^n(x)\}$ constituyen un sistema de generadores del espacio vectorial $\mathcal{S}_0$. Sea, en efecto, $y(x)$ una solución cualquiera del sistema homogéneo (6.4), y llamemos

$$y_0 = y(x_0) \equiv (y_{01}, \dots, y_{0n}) = \sum_{i=1}^n y_{0i}e_i\,.$$

Entonces la función

$$\tilde{y}(x) = \sum_{i=1}^n y_{0i}Y^i(x)$$

es solución del sistema homogéneo (6.4) (al ser combinación lineal de soluciones) y satisface la condición inicial

$$\tilde{y}(x_0) = \sum_{i=1}^n y_{0i}e_i = y_0 = y(x_0)\,.$$

Del Teorema (6.2) de existencia y unicidad se sigue que $\tilde{y} = y$ en I. Luego *toda solución es combinación lineal de las n soluciones Y^i*, que constituyen por tanto un sistema de generadores de $\mathcal{S}_0$. Veamos que de hecho las n soluciones Y^i son linealmente independientes, por lo que forman una base de $\mathcal{S}_0$. En efecto, supongamos que

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i Y^i = 0\,,$$

con $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ constantes reales. La igualdad anterior es equivalente a

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i Y^i(x) = 0\,, \qquad \forall x \in I\,,$$

de donde se sigue que

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i Y^i(x_0) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = 0\,,$$

que sólo tiene la solución trivial $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$ al ser $\{e_1, \ldots, e_n\}$ una base de $\mathbb{R}^n$. Esto demuestra que $\{Y^1, \ldots, Y^n\}$ es una base de $\mathcal{S}_0$, y por tanto $\dim \mathcal{S}_0 = n$. $\square$

6.2 Sistemas homogéneos

Definición 6.4. Un **sistema fundamental de soluciones** del sistema homogéneo (6.4) es una base $\{y^1, \ldots, y^n\}$ de su espacio de soluciones.

En otras palabras, un sistema fundamental de soluciones de (6.4) es un conjunto de n soluciones linealmente independientes. Por ejemplo, las n soluciones Y^i del problema de valores iniciales (6.5) forman un sistema fundamental de soluciones del sistema homogéneo $y' = A(x)y$. Nótese que, por construcción, dichas soluciones verifican $Y^i(x_0) = e_i$.

Por definición, cualquier solución $y(x)$ del sistema homogéneo (6.4) es combinación lineal de los elementos de un sistema fundamental de soluciones $\{y^1, \ldots, y^n\}$, es decir,

$$y(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i\, y^i(x)\,, \qquad x \in I\,, \tag{6.6}$$

para ciertas constantes reales $c_1, \ldots, c_n$. La igualdad vectorial (6.6) es equivalente a las n igualdades escalares

$$y_k(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i\, y_k^i(x)\,, \qquad k = 1, \ldots, n\,,$$

para cada una de las componentes de la solución $y(x)$. A su vez, podemos escribir la igualdad (6.6) en forma matricial como

$$\boxed{y(x) = Y(x)\, c}\,, \tag{6.7}$$

siendo

$$Y(x) = \begin{pmatrix} y^1(x) & \cdots & y^n(x) \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} y_1^1(x) & \ldots & y_1^n(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_n^1(x) & \ldots & y_n^n(x) \end{pmatrix}, \qquad c = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}.$$

Definición 6.5. Una **matriz fundamental** del sistema homogéneo (6.4) es cualquier función matricial $Y : I \to M_n(\mathbb{R})$ cuyas *columnas* forman un sistema fundamental de soluciones.

- Por lo que acabamos de ver, si $Y(x)$ es una matriz fundamental del sistema homogéneo (6.4), la solución general de dicho sistema está dada por la ecuación (6.7).

- Una función matricial $Y : I \to M_n(\mathbb{R})$ es una matriz fundamental del sistema homogéneo (6.4) si y sólo si sus columnas son linealmente independientes, y se cumple

$$Y'(x) = A(x)Y(x)\,, \qquad \forall x \in I\,.$$

  En efecto, la igualdad matricial anterior es equivalente a las n igualdades vectoriales

$$y^{i\prime}(x) = A(x)y^i(x)\,, \qquad \forall x \in I\,, \quad \forall i = 1\,, \dots\,, n\,,$$

  donde $y^i(x)$ es la i-ésima columna de $Y(x)$.

- Es obvio que un sistema homogéneo posee infinitas matrices fundamentales. Por otra parte, si $Y_1(x)$ e $Y_2(x)$ son dos matrices fundamentales de (6.4) tales que $Y_1(x_0) = Y_2(x_0)$ entonces $Y_1 = Y_2$ en todo el intervalo I. En efecto, cada columna de Y_1 y la correspondiente columna de Y_2 son soluciones del sistema que toman el mismo valor en x_0, por lo que deben coincidir en todo I en virtud del Teorema 6.2 de existencia y unicidad.

6.2.1 Wronskiano

Dadas n soluciones $\varphi^1, \dots, \varphi^n$ (no necesariamente independientes) del sistema homogéneo (6.4), consideramos la **matriz de soluciones**

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix}\varphi^1(x) & \cdots & \varphi^n(x)\end{pmatrix}$$

cuya i-ésima columna viene dada por la solución φ^i. Nótese que, al ser por hipótesis $\varphi^{i\prime}(x) = A(x)\varphi^i(x)$ para $i = 1, \dots, n$, la matriz $\Phi(x)$ verifica la ecuación matricial

$$\Phi'(x) = A(x)\Phi(x)\,. \tag{6.8}$$

Definición 6.6. Dadas n soluciones $\varphi^1, \dots, \varphi^n$ del sistema homogéneo (6.4), su **wronskiano** es el determinante de la correspondiente matriz de soluciones $\Phi(x)$, es decir,

$$W[\varphi^1, \dots, \varphi^n](x) \equiv \det \Phi(x) = \begin{vmatrix}\varphi^1_1(x) & \dots & \varphi^n_1(x)\\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi^1_n(x) & \dots & \varphi^n_n(x)\end{vmatrix}. \tag{6.9}$$

Notación. Cuando esté claro del contexto a qué soluciones $\varphi^1, \dots, \varphi^n$ nos estamos refiriendo denotaremos su wronskiano sencillamente como $W(x)$.

La propiedad clave del wronskiano (6.9) es que su anulación en *cualquier* punto del intervalo I implica la dependencia lineal de las soluciones $\varphi^1, \dots, \varphi^n$ en dicho intervalo, de acuerdo con la siguiente

Proposición 6.7. *Sean $\varphi^1, \dots, \varphi^n$ soluciones del sistema homogéneo (6.4) en el intervalo I. Entonces $\{\varphi^1, \dots, \varphi^n\}$ son linealmente independientes $\iff W[\varphi^1, \dots, \varphi^n](x) \neq 0$, $\forall x \in I$.*

Demostración. Veamos en primer lugar la implicación ($\Leftarrow$). Si $\{\varphi^1, \dots, \varphi^n\}$ fueran linealmente dependientes, entonces los *vectores* $\{\varphi^1(x), \dots, \varphi^n(x)\}$ serían linealmente dependientes para cada $x \in I$. Pero entonces $W[\varphi^1, \dots, \varphi^n](x) = 0$ *para todo* $x \in I$.

En cuanto a la implicación ($\Rightarrow$), si existiera $x_0 \in I$ tal que $W[\varphi^1, \dots, \varphi^n](x_0) = 0$ entonces los vectores $\{\varphi^1(x_0), \dots, \varphi^n(x_0)\}$ serían linealmente dependientes, es decir, existirían n constantes reales λ_k no todas nulas tales que

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \varphi^k(x_0) = 0\,.$$

Pero entonces

$$y(x) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \varphi^k(x)$$

sería solución del sistema (6.4) con la condición inicial $y(x_0) = 0$. Por el Teorema 6.2 de existencia y unicidad $y \equiv 0$ en I, y por tanto $\{\varphi^1, \dots, \varphi^n\}$ serían linealmente dependientes. $\square$

- Si $\varphi^1, \dots, \varphi^n$ son soluciones de $y' = A(x)y$, de la última demostración se sigue que o bien $W[\varphi^1, \dots, \varphi^n](x) \neq 0$ para todo $x \in I$, o bien $W[\varphi^1, \dots, \varphi^n](x) = 0$ para todo $x \in I$.

- Nótese que una función matricial $\Phi : I \to M_n(\mathbb{R})$ es una matriz fundamental del sistema (6.4) si y sólo si

$$\text{i) } \Phi'(x) = A(x)\Phi(x), \quad \forall x \in I, \tag{6.10a}$$

$$\text{ii) } \det \Phi(x) \neq 0, \quad \forall x \in I. \tag{6.10b}$$

  En efecto, la segunda condición es equivalente a la independencia lineal de las columnas de $\Phi(x)$ en virtud de la proposición anterior.

- Si $\Phi(x)$ es una matriz fundamental y P es cualquier matriz constante *invertible*, es inmediato comprobar que $\Psi(x) = \Phi(x)P$ cumple i) y ii), y por tanto es una matriz fundamental. Recíprocamente, supongamos que $\Phi(x)$ y $\Psi(x)$ son dos matrices fundamentales del sistema (6.4). Al ser las matrices $\Phi(x_0)$ y $\Psi(x_0)$ invertibles en virtud de la Proposición 6.7, la matriz $P = \Phi(x_0)^{-1}\Psi(x_0)$ existe y es invertible, siendo por construcción $\Psi(x_0) = \Phi(x_0)P$. Entonces $\Psi(x)$ y $\Phi(x)P$ son ambas matrices fundamentales de (6.4) y coinciden en x_0, por lo que deben ser iguales en todo el intervalo I en virtud del comentario de la pág. 88. En definitiva, cualquier matriz fundamental del sistema homogéneo (6.4) puede obtenerse a partir de una matriz fundamental fija multiplicándola *por la derecha* por una matriz invertible apropiada.

Ejercicio. Si $\Phi(x)$ es una matriz fundamental del sistema (6.4) y P es una matriz invertible ¿qué puede decirse de la matriz $\Psi(x) = P\Phi(x)$?

Definición 6.8. Se denomina **matriz fundamental canónica** del sistema homogéneo (6.4) en el punto x_0 a la única matriz fundamental $Y(x)$ de dicho sistema que cumple $Y(x_0) = \mathbb{1}$.

- Dada cualquier matriz fundamental $Y(x)$ del sistema (6.4), es inmediato comprobar que $Y(x)Y(x_0)^{-1}$ es su matriz fundamental canónica en el punto x_0.

- Si $Y(x)$ es la matriz fundamental canónica del sistema (6.4) en x_0, la solución del problema de valores iniciales

$$\begin{cases} y' = A(x)y \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

  asociado a dicho sistema es simplemente

$$y(x) = Y(x)y_0 \,.$$

Comentario. Dadas n funciones diferenciables $\varphi^1, \dots, \varphi^n$ arbitrarias (no necesariamente soluciones de un sistema lineal homogéneo (6.4) con A continua en I), la anulación de su wronskiano (incluso idénticamente) no implica la dependencia lineal. Por ejemplo, las funciones

$$\varphi^1(x) = \begin{pmatrix} \operatorname{sen} x \\ x \end{pmatrix}, \qquad \varphi^2(x) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^x \operatorname{sen} x \\ \mathrm{e}^x x \end{pmatrix}$$

son linealmente independientes aunque su wronskiano se anula idénticamente en $\mathbb{R}$.

6.2.2 Fórmula de Abel–Liouville

Sean φ^k, $k = 1, \dots, n$, soluciones del sistema homogéneo (6.4), y sea $W(x)$ su wronskiano. Entonces

$$W'(x) = \sum_{i=1}^{n} \begin{vmatrix} \varphi_1^1(x) & \dots & \varphi_1^n(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_i^{1\prime}(x) & \dots & \varphi_i^{n\prime}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_n^1(x) & \dots & \varphi_n^n(x) \end{vmatrix} . \tag{6.11}$$

Como φ^k es solución de (6.4) se verifica

$$\varphi_i^{k\prime}(x) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x)\varphi_j^k(x)\,, \qquad k = 1, \dots, n\,.$$

Luego

$$W'(x) = \sum_{i=1}^{n} \begin{vmatrix} \varphi_1^1(x) & \dots & \varphi_1^n(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x)\varphi_j^1(x) & \dots & \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x)\varphi_j^n(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_n^1(x) & \dots & \varphi_n^n(x) \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \begin{vmatrix} \varphi_1^1(x) & \dots & \varphi_1^n(x) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{ii}(x)\varphi_i^1(x) & \dots & a_{ii}(x)\varphi_i^n(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_n^1(x) & \dots & \varphi_n^n(x) \end{vmatrix} ,$$

ya que un determinante no varía al sumar a una fila una combinación lineal de las restantes. Por tanto

$$W'(x) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} W(x) = \operatorname{tr} A(x) \cdot W(x)\,.$$

Integrando esta última ecuación lineal de primer orden a partir de un cierto $x_0 \in I$ se obtiene

$$\boxed{W(x) = W(x_0)\, \mathrm{e}^{\int_{x_0}^{x} \operatorname{tr} A(t)\, \mathrm{d}t}}\,, \qquad \forall x \in I\,, \tag{6.12}$$

expresión que se conoce como la **fórmula de Abel–Liouville**. Nótese que de esta fórmula se deduce también que o bien $W(x)$ no se anula en I, o bien $W(x)$ se anula idénticamente en I.

6.3 Espacio de soluciones de una ecuación lineal de orden n

Definición 6.9. Una **ecuación lineal de orden** n es una ecuación diferencial de la forma

$$\boxed{u^{(n)} + a_{n-1}(x)\, u^{(n-1)} + \dots + a_1(x)\, u' + a_0(x)\, u = b(x)}\,, \tag{6.13}$$

donde las funciones $a_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ($i = 0, \dots, n-1$) y $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son continuas en un intervalo I. Diremos que la ecuación (6.13) es **homogénea** si $b \equiv 0$ en I, e **inhomogénea** o **completa** en caso contrario.

Como se vio en el Capítulo 5 (página 80), toda ecuación diferencial de orden n puede escribirse como un sistema de n ecuaciones de primer orden. El sistema de primer orden (5.65) asociado a la ecuación (6.13) es el sistema lineal

$$y' = A(x)\, y + b(x)\, e_n\,, \tag{6.14}$$

donde

$$A(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0(x) & -a_1(x) & -a_2(x) & \dots & -a_{n-1}(x) \end{pmatrix} \tag{6.15}$$

se denomina **matriz compañera** de la ecuación (6.13). Nótese, en particular, que

$$\boxed{\operatorname{tr} A(x) = -a_{n-1}(x)}\,, \tag{6.16}$$

expresión que utilizaremos más adelante. Al ser las entradas de la matriz compañera $A(x)$ y la función $b(x)$ continuas en el intervalo I, el Teorema 6.2 garantiza que el problema de valores iniciales dado por la ecuación (6.13) con las condiciones iniciales

$$u(x_0) = u_0\,,\ u'(x_0) = u_1\,,\ \dots\,,\ u^{(n-1)}(x_0) = u_{n-1} \qquad (x_0 \in I) \tag{6.17}$$

tiene solución única definida en todo I:

Teorema 6.10. *Si las funciones $a_i : I \to \mathbb{R}$ $(i = 0, \dots, n-1)$ y $b : I \to \mathbb{R}$ son continuas en el intervalo I, el problema de valores iniciales (6.13)-(6.17) posee solución única definida en todo I para cualquier dato inicial $(x_0, u_0, \dots, u_{n-1}) \in I \times \mathbb{R}^n$.*

Utilizaremos una notación análoga a la de los sistemas lineales de primer orden, denotando por $\mathcal{S}$ el conjunto de soluciones de la ecuación (6.13), y por $\mathcal{S}_0$ el de la correspondiente ecuación homogénea

$$\boxed{u^{(n)} + a_{n-1}(x)\,u^{(n-1)} + \dots + a_1(x)\,u' + a_0(x)\,u = 0}\,. \tag{6.18}$$

Nótese que ambos conjuntos están contenidos en $C^n(I)$. Razonando como en el caso de los sistemas de primer orden se prueban inmediatamente las siguientes propiedades:

- Si φ_1, φ_2 son dos soluciones de la ecuación homogénea (6.18), entonces cualquier combinación lineal $\lambda\varphi_1 + \mu\varphi_2$ con coeficientes $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ sigue siendo solución. En otras palabras, *el conjunto $\mathcal{S}_0$ de soluciones de la ecuación homogénea* (6.18) *es un espacio vectorial real* (principio de superposición lineal).

- Si φ es una solución compleja de la ecuación homogénea (6.18), entonces $\bar{\varphi}$, $\operatorname{Re}\varphi$ e $\operatorname{Im}\varphi$ son también solución de dicha ecuación.

- La solución general de la ecuación inhomogénea (6.13) es de la forma $u = u_{\mathrm{p}} + u_{\mathrm{h}}$, donde u_{p} es una solución particular fija de dicha ecuación y u_{h} es la solución general de la ecuación homogénea correspondiente (6.18). Equivalentemente, *el conjunto de soluciones de la ecuación inhomogénea* (6.13) *es el espacio afín $\mathcal{S} = u_{\mathrm{p}} + \mathcal{S}_0$, donde u_{p} es un elemento fijo de $\mathcal{S}$.*

Para determinar la dimensión del espacio $\mathcal{S}_0$ utilizaremos la siguiente propiedad:

- Si $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ son soluciones de la ecuación lineal homogénea (6.18), y denotamos por $y^i = (\varphi_i, \varphi_i', \dots, \varphi_i^{(n-1)})$, $i = 1, \dots, k$, las correspondientes soluciones del sistema lineal de primer orden asociado, entonces

  $$\{\varphi_1, \dots, \varphi_k\} \text{ linealmente independientes} \quad \Longleftrightarrow \quad \{y^1, \dots, y^k\} \text{ linealmente independientes}\,.$$

  La implicación $(\Rightarrow)$ es evidente. En cuanto al recíproco, supongamos que

  $$\lambda_1\varphi_1 + \dots + \lambda_k\varphi_k = 0\,, \qquad \lambda_i \in \mathbb{R}\,.$$

Derivando $n-1$ veces esta igualdad se sigue que

$$\lambda_1 y^1 + \cdots + \lambda_k y^k = 0\,,$$

y por tanto $\lambda_1 = \cdots = \lambda_k = 0$, al ser $\{y^1, \dots, y^k\}$ linealmente independientes por hipótesis.

De la propiedad anterior y el Teorema 6.3 se sigue inmediatamente el siguiente resultado:

Teorema 6.11. *El espacio $\mathcal{S}_0$ de soluciones de la ecuación homogénea (6.18) es de dimensión n.*

Definición 6.12. Un **sistema fundamental de soluciones** de la ecuación homogénea (6.18) es una base $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ de su espacio de soluciones $\mathcal{S}_0$.

- Si $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ es un sistema fundamental de soluciones de (6.18), entonces cualquier solución u de dicha ecuación puede expresarse como

$$\boxed{u(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_i(x)\,, \qquad c_i \in \mathbb{R}}\,.$$

Definición 6.13. Dadas n soluciones $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ (no necesariamente independientes) de la ecuación homogénea (6.18), su **matriz de Wronski** se define como la matriz de las correspondientes soluciones del sistema lineal asociado, es decir,

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x) & \dots & \varphi_n(x) \\ \varphi_1'(x) & \dots & \varphi_n'(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(x) & \dots & \varphi_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}. \tag{6.19}$$

Definición 6.14. Dadas n soluciones $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ de la ecuación homogénea (6.18), su **wronskiano** es el determinante de la correspondiente matriz de Wronski $\Phi(x)$, es decir,

$$W[\varphi_1, \dots, \varphi_n](x) = \det \Phi(x) = \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \dots & \varphi_n(x) \\ \varphi_1'(x) & \dots & \varphi_n'(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(x) & \dots & \varphi_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}. \tag{6.20}$$

Utilizaremos frecuentemente la notación abreviada $W(x)$ en lugar de $W[\varphi_1, \dots, \varphi_n](x)$ cuando quede claro por el contexto a qué soluciones $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ nos estamos refiriendo. Al igual que en el caso de los sistema lineales de primer orden, mediante el wronskiano es inmediato determinar la independencia lineal de un conjunto de n soluciones de la ecuación lineal homogénea (6.18), de acuerdo con la siguiente proposición:

Proposición 6.15. *Sean $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ soluciones de la ecuación homogénea (6.18) en el intervalo I. Entonces $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ son linealmente independientes $\iff W[\varphi_1, \dots, \varphi_n](x) \neq 0$, $\forall x \in I$.*

Demostración. Si $y^1, \dots, y^n$ son las soluciones del sistema asociado de primer orden correspondientes a $\varphi_1, \dots, \varphi_n$, del comentario previo al Teorema 6.11 y la Proposición 6.7 se sigue que

$$\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\} \text{ l.i.} \iff \{y^1, \dots, y^n\} \text{ l.i.} \iff W[y^1, \dots, y^n](x) \neq 0, \ \forall x \in I\,.$$

Pero, por definición, $W[y^1, \dots, y^n](x) = W[\varphi_1, \dots, \varphi_n](x)$. ◻

- Si $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ son soluciones de la ecuación (6.18), por el comentario tras la Proposición 6.7 o bien $W[\varphi_1, \dots, \varphi_n](x) \neq 0$ para todo $x \in I$, o bien $W[\varphi_1, \dots, \varphi_n](x) = 0$ para todo $x \in I$. Luego basta comprobar que $W[\varphi_1, \dots, \varphi_n](x_0) \neq 0$ en un cierto $x_0 \in I$ para garantizar la independencia lineal en I de dichas soluciones.

- Sean $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ soluciones de la ecuación (6.18), y sea $W(x)$ su wronskiano. Como la matriz compañera (6.15) verifica $\operatorname{tr} A(x) = -a_{n-1}(x)$, la fórmula de Abel–Liouville (6.12) se reduce a

$$\boxed{W(x) = W(x_0)\, \mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{x} a_{n-1}(t)\, \mathrm{d}t}}, \qquad x \in I\,. \tag{6.21}$$

  Nótese que la afirmación del comentario anterior se sigue directamente de esta fórmula, y que el wronskiano es constante si el coeficiente $a_{n-1}(x)$ se anula idénticamente en I.

6.3.1 Reducción del orden

En general, no es posible calcular un sistema fundamental de soluciones de la ecuación homogénea (6.18) en forma explícita, es decir, en términos de los coeficientes $a_i(x)$ y sus primitivas. Sin embargo, en el caso de una ecuación de segundo orden

$$u'' + a_1(x)u' + a_0(x)u = 0\,, \tag{6.22}$$

si se conoce una solución no idénticamente nula se puede expresar la solución general mediante cuadraturas. En efecto, si $\varphi(x)$ es una solución particular no trivial de la ecuación (6.22), y denotamos por $u(x)$ una solución cualquiera de dicha ecuación, de la fórmula de Abel–Liouville (6.21) se sigue que

$$\varphi(x)u' - \varphi'(x)\,u = k\,\mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{x} a_1(s)\,\mathrm{d}s}\,,$$

siendo $k = W[\varphi, u](x_0)$. Integrando esta ecuación lineal de *primer* orden para u obtenemos fácilmente la siguiente expresión de la solución general de (6.22):

$$u(x) = c\,\varphi(x) + k\,\varphi(x) \int_{x_0}^{x} \frac{\mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{t} a_1(s)\,\mathrm{d}s}}{\varphi^2(t)}\, \mathrm{d}t\,.$$

Por tanto, $\varphi(x)$ y la nueva solución

$$\boxed{\psi(x) = \varphi(x) \int_{x_0}^{x} \frac{\mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{t} a_1(s)\,\mathrm{d}s}}{\varphi^2(t)}\, \mathrm{d}t} \tag{6.23}$$

forman un sistema fundamental de soluciones de la ecuación homogénea (6.22), ya que (por construcción) $W[\varphi, \psi](x_0) = 1 \neq 0$.

Comentario. En el caso de la ecuación homogénea (6.18) de orden $n > 2$, el conocimiento de una solución particular no trivial $\varphi(x)$ permite reducir dicha ecuación a otra ecuación lineal homogénea de orden $n - 1$ mediante el cambio de variable

$$z = \left(\frac{u}{\varphi(x)}\right)'. \tag{6.24}$$

Por ejemplo, supongamos que $\varphi(x) \not\equiv 0$ es una solución particular de la ecuación de tercer orden

$$u''' + a_2(x)u'' + a_1(x)u' + a_0(x)u = 0\,, \tag{6.25}$$

Escribiendo el cambio de variable (6.24) como $u = \varphi(x) \int^x z$, obtenemos

$$
\begin{aligned}
u' &= \varphi'(x) \textstyle\int^x z + \varphi(x) z\,, \\
u'' &= \varphi''(x) \textstyle\int^x z + 2\varphi'(x) z + \varphi(x) z'\,, \\
u''' &= \varphi'''(x) \textstyle\int^x z + 3\varphi''(x) z + 3\varphi'(x) z' + \varphi(x) z''\,.
\end{aligned}
$$

Sustituyendo estas expresiones en (6.22), y teniendo en cuenta que $\varphi(x)$ es solución de dicha ecuación, se obtiene la siguiente ecuación de segundo orden para z:

$$\varphi(x) z'' + \big[3\varphi'(x) + a_2(x)\varphi(x)\big] z' + \big[3\varphi''(x) + 2a_2(x)\varphi'(x) + a_1(x)\varphi(x)\big] z = 0\,.$$

En general, se puede probar (ver L. Elsgoltz, *Ecuaciones Diferenciales y Cálculo Variacional*, Ed. URSS, Moscú, 1994) que si se conocen k soluciones linealmente independientes de una ecuación lineal homogénea de orden n, se puede transformar dicha ecuación en una ecuación lineal homogénea de orden $n-k$ aplicando sucesivamente cambios de variable de la forma (6.24). En particular, si se conocen $n-1$ soluciones de la ecuación (6.18), es posible expresar su solución general en términos de cuadraturas tras reducirla a una ecuación lineal de primer orden mediante este procedimiento.

6.4 Método de variación de constantes

En general no resulta posible determinar de forma explícita un sistema fundamental de soluciones del sistema homogéneo (6.4) o de la ecuación homogénea (6.18). Sin embargo, cuando se conoce dicho sistema fundamental se podrá determinar la solución general del correspondiente sistema o ecuación inhomogénea utilizando el **método de variación de constantes**, que explicaremos a continuación.

6.4.1 Método de variación de constantes para un sistema inhomogéneo

Análogamente al caso escalar (ver pág. 76), el método consiste en probar como solución del sistema (6.1) la función que se obtiene al sustituir el vector constante c de la solución general (6.7) del sistema homogéneo por una función incógnita $c(x)$, es decir,

$$y(x) = Y(x) c(x)\,, \qquad c(x) = \begin{pmatrix} c_1(x) \\ \vdots \\ c_n(x) \end{pmatrix}.$$

Sustituyendo en (6.1) obtenemos

$$y'(x) = Y'(x) c(x) + Y(x) c'(x) = A(x) Y(x) c(x) + b(x)\,,$$

y teniendo en cuenta que al ser $Y(x)$ una matriz fundamental verifica las condiciones (6.10) queda

$$c'(x) = Y^{-1}(x) b(x)\,, \qquad \forall x \in I\,.$$

Luego

$$c(x) = c + \int^x Y^{-1}(s) b(s)\, \mathrm{d}s\,, \qquad c \in \mathbb{R}^n\,.$$

Por tanto la solución general del sistema inhomogéneo (6.1) viene dada por

$$\boxed{y(x) = Y(x)\, c + Y(x) \int^x Y^{-1}(s) b(s)\, \mathrm{d}s}\,, \qquad \forall x \in I\,. \tag{6.26}$$

Nótese que (de acuerdo con la Proposición 6.1) la solución (6.26) es de la forma

$$y(x) = y_{\mathrm{h}}(x) + y_{\mathrm{p}}(x)\,,$$

donde $y_{\mathrm{h}}(x)$ es la solución general del sistema homogéneo e $y_{\mathrm{p}}(x)$ es una solución particular del sistema inhomogéneo. Por último, se comprueba fácilmente que la solución del problema de valores iniciales (6.3) es

$$\boxed{y(x) = Y(x)Y^{-1}(x_0)\, y_0 + \int_{x_0}^{x} Y(x)Y^{-1}(s)b(s)\,\mathrm{d}s}\,, \qquad \forall x \in I\,. \tag{6.27}$$

6.4.2 Método de variación de constantes para una ecuación inhomogénea

Al igual que para los sistemas lineales de primer orden, si se conoce un sistema fundamental de soluciones de la ecuación homogénea (6.18) es posible expresar la solución general de la ecuación inhomogénea (6.13) correspondiente mediante cuadraturas. En efecto, sea $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ un sistema fundamental de soluciones de la ecuación (6.18), y sea

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x) & \dots & \varphi_n(x) \\ \varphi_1'(x) & \dots & \varphi_n'(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(x) & \dots & \varphi_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}$$

su correspondiente matriz de Wronski. La solución general del sistema de primer orden (6.14) asociado a la ecuación inhomogénea (6.13) es (cf. ec. (6.26))

$$y(x) = \Phi(x)c + \int^{x} b(t)\, \Phi(x)\, \Phi(t)^{-1} e_n\,\mathrm{d}t\,, \qquad c = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n\,. \tag{6.28}$$

La solución general de (6.13) es la primera componente del miembro derecho de la última ecuación. Para escribir esta solución más explícitamente, nótese que la primera componente de $\Phi(x)\,\Phi(t)^{-1}e_n$ es igual a

$$\sum_{i=1}^{n} \Phi_{1i}(x)\big[\Phi(t)^{-1}\big]_{in} = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x)(-1)^{i+n}\frac{M_{ni}(t)}{W(t)} = \frac{1}{W(t)} \begin{vmatrix} \varphi_1(t) & \dots & \varphi_n(t) \\ \varphi_1'(t) & \dots & \varphi_n'(t) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_1^{(n-2)}(t) & \dots & \varphi_n^{(n-2)}(t) \\ \varphi_1(x) & \dots & \varphi_n(x) \end{vmatrix},$$

donde $M_{ni}(t)$ denota el menor asociado al elemento de matriz ni de la matriz $\Phi(t)$, y la última igualdad se obtiene desarrollando el determinante por la última fila. Sustituyendo la expresión anterior en (6.28) obtenemos la siguiente expresión para la solución general de la ecuación (6.13):

$$\boxed{u(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i\, \varphi_i(x) + \int^{x} \begin{vmatrix} \varphi_1(t) & \dots & \varphi_n(t) \\ \varphi_1'(t) & \dots & \varphi_n'(t) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_1^{(n-2)}(t) & \dots & \varphi_n^{(n-2)}(t) \\ \varphi_1(x) & \dots & \varphi_n(x) \end{vmatrix} \frac{b(t)}{W(t)}\,\mathrm{d}t}\,. \tag{6.29}$$

En particular, para la ecuación lineal de segundo orden

$$u'' + a_1(x)\,u' + a_0(x)\,u = b(x) \tag{6.30}$$

se tiene

$$\boxed{u(x) = c_1\,\varphi_1(x) + c_2\,\varphi_2(x) + \int^{x} \frac{b(t)}{W(t)}\big[\varphi_1(t)\varphi_2(x) - \varphi_2(t)\varphi_1(x)\big]\,\mathrm{d}t\,.} \tag{6.31}$$

Nótese que la función

$$u_{\mathrm{p}}(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{b(t)}{W(t)} \big[\varphi_1(t)\varphi_2(x) - \varphi_2(t)\varphi_1(x)\big]\,\mathrm{d}t \tag{6.32}$$

es una solución particular de la ecuación inhomogénea (6.30) que verifica las condiciones iniciales

$$u_{\mathrm{p}}(x_0) = u'_{\mathrm{p}}(x_0) = 0\,.$$

Ejemplo 6.16. Consideremos la ecuación de segundo orden

$$u'' + u = \tan x\,. \tag{6.33}$$

Si bien hasta el próximo capítulo no abordaremos el problema de cómo construir un sistema fundamental de soluciones de la ecuación homogénea

$$u'' + u = 0\,, \tag{6.34}$$

resulta inmediato *comprobar* que las funciones

$$\varphi_1(x) = \cos x\,, \quad \varphi_2(x) = \operatorname{sen} x$$

constituyen tal sistema, ya que evidentemente son soluciones de la ecuación (6.34) y su wronskiano es

$$W(x) = \begin{vmatrix} \cos x & \operatorname{sen} x \\ -\operatorname{sen} x & \cos x \end{vmatrix} = 1 \neq 0\,.$$

(Nótese que $W(x)$ es constante; esto es consecuencia de la fórmula de Abel–Liouville (6.21), ya que en este caso $a_{n-1} \equiv a_1 = 0$.) De la ecuación (6.31) se sigue que una solución particular de la ecuación (6.33) es

$$\begin{aligned} u_{\mathrm{p}} &= \int^{x} \tan t\,[\cos t\,\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} t\,\cos x]\,\mathrm{d}t \\ &= \operatorname{sen} x \int^{x} \operatorname{sen} t\,\mathrm{d}t - \cos x \int^{x} \frac{1-\cos^2 t}{\cos t}\,\mathrm{d}t = -\cos x \int^{x} \sec t\,\mathrm{d}t\,. \end{aligned} \tag{6.35}$$

Para evaluar la última integral efectuamos el cambio de variable $s = \tan\frac{t}{2}$, de modo que

$$\mathrm{d}s = \tfrac{1}{2}\,(1+\tan^2\tfrac{t}{2})\,\mathrm{d}t = \tfrac{1}{2}(1+s^2)\,\mathrm{d}t \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{d}t = \frac{2}{1+s^2}\,\mathrm{d}s\,.$$

Por otro lado,

$$\begin{cases} \cos t = 2\cos^2\frac{t}{2} - 1 = \dfrac{2}{\sec^2\frac{t}{2}} - 1 = \dfrac{2}{1+\tan^2\frac{t}{2}} - 1 = \dfrac{2}{1+s^2} - 1 = \dfrac{1-s^2}{1+s^2}\,, \\[2ex] \operatorname{sen} t = 2\operatorname{sen}\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2} = \dfrac{2\tan\frac{t}{2}}{\sec^2\frac{t}{2}} = \dfrac{2s}{1+s^2}\,, \end{cases}$$

y por tanto

$$\begin{aligned} \int \sec t\,\mathrm{d}t &= \int \frac{1+s^2}{1-s^2}\cdot\frac{2}{1+s^2}\,\mathrm{d}s = \int \frac{2}{1-s^2}\,\mathrm{d}s = \int \frac{\mathrm{d}s}{1-s} + \int \frac{\mathrm{d}s}{1+s} = \log\left|\frac{1+s}{1-s}\right| \\ &= \log\left|\frac{1+s^2}{1-s^2} + \frac{2s}{1-s^2}\right| = \log|\sec t + \tan t|\,. \end{aligned}$$

Sustituyendo esta expresión en (6.35) y añadiendo la solución general de la ecuación homogénea (6.34) concluimos que

$$u = c_1\cos x + c_2\operatorname{sen} x - \cos x\,\log|\sec x + \tan x|\,, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

es la solución general de la ecuación (6.33).

Capítulo 7

Sistemas y ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes

7.1 Ecuaciones con coeficientes constantes. Método de los coeficientes indeterminados

Como hemos visto en el capítulo anterior, la dificultad para resolver la ecuación inhomogénea (6.13) estriba en determinar un sistema fundamental de soluciones de la correspondiente ecuación homogénea, ya que en ese caso el método de variación de constantes permite expresar la solución general de la ecuación inhomogénea mediante cuadraturas (cf. ec. (6.29)). Un caso particular de gran interés práctico en el que es posible encontrar la solución general de la ecuación lineal (6.13) es aquél en que los coeficientes $a_i(x)$ son constantes, es decir,

$$\boxed{u^{(n)} + a_{n-1}\, u^{(n-1)} + \cdots + a_1\, u' + a_0\, u = b(x)}\,, \qquad a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}\,. \tag{7.1}$$

En esta sección veremos que siempre es posible construir un sistema fundamental de soluciones de la correspondiente ecuación homogénea

$$\boxed{u^{(n)} + a_{n-1}\, u^{(n-1)} + \cdots + a_1\, u' + a_0\, u = 0} \tag{7.2}$$

si se conocen todas las raíces del **polinomio característico** de la ecuación (7.2), definido por

$$\boxed{p(\lambda) \equiv \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0}\,. \tag{7.3}$$

- La matriz compañera de la ecuación (7.2) es la matriz constante

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{pmatrix}. \tag{7.4}$$

  Nótese que el polinomio característico (7.3) coincide con el polinomio característico de la matriz A, definido por

$$p_A(\lambda) \equiv \det(\lambda \mathbb{1} - A)\,,$$

  como se comprueba fácilmente desarrollando el determinante por la última fila.

Comencemos escribiendo la ecuación (7.2) en la forma

$$\big(D^n + a_{n-1}\, D^{n-1} + \cdots + a_1\, D + a_0\big)u \equiv p(D)u = 0\,, \qquad D \equiv \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,.$$

De la igualdad
$$(D-\lambda)\big(f(x)\mathrm{e}^{\lambda x}\big)=f'(x)\mathrm{e}^{\lambda x}\,,$$
se sigue inmediatamente que
$$\boxed{(D-\lambda)^k\big(f(x)\mathrm{e}^{\lambda x}\big)=f^{(k)}(x)\mathrm{e}^{\lambda x}}\,, \tag{7.5}$$
identidad que resulta de interés práctico, como veremos más adelante en esta sección. Supongamos que el polinomio característico $p(\lambda)$ se factoriza como
$$p(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{r_1}\cdots(\lambda-\lambda_m)^{r_m}\,,\qquad r_1+\cdots+r_m=n\,,$$
donde las raíces $\lambda_1,\dots,\lambda_m$, en general complejas, son distintas entre sí. Si λ_i es una de estas raíces podemos por tanto escribir
$$p(\lambda)=q(\lambda)(\lambda-\lambda_i)^{r_i}\,,$$
siendo $q(\lambda)$ un polinomio de grado $n-r_i$ con $q(\lambda_i)\neq 0$. Luego $p(D)=q(D)(D-\lambda_i)^{r_i}$, y de la ecuación (7.5) se sigue entonces que
$$p(D)\big(x^k\mathrm{e}^{\lambda_i x}\big)=q(D)\left[\mathrm{e}^{\lambda_i x}\,\frac{\mathrm{d}^{r_i}}{\mathrm{d}x^{r_i}}\,x^k\right]=0\,,\qquad k=0,1,\dots,r_i-1\,.$$
Esto demuestra que las funciones
$$\boxed{x^k\mathrm{e}^{\lambda_i x}\,,\qquad i=1,\dots,m\,,\quad k=0,1,\dots,r_i-1}\,, \tag{7.6}$$
son solución de la ecuación (7.2). Como hay precisamente $r_1+\cdots+r_m=n$ soluciones de este tipo, para probar que forman un sistema fundamental de soluciones de dicha ecuación basta comprobar su independencia lineal.

Lema 7.1. *Las funciones* (7.6) *son linealmente independientes.*

Demostración. Supongamos que
$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{r_i-1}c_{ik}x^k\mathrm{e}^{\lambda_i x}=0\,,\qquad \forall x\in\mathbb{R}\,, \tag{7.7}$$
donde los coeficientes c_{ik} son constantes complejas. Podemos reescribir esta igualdad como
$$P_1(x)\mathrm{e}^{\lambda_1 x}+\cdots+P_m(x)\mathrm{e}^{\lambda_m x}=0\,,\qquad \forall x\in\mathbb{R}\,, \tag{7.8}$$
siendo $P_i(x)=\sum\limits_{k=0}^{r_i-1}c_{ik}x^k$ un polinomio de grado menor o igual que r_i-1. Para demostrar que todos los coeficientes c_{ik} de la ecuación (7.7) son nulos, basta probar que los polinomios P_i se anulan idénticamente. Para establecer este resultado, comencemos multiplicando la ecuación (7.8) por $\mathrm{e}^{-\lambda_1 x}$, obteniendo
$$P_1(x)+P_2\mathrm{e}^{\mu_2 x}+\cdots+P_m(x)\mathrm{e}^{\mu_m x}=0\,,\qquad \forall x\in\mathbb{R}\,, \tag{7.9}$$
donde los exponentes $\mu_i\equiv\lambda_i-\lambda_1\neq 0$ son todos distintos entre sí. Derivando esta ecuación r_1 veces se obtiene
$$Q_2(x)\mathrm{e}^{\mu_2 x}+\cdots+Q_m(x)\mathrm{e}^{\mu_m x}=0\,,\qquad \forall x\in\mathbb{R}\,, \tag{7.10}$$
donde Q_i es un polinomio del mismo grado que P_i. Repitiendo este procedimiento sucesivas veces se llega finalmente a una ecuación del tipo
$$R_m(x)\mathrm{e}^{\nu_m x}=0\,,\qquad \forall x\in\mathbb{R}\,, \tag{7.11}$$
donde R_m es un polinomio del mismo grado que P_m. De esta condición se sigue inmediatamente que $R_m\equiv 0$, lo cual implica (al ser $\deg P_m=\deg R_m$) que $P_m\equiv 0$. Como el orden de las raíces λ_i es irrelevante para el argumento anterior, concluimos que todos los polinomios P_i se anulan idénticamente.

□

La discusión anterior y el Lema 7.1 prueban por tanto el siguiente teorema:

Teorema 7.2. *Las funciones (7.6), donde r_i es la multiplicidad de la raíz λ_i del polinomio característico (7.3), constituyen un sistema fundamental de soluciones de la ecuación lineal homogénea con coeficientes constantes (7.2).*

- Si la raíz $\lambda_j = a_j + \mathrm{i}b_j$ es compleja, a partir de las $2r_j$ soluciones complejas

$$x^k \mathrm{e}^{a_j x} \mathrm{e}^{\pm \mathrm{i} b_j x}, \qquad k = 0, 1, \ldots, r_j - 1,$$

asociadas a las raíces λ_j y $\overline{\lambda_j}$ del polinomio característico obtenemos las $2r_j$ soluciones reales

$$\boxed{x^k \mathrm{e}^{a_j x} \cos(b_j x), \quad x^k \mathrm{e}^{a_j x} \operatorname{sen}(b_j x) \qquad k = 0, 1, \ldots, r_j - 1}$$

tomando la parte real y la parte imaginaria de las soluciones correspondientes a la raíz λ_j (o $\overline{\lambda_j}$).

Ejemplo 7.3. Hallemos la solución general de la ecuación de cuarto orden con coeficientes constantes

$$u^{(4)} + u''' + u' + u = 0. \tag{7.12}$$

El polinomio característico asociado a esta ecuación es

$$p(\lambda) = \lambda^4 + \lambda^3 + \lambda + 1 = (\lambda + 1)^2(\lambda^2 - \lambda + 1). \tag{7.13}$$

Las raíces son por tanto $\lambda_1 = -1$ (de multiplicidad $r_1 = 2$) y las dos raíces de la ecuación

$$\lambda^2 - \lambda + 1 = 0,$$

es decir

$$\lambda_{2,3} = \frac{1}{2}\big(1 \pm \mathrm{i}\sqrt{3}\big),$$

de multiplicidad $r_2 = r_3 = 1$. La solución general de la ecuación (7.12) es por tanto

$$u(x) = \mathrm{e}^{-x}(c_1 + c_2 x) + \mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\Big[c_3 \cos\big(\tfrac{\sqrt{3}}{2}\,x\big) + c_4 \operatorname{sen}\big(\tfrac{\sqrt{3}}{2}\,x\big)\Big], \tag{7.14}$$

con $c_1, \ldots, c_4$ constantes reales arbitrarias.

7.1.1 Método de los coeficientes indeterminados

Una vez hallado un sistema fundamental de soluciones de la ecuación homogénea (7.2), se puede calcular la solución general de la ecuación inhomogénea (7.1) para cualquier función $b(x)$ utilizando el método de variación de constantes (ver la ecuación (6.29)). Sin embargo, para ciertas formas sencillas de la función $b(x)$ que se presentan frecuentemente en la práctica, el **método de los coeficientes indeterminados** que describiremos a continuación permite calcular una solución particular de (7.1) de manera más rápida. La solución general de (7.1) se halla entonces sumando a esta solución particular la solución general de la correspondiente ecuación homogénea.

Supongamos, en primer lugar, que

$$b(x) = q(x)\mathrm{e}^{\mu x}, \tag{7.15}$$

donde $q(x)$ es un *polinomio*. Si r es la multiplicidad de μ como raíz del polinomio característico (7.3) de la ecuación homogénea (7.2), entonces

$$p(\lambda) = p_1(\lambda - \mu)^r + p_2(\lambda - \mu)^{r+1} + \cdots + p_{n-r}(\lambda - \mu)^{n-1} + (\lambda - \mu)^n,$$

con $p_1, \dots, p_{n-r} \in \mathbb{R}$ (ó $\mathbb{C}$, si μ es complejo) y $p_1 \neq 0$. Nótese que esta expresión es válida también si μ no es raíz del polinomio característico, siendo en este caso $r = 0$. De la expresión anterior y la ecuación (7.5) se sigue que

$$p(D)\big(f(x)e^{\mu x}\big) = \Big[p_1 f^{(r)}(x) + p_2 f^{(r+1)}(x) + \cdots + p_{n-r} f^{(n-1)}(x) + f^{(n)}(x)\Big] e^{\mu x} .$$

Esto sugiere probar una solución particular de la forma

$$\boxed{u_p(x) = x^r Q(x) e^{\mu x}}\,, \tag{7.16}$$

donde

$$\boxed{Q(x) = Q_0 + Q_1 x + \cdots + Q_d x^d\,, \qquad d \equiv \deg q} \tag{7.17}$$

es un polinomio que se determina mediante la condición

$$p_1 (x^r Q)^{(r)} + p_2 (x^r Q)^{(r+1)} + \cdots + p_{n-r} (x^r Q)^{(n-1)} + (x^r Q)^{(n)} = q\,. \tag{7.18}$$

Puede probarse que la última ecuación proporciona un sistema lineal de $d+1$ ecuaciones en los $d+1$ coeficientes de Q que siempre es compatible. Por tanto, la ecuación (7.1) con el término inhomogéneo (7.15) siempre tiene una solución particular de la forma (7.16)-(7.17), donde r es la multiplicidad de μ como raíz del polinomio característico y el polinomio Q se determina mediante la ecuación (7.18) (o bien directamente, sustituyendo (7.16)-(7.17) en (7.1)).

Ejemplo 7.4. Hallemos una solución particular de la ecuación

$$u^{(4)} + u''' + u' + u = x e^{-x}\,. \tag{7.19}$$

Aquí $\mu = -1$ es una raíz del polinomio característico de la ecuación homogénea de multiplicidad 2 (ver la ecuación (7.13) en el Ejemplo 7.3), y $q(x) = x$ es un polinomio de grado 1. Buscamos por tanto una solución particular de la forma

$$u_p(x) = x^2(a + bx)e^{-x}\,.$$

Para calcular $p(D)\,u_p$ es conveniente en este caso desarrollar $p(D)$ en potencias de $D+1$, ya que en virtud de la ecuación (7.5) se tiene $(D+1)^k\big(f(x)e^{-x}\big) = f^{(k)}(x)e^{-x}$. Utilizando la fórmula de Taylor para desarrollar el factor $\lambda^2 - \lambda + 1$ en potencias de $\lambda + 1$ obtenemos

$$p(\lambda) = (\lambda+1)^2\big[3 - 3(\lambda+1) + (\lambda+1)^2\big].$$

Por tanto

$$p(D)u_p = \big[3(2a + 6bx) - 3\cdot 6b\big]e^{-x} = x e^{-x} \quad\Longleftrightarrow\quad 3(2a+6bx) - 18b = x\,,$$

lo que conduce a las ecuaciones

$$6a - 18b = 0\,,\quad 18b = 1\,.$$

La solución particular buscada es por tanto

$$u_p(x) = \frac{1}{18}(x^3 + 3x^2)e^{-x}\,. \tag{7.20}$$

La solución general de la ecuación (7.19) es la suma de esta solución particular y la solución general (7.14) de la ecuación homogénea.

Ejemplo 7.5. Consideremos ahora la ecuación

$$u^{(4)} + 4u = x\big(1 + e^x \cos x\big)\,. \tag{7.21}$$

El polinomio característico de la ecuación homogénea es

$$p(\lambda) = \lambda^4 + 4\,,$$

cuyas raíces λ_k son las raíces cuartas de -4:

$$\lambda_k = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2})}\,, \qquad k = 0, 1, 2, 3\,,$$

es decir,

$$\lambda_0 = 1 + \mathrm{i}\,, \quad \lambda_1 = -1 + \mathrm{i}\,, \quad \lambda_2 = -1 - \mathrm{i}\,, \quad \lambda_3 = 1 - \mathrm{i}\,.$$

Por tanto la solución general de la ecuación homogénea está dada por

$$u_{\mathrm{h}}(x) = \mathrm{e}^{x}(c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x) + \mathrm{e}^{-x}(c_3 \cos x + c_4 \operatorname{sen} x)\,, \qquad c_i \in \mathbb{R}\,. \tag{7.22}$$

Aparentemente no se puede aplicar el método de los coeficientes indeterminados a la ecuación (7.21), al no ser el término inhomogéneo de la forma (7.15). Sin embargo, como el miembro derecho de (7.21) es la suma de los términos

$$b_1(x) = x\,, \qquad b_2(x) = x\mathrm{e}^{x} \cos x\,,$$

la suma de sendas soluciones particulares $u_i(x)$ de las ecuaciones

$$u^{(4)} + 4u = b_i(x)\,, \qquad i = 1, 2\,, \tag{7.23}$$

es (por linealidad) una solución particular de (7.21). El término inhomogéneo de la primera de estas ecuaciones es directamente de la forma (7.15), con $q(x) = x$ y $\mu = 0$. Como 0 no es una raíz del polinomio característico, buscamos una solución particular de la forma $u_1(x) = a + bx$. Sustituyendo en la correspondiente ecuación completa (7.23) obtenemos inmediatamente

$$u_1(x) = \frac{x}{4}\,.$$

Por otro lado, al ser $b_2(x) = \operatorname{Re}\big(x\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x}\big)$, podemos buscar una solución particular de la segunda ecuación (7.23) de la forma $u_2(x) = \operatorname{Re} u(x)$, donde $u(x)$ es cualquier solución de la ecuación

$$u^{(4)} + 4u = x\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x}\,. \tag{7.24}$$

El miembro derecho de esta ecuación es de nuevo de la forma (7.15), con $q(x) = x$ y $\mu = 1 + \mathrm{i}$ raíz simple del polinomio característico, por lo que ensayamos una solución particular de la forma

$$u(x) = x(a + bx)\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x} \equiv f(x)\mathrm{e}^{\mu x}\,.$$

Sustituyendo en (7.24) y utilizando la regla de Leibniz generalizada

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$

se obtiene

$$\mu^4\mathrm{e}^{\mu x} f + 4\mu^3\mathrm{e}^{\mu x} f' + 6\mu^2\mathrm{e}^{\mu x} f'' + 4\mathrm{e}^{\mu x} f = x\mathrm{e}^{\mu x} \quad \Longleftrightarrow \quad 4\mu^3(a + 2bx) + 6\mu^2 \cdot 2b = x\,,$$

donde hemos tenido en cuenta que $\mu^4 = -4$. Por tanto

$$\begin{cases} 8\mu^3 b = 1 \\[2ex] \mu a + 3b = 0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} b = \dfrac{1}{8\mu^3} = \dfrac{\mu}{-32} = -\dfrac{1}{32}\,(1+\mathrm{i}) \\[2ex] a = -\dfrac{3b}{\mu} = \dfrac{3}{32}\,, \end{cases}$$

y entonces
$$u(x) = \frac{x}{32}\big[3-(1+\mathrm{i})x\big]\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x}\,.$$
Tomando la parte real de esta función se obtiene
$$u_2(x) = \frac{x}{32}\,\mathrm{e}^{x}\Big[(3-x)\cos x + x\,\mathrm{sen}\,x\Big]\,.$$
Por tanto la ecuación inhomogénea (7.21) admite la solución particular
$$u_{\mathrm{p}}(x) = u_1(x)+u_2(x) = \frac{x}{4}+\frac{x}{32}\,\mathrm{e}^{x}\Big[(3-x)\cos x + x\,\mathrm{sen}\,x\Big]\,.$$
La solución general de la ecuación (7.21) es la suma de esta solución particular y la solución general (7.22) de la ecuación homogénea.

- En general, el método de los coeficientes indeterminados se puede aplicar a la ecuación (7.1) si el término inhomogéneo es de la forma
$$b(x) = \sum_{i=1}^{l} b_i(x)\,, \tag{7.25}$$
donde
$$b_i(x) = \mathrm{e}^{\alpha_i x}\big[q_i(x)\cos(\beta_i x)+\tilde{q}_i(x)\,\mathrm{sen}(\beta_i x)\big]\,, \tag{7.26}$$
siendo $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}$ ($\beta_i \geqslant 0$), y $q_i, \tilde{q}_i$ polinomios. Nótese que si $\beta_i = 0$ la función $b_i(x)$ es de la forma (7.15) con $\mu = \alpha_i$. Se puede comprobar que la ecuación (7.1) con el término inhomogéneo (7.25)-(7.26) posee una solución particular del tipo
$$u_{\mathrm{p}}(x) = \sum_{i=1}^{l} u_i(x)\,, \tag{7.27}$$
donde
$$u_i(x) = x^{r_i}\mathrm{e}^{\alpha_i x}\big[Q_i(x)\cos(\beta_i x)+\widetilde{Q}_i(x)\,\mathrm{sen}(\beta_i x)\big]\,, \tag{7.28}$$
siendo r_i la multiplicidad de $\mu_i = \alpha_i + \mathrm{i}\beta_i$ como raíz del polinomio característico de la ecuación homogénea, y $Q_i, \widetilde{Q}_i$ polinomios tales que $\deg Q_i, \deg \widetilde{Q}_i \leqslant \max(\deg q_i, \deg \tilde{q}_i)$.

7.2 Sistemas con coeficientes constantes. Exponencial de una matriz

En la Sección 6.4 probamos que si se conoce una matriz fundamental del sistema homogéneo (6.4), entonces es posible expresar la solución general del sistema inhomogéneo (6.1) mediante cuadraturas (cf. ec. (6.26)). El problema es que en general no resulta posible determinar tal matriz fundamental. En esta sección veremos que cuando la matriz $A(x)$ del sistema (6.1) es *constante* es posible en principio construir una matriz fundamental del correspondiente sistema homogéneo
$$\boxed{y' = A\,y\,,\quad A \in M_n(\mathbb{R})\,.} \tag{7.29}$$
Más explícitamente, comprobaremos que la matriz fundamental canónica en $x_0 = 0$ del sistema (7.29) está dada por la exponencial matricial e^{xA}, cuya definición veremos a continuación.

Denotemos por $E(x)$ la matriz fundamental canónica en $x_0 = 0$, que satisface el problema de valores iniciales matricial
$$\begin{cases} E'(x) = A\,E(x)\,,\\ E(0) = \mathbb{1}\,. \end{cases} \tag{7.30}$$

Derivando sucesivamente la ecuación anterior se deduce que

$$E^{(k)}(x) = A^k E(x) , \qquad k = 0, 1, \dots , \tag{7.31}$$

donde por definición $B^0 \equiv \mathbb{1}$ para cualquier matriz B, y por tanto

$$E^{(k)}(0) = A^k , \qquad k = 0, 1, \dots . \tag{7.32}$$

Puede demostrarse (véase, por ejemplo, [EDI2009]) que la serie de Taylor de $E(x)$ centrada en el origen converge a $E(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y para toda matriz A, es decir

$$E(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} x^k , \qquad \forall x \in \mathbb{R} . \tag{7.33}$$

Por analogía con el caso escalar, se define la **exponencial** de una matriz $B \in M_n(\mathbb{C})$ mediante

$$\boxed{\mathrm{e}^B = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B^k}{k!}} . \tag{7.34}$$

De nuevo, no es difícil demostrar (cf. [EDI2009]) que la serie anterior converge para toda matriz B. De esta definición y de (7.33) se sigue entonces que

$$E(x) = \mathrm{e}^{xA} ,$$

Por tanto, la solución del problema de valores iniciales

$$\begin{cases} y' = Ay \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

está dada por

$$\boxed{y(x) = \mathrm{e}^{xA} y_0} . \tag{7.35}$$

En esta asignatura utilizaremos las siguientes propiedades de la exponencial matricial:

$$\text{i)} \quad \mathrm{e}^{(x+t)A} = \mathrm{e}^{xA}\mathrm{e}^{tA} = \mathrm{e}^{tA}\mathrm{e}^{xA} , \qquad \forall x, t \in \mathbb{R} , \tag{7.36}$$

$$\text{ii)} \quad \left(\mathrm{e}^{xA}\right)^{-1} = \mathrm{e}^{-xA} , \qquad \forall x \in \mathbb{R} , \tag{7.37}$$

$$\text{iii)} \quad \mathrm{e}^{PBP^{-1}} = P\mathrm{e}^B P^{-1} , \tag{7.38}$$

donde $A \in M_n(\mathbb{R})$ y $B, P \in M_n(\mathbb{C})$, con P invertible[1].

Demostración. Para todo $t \in \mathbb{R}$ fijo, la matriz $E(x + t)$ (considerada como función de x) es una matriz fundamental del sistema (7.29), dado que es invertible en todo punto (recuérdese que $E(x)$ es invertible para todo $x \in \mathbb{R}$, por ser una matriz fundamental) y verifica

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} E(x+t) = E'(x+t) = AE(x+t) , \qquad \forall x \in \mathbb{R} .$$

Por otra parte, $E(x)E(t)$ es otra matriz fundamental de (7.29), al ser $E(t)$ una matriz constante invertible. En $x = 0$, tanto $E(x + t)$ como $E(x)E(t)$ toman el mismo valor $E(t)$ (al ser $E(0) = \mathbb{1}$), por lo que $E(x + t) = E(x)E(t)$ para todo $x, t \in \mathbb{R}$. Esto demuestra la propiedad i). La propiedad ii) se sigue de la propiedad i) al tomar $t = -x$ y observar que $\mathrm{e}^{0 \cdot A} = E(0) = \mathbb{1}$. En cuanto a la tercera propiedad,

$$P\mathrm{e}^B P^{-1} = P\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{B^k}{k!}\right)P^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{PB^k P^{-1}}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(PBP^{-1})^k}{k!} = \mathrm{e}^{PBP^{-1}} .$$

□

[1] De hecho, la propiedad i) es consecuencia de la siguiente propiedad más general [EDI2009]: si dos matrices A y B conmutan (es decir $[A, B] \equiv AB - BA = 0$), entonces $\mathrm{e}^{A+B} = \mathrm{e}^A\mathrm{e}^B = \mathrm{e}^B\mathrm{e}^A$.

De las identidades (7.36)-(7.37) se deduce que $\mathrm{e}^{xA}(\mathrm{e}^{x_0A})^{-1} = \mathrm{e}^{(x-x_0)A}$ es la matriz fundamental canónica de (7.29) en x_0. Por tanto, la solución del problema de valores iniciales

$$\begin{cases} y'(x) = Ay(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

está dada por

$$\boxed{y(x) = \mathrm{e}^{A(x-x_0)}y_0}\,.$$

Por otro lado, al tener en cuenta las identidades (7.36)-(7.37) y la expresión (6.26) (obtenida mediante el método de variación de constantes) se sigue que la solución general del sistema inhomogéneo asociado a (7.29)

$$y' = Ay + b(x)\,, \qquad \text{con } b : I \to \mathbb{R}^n \text{ continua,}$$

viene dada por

$$y(x) = \mathrm{e}^{xA}c + \mathrm{e}^{xA}\int^x \mathrm{e}^{-sA}b(s)\,\mathrm{d}s = \mathrm{e}^{xA}c + \int^x \mathrm{e}^{(x-s)A}b(s)\,\mathrm{d}s\,, \qquad c \in \mathbb{R}^n\,. \tag{7.39}$$

Si imponemos además la condición inicial $y(x_0) = y_0$, la solución buscada es (cf. ec. (6.27))

$$\boxed{y(x) = \mathrm{e}^{A(x-x_0)}y_0 + \int_{x_0}^x \mathrm{e}^{(x-s)A}b(s)\,\mathrm{d}s}\,. \tag{7.40}$$

Ejemplo 7.6. Hallemos la matriz fundamental canónica en el origen del sistema $y' = Ay$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{7.41}$$

utilizando directamente la definición (7.34). Como la matriz (7.41) satisface $A^2 = -\mathbb{1}$, las potencias de A están dadas por

$$A^{2k} = (-1)^k\mathbb{1}\,, \quad A^{2k+1} = (-1)^kA\,, \qquad k = 0, 1, \dots\,.$$

Sustituyendo en la ecuación (7.34) y separando las potencias pares de A de las impares se obtiene

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{xA} &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k}}{(2k)!}(-1)^k\mathbb{1} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}(-1)^kA \\ &= \cos x\,\mathbb{1} + \operatorname{sen} x\,A = \begin{pmatrix} \cos x & 0 & \operatorname{sen} x & 0 \\ 0 & \cos x & 0 & -\operatorname{sen} x \\ -\operatorname{sen} x & 0 & \cos x & 0 \\ 0 & \operatorname{sen} x & 0 & \cos x \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- En la mayor parte de los casos no es conveniente utilizar directamente la definición (7.34) para calcular la matriz fundamental canónica e^{xA} del sistema (7.29), ya que no es sencillo obtener una expresión general para las potencias de la matriz A y mucho menos aún sumar la serie que define la exponencial. Existen numerosos métodos prácticos para calcular dicha matriz (véase, por ejemplo, [EDI2009]), la mayor parte de los cuales presuponen el conocimiento de conceptos de Álgebra lineal que posiblemente no hayan sido explicados en primero de Grado. En la siguiente sección discutiremos algunos métodos prácticos para el cálculo de la exponencial que requieren sólo unos mínimos conocimientos de Álgebra lineal. En cualquier caso, si se conoce una matriz fundamental $Y(x)$ del sistema (7.29) (obtenida por cualquier método), entonces siempre es posible calcular la matriz e^{xA} mediante la fórmula

$$\boxed{\mathrm{e}^{xA} = Y(x)Y(0)^{-1}}\,. \tag{7.42}$$

Ejemplo 7.7. Hallemos la matriz fundamental canónica en el origen del sistema

$$\begin{cases} y_1' = y_1 \\ y_2' = y_1 + 2y_2 \\ y_3' = y_1 - y_3 \,. \end{cases} \tag{7.43}$$

Es decir, se trata de calcular e^{xA}, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Determinemos en primer lugar una matriz fundamental del sistema. Para ello obsérvese que la ecuación para y_1 está desacoplada de las restantes, y su solución es inmediata por ser una ecuación homogénea con coeficientes constantes (el polinomio característico es $p_1(\lambda) = \lambda - 1$):

$$y_1(x) = c_1 \mathrm{e}^x \,, \qquad c_1 \in \mathbb{R} \,.$$

Sustituyendo esta expresión en las ecuaciones para y_2 e y_3 se obtienen sendas ecuaciones inhomogéneas con coeficientes constantes:

$$\begin{cases} y_2' = 2y_2 + c_1 \mathrm{e}^x \\ y_3' = -y_3 + c_1 \mathrm{e}^x \,. \end{cases}$$

La solución para y_2 es de la forma

$$y_2(x) = c_2 \mathrm{e}^{2x} + y_{2,\mathrm{p}}(x) \,, \qquad c_2 \in \mathbb{R} \,.$$

donde $y_{2,\mathrm{p}}(x) = \alpha \mathrm{e}^x$ para una cierta constante α, de acuerdo con el método de coeficientes indeterminados. Sustituyendo $y_{2,\mathrm{p}}(x)$ en su ecuación se obtiene inmediatamente $\alpha = -c_1$. Por tanto,

$$y_2(x) = c_2 \mathrm{e}^{2x} - c_1 \mathrm{e}^x \,.$$

Análogamente se encuentra

$$y_3(x) = c_3 \mathrm{e}^{-x} + \frac{c_1}{2} \mathrm{e}^x \,, \qquad c_3 \in \mathbb{R} \,.$$

En definitiva, la solución general del sistema (7.43) está dada por

$$y(x) \equiv \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ y_3(x) \end{pmatrix} = c_1 \mathrm{e}^x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} + c_2 \mathrm{e}^{2x} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \mathrm{e}^{-x} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = Y(x) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix},$$

siendo por tanto

$$Y(x) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^x & 0 & 0 \\ -\mathrm{e}^x & \mathrm{e}^{2x} & 0 \\ \frac{1}{2} \mathrm{e}^x & 0 & \mathrm{e}^{-x} \end{pmatrix}$$

una matriz fundamental. Luego la matriz fundamental canónica en el origen del sistema (7.43) es

$$e^{xA} = Y(x) Y(0)^{-1} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^x & 0 & 0 \\ -\mathrm{e}^x & \mathrm{e}^{2x} & 0 \\ \frac{1}{2} \mathrm{e}^x & 0 & \mathrm{e}^{-x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^x & 0 & 0 \\ \mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^x & \mathrm{e}^{2x} & 0 \\ \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}) & 0 & \mathrm{e}^{-x} \end{pmatrix}.$$

7.3 Métodos prácticos para el cálculo de la exponencial matricial

En esta sección presentaremos algunos métodos prácticos para el cálculo de la matriz fundamental canónica e^{xA} del sistema $y' = Ay$, con $A \in M_n(\mathbb{R})$. Distinguiremos dos situaciones distintas, según la matriz A sea o no *diagonalizable*. Comenzaremos con un breve recordatorio de algunas nociones básicas de Álgebra lineal.

- Se dice que $\lambda \in \mathbb{C}$ es un **autovalor** de la matriz A si existe un vector no nulo $v \in \mathbb{C}^n$ tal que $Av = \lambda v$. Dicho vector v es entonces un **autovector** de A con autovalor λ. La matriz A es **diagonalizable** si existe una matriz invertible constante (en general compleja) P tal que $J \equiv P^{-1}AP$ es una matriz diagonal. Los elementos de la diagonal principal de J son los autovalores de la matriz A, y las columnas de P forman una base de $\mathbb{C}^n$ compuesta de autovectores de A.

- Es bien sabido que los autovalores $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ de la matriz A (donde estamos suponiendo que $\lambda_i \neq \lambda_j$ si $i \neq j$) son las raíces del **polinomio característico** de A, definido mediante

$$\boxed{p_A(\lambda) = \det(\lambda \mathbb{1} - A)}\,. \tag{7.44}$$

  En otras palabras, el polinomio característico se factoriza como

$$\boxed{p_A(\lambda) = \prod_{i=1}^{m} (\lambda - \lambda_i)^{r_i}}\,. \tag{7.45}$$

  El entero $r_i \geqslant 1$ se denomina **multiplicidad algebraica** del autovalor λ_i. Nótese que, al ser p_A un polinomio de grado n, de (7.45) se sigue que

$$\sum_{i=1}^{m} r_i = n\,. \tag{7.46}$$

- Un resultado elemental de Álgebra lineal afirma que la matriz A es diagonalizable si y sólo si la multiplicidad algebraica r_i de cada autovalor λ_i coincide con su **multiplicidad geométrica** s_i, definida por[2]

$$s_i = \dim \ker(A - \lambda_i)\,. \tag{7.47}$$

  En otras palabras, s_i es el número máximo de autovectores linealmente independientes correspondientes al autovalor λ_i. Es bien sabido que la multiplicidad geométrica es siempre menor o igual que la algebraica, es decir, $s_i \leqslant r_i$ para todo i. Por tanto, cuando todos los autovalores sean simples (es decir, si $r_i = 1$ para todo i) la matriz A es siempre diagonalizable.

- Otro criterio para determinar si una matriz A es diagonalizable se basa en las nociones de polinomio mínimo e índice de un autovalor. Recordemos que el **polinomio mínimo** ϕ_A de una matriz A es el polinomio mónico[3] de menor grado que anula dicha matriz. La existencia del polinomio mínimo es consecuencia del teorema de Cayley–Hamilton, según el cual $p_A(A) = 0$. Puede probarse que si el polinomio característico está dado por (7.45), entonces el polinomio mínimo es de la forma

$$\boxed{\phi_A(\lambda) = \prod_{i=1}^{m} (\lambda - \lambda_i)^{d_i}\,, \qquad 1 \leqslant d_i \leqslant r_i}\,.$$

[2] Si $\lambda \in \mathbb{C}$, a partir de ahora escribiremos por sencillez $A - \lambda$ en lugar de $A - \lambda \mathbb{1}$.

[3] Un polinomio es *mónico* si el coeficiente del término de mayor grado que aparece en dicho polinomio es igual a 1. Por ejemplo, de (7.44) o (7.45) se sigue que el polinomio característico de cualquier matriz es mónico.

Nótese, en particular, que el polinomio mínimo divide exactamente al polinomio característico. La multiplicidad d_i de λ_i como raíz del polinomio mínimo se conoce como el **índice** del autovalor λ_i. Se demuestra (véase, por ejemplo, [EDI2009]) que

$$r_i = s_i \iff d_i = 1 \,. \tag{7.48}$$

Por tanto

$$A \text{ diagonalizable} \iff d_i = 1\,, \ \forall i = 1, \dots, m\,. \tag{7.49}$$

7.3.1 A diagonalizable

En este apartado veremos que cuando la matriz A es diagonalizable resulta muy sencillo calcular la exponencial matricial e^{xA}. En efecto, sea $\{v^1, \dots, v^n\}$ una base de $\mathbb{C}^n$ formada por autovectores de A, y sean $\mu_1, \dots, \mu_n$ sus correspondientes autovalores:

$$Av^i = \mu_i v^i\,, \qquad i = 1, \dots, n. \tag{7.50}$$

(Nótese que en esta notación los autovalores μ_i no tienen por qué ser distintos entre sí). Por tanto, si

$$J = \begin{pmatrix} \mu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_n \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} v^1 & \cdots & v^n \end{pmatrix},$$

entonces

$$A = PJP^{-1}\,.$$

De la ecuación (7.38) se sigue inmediatamente que

$$\boxed{\mathrm{e}^{xA} = P\,\mathrm{e}^{xJ}\,P^{-1}}\,, \tag{7.51}$$

donde

$$\mathrm{e}^{xJ} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} J^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \begin{pmatrix} \mu_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_n^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^k \mu_1^k}{k!} & & \\ & \ddots & \\ & & \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^k \mu_n^k}{k!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\mu_1 x} & & \\ & \ddots & \\ & & \mathrm{e}^{\mu_n x} \end{pmatrix}.$$

- Como e^{xA} es una matriz fundamental del sistema homogéneo (7.29) y P es una matriz invertible, multiplicando la igualdad (7.51) por la derecha por P se sigue que

$$\boxed{P\,\mathrm{e}^{xJ} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\mu_1 x} v^1 & \cdots & \mathrm{e}^{\mu_n x} v^n \end{pmatrix}} \tag{7.52}$$

  también es una matriz fundamental de dicho sistema (ver los comentarios de la pág. 89). De hecho, suele ser más sencillo determinar $P\mathrm{e}^{xJ}$ que e^{xA}, ya que para la primera no hace falta calcular P^{-1}. Sin embargo (a diferencia de e^{xA}, que es siempre real cuando A es real) la matriz $P\mathrm{e}^{xJ}$ puede ser compleja, de modo que posiblemente haya que tomar combinaciones lineales de sus columnas para obtener a partir de ella una matriz fundamental real.

- Si la matriz A es diagonalizable, del comentario anterior se sigue que

$$\left\{\mathrm{e}^{\mu_1 x} v^1, \dots, \mathrm{e}^{\mu_n x} v^n\right\} \tag{7.53}$$

  es un sistema fundamental de soluciones del sistema homogéneo (7.29). Si un autovalor μ_i es real siempre podemos elegir a v^i real, de modo que la correspondiente solución $\mathrm{e}^{\mu_i x} v^i$ también es real. Por el contrario, si $\mu_i = a + \mathrm{i}b \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$, existe otro autovalor $\mu_j = \overline{\mu_i} = a - \mathrm{i}b$ con la misma multiplicidad algebraica que μ_i (puesto que el polinomio característico es real), y siempre podemos elegir $v^j = \overline{v^i}$. Si $v^i = u + \mathrm{i}w$ (con $u, w \in \mathbb{R}^n$), podemos sustituir las dos soluciones complejas asociadas a μ_i, μ_j

$$\mathrm{e}^{(a\pm \mathrm{i}b)x}(u \pm \mathrm{i}w)$$

por las partes real e imaginaria de una cualquiera de ellas:

$$\mathrm{e}^{ax}\big(u\cos(bx) - w\,\mathrm{sen}(bx)\big), \qquad \mathrm{e}^{ax}\big(u\,\mathrm{sen}(bx) + w\cos(bx)\big). \tag{7.54}$$

(Nótese que las funciones (7.54) siguen siendo soluciones del sistema, en virtud de los comentarios generales de la pág. 86.)

Ejemplo 7.8. Este ejemplo consiste en determinar la solución del sistema inhomogéneo

$$\begin{cases} y_1' = 5y_1 - 6y_2 + 3\mathrm{e}^{2x} \\ y_2' = 3y_1 - 4y_2 \end{cases}$$

que verifica la condición inicial $y_1(0) = 2$, $y_2(0) = 1$. La idea es hallar primero la exponencial e^{xA}, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$$

la matriz del sistema homogéneo, y luego determinar la solución pedida aplicando la ecuación (7.40). El polinomio característico de A es

$$p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 5 & 6 \\ -3 & \lambda + 4 \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda - 2)(\lambda + 1)\,.$$

Al ser los autovalores $\lambda_1 = 2$ y $\lambda_2 = -1$ simples, la matriz A es diagonalizable. Por tanto el sistema homogéneo posee un sistema fundamental de soluciones de la forma $\mathrm{e}^{\lambda_i t}v^i$ $(i = 1, 2)$, siendo v^i autovector con autovalor λ_i. Los autovectores v^i se calculan fácilmente resolviendo los sistemas $(A - \lambda_i)v^i = 0$ $(i = 1, 2)$, con el resultado

$$\lambda_1 = 2: \ v^1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}; \qquad \lambda_2 = -1: \ v^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

De la ecuación (7.51) se sigue que la matriz fundamental canónica en el origen está dada por

$$\mathrm{e}^{xA} = P\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{2x} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-x} \end{pmatrix}P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{2x} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-x} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{-x} & 2\mathrm{e}^{-x} - 2\mathrm{e}^{2x} \\ \mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{-x} & 2\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{2x} \end{pmatrix}.$$

Para hallar la solución del sistema inhomogéneo que verifica la condición inicial dada utilizamos directamente la ecuación (7.40), tomando $x_0 = 0$, $y_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = v^1$, $b(s) = 3\mathrm{e}^{2s}$:

$$\begin{aligned} y(x) &= \mathrm{e}^{xA}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \int_0^x \mathrm{e}^{(x-s)A}\begin{pmatrix} 3\mathrm{e}^{2s} \\ 0 \end{pmatrix}\mathrm{d}s = \mathrm{e}^{2x}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 3\int_0^x \begin{pmatrix} 2\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{3s-x} \\ \mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{3s-x} \end{pmatrix}\mathrm{d}s \\ &= \begin{pmatrix} 2\mathrm{e}^{2x} \\ \mathrm{e}^{2x} \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} \big[2\mathrm{e}^{2x}s - \frac{1}{3}\mathrm{e}^{3s-x}\big]_0^x \\ \big[\mathrm{e}^{2x}s - \frac{1}{3}\mathrm{e}^{3s-x}\big]_0^x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (6x+1)\,\mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^{-x} \\ 3x\,\mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^{-x} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Nótese que en la segunda igualdad hemos tenido en cuenta la siguiente propiedad general: si v es un autovector de A con autovalor λ, entonces

$$\mathrm{e}^{xA}v = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}A^k\right)v = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}A^k v = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}\lambda^k v = \mathrm{e}^{\lambda x}v\,.$$

7.3.2 A no diagonalizable

En este apartado presentaremos un método general para el cálculo de la exponencial e^{xA}, válido para cualquier matriz A (sea o no diagonalizable). El método se basa en el siguiente resultado, consecuencia directa de la existencia del polinomio mínimo de la matriz A:

Lema 7.9. *Sea $A \in M_n(\mathbb{R})$, y sea $\phi_A(\lambda)$ su polinomio mínimo. Cada elemento de matriz $u(x)$ de e^{xA} es solución de la ecuación lineal de orden n con coeficientes constantes $\phi_A(D)u = 0$.*

Demostración. De la relación

$$D^k e^{xA} = A^k e^{xA} \tag{7.55}$$

(cf. ec. (7.31)), se sigue inmediatamente que $P(D)\,e^{xA} = P(A)\,e^{xA}$ para todo polinomio P. En particular,

$$\phi_A(D)\,e^{xA} = \phi_A(A)\,e^{xA} = 0$$

por definición de polinomio mínimo. En otras palabras, cada elemento de matriz de e^{xA} es solución de la ecuación escalar $\phi_A(D)u = 0$. □

La pregunta inmediata que surge en vista del lema anterior es qué solución concreta de la ecuación $\phi_A(D)u = 0$ aparece en cada elemento de matriz de e^{xA}, cuestión que abordaremos a continuación. Sea d el grado del polinomio mínimo, y sea $\{\varphi_1, \dots, \varphi_d\}$ un sistema fundamental soluciones de la ecuación $\phi_A(D)u = 0$, que supondremos reales. En virtud del Lema 7.9, cada elemento de matriz $(e^{xA})_{ij}$ es combinación lineal de $\{\varphi_1, \dots, \varphi_d\}$, es decir, existen d constantes reales $c_{ij}^1, \dots, c_{ij}^d$ tal que

$$(e^{xA})_{ij} = c_{ij}^1\,\varphi_1(x) + c_{ij}^2\,\varphi_2(x) + \cdots + c_{ij}^d\,\varphi_d(x)\,. \tag{7.56}$$

Equivalentemente, si

$$C_k = \begin{pmatrix} c_{11}^k & c_{12}^k & \dots & c_{1n}^k \\ c_{21}^k & c_{22}^k & \dots & c_{2n}^k \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1}^k & c_{n2}^k & \dots & c_{nn}^k \end{pmatrix}, \qquad k = 1, \dots, d\,,$$

podemos expresar la igualdad (7.56) en forma matricial como

$$e^{xA} = \varphi_1(x)C_1 + \varphi_2(x)C_2 + \cdots + \varphi_d(x)C_d = \begin{pmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \dots & \varphi_d(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_d \end{pmatrix}. \tag{7.57}$$

Derivando sucesivamente esta expresión, teniendo en cuenta la ecuación (7.55), y evaluando la expresión resultante en $x = 0$ obtenemos

$$\varphi_1^{(k)}(0)C_1 + \varphi_2^{(k)}(0)C_2 + \cdots + \varphi_d^{(k)}(0)C_d = A^k\,, \qquad k = 0, \dots, d-1\,. \tag{7.58}$$

Las d ecuaciones anteriores son equivalentes a la ecuación matricial formal

$$\begin{pmatrix} \varphi_1(0) & \varphi_2(0) & \dots & \varphi_d(0) \\ \varphi_1'(0) & \varphi_2'(0) & \dots & \varphi_d'(0) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varphi_1^{(d-1)}(0) & \varphi_2^{(d-1)}(0) & \dots & \varphi_d^{(d-1)}(0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{1} \\ A \\ \vdots \\ A^{d-1} \end{pmatrix},$$

es decir,

$$\Phi(0)\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{1} \\ A \\ \vdots \\ A^{d-1} \end{pmatrix}$$

donde $\Phi(0)$ es la matriz de Wronski de las soluciones $\varphi_1, \dots, \varphi_d$ evaluada en $x = 0$. Como $\Phi(0)$ es invertible (¿por qué?), de la ecuación anterior se sigue que

$$\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_d \end{pmatrix} = \Phi(0)^{-1}\begin{pmatrix} \mathbb{1} \\ A \\ \vdots \\ A^{d-1} \end{pmatrix}.$$

Sustituyendo esta expresión en (7.57) obtenemos la siguiente fórmula para calcular e^{xA}:

$$\boxed{\mathrm{e}^{xA} = \begin{pmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \dots & \varphi_d(x) \end{pmatrix} \Phi(0)^{-1}\begin{pmatrix} \mathbb{1} \\ A \\ \vdots \\ A^{d-1} \end{pmatrix}}. \tag{7.59}$$

- Una variante del método que acabamos de explicar consiste en utilizar el polinomio característico $p_A(\lambda)$ en lugar del polinomio mínimo $\phi_A(\lambda)$. En ese caso se obtendría una fórmula similar a (7.59) sustituyendo d por n, y siendo en ese caso $\Phi(0)^{-1}$ la inversa de la matriz de Wronski evaluada en $x = 0$ de un sistema fundamental de soluciones $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ de la ecuación escalar $p_A(D)u = 0$. La ventaja es que no haría falta hallar previamente el polinomio mínimo, pero si $n > d$ tendría el inconveniente de tener que calcular potencias superiores de la matriz A y de invertir $\Phi(0)$, que en ese caso sería una matriz $n \times n$.

Ejemplo 7.10. Hallar la solución del problema de valores iniciales

$$\begin{cases} y' = Ay \\ y(0) = y_0\,, \end{cases} \qquad \text{con} \qquad A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \; y_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

De la ecuación (7.35) se sigue que la solución pedida es

$$y(x) = \mathrm{e}^{xA}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

es decir, la primera columna de e^{xA}. El polinomio característico de A es

$$p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & 4 \\ -1 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2\,,$$

por lo que $\lambda = 1$ es el único autovalor, con multiplicidad algebraica 2. Como A es no diagonalizable (las únicas matrices con *todos* los autovalores iguales que son diagonalizables son los múltiplos de la identidad) el índice del autovalor es 2, de modo que el polinomio mínimo coincide con el característico. Un sistema fundamental de soluciones de la ecuación

$$\phi_A(D)u = (D - 1)^2 u = 0$$

está formado por las funciones $\varphi_1 = \mathrm{e}^x$ y $\varphi_2 = x\mathrm{e}^x$, siendo

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^x & x\mathrm{e}^x \\ \mathrm{e}^x & (x+1)\mathrm{e}^x \end{pmatrix}$$

su correspondiente matriz de Wronski. Por tanto

$$\Phi(0)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Utilizando la fórmula (7.59), se tiene

$$\mathrm{e}^{xA} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^x & x\mathrm{e}^x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{1} \\ A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-x)\,\mathrm{e}^x & x\mathrm{e}^x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{1} \\ A \end{pmatrix} = (1-x)\,\mathrm{e}^x\,\mathbb{1} + x\mathrm{e}^x A = \begin{pmatrix} (1+2x)\,\mathrm{e}^x & \cdot \\ x\mathrm{e}^x & \cdot \end{pmatrix},$$

y por tanto la solución pedida es

$$y(x) = \begin{pmatrix} (1+2x)\,\mathrm{e}^x \\ x\mathrm{e}^x \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 7.11. Apliquemos la fórmula (7.59) para calcular otra vez e^{xA}, siendo A la matriz (7.41) del Ejemplo 7.6. El polinomio característico de A es

$$p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2(\lambda^2+1) + \lambda^2 + 1 = (\lambda^2+1)^2\,,$$

por lo que sus autovalores son $\pm\mathrm{i}$, ambos con multiplicidad algebraica 2. Como la matriz A verifica $A^2 = -\mathbb{1}$ y el polinomio mínimo es divisor del polinomio característico, en este caso $\phi_A(\lambda) = \lambda^2 + 1$. (Nótese que los índices de los autovalores $\pm\mathrm{i}$ son ambos 1, por lo que A es diagonalizable.) Un sistema fundamental de soluciones reales de la ecuación

$$\phi_A(D)u = (D^2+1)u = u'' + u = 0$$

está formado por las funciones $\varphi_1 = \cos x$, $\varphi_2 = \operatorname{sen} x$, siendo

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} \cos x & \operatorname{sen} x \\ -\operatorname{sen} x & \cos x \end{pmatrix}$$

su matriz de Wronski. De la ecuación (7.59) se sigue entonces que

$$\mathrm{e}^{xA} = \begin{pmatrix} \cos x & \operatorname{sen} x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbb{1} \\ A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos x & \operatorname{sen} x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{1} \\ A \end{pmatrix} = \cos x\,\mathbb{1} + \operatorname{sen} x\,A\,,$$

que coincide con la expresión obtenida anteriormente.

Ejemplo 7.12. Hallemos la matriz fundamental canónica en $x = 0$ del sistema

$$y' = Ay\,, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{7.60}$$

El polinomio característico de la matriz A es

$$p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & -1 \\ -2 & \lambda-1 & 1 \\ 0 & 1 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda^2-2\lambda)+2(2-\lambda) = (\lambda-2)(\lambda^2-\lambda-2) = (\lambda+1)(\lambda-2)^2\,.$$

Los autovalores de A son por tanto $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 2$, con multiplicidades algebraicas $r_1 = 1$, $r_2 = 2$. Como

$$(A+1)(A-2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ -2 & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \neq 0\,,$$

el índice del autovalor λ_2 es $n_2 = 2$. Luego el polinomio mínimo coincide con el característico y A es no diagonalizable. (Alternativamente, al ser

$$A - 2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

claramente de rango 2, se sigue que

$$s_2 = \dim\ker(A-2) = 3 - \operatorname{rank}(A-2) = 1\,,$$

y por tanto A es no diagonalizable y $n_2 = 2$.) Un sistema fundamental de soluciones de la ecuación

$$\phi_A(D)u = (D+1)(D-2)^2 u = 0$$

está formado por las funciones $\varphi_1 = \mathrm{e}^{-x}$, $\varphi_2 = \mathrm{e}^{2x}$, $\varphi_3 = x\mathrm{e}^{2x}$, siendo

$$\varPhi(x) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-x} & \mathrm{e}^{2x} & x\mathrm{e}^{2x} \\ -\mathrm{e}^{-x} & 2\mathrm{e}^{2x} & (1+2x)\mathrm{e}^{2x} \\ \mathrm{e}^{-x} & 4\mathrm{e}^{2x} & 4(1+x)\mathrm{e}^{2x} \end{pmatrix}$$

su correspondiente matriz de Wronski. Por tanto,

$$\varPhi(0)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4 & -4 & 1 \\ 5 & 4 & -1 \\ -6 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

De la fórmula (7.59) se sigue entonces que

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{xA} &= \frac{1}{9}\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-x} & \mathrm{e}^{2x} & x\mathrm{e}^{2x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -4 & 1 \\ 5 & 4 & -1 \\ -6 & -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{1} \\ A \\ A^2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4\mathrm{e}^{-x} + 5\mathrm{e}^{2x} - 6x\mathrm{e}^{2x} & -4\mathrm{e}^{-x} + 4\mathrm{e}^{2x} - 3x\mathrm{e}^{2x} & \mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{2x} + 3x\mathrm{e}^{2x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{1} \\ A \\ A^2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 3\mathrm{e}^{-x} + 6\mathrm{e}^{2x} & 3\mathrm{e}^{2x} - 3\mathrm{e}^{-x} & 3\mathrm{e}^{2x} - 3\mathrm{e}^{-x} \\ 2(3x+2)\mathrm{e}^{2x} - 4\mathrm{e}^{-x} & 4\mathrm{e}^{-x} + (3x+5)\mathrm{e}^{2x} & 4\mathrm{e}^{-x} + (3x-4)\mathrm{e}^{2x} \\ 2(1-3x)\mathrm{e}^{2x} - 2\mathrm{e}^{-x} & 2\mathrm{e}^{-x} - (3x+2)\mathrm{e}^{2x} & 2\mathrm{e}^{-x} + (7-3x)\mathrm{e}^{2x} \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

donde en el último paso hemos tenido en cuenta que

$$A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 0 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Índice alfabético