INSTRUMENTOS MATEMÁTICOS PARA LA EMPRESA
EJERCICIOS — CONTINUIDAD Y DERIVADAS (II)

1. Continuidad.

Ejercicio 1. En el Ejercicio 7 de la hoja titulada «Conceptos básicos» dedujiste una expresión para la función $I(s)$ que calcula el IRPF que se retiene a un contribuyente cuyos ingresos son s euros anuales. ¿Debería ser $I(s)$ una función continua, intuitivamente? A la vista de la expresión que obtuviste para ella, ¿realmente lo es?

Ejercicio 2. Estudia la continuidad de las siguientes funciones definidas a trozos. Haz un dibujo esquemático de las funciones en las proximidades de sus puntos de discontinuidad.

$$1)\quad f(x)=\begin{cases} x+2 & \text{si} \quad x\le -1\\ x^2 & \text{si} \quad -1<x<1\\ -x^2+2x-2 & \text{si} \quad x\ge 1\end{cases}$$

$$2)\quad f(x)=\begin{cases} e^x & \text{si} \quad x\le 0\\ x & \text{si} \quad x>0\end{cases}$$

$$3)\quad f(x)=\begin{cases} \frac{1}{x-1} & \text{si} \quad x\le 0\\ x-1 & \text{si} \quad 0<x\le 1\\ \frac{1}{x-1} & \text{si} \quad x>1\end{cases}$$

$$4)\quad f(x)=\begin{cases} \frac{x^2-x-2}{x^2+x} & \text{si} \quad x<-1\\ 2x+5 & \text{si} \quad -1\le x\le 2\\ 2-x & \text{si} \quad x>2\end{cases}$$

$$5)\quad f(x)=\begin{cases} \frac{2x+3}{x} & \text{si} \quad x<-1\\ x^2-2 & \text{si} \quad -1\le x<2\\ 3x+1 & \text{si} \quad x\ge 2\end{cases}$$

$$6)\quad f(x)=\begin{cases} 2x & \text{si} \quad x\le 0\\ \frac{1}{x} & \text{si} \quad 0<x\le 1\\ \frac{x^2+x-2}{x^3-1} & \text{si} \quad x>1\end{cases}$$

Ejercicio 3. Calcula el valor que deben tomar los parámetros (denotados por las letras a y b) para que las siguientes funciones sean continuas en todo $\mathbb{R}$.

$$1)\quad f(x)=\begin{cases} ax^2-2x+1 & \text{si} \quad x\le 1\\ 3a+\ln x & \text{si} \quad x>1\end{cases}$$

$$2)\quad f(x)=\begin{cases} ax^2-2x & \text{si} \quad x\le 1\\ 4x^2+ax+b & \text{si} \quad 1<x<2\\ 3x+b & \text{si} \quad x\ge 2\end{cases}$$

2. Cálculo de derivadas usando la definición.

Recuerda que la *definición formal* de derivada de una función f en un punto x_0 venía dada por el siguiente límite:

$$(*) \qquad f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

Ejercicio 4. Utilizando la definición de derivada en un punto calcula $f'(x_0)$ para las siguientes funciones:

1) $f(x) = -2x^2 + x + 2$ en $x_0 = -1$

2) $f(x) = x^3 - 3x + 1$ en $x_0 = 0$

3) $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$ en $x_0 = 1$

4) $f(x) = \sqrt{x^2+1}$ en $x_0 = 1$

Haz luego el cálculo con las reglas usuales de derivación y compara los resultados.

Ejercicio 5. Estudia si la siguiente función tiene derivada en los puntos $x_0 = 1$ y $x_0 = -1$ (tendrás que volver a usar la definición):

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 1 & \text{si } x \le -1 \\ -x^3 + 2 & \text{si } -1 < x \le 1 \\ x^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

3. Algunos ejercicios más técnicos.

Ejercicio 6. La función $f(x)$ que estudiaste en el Ejercicio 3 de la hoja sobre límites, ¿es derivable en algún punto?

Ejercicio 7. Utilizando la definición formal de derivada (es decir, la definición a través del límite (*) escrito más arriba), demuestra que la derivada de la suma $f+g$ en un punto x_0 es la suma de las derivadas de f y g en x_0; es decir, $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$. Compara con la demostración que hicimos en clase utilizando la fórmula de los incrementos.

Ejercicio 8. El teorema de Bolzano dice que si f es una función continua en un intervalo $[a,b]$ tal que $f(a)$ y $f(b)$ tienen distinto signo, entonces f se anula en algún punto c del intervalo; es decir, $f(c) = 0$ para algún $c \in [a,b]$.

Considera la función $f(x) = x^2$ en el intervalo $[a,b] = [-1,1]$. La función f es continua y obviamente $f(-1)$ y $f(1)$ tienen el mismo signo. ¿Podemos deducir del teorema de Bolzano que f no se anula en ningún punto del intervalo $[-1,1]$?

Ejercicio 9. Recuerda el teorema de Weierstrass: toda función continua f en un intervalo $[a,b]$ alcanza su máximo y mínimo globales en ese intervalo. Vimos en clase que el teorema puede no ser válido cuando f no es continua, y en la misma línea preguntamos lo siguiente:

- ¿Es válido el teorema para intervalos que no sean cerrados? (Por ejemplo, piensa en un intervalo de la forma $(a,b]$ en lugar de $[a,b]$.)
- ¿Es válido el teorema para intervalos que no sean acotados? (Por ejemplo, piensa en un intervalo de la forma $[a,+\infty)$.)