

# Modelización

---

Guillermo Guridi Mateos  
Cristina Kasner Toruné

UAM - Curso 2014 - 2015 C2  
1 de marzo de 2016 14:46

Apuntes UAM  
Doble Grado Mat.Inf.

[Código en Github](#)

# Índice general

<b>I</b>	<b>Introducción</b>	<b>3</b>
I.1	¿De qué trata la modelización?	3
<b>II</b>	<b>Gravitación y leyes de kepler</b>	<b>4</b>
II.1	Leyes de Kepler	4
II.2	Ley de gravitación universal	4
II.2.1	Deducción de las leyes de Kepler	6
II.2.2	Gravedad de una masa con simetría esférica	10
II.2.3	Un poco de mecánica analítica	13
II.2.4	Principio básico de la mecánica	16
II.3	Leyes de conservación: Teorema de Noether	19
<b>III</b>	<b>Cadenas de Markov</b>	<b>23</b>
III.1	Un modelo para redes	23
III.2	Propiedades de los paseos aleatorios	24
III.2.1	Si existe una distribución estacionaria ¿es única?	25
III.2.2	¿Existe siempre una distribución estacionaria?	25
III.2.3	¿Existe siempre una distribución límite?	25
III.2.4	Si la distribución límite existe, ¿Es independiente de la distribución inicial?	26
III.3	Cadenas de Markov	26
III.3.1	Teoremas	31
III.3.2	Page Rank Algorithm	34
III.3.3	Cabos sueltos	38
III.4	Una cadena de Markov infinita: Movimiento browniano	40
<b>IV</b>	<b>Aplicaciones del análisis de Fourier</b>	<b>42</b>
IV.1	Desarrollo de Fourier	42
IV.1.1	Aplicaciones	43
IV.1.2	Teorema de Fourier	44
IV.2	Proyecciones, convoluciones y filtros	50
IV.2.1	Simetrías y decaimiento de los coeficientes de Fourier	54
IV.2.2	Convergencia lenta:	55
IV.3	Aplicaciones	58
IV.3.1	Formato JPEG	58
IV.3.2	Aproximación de funciones	62
IV.3.3	Experimentos con imágenes y su transformación de Fourier	66

<b>V</b>	<b>Teoría de la información</b>	<b>69</b>
V.1	Definición e idea intuitiva de entropía . . . . .	69
V.2	Códigos prefijo . . . . .	70
V.3	Source Coding Theorem, Noiseless Coding Theorem o Primer Teorema de Shannon . . . . .	71
V.4	Codificación de Huffman . . . . .	74
	V.4.1 La codificación de Huffman da lugar a un código válido . . . . .	76
	V.4.2 La codificación de Huffman es óptima . . . . .	78
V.5	Métodos de diccionario . . . . .	81
	V.5.1 Algunos algoritmos de compresión de imagen . . . . .	83
	V.5.2 El algoritmo LZ78 . . . . .	83
	V.5.3 Algoritmo LZW . . . . .	85
V.6	El algoritmo ID3 de aprendizaje automático . . . . .	88
<b>A</b>	<b>Ejercicios</b>	<b>89</b>
A.1	Hoja 1 . . . . .	89
A.2	Hoja 2 . . . . .	103
A.3	Hoja 3 . . . . .	115
A.4	Hoja 4 . . . . .	130
	<b>Índice alfabético</b>	<b>142</b>

# Capítulo I

## Introducción

### 1.1. ¿De qué trata la modelización?

La modelización trata de dar descripciones de sistemas (situaciones) reales con un lenguaje matemático. Resulta particularmente útil en Física.

Entre los siglos XVII y XVIII se compilaban tablas astronómicas muy precisas con medidas acerca de los ángulos con los que podía verse cada planeta en un instante determinado. Las tablas más precisas fueron creadas por Tycho Brahe y eran realmente codiciadas por Kepler.

Kepler desarrolló un modelo matemático que sostenía, entre otras cosas, que los planetas se movían en elipses. Kepler estaba muy interesado en obtener las tablas de Tycho Brahe pues quería analizarlas con el fin de poder probar sus teorías. Finalmente, con la muerte de su creador, Kepler las heredó y pudo establecer una relación entre los cuadrados de los períodos y el cubo de los radios de giro de los planetas.

Posteriormente llegó Newton, que modelizó el movimiento de los planetas con la fórmula:

$$F = -\frac{GMm}{r^2}$$

Esta fórmula en su momento tuvo una gran importancia filosófica, pues permitía explicar toda la teoría acerca del movimiento de los planetas a partir de una ecuación muy simple. No obstante, la utilidad matemático-física de esta ecuación en el momento de su descubrimiento era prácticamente nula.

Newton no conocía el valor de G y si consideramos las interacciones entre los planetas la fórmula se complica mucho. Sin embargo, esta fórmula seguía (y sigue) suponiendo una aproximación bastante acertada.

Así funciona la modelización, a partir de datos surge una idea o explicación matemática que más tarde es complementada con un modelo matemático.

## Capítulo II

# Gravitación y leyes de kepler

### II.1. Leyes de Kepler

Kepler, a principios del siglo XVII, enunció unas leyes experimentales (con datos de Tycho Brahe):

**Lema II.1** (1ª Ley de Kepler). *Las órbitas de los planetas son elipses con el Sol en uno de los focos.*

**Lema II.2** (2ª Ley de Kepler). *La línea que une un planeta y el Sol barre áreas iguales en tiempos iguales.*

**Lema II.3** (3ª Ley de Kepler). *El cuadrado del periodo orbital es proporcional al cubo del semieje mayor de la órbita.*

### II.2. Ley de gravitación universal

Gracias a Newton, en 1685, las leyes de Kepler pudieron demostrarse matemáticamente suponiendo que la fuerza gravitacional obedece la ecuación

$$F = \frac{-GMm}{r^2}$$

en la dirección del vector radio.

No existe una forma sencilla de realizar esta demostración a menos que demos por sentados muchos principios físicos que no eran conocidos en aquella época. Vamos a tratar de realizar la demostración utilizando los mínimos “trucos” posibles.

Para empezar debemos recordar que toda fuerza puede calcularse como:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

La aceleración se calcula a partir de la posición de una partícula, que viene dada por:  $\mathbf{r} = (x(t), y(t), z(t))$ . La aceleración se define como la derivada segunda de la

posición con respecto al tiempo. Es decir:

$$\bar{a} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$$

Esta fórmula describe, por ejemplo, la atracción que ejerce el Sol sobre la Tierra, por ello el signo negativo. En el caso de el Sol y la Tierra, la fuerza recíproca no se tiene en cuenta ya que el Sol es demasiado pesado como para ser influido apreciablemente por la gravedad de la Tierra. Hay que hacer mediciones muy finas para poder detectar estas perturbaciones.

Para poder seguir con la demostración de forma relativamente sencilla, **despreciamos la fuerza de los planetas sobre el Sol y de los planetas entre ellos.**

Por lo tanto, modelamos tomando sólo un planeta y asumiendo un Sol fijo.

Igualando las dos fórmulas para el cálculo de la fuerza que hemos indicado, obtenemos:

$$\frac{-GMm}{\|\mathbf{r}\|^2} \frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|^2} = m \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$$

En primer lugar vamos a probar que las soluciones  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$  de esta ecuación diferencial satisfacen las leyes de Kepler (con las condiciones iniciales de los planetas)

$$\begin{cases} x'' = \frac{-GMx}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \\ y'' = \frac{-GM y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \\ z'' = \frac{-GMz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \end{cases}$$

**Observación:** No se pueden calcular explícitamente  $x$ ,  $y$  y  $z$ , en función de  $t$ .  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$  no tiene una fórmula cerrada (en términos de funciones elementales<sup>1</sup>). Aun así se puede demostrar que la fórmula es una elipse.

Vamos a probar que la curva  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$  está contenida en un plano.

Un posible método es usar que una curva es plana si y sólo  $\tau \equiv 0$ , donde  $\tau$  es la torsión de la curva. Dicha fórmula involucra un determinante con una fila  $r$  y otra  $r''$ , como son proporcionales, la torsión sale 0.

Nuestro método más sencillo se basa en tomar  $\vec{L}(t) = \mathbf{r}(x) \times \frac{d\mathbf{r}}{dt}$ .

Derivando obtenemos:

$$\frac{d\vec{L}(t)}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} + \mathbf{r}(t) \times \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \vec{0}^2$$

de donde podemos deducir que  $\vec{L}$  es un vector constante. Además,  $\mathbf{r} \perp \vec{L}$  y  $\mathbf{r}(t)$  está contenida en el plano  $\vec{L}(x, y, z) = 0$ . (pensar  $\vec{L} = \vec{0}$ ).

<sup>1</sup>Las de la calculadora (sin, cos...)

<sup>2</sup>El producto vectorial de un vector consigo mismo y de vectores paralelos es 0

Por comodidad, vamos a girar el plano en que se encuentra la órbita del planeta,  $\mathbf{r} \rightarrow G\mathbf{r}$ , siendo  $G$  un giro (matriz ortogonal), para convertirlo en el plano  $z = 0$ .

Podemos comprobar que este giro no afecta a las cuentas puesto que, en definitiva, estamos multiplicando por una constante.

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \text{cte} \frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|^3} \Leftrightarrow \frac{d^2(G\mathbf{r})}{dt^2} = \text{cte} \frac{G\mathbf{r}}{\|G\mathbf{r}\|^3}$$

En definitiva "girando la cabeza" (aplicando el cambio  $\mathbf{r} \rightarrow G\mathbf{r}$ ) podemos suponer que la curva  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$  está contenida en el plano  $z = 0$ , así que simplemente supondremos que  $z(t) = 0$ . El sistema nos quedaría así:

$$\begin{cases} x'' = k \frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}} \\ y'' = k \frac{y}{(x^2+y^2)^{3/2}} \end{cases}$$

### II.2.1. Deducción de las leyes de Kepler

Vamos a deducir las leyes de Kepler para  $t \rightarrow (x(t), y(t))$  utilizando los resultados de Newton.

La forma de la solución será una elipse. Si escribimos  $x$  e  $y$  en polares, el sistema nos quedará más sencillo.

$$\begin{aligned} x &= r \cos(\theta) \\ y &= r \sin(\theta) \\ r &= r(t) \\ \theta &= \theta(t) \end{aligned}$$

(ya adelantamos que  $r$  y  $\theta$  no se podrán calcular explícitamente.)

Calculando ahora las derivadas segundas de  $x(t)$  e  $y(t)$  y sustituyendo en el sistema de ecuaciones anterior llegamos a:

$$r'' \cos \theta - 2r'\theta' \sin \theta - r(\theta')^2 \cos \theta - r\theta'' \sin \theta = \text{cte} \frac{\cos \theta}{r^2} \tag{II.1}$$

$$r'' \sin \theta + 2r'\theta' \cos \theta - r(\theta')^2 \sin \theta + r\theta'' \cos \theta = \text{cte} \frac{\sin \theta}{r^2} \tag{II.2}$$

$$(II.1) \cdot \cos \theta + (II.2) \cdot \sin \theta \rightarrow K = r^3(\theta')^2 - r^2 * r'' \rightarrow 1^{\text{a}} \text{ ecuación de gravitación}$$

$$-(II.1) \cdot \sin \theta + (II.2) \cdot \cos \theta \rightarrow 0 = r\theta'' + 2r' * \theta' \rightarrow 2^{\text{a}} \text{ ecuación de gravitación}$$

#### II.2.1.1. 2ª ley de Kepler

**Recordemos:** 2ª ley de Kepler : Un planeta recorre áreas iguales en tiempos iguales.

Vamos a estudiar cual es la fórmula para el área. Primero nos vamos al caso general, para cualquier curva que tengamos en polares.

En este caso el radio depende de  $\theta$ . Cogemos una curva  $R$ .

$$A(R) = \iint_R 1 \, dx \, dy = \int_0^{\theta_0} \int_0^r r \, dr \, d\theta = 1/2 \int_0^{\theta_0} r^2 \, d\theta$$

La idea es coger pequeños triángulos e ir calculando su área

En el caso de la **ley de Kepler**, si en el tiempo  $t = 0$  estamos en  $\theta = 0$  y en el tiempo  $T$  estamos en  $\theta_0 \implies$  la fórmula para el área en función de  $T$  sería:

$$A(T) = \frac{1}{2} \int_0^T r^2(t) \theta'(t) \, dt$$

de donde podemos deducir que  $\frac{dA(T)}{dT} = cte$

Es lo mismo que decir  $A(T)$  es lineal (a tiempos iguales tengo áreas iguales)

$$A(x + T) - A(x) = A(T) - A(0)$$

Vamos a traducir la 2ª ley de Kepler en algo más familiar (derivadas):

$$\frac{dA}{dT} = cte \iff r^2 \theta' = cte \text{ (no depende de T)}$$

que puede verse como la conservación del momento angular

Además,  $r^2 \theta' = cte \implies (r^2 \theta')' = 0 \iff 2r r' \theta' + r^2 \theta'' = 0$  con lo que obtenemos la 2ª ecuación de gravitación.

Por tanto, queda probada la 2ª ley de Kepler.

### II.2.1.2. 1ª ley de Kepler

Ahora vamos a intentar manipular la 1ª ecuación para probar la **1ª ley de Kepler** (las órbitas de los planetas son elipses).

Escribimos:

$$h = r^2 \theta' = cte \text{ (para cada planeta, } h \text{ es diferente)}$$

1ª ecuación de gravitación:

$$K = r^3 (\theta')^2 - r^2 * r''$$

como  $h = r^2 * \theta'$  podemos eliminar  $\theta'$  en la 1ª ecuación, obteniendo:

$$K = r^3 \frac{h^2}{r^4} - r^2 * r''$$

y, simplificando, llegamos a:

$$K = \frac{h^2}{r} - r^2 * r'' \rightarrow \text{Es una EDO } (r = r(t)) \text{ y no aparece explícitamente la } t.$$



**Observación:** En el curso de EDO se ven métodos para pasar de 2 orden ( $r''$ ) a 1 orden ( $r$ ) y se podría expresar  $r$  en términos de la imagen inversa de una integral, pero no se puede calcular en términos elementales.

Para resolver la ecuación debemos estar hábiles y realizar un cambio de variable adecuado. En este caso, el cambio de variable consistirá en escribir  $r = r(\theta)$  en vez de  $r = r(t)$

Hacemos el siguiente cambio de variable:

$$U(\theta(t)) = \frac{1}{r(t)} \implies U'\theta' = \frac{-r}{r^2} \stackrel{h=r^2\theta'}{\iff} hU' = -r' \stackrel{U(\theta(t))}{\implies} hU''\theta' = -r''$$

Sustituyendo en la EDO:

$$K = h^2U + h^2U'' \rightarrow \text{ecuación del movimiento armónico simple}$$

viendo que  $\cos'' = -\cos$  y  $\sin'' = -\sin$ :

$$U'' + U = \frac{K}{h^2} \implies U = \frac{K}{h^2} + \lambda \cos \theta + \mu \sin \theta \iff U = \frac{K}{h^2} + A \cos(\theta - \theta_0)$$

**Observación:** Al último resultado hemos llegado utilizando que

$$\lambda \cos \theta + \mu \sin \theta = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2} \left( \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}} \cos \theta + \frac{\mu}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}} \sin \theta \right)$$

Llamamos  $\cos \theta_0$  a  $\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}}$  y  $\sin \theta_0$  a  $\frac{\mu}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}}$  ya que ambos están entre 0 y 1. Nos queda que

$$\lambda \cos \theta + \mu \sin \theta = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2} (\cos \theta_0 \cos \theta + \sin \theta_0 \sin \theta) \stackrel{A=\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}}{=} A \cos(\theta - \theta_0)$$

Con un giro podemos suponer  $\theta_0 = 0$ , porque un giro en polares no es más que sumarle una constante al ángulo ( $\theta \rightarrow \theta + cte$ )

Volviendo al cambio de variable inicial, tenemos

$$U = \frac{1}{r} \implies r = \frac{h^2/K}{1 + B \cos \theta}$$

**Hecho matemático:** La ecuación general de una cónica en coordenadas polares centradas en un foco con la "orientación habitual" es:

$$r(\theta) = \frac{l}{1 + e \cos \theta} \rightarrow \begin{cases} l > 0 \\ e \text{ (excentricidad)} \geq 0 \end{cases}$$

**Recordemos:**

$$\text{excentricidad} \rightarrow \begin{cases} 0 < e \leq 1 \rightarrow \text{elipse, caso particular}(e = 1) \rightarrow \text{circunferencia} \\ e > 1 \rightarrow \text{hipérbola(masas no capturadas por el sol)} \\ e = 0 \rightarrow \text{parábola} \end{cases}$$

Los **datos astronómicos** para los planetas(excepto mercurio) muestran  $B < 0.1$  por lo tanto las órbitas son elipses(1ª ley de Kepler) y parecidas a circunferencias.

Planetas	B
Tierra	0.016
Venus	0.0067
Mercurio	0.20

### II.2.1.3. 3ª ley de Kepler

Tomamos  $a$  como el semieje mayor y  $b$  como semieje menor de la elipse de forma que:

$$2a = \frac{l}{1+e} + \frac{l}{1-e} \implies a = \frac{l}{1-e^2}$$

y

$$b = \sqrt{al}$$

Ahora vamos a calcular área de la elipse basándonos en la fórmula conocida para el área de la circunferencia.

Escribimos la circunferencia como

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

y su área es

$$\pi a^2$$

Si hacemos en cambio de

$$y \rightarrow \frac{a}{b}y$$

nos queda

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

que es la fórmula de la elipse. Por tanto, el área de la elipse será  $\pi ab$ .

Ahora calculamos el área de la órbita del planeta:

$$T_o = \text{periodo orbital}$$

$$r = \frac{h^2/K}{1 + B \cos \theta}$$

$$\text{Área de la órbita} = A(T_o) = 1/2 \int_0^{T_o} \underbrace{r^2(t)\theta'(t)}_h dt = 1/2hT_o$$

Igualando el área de la órbita con el área de la elipse tenemos:

$$\frac{1}{2}hT_0 = \pi ab = \pi a\sqrt{al} = \pi a\sqrt{a\frac{h^2}{K}} \implies T_0 = cte * a^{3/2}$$

Y queda demostrada la 3ª ley de Kepler.

**Observación:** Para las demostraciones de las tres leyes, en física se ayudan de dos teoremas:

1. **Conservación del momento angular:**  $\vec{L}$  es cte siendo:

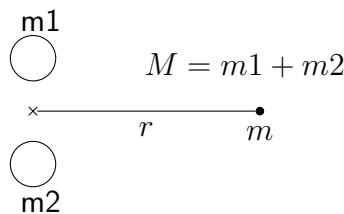
$$\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v} \quad (\vec{r} \rightarrow \text{posición}, \vec{v} \rightarrow \text{velocidad}).$$

2. **Conservación de la energía:**

$$\frac{1}{2}m\|\vec{v}\|^2 + \frac{GMm}{\|\vec{r}\|} \rightarrow \text{es cte.}$$

### II.2.2. Gravedad de una masa con simetría esférica

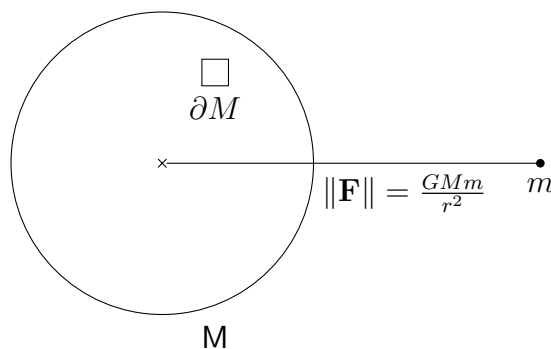
A Newton le quedó un cabo suelto que vamos a intentar resolver:



**Figura II.1:** ¿Se cumple  $\|\mathbf{F}\| = \frac{GMm}{r^2}$  ?

Vemos que en la fórmula, cuando  $r \rightarrow 0 \implies \mathbf{F} \rightarrow \infty$  y esto, en el caso del dibujo, no es real.

Si una masa M está compuesta por varias masas con densidad constante,  $\|\mathbf{F}\| = \frac{GMm}{r^2}$ , con  $r$  = distancia al punto medio puede cumplirse.



**Figura II.2:** Divido la esfera con masa M en pequeñas partículas  $\delta M$

Entonces para ver si  $\|\mathbf{F}\| = \frac{GMm}{r^2}$  es válida, habrá que calcular una integral triple complicada y ver el efecto que tiene en cada partícula.

$$\int \frac{-Gm \vec{x}}{\|\vec{x}\|^3} dM$$

Hay una manera de calcular esta integral y probar que  $\|\mathbf{F}\|$  es válida para objetos con simetría esférica, usando el teorema de la divergencia:

**Proposición II.4** (Ley de Gauss). *Dada una región sólida B y un campo  $\vec{E} = \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|^3}$  tenemos que:*

$$\int_{\partial B} \vec{E} d\vec{S} = \begin{cases} 4\pi & \text{si } \vec{0} \in \text{Int}(B) \\ 0 & \text{si } \vec{0} \notin \text{Int}(B) \end{cases}$$

Siendo  $\partial B$  la frontera de B

*Demostración.*

- Si  $\vec{0}$  está fuera de B, el campo  $\vec{E}$  es regular ( $C^\infty$ ) en B.

$$\int_{\partial B} \vec{E} d\vec{S} \stackrel{\text{Teorema de divergencia}}{=} \int_B \text{div} \vec{E} = 0$$

- Si  $\vec{0}$  pertenece a  $\text{Int}(B)$ :

En lugar de B consideramos  $B - B_\delta$  con  $B_\delta = \{\|\vec{x}\| \leq \delta\}$

$$\bar{B} = B - B_\delta \rightarrow \int_{\partial \bar{B}} \vec{E} d\vec{S} = \int_B \text{div} \vec{E} = 0$$

Como  $\partial \bar{B} = \partial B \cup \partial B_\delta$  con orientaciones distintas  $\rightarrow$

$$\int_{\partial B} \vec{E} d\vec{S} - \int_{\partial B_\delta} \vec{E} d\vec{S} = 0$$

$$\int_{\partial B} \vec{E} d\vec{S} = \int_{\partial B_\delta} \vec{E} d\vec{S} \stackrel{\text{esféricas}}{=} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{\delta^2 \sin \theta}{\delta^3} \delta d\phi d\theta = 4\pi$$

□

Por lo tanto, tenemos que:

$$\vec{F} = -\frac{GMm}{\|\vec{x} - \vec{y}\|} (\vec{x} - \vec{y})$$

Si  $\vec{y}$  se mueve en  $B'$

$$\int_{\partial B} \vec{F} d\vec{S} = \begin{cases} 0 \\ -4\pi GMm \end{cases} \rightarrow \text{Dependiendo de si } \vec{x} \text{ está fuera o dentro de } B'$$

<sup>3</sup>Escribimos  $\vec{E}$  en polares multiplicado por el radio  $\delta$

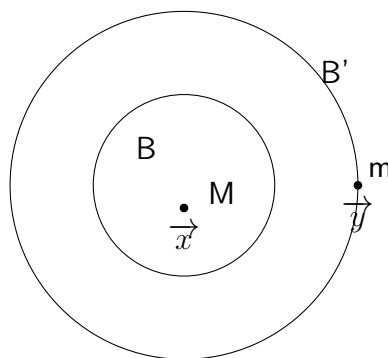


Figura II.3: No hace falta que B y B' sean regulares, pero aún no se dibujan otra cosa

Si tenemos muchas masas, también es cierta la proposición.

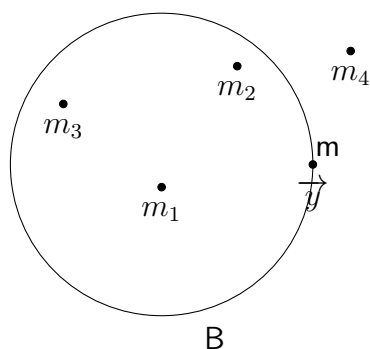
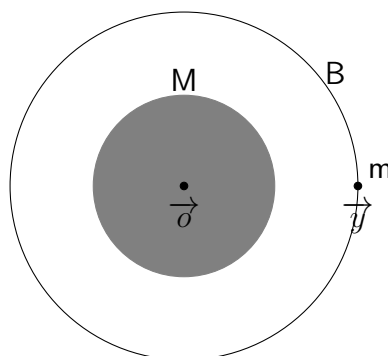


Figura II.4:  $\int_{\partial B} \mathbf{F} d\mathbf{S} = -4\pi GMm$  Con M suma de las m en el interior

**Conclusión** En el caso de los planetas,  $\vec{F}$  tiene que ser una función radial (por la simetría de la esfera), si cogemos B una "esfera ficticia" de radio  $r = \|\vec{y}\| \implies$



$$\int_{\partial B} \vec{F} d\vec{S} = 4\pi r^2 |\vec{F}|$$

Como  $\int_{\partial B} \vec{F} d\vec{S} = -4\pi GMm \implies$

$$-4\pi r^2 |\vec{F}| = -4\pi GMm \implies |\vec{F}| = \frac{GMm}{r^2}$$

Por lo tanto,  $|\vec{F}| = \frac{GMm}{r^2}$ , que es la fórmula de Newton, es válida con objetos con simetría radial y por lo tanto válida para los planetas.

### II.2.3. Un poco de mecánica analítica

Lagrange escribió un libro llamado "Mecánica Analítica" publicado en 1788. Este libro describía la mecánica de manera muy matemática lo que presentaba una gran ventaja: permitía la unificación de la misma. Todo se regía en base a un principio con adición de teoremas. Además la mecánica sufrió varias simplificaciones como. por ejemplo. la libertad para escoger las coordenadas libremente.

**Proposición II.5** (Cálculo de variaciones). *Dada  $L$  regular de  $2n + 1$  variables. Supongamos que la integral:*

$$\int_a^b L(q_1(t), \dots, q_n(t), \dot{q}_1(t), \dots, \dot{q}_n(t), t) dt$$

(donde  $\dot{q}_i = \frac{dq_i}{dt}$ .)

alcanza un máximo o mínimo para ciertas  $q_i$  (con  $1 \leq i \leq n$ ) regulares con valores  $q_i(a)$ ,  $q_i(b)$  fijados. Entonces dichas  $q_i$  satisfacen:

ECUACIONES DE EULER-LAGRANGE

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{\partial L}{\partial q_i} \text{ para } 1 \leq i \leq n$$

Además si  $L$  no depende de la última variable (la  $t$  suelta) la energía es constante para las  $q_i$  solución. Es decir:

$$E = \sum_{i=1}^n \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L$$

Las propiedades minimizantes o maximizantes no dependen de las coordenadas elegidas (polares, cartesianas, etc...).

Estas ecuaciones de Euler-Lagrange se cumplirán siempre que la integral descrita alcance un máximo o un mínimo, pero no nos dice nada sobre la existencia o no de esos extremos. En los siguientes ejemplos damos por supuesto su existencia:

**Ejemplo: Distancia más corta entre dos puntos**

El problema consiste en hallar la curva  $\sigma(t) = (t, y(t))$  más corta que conecta  $(0, 0)$  y  $(1, 1)$ .

$$\text{longitud} = \int_0^1 \|\sigma'(t)\| dt = \int_0^1 \sqrt{1 + (y'(t))^2} dt$$

$$y = q; \quad y' = \dot{q}; \quad n = 1; \quad L = \sqrt{1 + \dot{q}^2}$$

Pasamos a las ecuaciones de Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) = \frac{\partial L}{\partial q} \implies \frac{d}{dt} \left( \frac{2\dot{q}}{2\sqrt{1+\dot{q}^2}} \right) = 0 \implies$$

$$\implies \frac{q}{\sqrt{1+\dot{q}^2}} = \text{cte} \implies \frac{\dot{q}^2}{1+\dot{q}^2} = \text{cte} \implies \dot{q} = \text{cte} \implies q(t) = At + B$$

Así, considerando los datos iniciales:

$$y = 1; q(0) = 0; q(1) = 1$$

tenemos que:

$$q(t) = y(t) = t \implies \sigma(t) = (t, t)$$

El resultado obtenido, como era de esperar, es una recta.

**Observación:** Podríamos haber resuelto el problema de otra forma, basándonos en que la energía es constante:

$$E = \dot{q} \frac{\sigma L}{\sigma \dot{q}} - L \implies \text{cte} = \dot{q} \frac{\dot{q}}{\sqrt{1+\dot{q}^2}} - \sqrt{1+\dot{q}^2} = \frac{-1}{\sqrt{1+\dot{q}^2}} \implies \dot{q} = \text{cte}$$

**Ejemplo: Braquistocrona, J.Bernouilli, Newton, Euler, Lagrange**

El problema consiste en hallar el tobogán más rápido que une  $(0, 0)$  y  $(\frac{\pi}{2}, -1)$ .

$h =$  altura medida desde el origen.

Vamos a parametrizar la curva en función de la altura. Para ello, expresamos la  $x$  en función de la  $y$ .

En mecánica la velocidad vertical viene dada por:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{\sqrt{2gh}}{\sqrt{1+(x'(h))^2}}$$

Para calcular el tiempo total integramos:

$$\int_0^1 \frac{dt}{dh} dh = \int_0^1 \frac{\sqrt{1+(x')^2}}{\sqrt{2gh}} dh; g = 9.8$$

Considerando  $n = 1$ ;  $t = h$ ;  $q = x$ ;  $\dot{q} = x'$  tenemos el Lagrangiano expresado como:

$$L = \frac{\sqrt{1+\dot{q}^2}}{\sqrt{2gt}}$$

y basándonos en las ecuaciones de Euler-Lagrange tenemos:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) = \frac{\partial L}{\partial q}; \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \text{cte} \implies \frac{\dot{q}}{\sqrt{t(1+\dot{q}^2)}} = \text{cte}$$



se trata de una ecuación diferencial un tanto difícil de modo que nos creemos que el resultado es:

$$q(t) = \frac{u - \sin(u)}{2}; \text{ con } t = \sin^2\left(\frac{u}{2}\right)$$

Escribiéndolo de forma elegante, tenemos que el tobogán obtenido es la cicloide:

$$\sigma(u) = \left( \frac{u - \sin u}{2}, -\sin^2\left(\frac{u}{2}\right) \right)$$

## II.2.4. Principio básico de la mecánica

**Teorema II.6** (Principio básico de la mecánica (principio de Hamilton)). Las trayectorias de los sistemas mecánicos dan extremos de  $\int_a^b L dt$  donde  $L$  es el lagrangiano y  $L = T - V$ , siendo  $T$  la energía cinética y  $V$  la energía potencial.

Energía cinética

**Definición II.1 Energía cinética.** Para un sistema mecánico con masas  $m_i$  en las posiciones  $(x_i, y_i, z_i)$  la energía cinética es:

$$T = \frac{1}{2} \sum_1^i m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2)$$

Energía potencial

**Definición II.2 Energía potencial.** Una función  $V$  escalar tal que  $\vec{F} = -\nabla V$  (El sistema es conservativo)

**Ejemplo:** Vamos a ver el potencial en el caso gravitatorio:

$$\vec{F} = \frac{-GMm}{\|\vec{x}\|^3} \vec{x} \xrightarrow{\text{int.con respecto de } x} V = \frac{-GMm}{\|\vec{x}\|}$$

Cerca de la superficie de la Tierra se suele hacer la siguiente aproximación:

$$V \text{ a altura } h = \frac{-GMm}{R+h} = \frac{-GMm}{R} \frac{1}{1+h/R} \stackrel{\frac{1}{1+x} \approx 1-x}{\approx} \frac{-GMm}{R} + \frac{GM}{R^2} hm = m(cte_1 + h*cte_2)$$

$$\implies V \approx mgh + cte$$

### II.2.4.1. Importancia del Principio Básico de la mecánica

Principio básico  $\implies$  Las trayectorias son soluciones de las ecuaciones de Euler-Lagrange.

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{\partial L}{\partial q_i}$$

Importante: Se pueden escoger las coordenadas que uno quiera. Las mínimas que uno necesite y preferiblemente que reflejen las simetrías.

**Ejemplo: El péndulo simple** Con la siguiente nomenclatura:

$$\begin{cases} l = \text{longitud} \\ m = \text{masa} \\ q_1 = \alpha \\ T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \\ V = mgy \end{cases}$$

Tomando como coordenada que describe el sistema  $\alpha$  en lugar de las coordenadas polares  $(x,y)$  nos queda:

$$\begin{cases} x = l \sin \alpha \\ y = l \cos \alpha \end{cases} \implies T = 1/2ml^2\dot{\alpha}^2 \text{ y } V = -mgl \cos \alpha$$

Con esto escribimos las ecuaciones de Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}} \right) = \frac{\partial L}{\partial \alpha} \implies \frac{\partial}{\partial t} (ml^2\dot{\alpha}) = -mgl \sin \alpha \implies ml^2\ddot{\alpha} = -mgl \sin \alpha$$

De lo que sacamos la ecuación del péndulo simple:

$$\ddot{\alpha} + \frac{g}{l} \sin \alpha = 0$$

- Otra forma de hacer este problema es utilizando la energía, es decir, que:

$$E = \dot{\alpha} \frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}} - L \text{ es constante}$$

$$E = 1/2ml^2\dot{\alpha}^2 - mgl \cos \alpha \implies \dot{\alpha}^2 - \frac{2g}{l} \cos \alpha = cte$$

Esta última fórmula es equivalente a la otra del péndulo simple que ya habíamos hallado.

**Ejemplo:** Ahora vamos a intentar resolver lo que habíamos visto de Kepler (movimiento de los planetas) con este principio.

Suponemos que las órbitas son planas. Más adelante veremos cómo deducir rápidamente este tipo de cosas sólo mirando a  $L$  (Lagrangiano).

Tenemos

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \text{ y } V = -\frac{GMm}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Tomemos  $\theta$  y  $r$  como coordenadas generalizadas. Entonces tenemos:

$$V = -\frac{GMm}{r} \text{ y } T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2)$$

y de la fórmula de  $T = L - V$  deducimos que :

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \frac{GMm}{r}$$

Escribimos las ecuaciones de Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right) = \frac{\partial L}{\partial r}$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = \frac{\partial L}{\partial \theta}$$

$$E = \dot{r} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} + \dot{\theta} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - L$$

Ahora queremos hallar la  $r$  en función de  $\theta$  puesto que queremos obtener la ecuación de la elipse:

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{dr/dt}{d\theta/dt} = \frac{\dot{r}}{cte/r^2}$$

Y si despejamos en la ecuación de  $E$  nos queda:

$$cte^{-1}r^2 \sqrt{\frac{2E}{m} + \frac{cte^2}{r^2} + \frac{2GM}{r}}$$

Para escribir la ecuación de forma más clara, cambiamos el nombre de las constantes por  $K_1$  y  $K_2$  y despejamos  $\theta$  de la siguiente forma:

$$d\theta = \frac{-d\left(\frac{K_1}{r} - K_2\right)}{K_1\sqrt{\dots}}$$

Y como  $K_1$  y  $K_2$  son ctes podemos escribir

$$-d\left(\frac{K_1}{r} - K_2\right) = \frac{K_1}{r^2} dr$$

Llegando a:

$$\frac{dr}{r^2\sqrt{\dots}} = d\theta \implies \theta = \int \frac{d\left(\frac{K_1}{r} - K_2\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{K_1}{r} - K_2\right)^2}}$$

Sabiendo que

$$-\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\arcsin + cte = \arccos + cte \implies \theta = \arccos\left(\frac{K_1}{r} - K_2\right) + cte$$

Podemos suponer que la cte es 0:

$$\cos \theta = \frac{K_1}{r} - K_2 \rightarrow r = \frac{K_1}{K_2 + \cos \theta}$$

Y como la ecuación de la cónica es:

$$r = \frac{cte}{1 + cte \cdot \cos \theta}$$

Ya hemos probado la 1ª Ley de Kepler con las ecuaciones de Euler-Lagrange.

La ventaja de resolver los dos ejemplos anteriores con Euler-Lagrange es que hemos podido escoger las variables que quisiéramos, de forma que el cálculo ha sido más lógico y directo

## II.3. Leyes de conservación: Teorema de Noether

Fácil pero muy importante en Física teórica.

¿Cómo inventarse leyes de conservación?

**Teorema II.7.** *Teorema de Noether Cada simetría de L da lugar a una ley de conservación.*

$$L = L(q_1, q_2, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t)$$

*Demostración.* Suponemos que L no depende de t.

Supongamos que existen  $q_i(t, h)$  con  $q_i(t, 0) = q_i(t)$  de forma que L no varía.

$$L = \frac{1}{2}m(x^2 + y^2 + z^2) + x$$

$$q_1 = x \quad q_2 = y \quad q_3 = z$$

$$y \rightarrow y + h$$

$$q_2(t, h) = q_2(t) + h \quad y(t, h) = y(t) + h$$

Si L es invariante al variar h (en un entorno de 0). Entonces:

$$0 = \frac{\partial L}{\partial h} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial h} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial h}$$

$$= \sum_{i=1}^n \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial q_i}{\partial h} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial h} \right) = \frac{d}{dt} \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial q_i}{\partial h} \right)$$

Para esto hemos usado:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{\partial L}{\partial q_i} \quad \text{y} \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial q_i}{\partial h} \right) = \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial h}$$

Si  $q_i(t) \rightarrow q_i(t, h)$  dejan invariante  $L$  (no depende de la última variable) y  $L$  satisface las ecuaciones de Euler-Lagrange. Entonces  $\sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial q_i}{\partial h}$  se conserva (no varía en  $t$ ).

**Observación:** Se suele tomar  $h = 0$

□

**Ejemplo:**

$$L = \frac{1}{2}m(x^2 + y^2 + z^2) + x$$

$$y \rightarrow y + h \quad q_2 \rightarrow q_2 + h$$

$$(q_1 \rightarrow q_1 \quad q_3 \rightarrow q_3)$$

$$x \rightarrow x \quad z \rightarrow z$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial q_i}{\partial h} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} \frac{\partial q_2}{\partial h} = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \frac{\partial y}{\partial h} = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}}$$

(usando  $\frac{\partial(y+h)}{\partial h} = 1$ )

Por lo tanto  $\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}$  se conserva.

**Ejemplo:**

$$Y \rightarrow y + h \quad z \rightarrow z + 2015h \quad (x \rightarrow x)$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial q_i}{\partial h} = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} 1 + \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} 2015 = m\dot{y} + 2015m\dot{z} \quad \text{se conserva}$$

**Ejemplo:**

$$Y \rightarrow y + \lambda h \quad z \rightarrow z + \mu h \quad (x \rightarrow x) \quad \lambda, \mu \text{ arbitrarios}$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial q_i}{\partial h} = \lambda m\dot{y} + \mu m\dot{z} = (0, \lambda, \mu) * (0, m\dot{y}, m\dot{z}) \quad \text{se conserva}$$

$\Rightarrow$  el vector  $(0, m\dot{y}, m\dot{z})$  se conserva

**Observación:**

Siempre que  $L$  no dependa de  $q_{i_0}$  se puede tomar  $q_{i_0} \rightarrow q_{i_0} + h$  y el Teorema de Noether implica, como en el ejemplo que  $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{i_0}}$  se conserva y esto se deduce solo con las ecuaciones de Euler Lagrange directamente.

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{i_0}} \right) = \frac{\partial L}{\partial q_{i_0}} = 0 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{i_0}} = \text{cte}$$

**Observación:**

Con Lagrangianos de una forma muy común en Física, el teorema de Noether da la conservación del momento lineal y del momento angular (ej 13)

**Ejemplo:** *Casi ej 13 Hoja 1*

$$L = \frac{1}{2}m(x^2 + y^2 + z^2) - V(\|\mathbf{x}\|)$$

(gravitación  $L = \frac{1}{2}m(x^2 + y^2 + z^2) + \frac{GMm}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ )

Es invariante por giros, tomemos el giro alrededor de el eje  $z$ .

$$(x, y, z) \rightarrow (x \cos h - y \sin h, x \sin h + y \cos h, z)$$

No hace falta hacer la cuenta directamente, se puede hacer teniendo en cuenta las matrices (la derivada de una aplicación lineal es una aplicación lineal) ?? No estoy seguro de que dijo aquí.

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial q_i}{\partial h} \text{ se conserva}$$

$$m\dot{x}(-x * 0 - y * 1) + m\dot{y}(x * 1 - y * 0) + m\dot{z} * 0 = m(\dot{y}x - \dot{x}y)$$

Vemos así que la 3ª coordenada del momento angular se conserva

$$\mathbf{r} \times m \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

**Resumen/Conclusión** ¿Cómo deducir que las órbitas son planas sólo mirando al lagrangiano?

1. Por simetría esférica  $\xrightarrow{\text{Tma de Noether}} m \vec{x} \times \vec{x}'$  es constante (cte)  $\implies \vec{x} \cdot \vec{cte} = 0$

2. Ha intentado escribir el lagrangiano en coordenadas esféricas y deducir lo de las órbitas así pero no lo ha conseguido, lo colgará en su página y ya lo pondremos por aquí

## Capítulo III

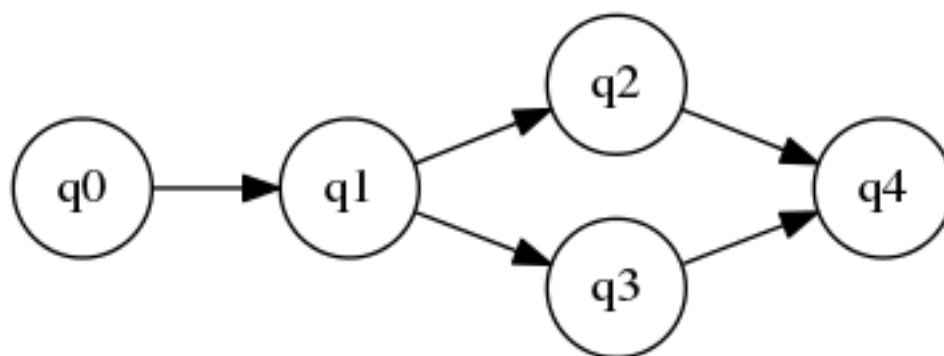
# Cadenas de Markov

### III.1. Un modelo para redes

En este capítulo vamos a ver cómo ordena Google las páginas que resultan de la búsqueda para mostrarlas por orden de prioridad.

Supongamos que tenemos una red de páginas web conectadas por enlaces (Google afirma cubrir unas  $3 \cdot 10^{13}$  páginas web). Vamos a ver las páginas como vértices de un grafo y los enlaces como aristas dirigidas (especificando un sentido).

Matemáticamente esto es un grafo dirigido:



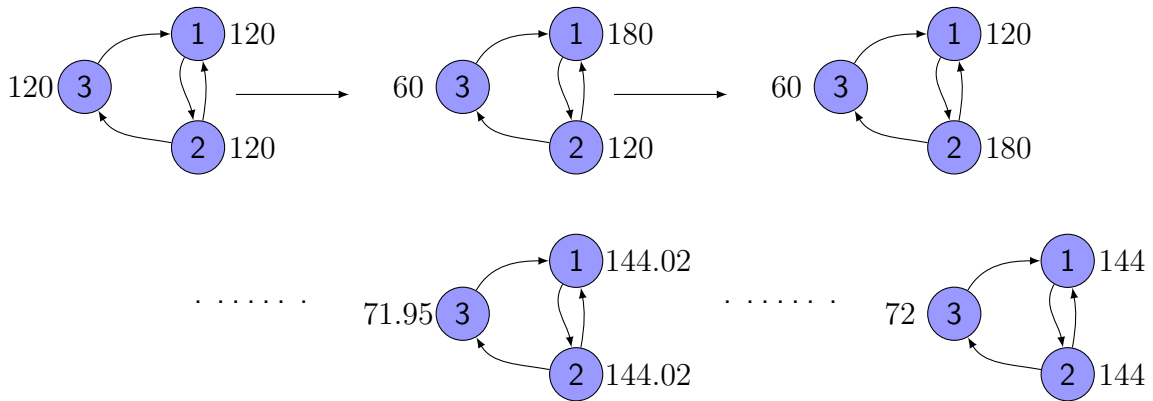
¿Cómo ordenar por relevancia los vértices? ¿En qué orden aparecerán las páginas?

Para poder determinar qué páginas son más importantes vamos a suponer un paseo aleatorio por los vértices (los internautas navegan al azar siguiendo los enlaces) de forma que una mayor acumulación en ciertos vértices indicará que son más importantes.

**Observación:** No funciona literalmente, hay que hacer modificaciones.

A la larga esto converge...





Como había 360 al principio parece que:

- Probabilidad de estar en 1 es  $\frac{144}{360} = \frac{2}{5}$
- Probabilidad de estar en 2 es  $\frac{144}{360} = \frac{2}{5}$
- Probabilidad de estar en 3 es  $\frac{72}{360} = \frac{1}{5}$

Según esto 1 y 2 son igual de importantes y 3 es la mitad de importante.

La distribución que pensamos que da el límite es estacionaria (no cambia con el tiempo).

Recordamos que en la red anterior cuando el tiempo tiende a infinito parece que la distribución de personas se estabiliza.

Parece además que sea cual sea la distribución inicial llegamos a proporciones similares. En este caso llegamos a la distribución límite  $(\frac{2}{5}, \frac{2}{5}, \frac{1}{5})$ , que es una distribución estacionaria (no varía con el tiempo).

### III.2. Propiedades de los paseos aleatorios

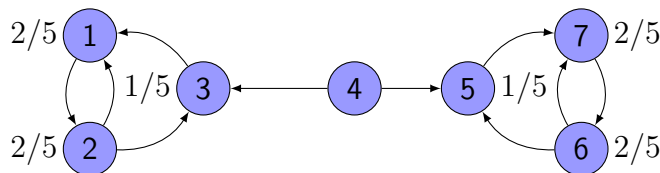
¿Esta simulación con paseos aleatorios siempre sirve para ordenar los vértices (páginas web)?

Debemos estudiar las siguientes preguntas:

- ¿Existe siempre una distribución estacionaria?
- Si existe una distribución estacionaria ¿es única?
- El procedimiento, ¿Da lugar siempre a una distribución límite?
- Si la distribución límite existe, ¿es independiente de la distribución inicial?

Vamos a analizar estas preguntas y sus respuestas una a una.

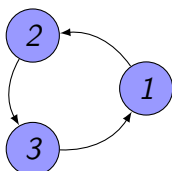
### III.2.1. Si existe una distribución estacionaria ¿es única?



Como desde un lado de la red no se puede acceder al otro podemos decir que las distribuciones  $(\frac{2}{5}, \frac{2}{5}, \frac{1}{5}, 0, 0, 0, 0)$  y  $(0, 0, 0, 0, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{2}{5})$  son estacionarias:

### III.2.2. ¿Existe siempre una distribución estacionaria?

Ejemplo: *Sencillo*



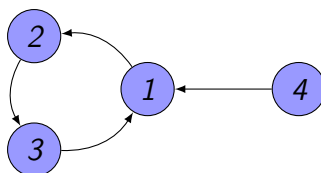
Si pones todos en un nodo oscila:

$$1\ 0\ 0 \rightarrow 0\ 0\ 1 \rightarrow 0\ 1\ 0 \rightarrow 1\ 0\ 0$$

Se puede argumentar que con una distribución inicial uniforme si funciona:

$$\frac{1}{3}\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{3} \rightarrow \frac{1}{3}\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{3}$$

Pero esto no es verdad para cualquier grafo: partiendo de la equidistribución no se tiene la convergencia en general.



$$(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}) \rightarrow (\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, 0) \rightarrow (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 0) \text{ oscila como antes}$$

**La respuesta es negativa en general**

### III.2.3. ¿Existe siempre una distribución límite?

El mismo ejemplo del apartado anterior nos sirve para ver claramente que no es así. Según que distribución inicial escojamos podemos llegar a encontrarnos con un caso sin distribución límite.

### III.2.4. Si la distribución límite existe, ¿Es independiente de la distribución inicial?

Basta usar como distribución inicial las distribuciones estacionarias que vimos para la segunda pregunta III.2.1.

**Observación:**

Para el grafo de III.2.1 se puede probar que  $\exists$  límite:

$$(1 - t) \left( \frac{2}{5}, \frac{2}{5}, \frac{1}{5}, 0, 0, 0, 0 \right) + t \left( 0, 0, 0, 0, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{2}{5} \right) \quad 0 \leq t \leq 1$$

son infinitos contraejemplos como los necesarios para la segunda pregunta III.2.1 y la cuarta.

**Spoiler** P1 es verdad y "perturbando" un poco el grafo (de manera muy sencilla) todas las preguntas tienen respuesta afirmativa.

## III.3. Cadenas de Markov

Cadena de markov

**Definición III.1 Cadena de markov.** Es una sucesión de variables aleatorias  $\{X_n\}_{n=0}^\infty$  que toman valores en un conjunto numerable  $S$  (**conjunto de estados**) tal que

$$Prob(X_{n+1} = V | X_n = U) = Prob(X_{n+1} = V | X_n = U, X_{n-1} = U_{n-1}, \dots, X_0 = U_0)$$

para cualesquiera  $n \geq 0$   $U, V, U_0, \dots, U_{n-1} \in S$

**Observación:** Además supondremos que esta probabilidad no depende de n.

**Idea intuitiva:** n es el tiempo discretizado, lo que ocurra mañana depende con cierta probabilidad de lo que ocurre hoy sin que importe conocer la historia anterior.

Decir que no depende de n es decir que según pasa el tiempo, las reglas no cambian.

**Ejemplo:**  $X_n =$  suma de puntuaciones el día n al tirar un dado cada día.

El conjunto de todos los estados serían todas las puntuaciones posibles . ( $S =$  naturales)

Sabiendo lo que llevo acumulado hoy, tengo una cierta probabilidad de obtener mañana diferentes resultados, pero no depende de lo que ocurrió ayer; no me importa cómo he llegado a sumar lo que llevo hoy.

**Ejemplo: 2**  $S =$  puntuaciones en el tenis.

$X_n =$  puntuación en el punto n

Suponemos que el jugador A tiene prob  $p > 1/2$  de ganar cada punto.

Pensando un poco las puntuaciones en el tenis vemos que S solo puede tener 20

elementos.

$S =$  puntuaciones numéricas, deuce, advantages(A o B) , victoria (A o B).

Se puede comprobar que:

$$Prob(victoria A) = \frac{p^4 \cdot (1 - 16(1 - p)^4)}{p^4 - (1 - p)^4}$$

Esto es como curiosidad, ver que con tener sólo un poco más de probabilidad de ganar un punto, la probabilidad de ganar un juego y un set va creciendo.

Si  $|S| = \infty$  entonces la cadena de Markov es infinita y se supone  $S = \mathbb{Z}^+(\mathbb{N} - \{0\})$

Si  $|S| < \infty$  entonces la cadena de Markov es finita y se supone  $S = \{1, 2, \dots, N\}$

Probabilidad de transición

**Definición III.2 Probabilidad de transición.** del estado  $i$  al  $j$

$$P_{ij} = Prob(X_{n+1} = j | X_n = i) = Prob(X_1 = j | X_0 = i)$$

Los  $P_{ij}$  forman la **matriz de transición**.

**Propiedades**

1.  $\sum_{j \in S} P_{ij} = 1$
2.  $Prob(X_1 = j) = \sum_{i \in S} Prob(X_0 = i) P_{ij}$

**Demostración.**

1.  $\sum_{j \in S} P_{ij} = \sum_{j \in S} Prob(X_1 = j | X_0 = i) = Prob(X_1 \in S | X_0 = i) = 1$
2. Utilizando la ley de la probabilidad total

$$Prob(X_1 = j) = \sum_{i \in S} Prob(X_0 = i) \cdot Prob(X_1 = j | X_0 = i)$$

□

Ley de la probabilidad total

**Definición III.3 Ley de la probabilidad total.** Sea  $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$  una partición de  $\Omega$  con  $P(A_i) > 0 \forall i = 1, 2, \dots, n$ . Entonces,  $\forall B \subset \Omega$  medible (perteneciente a  $\mathcal{M}$ ):

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^n P(B|A_i)P(A_i)$$

Esta propiedad se obtiene de despejar de la formula de la probabilidad condicionada:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

De las dos propiedades deducimos que:

- **(prop.1)** La matriz de transición  $P_{ij}, i, j \in S$  tiene elementos  $0 \leq P_{ij} \leq 1$  y la suma de los elementos de cada fila es 1.
- Escribiendo  $(\Pi_0) = Prob(X_0 = i)_{i \in S}$  como vector fila, y  $(\Pi_n) = Prob(X_n = i)_{i \in S}$   
Entonces por **(prop.2)** :  $(\Pi_1) = (\Pi_0) \cdot P$  ( $P =$  matriz de transición)

De la misma forma  $(\Pi_2) = (\Pi_1) \cdot P$ , etc...

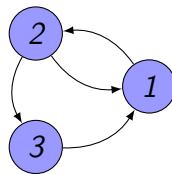
Iterando nos queda:

$$(\Pi_n) = (\Pi_0) \cdot P^n$$

Ahora vemos cómo aplicar esto a las páginas web.

Teniendo en cuenta que en la realidad la  $P$  sería una matriz de  $3 \cdot 10^{13} \times 3 \cdot 10^{13}$  la forma más fácil de calcular  $P^n$  es con la forma canónica de Jordan. Veámoslo con un ejemplo.

### Ejemplo: 1



$S =$  páginas web (vértices)

$P_{ij}$  = probabilidad de , estando en la página  $i$ , llegar a la página  $j$  en el instante siguiente.

$$Prob(X_1 = (2)|X_0 = (1)) = 1$$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Hacemos Jordan:

$$P = C^{-1} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & z & \\ & & \bar{z} \end{pmatrix} C$$

Haciendo los cálculos nos queda  $z = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot e^{\frac{3\pi i}{4}}$

Por lo tanto:

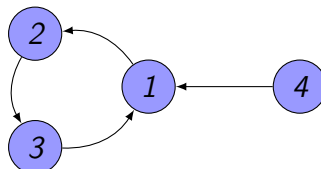
$$P^n = C^{-1} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & z^n & \\ & & \bar{z}^n \end{pmatrix} C \xrightarrow{n \rightarrow \infty} C^{-1} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix} C = \begin{pmatrix} 2/5 & 2/5 & 1/5 \\ 2/5 & 2/5 & 1/5 \\ 2/5 & 2/5 & 1/5 \end{pmatrix} = L$$

Esto implica que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\Pi_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\Pi_0) \cdot P^n = (\Pi_0) \cdot L = (2/5 \quad 2/5 \quad 2/5)$$

Que es independiente de  $\Pi_0$

### Ejemplo: 2



$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = C^{-1} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & w & & \\ & & \bar{w} & \\ & & & 0 \end{pmatrix} \cdot C$$

$w = e^{\frac{2\pi i}{3}}$ , si seguimos calculando las potencias de  $w$  y de  $\bar{w}$  vemos que van oscilando entre los valores  $w, \bar{w}, 1$ , por lo que vemos que en este caso  $P^n$  no tiene límite.

$$\exists (\Pi_0) : \nexists \lim (\Pi_0) \cdot P^n$$

Sin embargo con  $(\Pi_0) = (1/3 \quad 1/3 \quad 1/3 \quad 0)$  se comprueba  $(\Pi_0) = (\Pi_0) \cdot P$

Con lo que para ese  $(\Pi_0)$  si tenemos límite. Ya veremos más adelante cómo se llaman este tipo de distribuciones.

Lo que hemos comprobado con estos dos ejemplos es que si conocemos la forma canónica de Jordan podemos saber si tenemos convergencia o no.

### Resumen de lo visto hasta ahora

- Cadenas de Markov  $\begin{cases} (\Pi_0) = \{P(X_0 = i)\}_{i \in S} \rightarrow \text{distribución inicial} \\ P = \text{Matriz de transición} \end{cases}$
- Distribución de probabilidad en el instante  $n = (\Pi_0)P^n$
- $P^n$  se calcula con la forma canónica de Jordan
- En general queremos que exista la **distribución límite** :  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\Pi_0)P^n$

**Observación:** Si existe  $(\Pi) = \lim (\Pi_0) P^n$  entonces  $(\Pi) = (\Pi) P$

▮ **Demostración.**  $(\Pi) = \lim (\Pi_0) P^{n+1} = (\lim (\Pi_0) P^n) P = (\Pi) P$  □

Distribuciones  
estacionarias

**Definición III.4 Distribuciones estacionarias.** Se dice que  $(\Pi)$  es una distribución de probabilidad estacionaria si:

$$(\Pi) \cdot P = (\Pi)$$

**Observación:** Con estas distribuciones podemos calcular el límite y estudiar la convergencia sin utilizar la forma canónica de Jordan.

Recordando las preguntas que nos hicimos con las propiedades de los paseos aleatorios vemos que, experimentalmente, las cadenas de Markov muy interconectadas responden afirmativamente a esas preguntas.

Vamos a ver dos versiones de lo que se entiende por **conexión** de una cadena de Markov

Cadena de  
Markov  
Irreducible

- **Definición III.5 Cadena de Markov Irreducible.** Se dice que una cadena de Markov es **irreducible** si se puede ir de un estado a otro en un número finito de pasos. Es decir

$$\forall i, j \in S \exists k : P(X_k = j | X_0 = i) \neq 0$$

Otra forma de definirlo es con la matriz de transición:

$$\forall i, j \in S \exists k : (P^k)_{ij} \neq 0$$

Cadena de  
Markov  
Regular

- **Definición III.6 Cadena de Markov Regular.** Se dice que una cadena de Markov es **regular** si existe un número de pasos tal que dándolos se puede pasar de un estado a cualquier otro. Es decir:

$$\exists k : P(X_k = j | X_0 = i) \neq 0 \forall i, j \in S$$

Otra forma de definirlo es con la matriz de transición:

$$\exists k : \text{ todos los elementos de } P^k \text{ son positivos.}$$

Los experimentos muestran que en casos con mucha "interconexión"  $\exists \lim(\Pi_0)P^n$  y no depende de  $(\Pi_0)$ .

En principio sabemos resolver cada problema, en caso finito, con la forma canónica pero esto no es muy práctico.

### III.3.1. Teoremas

**Teorema III.1 (Teorema 1).** *Una cadena de Markov finita siempre tiene al menos una distribución estacionaria.*

**Observación:** Teorema 1  $\iff$  1 es autovalor de P con autovector por la izquierda.

Para demostrarlo vamos a utilizar el **Tma. del punto fijo de Brouwer**.

**Teorema III.2 (Teorema del Punto fijo de Brouwer).**

$$f : B^n \rightarrow B^n \text{ B bola cerrada en } \mathbb{R}^n \implies \exists \vec{x} \in \mathbb{R}^n : f(\vec{x}) = \vec{x}$$

En dimensión dos no es intuitivo y en las demás dimensiones ya es muy difícil, por lo que vamos a creérselo y punto<sup>1</sup>.

Una vez recordado esto ya nos podemos poner con la demostración del Teorema 1:

*Demostración.*

$$K = \{(x_1, x_2, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^n : \sum x_i = 1, x_i \geq 0\}$$

Vemos que K es homeomorfo a la bola  $B^{N-1}$

Ejemplo N=2: (dibujo) Es obvio que es homeomorfo porque es un segmento.

Ejemplo N=3: (dibujo) K sería el triángulo. Con una proyección tendría el triángulo en el plano xy. Una vez pasado a  $\mathbb{R}^2$ , para demostrar que es homeomorfo a  $B^2$  solo habría que "estirarlo" hasta la bola.

Entonces tenemos K homeomorfo a  $B^{N-1}$ . Multiplicamos los elementos de K por P.

$x \in K \implies (x) \cdot P \in K$  porque como la suma de los elementos de las filas de  $P=1 \implies (x) \cdot P$  sigue perteneciendo a K.

Y teniendo esto es fácil terminar la demostración ya que por el teorema de Brouwer  $\exists(x) : (x) = (x) \cdot P$  □

---

<sup>1</sup>He dicho



**Teorema III.3** (Teorema 2). *Para una cadena de Markov finita regular  $\exists \lim(\Pi_0)P^n$  y el resultado no depende de  $(\Pi_0)$  y es la única distribución estacionaria.*

Para esta demostración vamos a utilizar el siguiente lema:

**Lema III.4.** *Tenemos la aplicación lineal*

$$F : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$$

y  $\Omega = \text{compacto que contiene a } \vec{\sigma}$ .

Supongamos que  $F(\Omega) \subset \text{Int}(\Omega)$ . Entonces

$$\forall \vec{x}_0 \in \Omega, \vec{x}_n = F(\vec{x}_{n-1}) \text{ se cumple que } \vec{x}_n \rightarrow \vec{\sigma}$$

Al ser F aplicación lineal, el  $\vec{\sigma}$  va al  $\vec{\sigma}$ .

Si vas iterando muchas veces, al final F se va haciendo tan pequeña que tiende a  $\vec{\sigma}$

Creyéndonos el lema pasamos a la demostración del teorema 2.

*Demostración.* Tomamos K como en el Teorema 1.

$$K = \{(x_1, x_2, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N : \sum x_i = 1, x_i \geq 0\}$$

y  $f(x) = (x) \cdot P$

Por el Teorema 1  $\implies \exists(\Pi)$  estacionaria  $f(\Pi) = (\Pi)$ . Pero todavía no sé si es única.

**Observación:** K no contiene al origen  $\implies$  el lema no se aplica directamente pero hacemos una pequeña variación:

$$\Omega = \{(x) - (\Pi) : (x) \in K\} \rightarrow \text{compacto y convexo}$$

Convexo: si tengo dos puntos, también tengo los puntos entre medias.

Entonces

$$\Omega \subset \{(x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N : \sum x_i = 0\} = H$$

Podemos identificar H con  $\mathbb{R}^{N-1}$ .

Para explicar esto ponemos el ejemplo de una recta, que mirada desde cierta perspectiva, se ve como un punto, o un plano como una recta.

Se cumple que  $f(\Omega) \subset \Omega$  porque  $f(K) \subset K$  y  $f^{-1}(\Pi) = (\Pi)$

Ahora vamos a demostrar que va al interior.

$$Int(\Omega) = \{(x) - (\Pi) : (x) \in K, x_i > 0\} [= \text{conjunto compacto - frontera}]$$

Por ser regular  $\exists k : P^k$  tiene elementos positivos ( $> 0$ ). Entonces

$$f^k(\Omega) = f \circ f \circ \dots \circ f(\Omega) \subset Int(\Omega)$$

Ya que en otro caso habría puntos de la frontera y estos tienen alguna coordenada no nula.

Aplicando el lema a  $f^k$  y tomando  $(\Pi)$  estacionaria y  $(x) = (\Pi_0)$  se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} ((x) - (\Pi)) \cdot P^{kn} = (0)$$

Entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\Pi_0) \cdot P^{kn} = (\Pi)$$

y finalmente

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\Pi_{kn}) = (\Pi)$$

Y el límite es único.

Por lo tanto, aplicando  $P$   $k-1$  veces:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\Pi_n) = (\Pi)$$

□

**Ejemplo:**

$$\lim(\Pi_{2n}) = (\Pi) \implies \lim(\Pi_{2n}) \cdot P = (\Pi) \cdot P \implies \lim(\Pi_{2n+1}) = (\Pi)$$

**Teorema III.5 (Teorema 3).** Para cualquier cadena de Markov finita, el límite:

$$\lim \frac{(\Pi_0) + (\Pi_1) + \dots + (\Pi_n)}{n + 1} \quad (\text{con } (\Pi_n) = (\Pi_0)P^n)$$

existe y converge a una distribución estacionaria.

*Demostración.*

$$S_n = \frac{1}{n + 1} \sum_{k=0}^n P^k \quad S_n \text{ es una matriz}$$

La suma de los elementos de cada fila de  $P^k = 1$ . Como hacemos promedio  $\implies$  A  $S_n$  le pasa lo mismo y sus elementos están en  $[0, 1]$ .

$$B - W \Rightarrow \exists n_j : S_{n_j} \text{ converge } (\exists \lim_{j \rightarrow \infty} S_{n_j})$$

Usando el teorema de Boltzno Weierstrass, si no existiera el límite de  $S_n$  existirían  $n_j, m_j$  con  $\lim S_{n_j} \neq \lim S_{m_j}$ .

$$L_1 = \lim S_{n_j} \quad L_2 = \lim S_{m_j}$$

$$L_1 P = L_1 \quad P L_2 = L_2$$

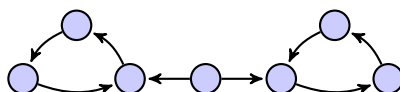
$$L_1 S_{m_j} = L_1 \quad S_{n_j} L_2 = L_2$$

$$\xrightarrow{j \rightarrow \infty}$$

$$L_1 L_2 = L_1 \quad L_1 L_2 = L_2 \Rightarrow L_1 = L_2$$

□

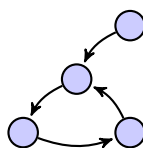
Ejemplo:



Tenía muchas distribuciones estacionarias:  $\exists \lim (\Pi_0) P^n$  pero depende de  $(\Pi_0)$ .

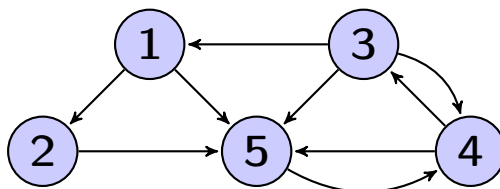
No es irreducible  $\Rightarrow$  (lo veremos) se pierde la unicidad de la distribución estacionaria.

Ejemplo:



No es regular, por ello hay dependencia en  $(\Pi_0)$ , no es regular, no existe  $\lim (\Pi_0) P^n$  en general. Pero  $\exists \lim$  del tercer teorema III.5 y en  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0)$ .

### III.3.2. Page Rank Algorithm



$$\text{Modelo: } P_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{sino hay enlace de } i \text{ a } j \\ \frac{1}{n^\circ \text{ de enlaces salientes}} & \text{si hay enlace de } i \text{ a } j \end{cases}$$

$P$  es una matriz  $N \times N$   $N = 3 \cdot 10^{13}$ .

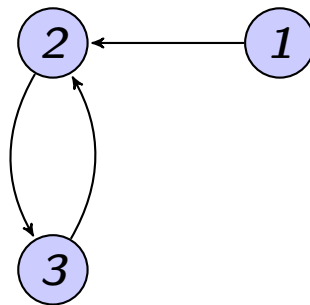
**Idea** Si estuviéramos en las hipótesis del Teorema 2 III.3 entonces  $(\Pi_0)P^{n^\circ \text{ grande}}$  aproximaría la distribución de probabilidades de estar en cada página (navegando por los enlaces al azar) (en la práctica  $50 \leq n^\circ \text{ grande} \leq 100$ ).

Esencialmente lo que se hace para estar en las hipótesis del Teorema 2 III.3 es cambiar ceros por números pequeños. Así se convierte en una matriz con elementos  $> 0$ , con lo que se cumple la definición de regular con  $k = 1$ .

Concretamente se cambia la  $P$  original por:

$$P_\varepsilon = (1 - \varepsilon)P + \varepsilon E \quad \text{siendo } E = \text{matriz con todos sus elementos } \frac{1}{n}$$

**Ejemplo:**



$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

No podemos sustituir directamente los 0 por  $\varepsilon$  ya que entonces no sumarían 1 las filas.

Por tanto debemos sustituir los 0 por  $\delta$  y ajustamos los elementos no nulos para que sumen 1.

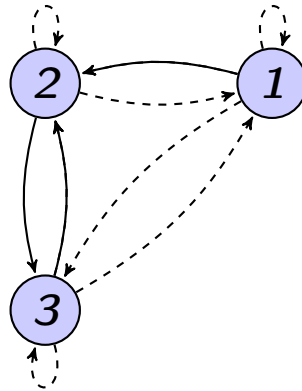
$$P_\delta = \begin{pmatrix} \delta & 1 - 2\delta & \delta \\ \delta & \delta & 1 - 2\delta \\ \delta & 1 - 2\delta & \delta \end{pmatrix}$$

$\delta = \frac{\varepsilon}{3}$  (solo notación)  $\Rightarrow$  esta última matriz es:

$$P_\delta = (1 - \varepsilon) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

Es fácil comprobar (ej) que  $P_\epsilon$  tiene filas con suma 1. Además, si  $\epsilon$  pequeño,  $P_\epsilon \approx P$ .

Lo que hacen los  $\epsilon$  es representar la posibilidad de que alguien salte a una página aleatoria.



En este mismo ejemplo vamos a ver qué pasa con la convergencia:

Intuitivamente los nodos 2 y 3 deberían tener probabilidad  $\frac{1}{2}$  y el nodo 1, probabilidad 0.

Si partimos de  $(\Pi_0) = (x, y, z)$ , sin hacer ningún cambio en  $P \implies$

$$(\Pi_1) = (\Pi_0) P = (0, x + z, y) \rightarrow (\Pi_2) = (0, y, x + z) \rightarrow \dots \rightarrow \text{oscila}$$

¿Qué pasa si lo miramos con  $P_\epsilon$ ?

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} (\Pi_0) P_\epsilon = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left( \frac{\epsilon}{3}, \frac{1 - 2\epsilon/3}{2 - \epsilon}, \frac{1 - \epsilon + \epsilon^2/3}{2 - \epsilon} \right)$$

Para  $\epsilon \rightarrow 0$  tendremos algo cercano a la intuición  $(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

Hasta aquí la parte teórica pero ¿realmente se puede hacer algo similar con  $N = 3 \cdot 10^{13}$ ?

En vez de  $\lim (\Pi_0) P_\epsilon^n$ , se calcula  $(\Pi_0) P_\epsilon^{n.\text{grande}}$  con  $(50 \leq n \text{ grande} \leq 100)$

Y ahora vamos a ver el coste que tiene la operación  $(\Pi_0) P_\epsilon = (1 - \epsilon) (\Pi_0) P + \epsilon (\Pi_0) E$ :

Vemos que  $\epsilon (\Pi_0) E$  no requiere ninguna operación. Si lo vemos en el ejemplo de  $N = 3$ :

$$(x, y, z) \cdot \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} = (1/3, 1/3, 1/3)$$

**Observación:**  $\frac{x}{3} + \frac{y}{3} + \frac{z}{3} = \frac{1}{3}(x+y+z)$  y  $(x+y+z) = 1$  porque son las probabilidades de pasar a  $x$ , a  $y$  o a  $z$ .

En general ,  $\varepsilon(\Pi_0)E = (1/N, 1/N, \dots, 1/N)$

¿y la parte de  $(1 - \varepsilon)(\Pi_0)P$ ?

Es sencilla porque  $P$  está llena de ceros.

- Si cada página tiene  $k$  enlaces,  $P$  tiene sólo  $k \cdot N$  elementos no nulos
- Cada iteración  $(\Pi_n) = (\Pi_{n-1})$  lleva del orden de  $k \cdot N$  operaciones, y esto es factible incluso en nuestro ordenador.

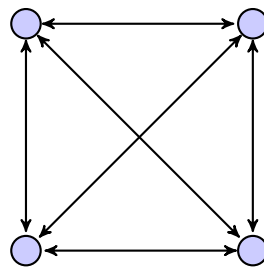
**¿Cuánto de pequeño debería ser  $\varepsilon$ ?**

Matemáticamente debería tomarse  $\varepsilon \rightarrow 0$  pero en la práctica, cogiendo un  $\varepsilon$  muy pequeño la convergencia es muy lenta.

Google dice que usa  $\varepsilon = 0.15$ .

**Curiosidad** : Una prueba de que Google no sólo utiliza este algoritmo para dar prioridad a sus páginas es lo siguiente:

Algunas empresas hacen *link farming* (interconectarse aún sin tener nada que ver) ya que de esta forma, según el algoritmo, deberían subir de prioridad.



Pero google puede detectarlo y eliminarlo, por lo que queda claro que utiliza otras herramientas.

**Propuesta de ejercicios:**

1)

Simular con un programa(en el lenguaje que queramos, mejor C o C++) una red grande (p.ej  $N = 10^6$ ) "aleatoria" , de modo que cada página tenga 10 enlaces , y ver cuánto se tarda en hallar  $(\Pi_0)P_\varepsilon^{100}$  Chamizo tardó 70 segundos.

2)

Crear un generador de textos aleatorios en un idioma.

Lenguaje de programación recomendado: Python

¿Cómo hacerlo?

1. coger un texto largo en el idioma que queramos
2. Estados = pares de palabras consecutivas
3. Unir estados de forma aleatoria.

P.ejemplo: [a manos]  $\rightarrow$  [manos llenas]  $\rightarrow$  [llenas de] / [llenas con] ....

### III.3.3. Cabos sueltos

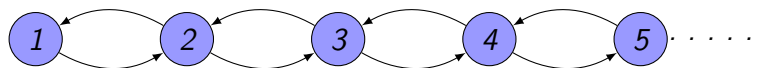
Repasando los teoremas III.3 III.5 vemos que han dejado algunos cabos sueltos.

- ¿Qué se necesita para la unicidad de la distribución estacionaria?
- ¿qué ocurre con las cadenas de Markov infinitas?

Hay un teorema que responde a estas dos cosas. La idea es: En una cadena de Markov finita irreducible  $\implies$  existe una única distribución estacionaria.

Pero esto no se cumple en las infinitas.

**Ejemplo: cadena infinita en el que no existe distribución estacionaria**  
*Consideramos los números naturales:*



$$S = \mathbb{Z}^+$$

*Vemos que efectivamente es irreducible.*

*Vamos a comprobar que no existe una distribución estacionaria:*

*Suponemos que tengo una distribución estacionaria para llegar a una contradicción:*

$$(\Pi) = (x_1, x_2, x_3, \dots)$$

$$\sum x_i = 1$$

*Vemos que*

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = \frac{1}{2}x_2 \implies x_2 = 2x_1 \\ x_2 = x_1 + \frac{1}{2}x_3 \implies x_3 = 2x_1 \\ x_3 = \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_4 \implies x_4 = 2x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{array} \right.$$

*Esto lleva a una contradicción porque el resultado esperado si existiera la distribución estacionaria sería:*

$$x_1 + \sum_{n=2}^{\infty} 2x_1 = 1$$

*Pero esto es imposible.*

De esto se deduce que lo importante para la existencia y unicidad de distribuciones estacionarias no es tanto que se pueda ir de un estado a otro si no que el **tiempo medio de retorno** sea finito.

Tiempo  
medio de  
retorno

**Definición III.7 Tiempo medio de retorno.** Es el tiempo de retorno al estado  $i$  y se define como:

$$m_i = E[T_i | X_0 = i]$$

Siendo  $T_i = \inf n > 0 : x_n = i$  el tiempo mínimo en volver.

**Observación:** Para cadenas de Markov finitas irreducibles  $m_i < \infty$

**Teorema III.6 (Teorema 4).** Para una cadena de Markov irreducible (finita o infinita)

$$\exists \text{ distribución estacionaria} \iff m_i < \infty \text{ para algún } i$$

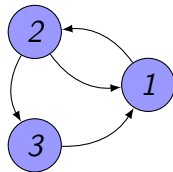
Además  $m_i < \infty$  implica que la distribución estacionaria es:

$$(\Pi) = \left( \frac{1}{m_1}, \frac{1}{m_2}, \frac{1}{m_3}, \dots \right)$$

y es única.

**Observación:** Si  $m_i$  existe para algún estado, existe para todos.

**Ejemplo:** Recordemos el ejemplo de :



Tenemos que  $(\Pi) = (\frac{2}{5}, \frac{2}{5}, \frac{1}{5})$ . El teorema nos permite ver que:

- $\frac{1}{2/5} = \frac{5}{2}$  es el tiempo medio (n. de clicks) para volver al estado 1 partiendo del estado 1.
- Lo mismo para 2
- $\frac{1}{1/5=5}$  es el tiempo medio de retorno para el nodo 3.

Ahora vamos a ver que aplicando la **Ley Fuerte de los Grandes Números** a este tema, se cumple casi seguro que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N_n(i)}{n} = \frac{1}{m_i}$$

Siendo  $N_n(i)$  el número de veces que hemos vuelto a  $i$  en  $n$  Unidades de Tiempo.

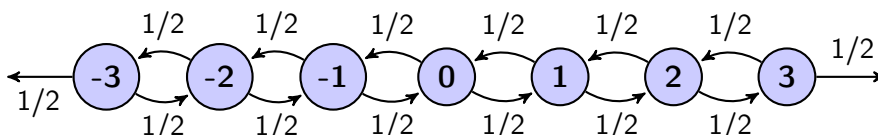
**Observación:** No se cumple al 100% ya que son variables aleatorias.



**Ejemplo:** Con el mismo grafo del ejemplo anterior, si desde 1 hago  $n$  clicks, con  $n$  grande, típicamente ha vuelto a 1 del orden de  $\frac{n}{5/2} = \frac{n}{m_1}$

**Conclusión :**  $N_n(i) \sim \frac{n}{m_i}$

### III.4. Una cadena de Markov infinita: Movimiento browniano



Modela, entre otros, el movimiento de partículas pequeñas (polen) sobre un líquido, que siguen un "camino aleatorio" al ser golpeadas por muchas moléculas.

Nuestro ejemplo concreto: Modelo de partículas que se mueven al azar a derecha o izquierda (paseo aleatorio).

Los estados son  $S = \mathbb{Z}$ . Y la matriz de transición cumple:

$$P_{i,i-1} = P_{i,i+1} = \frac{1}{2} \quad P_{i,j} = 0 \text{ (En el resto de casos)}$$

Para estudiar el movimiento browniano nos gustaría que los estados estuvieran "muy pegados" formando un continuo  $\mathbb{R}$ . También nos gustaría hacer continuo el tiempo.

Calculemos el  $n^\circ$  de visitas (retornos) esperados al origen = 0.

Probabilidad de volver en tiempo = 2  $\equiv P(X_2 = 0 | X_0 = 0) = \frac{1}{2^2} 2$

Probabilidad de volver en tiempo = 4  $\equiv P(X_4 = 0 | X_0 = 0) = \frac{1}{2^4} \binom{4}{2}$

Probabilidad de volver en tiempo =  $2j \equiv P(X_{2j} = 0 | X_0 = 0) = \frac{1}{2^{2j}} \binom{2j}{j}$

Entonces  $N_n(0) = \sum_{2j \leq n} \frac{1}{2^{2j}} \binom{2j}{j}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N_n(0)}{n} = 0$$

Este cálculo requiere usar aproximaciones finas de factorial (Stirling).

Podemos ver entonces que no existe una distribución estacionaria ya que  $\frac{1}{m_i} = 0 \Rightarrow m_i = \infty$ .

Teniendo  $P(X_n = j)$  con la matriz de transición se puede calcular fácilmente  $P(X_{n+1} = j)$ .

$$P(X_{n+1} = j) = \frac{1}{2}P(X_n = j - 1) + \frac{1}{2}P(X_n = j + 1)$$

Queremos que los tiempos en vez de ser 0,1,2,3,... sean  $0h, 1h, 2h, \dots$  con  $h$  pequeño y que los estados sean  $\varepsilon\mathbb{Z} = \{0\varepsilon, \pm 1\varepsilon, \pm 2\varepsilon, \dots\}$  con  $\varepsilon$  pequeño. Además queremos que en tiempo acotado  $hn (= 1)$  nos hayamos movido típicamente un espacio  $\varepsilon j$  acotado.

En el paseo aleatorio en  $\mathbb{Z}$  se prueba que típicamente en  $n$  pasos se llega a distancia  $c\sqrt{n}$ . tiempo  $\approx \sqrt{\text{dist}}$ , lo que sugiere que  $h \approx \varepsilon^2$ .

Elijamos  $h = \frac{1}{2}\varepsilon^2$  (si en vez de  $\frac{1}{2}$  escogiéramos otra constante apenas habría cambios):

$$\frac{P(X_{n+1} = j) - P(X_n = j)}{h} = \frac{P(X_n = j - 1) + P(X_n = j + 1) - 2P(X_n = j)}{\varepsilon^2}$$

Queremos que cuando  $h \rightarrow 0$   $P(X_n = j) = u(x, t)j \in \mathbb{Z} \quad n \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$  ( $x = j\varepsilon, t = nh$ ).

Teniendo en cuenta que  $h \rightarrow 0$  y  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

$$\frac{u(x, th) - u(x, t)}{h} = \frac{u(x - \varepsilon, t) + u(x + \varepsilon, t) - 2u(x, t)}{\varepsilon^2}$$

$$u_t = u_{xx}$$

#### ECUACIÓN DEL CALOR EN $\mathbb{R}$

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & x \in \mathbb{R} t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) & \leftarrow \text{distribución inicial} \end{cases}$$

Como las probabilidades de la cadena de Markov siempre suman (integran) 1 esto debe ser verdad para cualquier tiempo.

Es decir:

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = 1 \Rightarrow \int_{\mathbb{R}} u(x, t) dx = 1 \text{ para cualquier } t$$

Si  $u$  resuelve la ecuación del calor :

$$\text{SOL: } u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-(x-y)^2/4t} dy$$

Si  $e \neq \frac{1}{2}$ , si uno pone otro número, aparece una constante en  $u_t = e_2 u_{xx}$ .

## Capítulo IV

# Aplicaciones del análisis de Fourier

### IV.1. Desarrollo de Fourier

**Idea del análisis de Fourier:** "toda" señal se puede descomponer en "tonos puros" (armónicos) de frecuencia fija (típicamente  $\sin(\alpha nx)$ ,  $\cos(\alpha nx)$   $n \in \mathbb{Z}$ ).

**Ejemplo:** Sea la función  $f(t) = t$  con  $t \in [0, 1)$  que se ha extendido periódicamente con período  $T = 1$ .

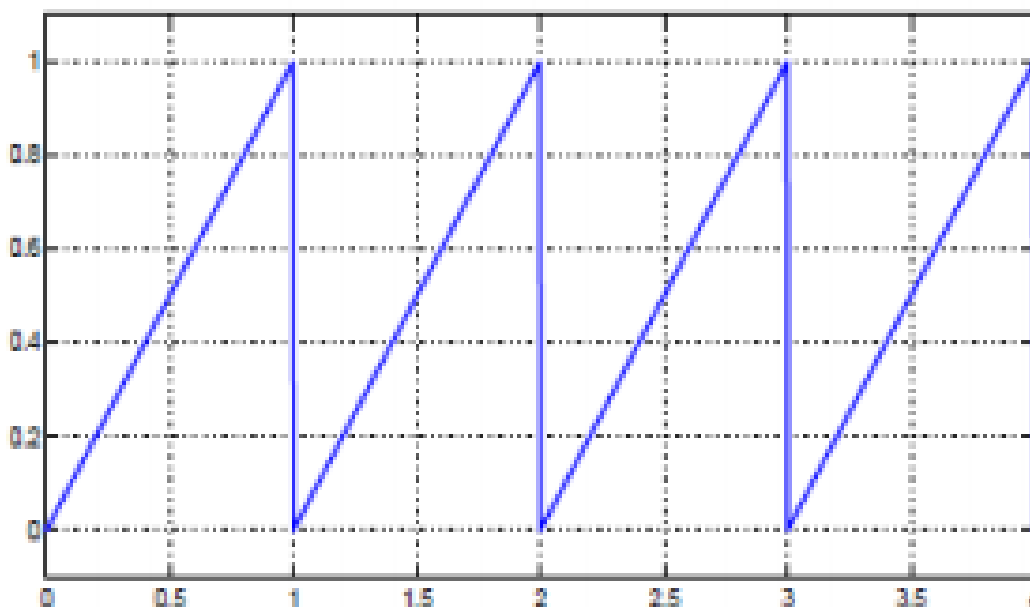


Figura IV.1:  $f(t) = t$  extendida periódicamente con  $T = 1$ .

Su desarrollo de Fourier (que veremos más adelante cómo se calcula) queda de la forma:

$$SF(f(t)) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin(2\pi nt)$$

Cuántos más elementos del sumatorio tomemos más precisa será la aproximación, como se puede ver en la figura IV.2.

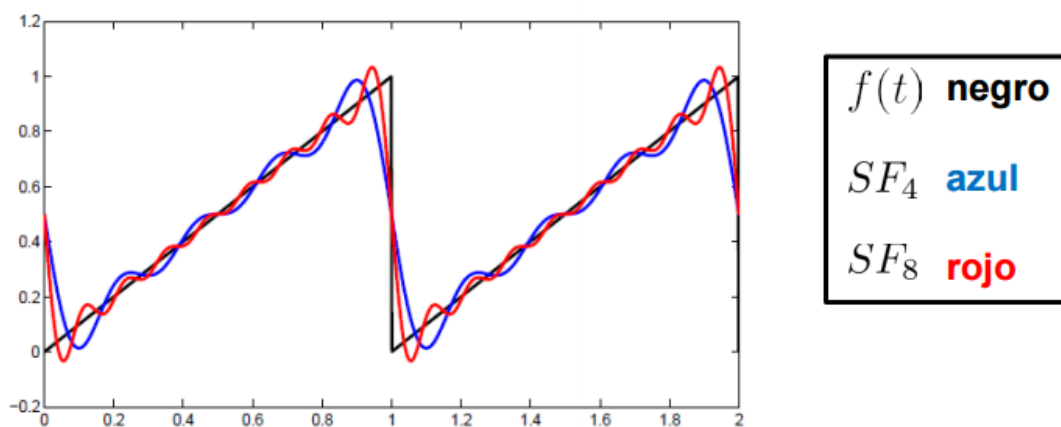


Figura IV.2: La aproximación a  $f(t)$  según tomemos cuatro u ocho elementos del sumatorio.

### IV.1.1. Aplicaciones

Muchas aplicaciones de ingeniería están basadas en estas ideas, como puedan ser los formatos JPEG, MP3, MPEG o codificaciones para telecomunicaciones. La idea en común es que, como hay “tonos” que o bien son ruido o bien no tiene mucha influencia sobre el resultado final, los eliminamos para ahorrar espacio. Es un tipo de compresión que, por supuesto, conlleva pérdidas.

En ingeniería, una aplicación muy común es utilizar esto como filtro quitando ciertas frecuencias. En el caso del MP3, por ejemplo se eliminan las frecuencias que no oímos.

En **matemáticas y física** hay problemas difíciles para funciones generales pero que se vuelven fáciles para "tonos puros" (senos y cosenos). Por ejemplo, lo que dice la **interpretación de Copenhague**: las partículas tienen funciones de ondas y en los experimentos sólo se detectan los tonos puros que componen estas funciones con una probabilidad que depende de su amplitud.

**Observación:** En general consideramos que el recorrido de  $f$  es  $\mathbb{C}$  porque  $e^{ix} = \cos x + i \sin x$  permite escribir senos y cosenos al mismo tiempo.

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

### IV.1.2. Teorema de Fourier

**Teorema IV.1** (Análisis de Fourier en  $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ ). *Cualquier  $f : \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \mapsto \mathbb{C}$  se puede escribir como*

$$f(n) = \frac{1}{N} \sum_{m \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}} \hat{f}(m) \cdot e\left(\frac{nm}{N}\right)$$

, donde  $e(x) = e^{2\pi i x}$ .

$\hat{f}(n)$  es la **transformada de Fourier discreta**

$$\hat{f}(n) = \sum_{m \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}} f(m) \cdot e\left(\frac{-nm}{N}\right)$$

**Observación:** Hay un algoritmo eficiente para calcular los  $\hat{f}(m)$  llamado Transformada Rápida de Fourier (en inglés Fast Fourier Transform, FFT).

*Demostración.* Definimos la función  $\delta : \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \mapsto \mathbb{C}$  como

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{si } n \neq 0 \end{cases}$$

, y decimos que también se puede escribir como

$$\delta(n) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} e\left(-\frac{nm}{N}\right)$$

, donde

$$e\left(\frac{nm}{N}\right) = e^{\frac{2\pi i nm}{N}}$$

Es claro que con esta nueva formulación  $\delta(0) = 1$ , pero aún tenemos que ver que  $n \neq 0 \implies \delta(n) = 0$

Podemos ver  $\delta$  como el producto de  $\frac{1}{N}$  por la suma de los términos de una progresión geométrica tal que

$$\begin{aligned} a_1 &= e(n \cdot 0 / N) = e(0) = 1 \\ a_{n+1} &= e(-nN / N) = e(n) \end{aligned}$$

, es decir, con razón  $e^{-\frac{n}{N}}$ .

Basándonos en la fórmula conocida para la suma de los términos de una progresión geométrica tenemos que

$$\delta(n) = \frac{e(n) - e(0)}{e^{n/N} - 1} = 0$$

Otra forma de pensarlo es como vectores.  $\delta(n)$  se puede ver como la suma de todas las raíces de la unidad. Si lo vemos como las raíces de la unidad podemos entender cada raíz como un vector que representa una fuerza aplicada con el origen, con lo que vemos fácilmente que todas esas fuerzas se anulan lo que encaja con la idea de que la suma de las raíces de la unidad es 0.

Una vez que tenemos esto, vemos que la  $f(n)$  del teorema se puede escribir como:

$$f(n) = \sum_{k \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}} f(k) \cdot \delta(n - k)$$

puesto que fijado un  $n$  todos los sumandos serán 0 excepto aquel en que  $n = k$  con lo que obtenemos la igualdad trivial  $f(n) = f(n)$

Sustituyendo,

$$\begin{aligned} f(n) &= \frac{1}{N} \sum_{k \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}} f(k) \sum_{m \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}} e\left(\frac{(n-k)m}{N}\right) = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}} f(k) \sum_{m \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}} e\left(\frac{nm}{N}\right) \cdot e\left(-\frac{km}{N}\right) \end{aligned}$$

Y como por definición tenemos que

$$\hat{f}(m) = \sum_{k \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}} f(k) \cdot e\left(-\frac{km}{N}\right)$$

, ya está probado el teorema. □

**Ejemplo:** Vamos a hacer un ejemplo con  $N = 3$ . Supongamos que tenemos los siguientes datos de una función, que sabemos que es periódica a intervalos de longitud 2 empezando en el origen:

$$f(n) = \begin{cases} 7 & \text{si } n = 0 \\ 2 & \text{si } n = 1, 2 \end{cases}$$

Entonces, aplicando la fórmula del teorema, nos quedan los siguientes términos

para  $\hat{f}$ :

$$\begin{aligned}\hat{f}(0) &= f(0) \cdot e(0) + f(1) \cdot e(0) + f(2) \cdot e(0) = 11 \\ \hat{f}(1) &= f(0) \cdot e\left(-\frac{1}{3}\right) + f(1) \cdot e\left(-\frac{2}{3}\right) = \\ &= 7 + 2 \cdot \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 2 \cdot \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 5 \\ \hat{f}(2) &= f(0) \cdot e\left(-\frac{2}{3}\right) + f(1) \cdot e\left(-\frac{4}{3}\right) = \\ &= 7 + 2 \cdot \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 2 \cdot \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 5\end{aligned}$$

Como

$$f(n) = \frac{1}{N} \sum_{m \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}} \hat{f}(m) \cdot e\left(\frac{nm}{N}\right)$$

, simplemente sustituimos y nos queda que

$$f(n) = \frac{11}{3} \cdot e\left(0 \cdot \frac{n}{3}\right) + \frac{5}{3} \cdot e\left(1 \cdot \frac{n}{3}\right) + \frac{5}{3} \cdot e\left(2 \cdot \frac{n}{3}\right)$$

Y efectivamente, si comparamos resultados nos queda :

$$\begin{aligned}n = 0 \rightarrow 7 &= \frac{11}{3} + \frac{5}{3} + \frac{5}{3} \\ n = 1 \rightarrow 2 &= \frac{11}{3} + \frac{5}{3} \cdot \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{5}{3} \cdot \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\end{aligned}$$

#### IV.1.2.1. Paso de funciones discretas a funciones continuas

Este teorema se puede utilizar para **transformar funciones discretas (con  $N$  grande) a funciones continuas.**

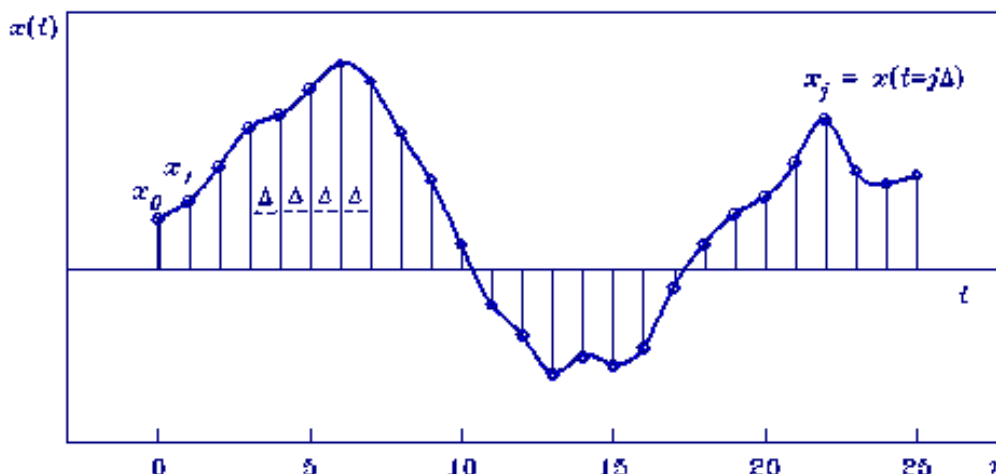
Partimos de  $f(n)$  discreta y llamamos  $F\left(\frac{n}{N}\right) = f(n)$  a la función continua que queremos construir.

Haciendo el desarrollo de Fourier de  $f$  nos queda que

$$f(n) = \sum \frac{\hat{f}(m)}{N} \cdot e\left(\frac{nm}{N}\right)$$

Llamamos  $x = \frac{n}{N}$  y  $a_m = \frac{\hat{f}(m)}{N}$  y nos queda que

$$F(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_m \cdot e(mx)$$



**Figura IV.3:** Una ilustración de cómo se puede conseguir el paso de una función discreta (con valores  $x_0, x_1, \dots, x_n$ ) a una continua usando Fourier.

Para calcular  $F(x)$  necesitamos calcular primero los coeficientes  $a_m$ . Para ello hacemos el límite de  $\frac{\hat{f}(m)}{N}$ :

$$\frac{\hat{f}(m)}{N} = \frac{1}{N} \sum_{k \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}} f(k) \cdot e\left(-m \frac{k}{N}\right) \text{ con } \begin{cases} m \text{ fijo} \\ N \text{ muy grande} \\ f(k) = F\left(\frac{k}{N}\right) \end{cases}$$

Como  $k = 0, \dots, N - 1 \implies 0 \leq \frac{k}{N} < 1$  podemos interpretar el sumatorio como suma de Riemann de modo que:

$$\frac{\hat{f}(m)}{N} = \int_0^1 F(x) \cdot e(-mx) dx$$

Finalmente obtenemos:

$$F(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \hat{F}(n) \cdot e(nx) \text{ siendo } \hat{F}(n) = \int_0^1 F(x) \cdot e(-nx) dx$$

**Observación:** La no acotación de  $\mathbb{R}$  limita la validez de esta fórmula para funciones  $F$  buenas (por ejemplo  $C^2$ ).

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  1-periódica

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e(nx) \quad \hat{f}(n) = \int_0^L f(x) e(-nx) dx \quad e(x) = e^{2\pi i x}$$

$f(x) \equiv$  Desarrollo de Fourier de  $f$       $\hat{f}(n) =$  coeficientes de Fourier de  $f$ .

La igualdad  $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e(nx)$  es cierta para  $f$  periódica  $\in C^2$  y la convergencia es uniforme (Tma. de Carleson-Hunt  $\implies$  la igualdad es cierta en casi todo punto con tal de que  $f \in L^p[0, 1]$   $p > 1$ )



¿Se puede analizar en senos y cosenos una función no periódica? Sí, pero hay que tomar los de frecuencias no enteras.

$g \equiv$  función 1-periódica  $\Rightarrow f(x) = g(\frac{x}{T})$  es T-periódica.

$$g(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{g}(n)e(nx) \quad \hat{g}(n) = \int_0^1 = \int_{-1/2}^{1/2} g(x)e(-nx)dx$$

$x \mapsto \frac{x}{T}$

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{g}(n)e(\frac{n}{T}x) \quad \hat{g}(n) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(y)e(-\frac{n}{T}y)dy$$

$$f(x) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( \int_{-T/2}^{T/2} f(y)e(-\frac{n}{T}y)dy \right) e(\frac{n}{T}x)$$

$T \rightarrow \infty$  Escribiendo  $\frac{n}{T} = \psi$

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \text{otra integral } e(\psi x)d\psi$$

Esto sugiere que para  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\psi)e(x\psi)d\psi \quad \text{donde } \hat{f}(\psi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)e(-\psi y)dy$$

$\hat{f}$  se conoce como la transformada de Fourier (y se inventó antes que la discreta). Y  $f(x)$  es la Fórmula de inversión.

La igualdad  $f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots$  es cierta para  $f$  que decaiga rápido con cierta regularidad.

**RESUMEN:**

- Si tenemos una función  $f : \mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  su desarrollo discreto de fourier nos dice:

$$f(n) = \frac{1}{n} \sum_{m \in \mathbb{Z}_n} \hat{f}(m) e\left(\frac{mn}{N}\right)$$

$$\hat{f}(n) = \sum_{m \in \mathbb{Z}_n} f(m) e\left(\frac{-mn}{N}\right)$$

- Si tenemos una función  $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$ , es decir, una función 1-periódica el desarrollo de fourier queda:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e(nx)$$

$$\hat{f}(n) = \int_0^1 f(x) e(-nx) dx$$

- Para  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\psi) e(x\psi) d\psi$$

$$\hat{f}(\psi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e(-\psi x) dx$$

**Observación:** En los dos últimos casos serán necesarias ciertas condiciones de regularidad sobre la función  $f$

**Ejemplo:** Hallar el desarrollo de Fourier de la función 1-periódica que en  $[-1/2, 1/2]$  vale

$$f(x) = e^{2\pi x} + e^{-2\pi x} = 2 \cosh(2\pi x)$$

Para empezar calculamos la fórmula general de los coeficientes de la serie de fourier:

$$\hat{f}(n) = \int_{-1/2}^{1/2} (e^{2\pi x} + e^{-2\pi x}) e^{-2\pi i n x} = \frac{1}{2\pi} (e^{\pi} - e^{-\pi}) (-1)^n \left( \frac{1}{1 - in} + \frac{1}{1 + in} \right) =$$

Y ahora calculamos la serie propiamente dicha:

$$= \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{\pi} (-1)^n \frac{1}{1 + n^2}$$

$$f(x) = e^{2\pi x} + e^{-2\pi x} = \frac{e^{\pi i} - e^{-\pi i}}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2} e(nx)$$

**Ejemplo:** Otro ejemplo

Expresar  $e^{-|x|}$  como una integral usando la fórmula de inversión.

Recordemos la fórmula de inversión:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\psi) e(x\psi) d\psi \rightarrow \hat{f}(\psi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e(-\psi x) dx$$

Entonces:

$$f(x) = e^{-|x|} \implies \hat{f}(\psi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|} e^{-2\pi i \psi x} dx =$$

$$\int_0^{\infty} e^{-(1+2\pi i \psi)x} + \int_{-\infty}^0 e^{(1-2\pi i \psi)x} = \frac{1}{1+2\pi i \psi} + \frac{1}{1-2\pi i \psi} = \frac{2}{1+4\pi^2 \psi^2}$$

Por tanto:

$$f(x) = e^{-|x|} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2e(x\psi)}{1+4\pi^2 \psi^2} d\psi = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2 \cos(2\pi x \psi)}{1+4\pi^2 \psi^2} d\psi$$

## IV.2. Proyecciones, convoluciones y filtros

Sea  $V$  = espacio vectorial euclídeo (complejo) y  $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$  una base ortonormal, cualquier vector del espacio puede escribirse como combinación lineal de los elementos de esta base. Es decir:

$$\mathbf{x} \in V \implies \mathbf{x} = \lambda_1 \mathbf{u}_1 + \dots + \lambda_n \mathbf{u}_n$$

Como la base es ortonormal es muy fácil de calcular los  $\lambda_i$ :  $\lambda_i = \langle \mathbf{u}_i, \mathbf{x} \rangle$

Además tenemos que la proyección sobre el subespacio  $S$  que genera  $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k\}$  es:

$$P_{r_s}(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{x} \rangle \mathbf{u}_1 + \dots + \langle \mathbf{u}_k, \mathbf{x} \rangle \mathbf{u}_k \text{ (porque es ortonormal)}$$

Así mismo podemos construir un espacio vectorial de funciones  $V = \{f : \mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}\}$  definiendo el producto escalar como:

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{N} \sum_{n \in \mathbb{Z}_n} \overline{f(n)} g(n)$$

**Proposición IV.2.** Sea  $f_m(n) = e\left(\frac{nm}{N}\right)$ , las funciones  $\{f_0, f_1, \dots, f_{n-1}\}$  son una base ortonormal

*Demostración.* Para demostrar que son una base ortonormal debemos demostrar que son ortonormales y que, efectivamente, forman una base. Vamos a ello.

**1. Ortonormalidad**

$$\begin{aligned} \langle f_m, f_{m'} \rangle &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e\left(-\frac{nm}{N}\right) e\left(\frac{nm'}{N}\right) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e\left(\frac{n(m'-m)}{N}\right) = \\ &= \delta(m' - m) = \begin{cases} 0 & \text{si } m' \neq m \\ 1 & \text{si } m' = m \end{cases} \end{aligned}$$

Con lo que vemos que si multiplicamos escalarmente dos vectores cualesquiera de la base obtenemos 0 (**perpendicularidad**) y al multiplicar un vector consigo mismo obtenemos 1 (**normalidad**)

**2. Base**

Cualquier  $f$  cumple

$$f = \sum_{m=0}^{N-1} \lambda_m f_m = \sum_{m=0}^{N-1} \langle f_m, f \rangle f_m \iff f(n) = \frac{1}{N} \sum_{m \in \mathbb{Z}_n} \hat{f}(m) e\left(\frac{nm}{N}\right)$$

□

Al igual que hicimos con

$$V = \{f : \mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}\}$$

podemos definir el espacio de funciones

$$V = \{f : \mathbb{T} \rightarrow K, f \in L^2[0, 1]\}$$

que constituye un espacio vectorial con el producto escalar asociado:

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 \overline{f(x)}g(x)dx$$

**Proposición IV.3.** Las  $f_n(x) = e(nx)$  son ortonormales.

*Demostración.* Esta demostración es muy similar a la de la proposición anterior. Primero demostraremos que estas funciones son ortonormales y después, que constituyen una base.

**1. Ortonormalidad**

$$\langle f_n, f_{n'} \rangle = \int_0^1 e(-nx)e(n'x)dx = \int_0^1 ((n' - n)x)dx = \begin{cases} 1 & \text{si } n = n' \\ 0 & \text{si } n \neq n' \end{cases}$$

## 2. Base

Si los  $f_n$  fueran una base (también llamado sistema ortonormal completo) entonces:

$$f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \lambda_n f_n \implies \lambda_n \langle f_n, f \rangle = \int_0^1 e(-nx) f(x) dx = \hat{f}(n)$$

□

Por último podemos considerar el espacio vectorial de funciones:

$$V = \{f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}\}$$

con su producto escalar asociado:

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(x)} g(x) dx$$

obteniendo resultados análogos a los anteriores

**Corolario IV.4.** *El teorema de Pitágoras en  $n$  dimensiones nos da*

$$\|\mathbf{x}\|^2 = \sum_{m=1}^n |\langle \mathbf{u}_m, \mathbf{x} \rangle|^2$$

*En cada una de las tres situaciones discutidas anteriormente (los diferentes espacios vectoriales estudiados) nos da respectivamente las siguientes identidades, que no son en absoluto triviales.*

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}_N} |f(n)|^2 = \frac{1}{N^2} \sum_{n \in \mathbb{Z}_N} |\hat{f}(n)|^2, \quad \int_0^1 |f|^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}_N} |\hat{f}(n)|^2, \quad \int_{-\infty}^{\infty} |f|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}|^2$$

*Si tomamos la función 1-periódica que coincide con la identidad en  $[0,1)$ , entonces  $\hat{f}(0) = 1/4$  y  $\hat{f}(n) = i/(2\pi n)$  para  $n \neq 0$ . La segunda fórmula nos da*

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2}$$

La idea de la proyección es muy natural en las aplicaciones del análisis de Fourier. Por ejemplo, una señal de audio 1-periódica, en principio, requiere infinitos números complejos para ser representada a través de sus coeficientes de Fourier. Sin embargo, el espectro audible está entre 20Hz y 20kHz, con lo cual no perdemos nada si proyectamos sobre el subespacio que corresponde a estas combinaciones de frecuencias, lo que corresponde a:

$$f \mapsto \sum_{20 \leq |n| \leq 20000} \hat{f}(n) e(nx)$$

De forma más general, es habitual atenuar o amplificar algunas frecuencias sin perderlas del todo (por ejemplo aumentar los graves o los agudos). Matemáticamente la operación que generaliza la proyección en el caso de funciones 1-periódicas sería multiplicar cada coeficiente por un peso:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{inx} \rightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} W(n) a_n e^{inx}$$

La mayor parte de las aplicaciones del análisis de Fourier se basan en procesos de este tipo, se asigna un peso a cada una de las frecuencias. Como con los filtros de paso alto, bajo, banda...

¿Que le ocurre a la función tras transformarla de esta manera? ¿Hay alguna relación simple entre f y la señal transformada? (Sin el desarrollo de Fourier). La respuesta es que si, a través de **convoluciones**

*Convolución* **Definición IV.1 Convolución.** Se llama convolución de f y g, y se escribe f \* g, según el dominio en que estén definidas estas funciones, a:

- $f, g : \mathbb{Z}_N \rightarrow \mathbb{C} \quad (f * g)(n) = \sum_{m \in \mathbb{Z}_N} f(n - m)g(m)$
- $f, g : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C} \quad (f * g)(x) = \int_0^1 f(x - t)g(t)dt$
- $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \quad (f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x - t)g(t)dt$

**Proposición IV.5.**

$$\widehat{f * g} = \hat{f} \hat{g}$$

Es decir, multiplicar los coeficientes de Fourier (o transformadas de Fourier) por  $\hat{g}$  es lo mismo que convolver la señal con g.

**Demostración.** Tomaremos dos funciones del tercer tipo indicado anteriormente. Las demostraciones en los otros casos son similares a ésta.

$$\begin{aligned} \widehat{f * g}(\psi) &= \int_{-\infty}^{\infty} (f * g)(x) e^{-x\psi} dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x - t) e^{-x\psi} dx dt \quad x = y + t = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-y\psi} e^{-t\psi} dy dt \end{aligned}$$

Y puesto que

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-t\psi}dt = \hat{g}(\psi) \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-y\psi}dy = \hat{f}(\psi)$$

nos queda

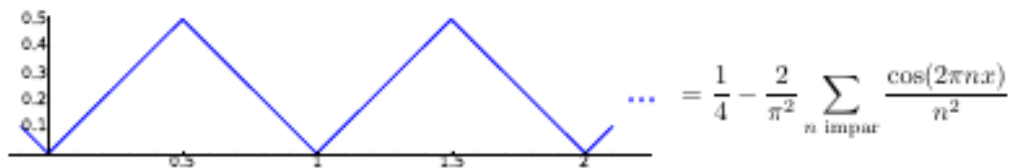
$$\widehat{f * g}(\psi) = \hat{f}(\psi)\hat{g}(\psi)$$

□

### IV.2.1. Simetrías y decaimiento de los coeficientes de Fourier

Esta claro que desde un punto de vista práctico no podemos guardar todo el desarrollo de Fourier de una función 1-periódica en una máquina y menos aún cuando estos son infinitos. No obstante estos coeficientes decaen de modo que basta con guardar una pequeña cantidad de ellos para garantizar la precisión deseada.

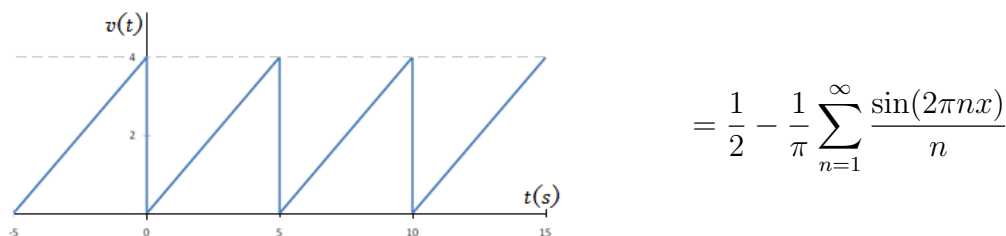
En el ejemplo:



los coeficientes decaen como  $n^{-2}$ , es decir

$$\text{error} \leq \sum_{n \geq N} \frac{1}{n^2} \approx N^{-1}$$

Sin embargo en el caso de la sierra



los coeficientes decaen como  $n^{-1}$ , es decir:

$$\text{error} \leq \sum_{n > N} \frac{1}{n} \text{ ni siquiera converge}$$

**Observación:** La regularidad influye en la rapidez de convergencia de la serie de Fourier.

### IV.2.2. Convergencia lenta:

El problema de la convergencia lenta resulta crítico para las aplicaciones porque nos obliga a almacenar muchos coeficientes de Fourier para obtener la precisión deseada.

**Ejemplo:** Si tengo una función  $f : \mathbb{Z}_N \mapsto \mathbb{C}$

$$f(n) = \frac{1}{N} \sum_{m \in \mathbb{Z}_N} \hat{f}(m) e\left(\frac{mn}{N}\right)$$

Si tenemos  $N$  grande y coeficientes parecidos  $\implies$  es difícil decidir cuáles omitir.

**Ejemplo:** Supongamos ahora que tenemos una función 1-periódica  $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$  tal que  $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ .

Para  $n \neq 0$

$$\hat{f}(n) = \int_0^1 f(x) e(-nx) dx$$

Llamamos  $\begin{cases} u = f(x) \\ dv = e(-nx) dx \end{cases}$

Entonces:

$$\hat{f}(n) = f(x) \frac{e(-nx)}{-2\pi in} \Big|_0^1 + \frac{1}{2\pi in} \int_0^1 f'(x) e(-nx) dx$$

Al ser  $f(x) \frac{e(-nx)}{-2\pi in} \Big|_0^1 = 0$ , como  $f$  es periódica, si seguimos iterando hasta  $k$  veces llegamos a :

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{(2\pi in)^k} \int_0^1 f^{(k)}(x) e(-nx) dx$$

y como  $|f^{(k)}| \leq cte$  en  $[0,1] \implies |\hat{f}(n)| \leq \frac{cte}{|n|^k}$

Con menos regularidad, si  $f^{(k)}$  existe excepto en un número finito de puntos (de  $[0,1]$ ) y está acotada, daría el mismo resultado.

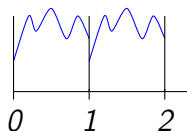
Vamos a ver esto para  $k = 2$ :

**Ejemplo:**

$$k = 2 \implies |\hat{f}(n)| \leq cte \implies \sum_{n=-\infty}^{\infty} e(nx)$$

Converge absolutamente.

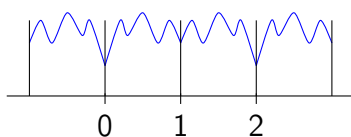




La extensión 1-periódica de una función, típicamente no es ni siquiera continua.  
 $\implies$  típicamente no se puede tomar  $k = 2 \implies$  malo para las aplicaciones.

En estos casos se usa el siguiente truco. En lugar de la extensión periódica primero se refleja la función (la señal) por el eje Y y después se extiende de forma 2-periódica

Como el reflejo y la señal original coinciden en el final de una y el principio de la otra esta extensión si sería continua



Para poder trabajar con esto debemos ver las ecuaciones de Fourier para las funciones 2-periódicas. En este caso

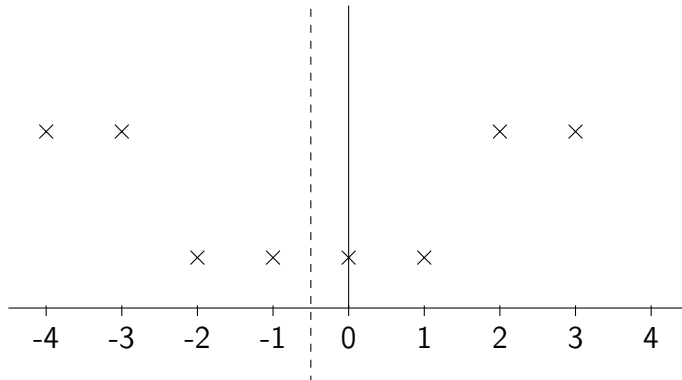
$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)e(n\frac{x}{2}) \text{ siendo } \hat{f}(n) = \frac{1}{2} \int_0^2 f(x)e(-nx)$$

Podemos ver que los coeficientes del desarrollo de Fourier para funciones 2-periódicas son reales, siempre y cuando la función  $f$  sea real.

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(x)e(-n\frac{x}{2})dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(x) \cos(2\pi n\frac{x}{2})dx \in \mathbb{R}$$

Esto se debe a que  $e(-n\frac{x}{2}) = \cos(2\pi n\frac{x}{2}) + i \sin(2\pi n\frac{x}{2})$  y además  $f$  es par y  $\sin$  es impar.

¿Cómo adaptar esto al caso discreto  $f : \mathbb{Z}_N \rightarrow \mathbb{C}$ ?



Haciendo las cuentas pertinentes se obtiene un análisis de Fourier discreto en el que podemos usar  $e((m + \frac{1}{2})\frac{2\pi n}{N})$  en vez de  $e(\frac{2\pi mn}{N})$  y tomando partes reales se puede escribir todo en términos de  $\cos(\frac{\pi n}{N}(m + \frac{1}{2}))$

**Proposición IV.6.** Para  $f : \{0, 1, 2, \dots, N - 1\} \rightarrow \mathbb{R}$  se cumple

$$f(m) = \frac{\hat{f}^c(0)}{N} + \frac{2}{N} \sum_{n=1}^{N-1} \hat{f}^c(n) \cos\left(\frac{n\pi}{N} \left(m + \frac{1}{2}\right)\right)$$

donde

$$\hat{f}^c(n) = \sum_{m=0}^{N-1} f(m) \cos\left(\frac{n\pi}{N} \left(m + \frac{1}{2}\right)\right)$$

**Observación:** Y esto es lo que más se utiliza en el tratamiento de señales de sonido, imagen, etc

*Demostración.* Lo único que hay que hacer es sustituir la definición de  $\hat{f}^c(n)$  y comprobar que se tiene una identidad.

Vamos a abreviar:

$$f(n) = \sum_{m=0}^{N-1} f(m) \delta(n - m) \quad \delta(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq 0 \\ 1 & \text{si } n = 0 \end{cases}$$

Al ser  $f$  una combinación lineal de  $\delta - m$  basta con probar la fórmula para las funciones  $f(n) = \delta(n - m_0)$ .

Si escribimos la propiedad para  $f(n) = \delta(n - m_0)$  y usamos  $2 \cos(\alpha) \cos(\beta) = \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)$ , lo que hay que probar es:

$$\delta(m - m_0) \stackrel{?}{=} \frac{1}{N} + \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N-1} n = 1 \left[ \cos \frac{\pi n}{N} (m_0 + m + 1) + \cos \frac{\pi n}{N} (m - m_0) \right]$$

$$\delta(m - m_0) \stackrel{?}{=} \frac{1}{N} + \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N-1} n = 1 \left[ \operatorname{Re} \left( e \left( \frac{n}{2N} (m_0 + m + 1) \right) \right) + \operatorname{Re} \left( e \left( \frac{\pi n}{2N} (m - m_0) \right) \right) \right]$$

Duplicaríamos la  $n$  si añadimos los negativos o los  $2N - 1, 2N - 2, 2N - 3, \dots$

$$= \frac{1}{2N} \operatorname{Re} \sum_{n=0}^{2N-1} \left( e \left( \frac{n}{2N} (m_0 + m + 1) \right) + e \left( \frac{\pi n}{2N} (m - m_0) \right) \right)$$

$$\sum_{k=0}^{M-L} e \left( \frac{k}{M} l \right) = \begin{cases} 0 & \text{si } l \not\equiv 0 (M) \\ M & \text{si } l \equiv 0 (M) \end{cases}$$

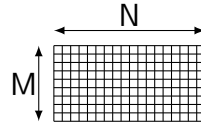
$\Rightarrow$  la expresión de arriba es  $\delta(m - m_0)$ .

(prueba supuestamente sencilla teniendo en cuenta que  $m - m_0$  varía entre 0 y  $N - 1$ )

□

## IV.3. Aplicaciones

### IV.3.1. Formato JPEG



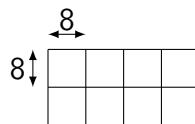
Cada píxel son 3 números (bytes) (RGB) (si tiene transparencia 1 más correspondiente al canal alfa)

$R, G, B \in [0, 255]$  (enteros)

Como hay combinaciones de R y G que se parecen demasiado para el ojo humano, en la realidad casi siempre se pasa de RGB a  $Y C_B C_R$  con un “cambio de base”, es decir, con una transformación lineal.

- Y representa la luminancia  $\rightarrow$  el ojo es muy sensible a ella
- $C_B$  representa la crominancia  $\rightarrow$  el ojo es poco sensible a ella.
- $C_R$  representa la crominancia  $\rightarrow$  el ojo es poco sensible a ella.

En las imágenes en tonos grises (comúnmente mal denominadas “en blanco y negro”) cada píxel tiene sus valores R, G, y B iguales y éstos a su vez son iguales a Y (luminancia). En las cuentas que siguen vamos a restringirnos a este caso. En los otros casos lo único que se hace es repetir estas cuentas 3 veces (R, G y B)



La imagen  $N \times M$  se divide en bloques  $8 \times 8$ <sup>1</sup>. Cada uno de ellos se puede interpretar como una función:

$$f : \{0, 1, \dots, 7\} \times \{0, 1, \dots, 7\} \mapsto \mathbb{R}$$

que asigna al píxel  $P_{ij}$  del bloque, su color ( $R=G=B=Y \in [0, 255]$ ) (solo un número para nuestro caso de tonos de gris).

**Idea** Descomponer  $f$  por Fourier y suprimir las frecuencias altas excepto si tienen coeficientes (amplitudes) grandes.

En principio, con 3 de estas funciones  $f$  tenemos toda la información de los píxeles del bloque.

**Detalle técnico:** Al utilizar  $Y C_B C_R$ , si cambiamos el tono azul, no se aprecia diferencia. Además, para  $C_B C_R$  se suelen despreciar entre la mitad y las  $\frac{3}{4}$  partes de los píxeles de la imagen original.

<sup>1</sup>Si la imagen no tiene un número de píxeles múltiplo de  $8 \times 8$ , entonces nos *inventamos* píxeles para que cuadre

### IV.3.1.1. Aplicación de la DCT (transformada coseno discreta) en cada variable

Dada la función

$$f : \{0, 1, \dots, 7\} \rightarrow \mathbb{R}$$

su transformada de Fourier es

$$f(m) = \sum_{n=0}^7 \alpha_n \cos\left(\frac{\pi n}{8}(m + 1/2)\right) \text{ con } \alpha_n = \text{cierta fórmula}$$

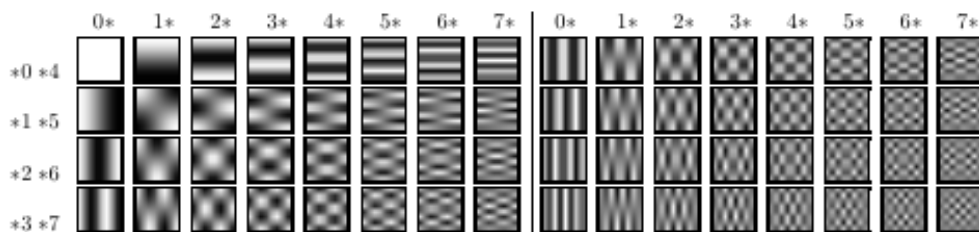
Si utilizamos esta fórmula en cada variable de F se tiene el desarrollo de Fourier

$$F(k, l) = \sum_{n=0}^7 \sum_{m=0}^7 a_{nm} \cos\left(\frac{\pi n}{8}(k + 1/2)\right) \cos\left(\frac{\pi n}{8}(l + 1/2)\right)$$

En principio los  $a_{nm}$  son 64 números que determinan  $F$  pero más difíciles de almacenar explícitamente (son reales, no enteros)

**Ejemplo:** Si pensamos que -1 es negro y 1 es blanco,  $\Phi_{nm}$  es una imagen 8x8 (en tonos de gris) y que  $F$  corresponde también a tonos de gris.

$F = \sum \sum a_{nm} \Phi_{nm}$  es la descomposición de  $F$  como superposición de imágenes básicas.



$\Phi_{00} = 1$  La que menos oscila.

$\Phi_{77} =$  la que más oscila.

**Observación:** En la práctica los  $a_{nm}$  no se calculan con mucha precisión. En GIMP en opciones avanzadas está el DCT method que permite controlar la precisión, pero no se aprecia ninguna diferencia en la imagen aunque si en el tamaño.

### IV.3.1.2. Cuantificación (cuantización)

Queremos conseguir elegir el grado de precisión de conversión de la imagen.

Si tenemos enteros de 1 byte de dos tipos: A y B. Los A son importantes y los B son la mitad de importantes. Podemos almacenarlos de la forma siguiente:

- A → tal como están
- B → divididos entre dos (redondeando si es necesario)

$$a_n \xrightarrow{\text{almacenar}} a_n : 8 \text{ bits} \xrightarrow{\text{recuperar}} a_n$$

$$b_n \xrightarrow{\text{almacenar}} \left\lceil \frac{b_n + 1}{2} \right\rceil : 7 \text{ bits} \xrightarrow{\text{recuperar}} 2 \left\lceil \frac{b_n + 1}{2} \right\rceil \approx b_n \text{ con imprecisión de } 1$$

En general:

$$b \rightarrow \left\lceil \frac{b}{n} + \frac{1}{2} \right\rceil \rightarrow n * \text{valor almacenado} = b \text{ con imprecisión comparable a } n$$

$\left\lceil \frac{b}{n} + \frac{1}{2} \right\rceil$  es el entero más cercano a  $\frac{b}{n}$

Puesto que el valor almacenado solo toma valores múltiplos de n, con un n mayor tendremos menos números posibles que almacenar pero más precisión.

Con experimentos se estudia la sensibilidad media del ojo humano a cada  $\Phi_{nm}$ . Dependiendo de ello se crea una matriz de cuantificación. La usada generalmente para el canal Y es la matriz 8x8:

$$C = \begin{pmatrix} 16 & 11 & & & & & & \\ & 12 & & & & & & \\ & & 120 & 101 & & & & \\ & & 103 & 99 & & & & \end{pmatrix}$$

Donde  $C_{ij}$  = sensibilidad a distinguir  $\phi_{ij}$

- $C_{ij}$  pequeño → más sensibilidad
- $C_{ij}$  grande → menos sensibilidad

Cada  $C_{ij}$  se usa para llevar a cabo una cuantificación de  $a_{ij}$ .

Como es obvio, existen otras dos matrices para  $C_B$  y  $C_R$

### RESUMEN

$$F \xrightarrow{DCT} \{a_{nm}\}_{n,m=0}^7 \xrightarrow{\text{cuantificacin}} \left\{ \left\lceil \frac{a_{nm}}{C_{nm}} + \frac{1}{2} \right\rceil \right\}_{n,m=0}^7$$

Donde  $\left\{ \left\lceil \frac{a_{nm}}{C_{nm}} + \frac{1}{2} \right\rceil \right\}_{n,m=0}^7$  es el entero más cercano a  $\frac{a_{nm}}{C_{nm}}$

Entonces vemos que partiendo de  $F$ , tenemos información de 64 bytes, y al hacer  $\{\lambda_{nm}\}_{m,n=0}^7$  también tenemos 64 bytes.

¿Qué hemos ganado?

La ventaja reside en que muchos de los  $\lambda_{nm}$  son nulos. La mayor parte de los bloques  $8 \times 8$  no presentan variaciones abruptas. Por tanto los coeficientes de Fourier decaen rápido.

Así los  $a_{nm}$  suelen ser pequeños excepto si  $0 \leq n, m \leq 1$  o al menos si  $0 \leq n, m \leq$  constante pequeña. Por tanto los  $\lambda_{nm}$  correspondientes son nulos típicamente.

En definitiva, la colección de los  $\lambda_{nm}$  correspondientes a todos los bloques está formada mayoritariamente por ceros.

**Ejemplo:** *Una imagen con un 90% de ceros se reconoce bien. Se nota que no es de calidad pero bueno.*

Además, por la cuantificación, típicamente los números pequeños están muy repetidos.

#### IV.3.1.3. Compresión

Se aplica **compresión Huffman** (típicamente) a los  $\lambda_{nm}$

La compresión normalmente consiste en que en lugar de guardar en un fichero todos los ceros que hay, cada vez que vea un cero lo guardo y seguidamente guardo el número de veces que se repite, hasta que aparezca un 1. Se gana mucho ya que normalmente solo uno de cada 100 números es un 1.

**Observación:** La **compresión de Huffman** no es exactamente esto, lo que hace es analizar el fichero, ver qué símbolos se repiten más y les asigna códigos para comprimirlos, de manera que optimiza la compresión.

Esto se contará con más detenimiento en el próximo capítulo.

El resultado de esta compresión es el fichero .jpg

Una vez visto el procedimiento de compresión de la información de la imagen, la duda que nos surge es: **¿Cómo descodificar un fichero .jpg?**

En primer lugar se descomprime el fichero. Una vez hecho esto, en la cabecera se encuentra toda la información general como, por ejemplo, la matriz de cuantificación.

Una vez tenemos esta matriz, se multiplican los  $\lambda_{nm}$  por los  $C_{nm}$  obteniendo los  $a_{nm}$  a partir de los cuales podemos construir la transformada de Fourier.

En resumen los pasos a seguir son:

$$\lambda_{nm} \rightarrow C_{nm} \cdot \lambda_{nm} \approx a_{nm} \rightarrow F = \sum \sum a_{nm} \cdot \Phi_{nm}$$

que reconstruye cada bloque.

### IV.3.2. Aproximación de funciones

Buscamos una manera de enseñarle a un ordenador o una calculadora cómo calcular funciones “complicadas” ( seno, coseno, exponencial...).

Tomamos  $+$ ,  $-$ ,  $\cdot$  y  $\div$  como operaciones básicas y, por tanto, evaluar polinomios es una tarea sencilla.

¿Es posible aproximar muy bien funciones complicadas por polinomios con pocas operaciones? La respuesta, evidentemente, es si.

Para esto Taylor no sirve ya Taylor funciona muy bien alrededor de un punto, pero no cuando nos alejamos y nosotros queremos una forma de hacer esto en regiones amplias.

La situación típica es que sólo necesitamos aproximar una función en un intervalo. Por ejemplo, dada la función  $f(x) = \sin x$ , nos basta con aproximarla en un intervalo  $I = [0, \pi/2]$  ya que para  $x > \pi/2$  tenemos que  $x - 2\pi k \in [0, 2\pi]$  y, combinándolo con  $\sin(\pi - x) = \sin(x)$  podemos conocer el valor de  $\sin(x)$  sin dificultad.

De la misma forma podemos evaluar el logaritmo en cualquier punto a partir de su estudio en un intervalo dado basándonos en:  $f(x) = \log x \quad I = [1, 2] \quad x > 2 \rightarrow \log(x) = \log(x/2^n) + n \log 2$ .

La mayoría de operaciones realizadas por este método (dividir entre 2, elevar 2 a n, ...) son prácticamente inmediatas usando la representación binaria del número.

Con una transformación lineal podemos suponer que el intervalo es  $I = [-1, 1]$ . Queremos aproximar  $f : I = [-1, 1] \mapsto \mathbb{R}$  y para ello, desarrollamos por Fourier (pensándolo teóricamente ya que hay infinitos coeficientes)

$$g(x) = f(\cos(2\pi x))$$

$$f(\cos(2\pi x)) = g(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)e(inx) = a_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2\pi nx)$$

**Observación:**  $g$  par  $\Rightarrow \hat{f}$  reales. Por lo tanto quitamos la parte imaginaria.

Escribimos el resultado superior tan “raro” para poder escribir una formula para todos los coeficientes:

$$a_n = \int_0^1 g(x) \cos(1\pi nx) dx$$

Tomando en el desarrollo  $x \rightarrow \frac{1}{2\pi} \arccos x$  :

$$f(x) = a_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n T_n(x)$$

donde  $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$  son conocidos como **polinomios de Chebyshev**

**Observación:**  $T_n(x)$  es un polinomio para  $n \geq 0$ ,  $x \in [-1, 1]$ .

**Ejemplo:**  $T_0(x) = 1$

$$T_1(x) = \cos(\arccos x) = x$$

$$T_2(x) = \cos(2\arccos x) = 2(\cos(\arccos x))^2 - 1 = 2x^2 - 1$$

$$T_3(x) = 4x^3 - 3x$$

Usando las fórmulas de  $\cos(\alpha \pm \beta)$  se puede deducir que:

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) \quad n \geq 1$$

Como  $T_0$  y  $T_1$  son polinomios  $\Rightarrow$  Todos los  $T_n$  son polinomios.

**Observación:** Por lo tanto si se busca  $T_n(x_0)$  basta calcular  $T_0(x_0)$  y  $T_1(x_0)$  y usar esta fórmula recurrente (esto es lo que hacen las calculadoras).

$f$  muy regular  $\Rightarrow g(x) = f(\cos(2\pi x))$  es muy regular y es 1-periódica.

$\Rightarrow$  sus coeficientes de Fourier tienden rápido a cero

$\Rightarrow a_n \rightarrow 0$  muy rápido

$\Rightarrow f(x) \equiv a_0 + 2 \sum_{n=1}^N a_n T_n(x)$  es buena aproximación.

**Observación:** Los coeficientes  $a_n$  pueden ser precalculados y almacenados en memoria.

$$a_n = \int_0^1 g(x) \cos(2\pi n x) dx = - \int_0^1 g'(x) \frac{\sin(2\pi n x)}{2\pi n} dx$$

También se puede determinar el  $N$  de antemano dependiendo de la precisión exigida.

**Ejemplo:** *Veamos cómo aproximar la función  $\sin(x)$  Para ello vamos a apoyarnos en la función  $f$ :*

$$f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$$

*Aproximando  $f$  en  $[-1, 1]$  podemos deducir  $\sin$  en  $\mathbb{R}$ . Además, por la simetría impar de  $f$ , se puede ver que  $a_{2k} = 0$ . Si tomamos tres coeficientes de Fourier no nulos, precalculados con 8 decimales, obtenemos:*

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) \equiv 0.56682409T_1(x) - 0.06903589T_3(x) + 0.00224536T_5(x)$$

*donde  $T_1(x) = x$ ,  $T_3(x) = 4x^3 - 3x$ , y  $T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x$ . Se puede comprobar que el error absoluto máximo en esta aproximación es menor que  $7 * 10^{-5}$*

*Con 8 coeficientes no nulos ya se obtiene el error necesario para la doble precisión ( $< 10^{-16}$ , el epsilon máquina).*



### IV.3.2.1. Tomografía

Veamos ahora dos técnicas relacionadas con el análisis de Fourier

- **TAC** (Tomografía Axial Computarizada)

¿Se puede reconstruir la estructura de un tejido a través de radiografías?

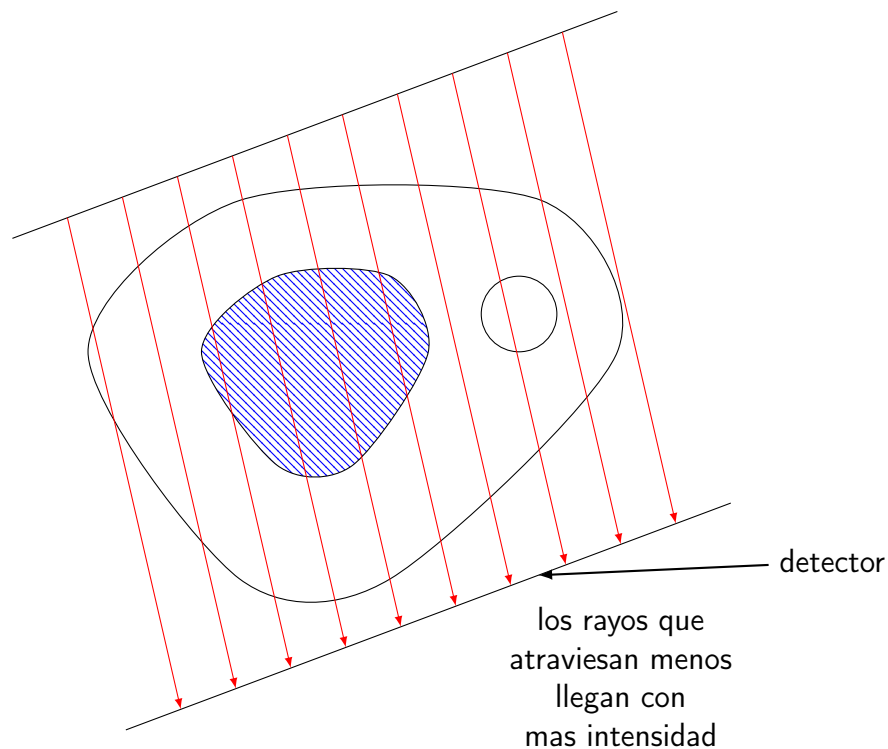
La respuesta es SI, ahora vamos a ver cómo.

Cuando hacemos una radiografía pasamos rayos x por una muestra y vemos que, al llegar al otro lado, los rayos llegan más atenuados si han pasado por zonas de más densidad.

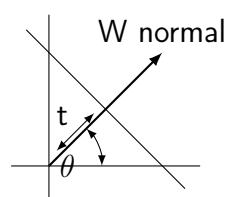
La "radiografía unidimensional" que se obtiene en el detector (donde llegan los rayos), depende de la integral de la densidad de la muestra a lo largo de la línea.

En la práctica el emisor y el receptor se van girando y se obtienen los datos correspondientes a todas las radiografías.

$$r_{\theta,t} \equiv x \cos \theta + y \sin \theta = t$$



siendo  $\theta$  el ángulo con el eje OX y  $t$  la distancia de la recta a O (origen).



En definitiva si  $\rho =$  densidad de la muestra. Los datos obtenidos por una máquina de TAC son valores de:

$$P_\theta(t) = \int_{r_{\theta,t}} \rho$$

Al final si el patrón que obtenemos es más claro, habremos pasado por una parte de la muestra con menos densidad y viceversa.

La pregunta matemática es si a través de los valores de  $P_\theta(t)$  cuando  $\theta$  y  $t$  varían es posible recuperar  $\rho$

La respuesta a esta pregunta la dio J.Radón, que demostró que si que era posible. Veamos cómo.

Recordemos la fórmula de  $r_{\theta,t}$

$$r_{\theta,t} \equiv x \cos \theta + y \sin \theta + t$$

$$P_\theta(t) = \int_{r_{\theta,t}} \rho$$

Entonces, haciendo una parametrización de la recta nos queda:

$$\int \rho = \int \rho(\phi(u)) \cdot |\phi'(u)| du$$

- $x = t \cos \theta - u \sin \theta$
- $y = t \sin \theta + u \cos \theta$

$$P_\theta(t) = \int_{r_{\theta,t}} \rho = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(t \cos \theta - u \sin \theta, t \sin \theta + u \cos \theta) du$$

Siendo el determinante del Jacobiano del cambio de variables igual a 1.

Consideramos la transformada de Fourier de  $t \rightarrow P_\theta(t)$

$$\widehat{P}_\theta(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \rho(t \cos \theta - u \sin \theta, t \sin \theta + u \cos \theta) du e(-t\xi) dt$$

Haciendo un cambio de variable en dos variables  $(u, t) \rightarrow (x, y)$ , que corresponde a la parametrización anterior.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos & -\sin \\ \sin & \cos \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ u \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} t \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos & \sin \\ -\sin & \cos \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\widehat{P}_\theta(\xi) = \int \int_{\mathbb{R}^2} \rho(x, y) e(-\xi(x \cos + y \sin)) dx dy$$

**Observación:** Como sabemos que  $\widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e(-x\xi) dx$  Para  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$  la definición es similar tomando transformadas en cada variable.

$$\widehat{F}(\xi, n) = \int \int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) e(-x\xi - yn) dx dy$$

Para intentar no mezclar las variables vamos a usar  $r$  en la siguiente fórmula en vez de  $\xi$ :

$$\widehat{P}_\theta(r) = \widehat{\rho}(r \cos \theta, r \sin \theta)$$

Esto implica que  $\rho(x, y) = \int_{\mathbb{R}^2} \widehat{\rho}(\xi, n) e(x\xi + yn) d\xi dn$

Cambiando a polares con  $\xi = r \cos \theta$  y  $n = r \sin \theta$ :

$$\rho(x, y) = \int_0^{2\pi} \int_0^\infty r \widehat{P}_\theta(r) e(xr \cos \theta + yr \sin \theta) dr d\theta$$

Este sistema se ha tardado mucho en aplicar porque puede funcionar bien en objetos cuya densidad decae suavemente, pero el cuerpo humano no es así, y aunque el cálculo no sea muy complicado, hace falta ordenadores para realizarlo.

- **RMN (Resonancia Magnética Nuclear)**

RMN Resulta que las partículas subatómicas tienen un momento magnético, se comportan como un imán.

Esos imanes pueden estar cambiando de posición, pero lo pueden hacer a cualquier velocidad. Se ve que con cierta velocidad logras que esto entre en resonancia. **Esto no lo vamos a ver este curso.**

### IV.3.3. Experimentos con imágenes y su transformación de Fourier

#### IV.3.3.1. Máscaras sobre los coeficientes de Fourier

Una vez tenemos los bloques de 8x8, aplicamos máscaras a los coeficientes que se van a guardar. Esta máscara es una matriz en la que un 1 indica que se debe guardar ese índice, y un 0 indica que no se debe guardar.

Como cabe esperar, con una matriz llena de unos no hay ninguna diferencia entre la imagen transformada y la imagen original, sin importar que imagen utilicemos para calcularlo.

Si probamos, por ejemplo, con una matriz llena de ceros excepto un uno en una esquina (la superior izquierda en el ejemplo) lo que ocurre es que para cada bloque de 8 por 8 solo tenemos un coeficiente. Dejando este bloque de 8x8 de un solo color.

Seguimos probando, esta vez con una matriz con solo unos excepto por la última fila y la última columna, que tienen 0. Esto descarta 64 - 49 coeficientes. La imagen final no presenta cambios a simple vista, pero podemos observar, sobre todo en dibujos, que en zonas de cambio abrupto hay pequeñas muestras de oscilaciones.

Podemos seguir quitando las últimas columnas y filas, y con una más todavía seguimos distinguiendo la imagen bastante bien solo que la pérdida de calidad es visible al hacer zoom y comprobar el resultado.

¿Pero que pasa si quitamos el primer coeficiente? Este es el que indica el promedio de color en ese bloque de la imagen. Si creamos una máscara que descarte solo este coeficiente podremos observar cómo el promedio no se tiene en cuenta en la imagen transformada. A efectos prácticos, las zonas en las que los colores sean mayoritariamente constantes se verán negras (color 0) ya que el único coeficiente usado sería el promedio (pero lo descartamos). A su vez podemos observar las partes que varían en la imagen van a tener colores distintos del negro, y las vamos a poder ver. Si invertimos la imagen, para que las zonas uniformes se vean blancas la imagen quedará como un dibujo ya que solo se van a ser oscuras las zonas de cambio (en general, los bordes).

#### IV.3.3.2. Comparación entre Fourier y Taylor

Con un simple programa de matlab podemos comparar la diferencia entre la aproximación de Taylor a la función  $\tan(x\pi/4)$  y la de Fourier. Entre 0 y 1 la aproximación de Fourier y la función real son indistinguibles. Calculando el error vemos que es del orden de  $10^{-3}$ . En cambio, Taylor muestra una gran aproximación en el punto 0, pero se puede apreciar que se empieza a separar notablemente de la función según se acerca a 1 o -1.

Si probamos con una función más plana vemos como Taylor aproxima mejor que Fourier en el punto pero se separa enseguida, mientras que la de Fourier se mantiene cerca de la función.

#### IV.3.3.3. Más máscaras: Filtros de dibujo

Si extendemos ahora el concepto de máscara anterior podemos poner pesos a cada coeficiente si multiplicamos cada uno de ellos por su correspondiente peso en la matriz. Y entonces empezamos a buscar matrices que nos consigan un efecto de detección de bordes.

Vamos a repasar un concepto de la convolución en imágenes. Vamos a verlo primero en 1 variable para entenderlo mejor.

Si tenemos una  $f(x)$  de la que tomamos unos valores (discretizamos) tenemos una sucesión  $\{f(n)\}$ . Definimos una función:  $g(n) = f(n-1) - 2f(n) + f(n+1)$

Este filtro puede parecer absurdo, ya que en una función continua, los valores van a ser muy parecidos, pero la utilidad de este filtro es encontrar discontinuidades, porque los valores son más distantes. ¿Pero y esto no se ve a simple vista? Pues cuando tenemos una imagen, esta es la manera de encontrar los bordes rápidamente (no sólo los bordes de la imagen entera, sino bordes de elementos de la imagen). Podríamos hacer el filtro más complicado, como  $g(n) = f(n-2) + 2f(n-1) - 5f(n) + f(n+1) + f(n+1)$ , es decir, utilizamos la lista  $[1, 2, -5, 1, 1]$  que nos da el filtro aplicado. (En el caso anterior tendríamos  $[1, -2, 1]$ ).

Pero lo útil de esto es en imágenes, como ya hemos dicho, en donde el filtro se

representa como una lista en 2 dimensiones, es decir, como una matriz.

Para entender mejor cómo funciona esto, podemos pensar qué ocurriría con un filtro representado con

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Lo que pasaría es que se desenfoca. Cada píxel toma información de sus adyacentes, lo que provoca desenfoque. Para probarlo, en GIMP podemos aplicar un filtro de convolución y ver cómo ocurre. No solo con GIMP podemos hacer esto (de una manera "transparente" en el sentido de no entender nada), sino que podríamos hacer un código de Matlab para probarlo. Chamizo ha colgado en la Web unos programas para hacer filtros de convolución.

¿Qué pasaría en una matriz que fuera nula entera, menos en una línea que fueran todos unos? Esto crea un *filtro de movimiento*, ya que sólo se "desenfoca" horizontalmente.

Otro filtro interesante es:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -4 & -4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -4 & -4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

¿Esto que hace? Pues este es el secreto del filtro "Dibujo hecho a lápiz". Aplicando este filtro e invirtiendo, una foto se convierte en un dibujo. Si alguien se anima a completarlo con unas fotos que lo enseñen pues se verá mejor.

#### IV.3.3.4. Transformada de Radón

Cuando realizamos la transformada de radón con suficientes muestras (por ejemplo, 180 muestras para media circunferencia) observamos un resultado muy bueno, con unos bordes más suavizados si eso.

En cambio, podemos ver que este método es muy sensible a la discretización ya que si tomamos solo 18 muestras a lo largo de media circunferencia, tras aplicar la transformación de Radón y su inversa podemos comprobar como aparecen unas trazas extrañas y ruido por la imagen, aunque todavía se pueden apreciar las zonas de distinta densidad.

# Capítulo V

## Teoría de la información

### V.1. Definición e idea intuitiva de entropía

*“Una teoría matemática de la comunicación”* (Claude E. Shannon, 1948)

Partimos de un conjunto finito  $S = \{S_1, \dots, S_n\}$  que además es un espacio de probabilidad, siendo  $p_i$  la posibilidad de escoger  $s_i$ . La idea general es que los elementos de  $S$  sean cualesquiera fuentes de información (la notación  $S$  proviene de *source*).

Más adelante consideraremos  $S$  como un conjunto de “caracteres” que compondrán mayores unidades de información, como mensajes o ficheros.

Entropía

*Definición V.1 Entropía.* Shanon definió una función  $H(p_1, \dots, p_n)$  que mide la cantidad de “información contenida” en  $S$ , y que se puede interpretar también como la “incertidumbre” al extraer una muestra aleatoria de  $S$ .

El siguiente ejemplo nos da una idea más intuitiva de este concepto de **Entropía**

**Ejemplo:** Sea un conjunto  $S$  formado por dos elementos y sean las probabilidades  $p_1 = 1$  y  $p_i = 0$  si  $i \neq 1$ . Entonces, no hay incertidumbre ya que sabemos el resultado. Es decir, tomando un elemento al azar del conjunto  $S$  sabemos a ciencia cierta que será  $s_1$ .

Sin embargo, si para el mismo conjunto  $S$  tenemos las probabilidades  $p_i = \frac{1}{n}$  tendremos mucha incertidumbre (es máxima). Es decir, tomando un elemento al azar del conjunto  $S$  no podremos intuir qué elemento será.

Shannon, al estudiar el concepto de la entropía, forzó una serie de propiedades que debería cumplir la función  $H$  que buscaba:

- $H$  deberá ser continua. Si realizo pequeñas variaciones en la distribución de las probabilidades, es lógico esperar pequeñas variaciones en la entropía del conjunto.
- $H$  ha de ser creciente en  $n$ : Es decir, si dada una función

$$H\left(\frac{1}{n}, \dots, (n \text{ veces}), \dots, \frac{1}{n}\right)$$

aumentamos el valor de la  $n$  la entropía debería ser mayor, pues tendremos aún más cosas, lo que nos dará una mayor incertidumbre.

- La cantidad de información no puede variar si subdividimos  $S$  en subconjuntos más pequeños de tamaño  $b_i$ , es decir:

$$H\left(\frac{1}{n}, \dots, (n \text{ veces}), \dots, \frac{1}{n}\right) = H\left(\frac{b_1}{n}, \dots, (k \text{ veces}), \dots, \frac{b_k}{n}\right) + \sum_{i=1}^k \frac{b_k}{n} H\left(\frac{1}{b_i}, \dots, (b_i \text{ veces}), \dots, \frac{1}{b_i}\right)$$

para cualquier  $b_i \in \mathbb{Z}^+$ ,  $\sum_{i=1}^k b_i = n$ .

Así mismo, Shannon probó que las únicas funciones con estas propiedades son aquellas de la forma:

$$H(p_1, \dots, p_n) = \text{Cte} \sum_{i=1}^n p_i \log(p_i) \quad \text{con Cte} < 0$$

Eligió  $\text{Cte} = -\frac{1}{\log 2}$  pensando en comunicaciones digitales.

Entropía

**Definición V.2 Entropía.** Se define la entropía a partir de la fórmula:

$$H(p_1, \dots, p_n) = - \sum_{i=1}^n p_i \log_2 p_i$$

Se define  $0 \log_2 0 = 0$  puesto que  $\lim_{x \rightarrow 0} x \log x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log(x)}{1/x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^2}{x} = 0$

Veamos un pequeño ejemplo sobre cómo calcular esta entropía

**Ejemplo:** Sea  $S = \{ \text{bytes} \}$  el conjunto de todos los posibles bytes y supongamos una distribución equiprobable entre estos bytes, es decir:

$$p_1 = \frac{1}{2^8}, \dots, p_{256} = \frac{1}{2^8}$$

La entropía se calcularía como:

$$H = - \sum_1^{256} \frac{1}{256} \log_2\left(\frac{1}{256}\right) = - \sum_1^{256} \frac{1}{256} (-8) = \sum_1^{256} \frac{1}{32} = 2^8 2^{-5} = 2^3 = 8 \text{ bits}$$

## V.2. Códigos prefijo

Código

**Definición V.3 Código.** Definimos un código (binario únicamente descifrable) como una función  $C : S \mapsto \text{cadena de bits}$  (generalmente ceros y unos) que es inyectiva cuando actúa sobre cadenas de elementos de  $S$  como:

$$S_{i_1}S_{i_2}\dots S_{i_N} \rightarrow C(S_{i_1})C(S_{i_2})\dots C(S_{i_n})$$

Tenemos dos necesidades prácticas:

1. Crear códigos que añaden redundancia para poder corregir errores cuando se transmiten por un canal poco fiable (CD, DVD, telecomunicaciones).
2. Crear códigos que no tengan ninguna información redundante para poder comprimir.

En este curso vamos a centrarnos en la segunda necesidad. Para ello definimos el concepto de longitud media.

Longitud  
media

**Definición V.4 Longitud media.** Se define la longitud media de las cadenas de bits  $C(s_i)$  como:

$$l(C) = \sum_i l(C(s_i))$$

Siendo  $l(C(s_i))$  la longitud de  $C(s_i)$  o su número de bits.

Si los elementos de  $S$  forman "palabras" (cadenas)  $s_{i_1}s_{i_2}\dots s_{i_N}$  apareciendo como variables aleatorias **independientes** entonces la longitud media de la codificación de una cadena de  $N$  elementos de  $S$  es:

$$l_N(C) = \sum_{i_1, \dots, i_N=1}^n p_{i_1}p_{i_2}\dots p_{i_N} l(C(s_{i_1}s_{i_2}\dots s_{i_N}))$$

Siendo  $l(C(s_{i_1}s_{i_2}\dots s_{i_N}))$  la longitud en bits al codificar de la cadena.

No obstante esta última suposición no es realista pues en la mayoría de los idiomas, la probabilidad de encontrar una letra depende en gran medida de la letra anterior. Por ejemplo, en castellano, después de una consonante es muy esperable encontrar una vocal.

### V.3. Source Coding Theorem, Noiseless Coding Theorem o Primer Teorema de Shannon

Con estos tres nombres, entre los que el último es el menos habitual, nos referimos a un mismo teorema, que se muestra a continuación.

**Teorema V.1 (Source Coding Theorem).** Sea  $l^*$  el mínimo de  $l(C)$  entre todos los posibles códigos (con  $S$  y sus probabilidades fijados), entonces:



$$H \leq l^* \leq H + 1$$

donde  $H$  es la entropía de  $S$ .

Por supuesto, comprimir o codificar carácter a carácter podría ser absurdo si acumulan poca información, por ejemplo si son bits. Con un truco sencillo se pasa al caso general de cadenas. El truco se recoge en el siguiente corolario.

**Corolario V.2.** Sea  $l_N^*$  el mínimo de  $l_N(C)$  para códigos definidos sobre  $N$ -cadenas de  $S$  ( $S_N$ ) se cumple:

$$H \leq \frac{l^*}{N} < H + \frac{1}{N}, \text{ en particular } \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{l_N^*}{N} = H$$

Este resultado asegura que el mejor código permite, en media, codificar (comprimir) un fichero de  $N$  caracteres en  $NH$  bits.

La demostración del Teorema es bastante compleja y queda fuera de los contenidos de este curso. No obstante si que podemos llevar a cabo la demostración del corolario suponiendo la veracidad del Teorema.

*Demostración.* Aplicamos el teorema cambiando  $S = \{S_1, S_2, \dots, S_n\}$  por  $\tilde{S} = \{S_{i1}, S_{i2}, \dots, S_{iN}\} = N$ -cadenas de elementos de  $S$  con probabilidades asociadas  $p_{i1}, \dots, p_{iN}$  con lo que obtenemos.

$$H_{\text{para } \hat{S}} \leq l_N^* < H_{\text{para } \hat{S}} + 1$$

Si conseguimos  $H_{\text{para } \hat{S}} = NH$  obtendremos directamente las desigualdades del corolario que queremos probar. Vamos a ello.

$$H_{\text{para } \hat{S}} = - \sum_{i_1, \dots, i_N} p_{i_1} \dots p_{i_N} \log_2(p_{i_1} \dots p_{i_N})$$

Vemos que  $\log_2(p_{i_1} \dots p_{i_N}) = \log_2 p_{i_1} + \dots + \log_2 p_{i_N}$

El coeficiente de  $\log_2 p_1$  una vez desarrollada la suma será:

$$- \sum_{k=1}^N \sum_{i_1, \dots, i_N=1} p_{i_1} \dots p_{i_N} = -p_1 \cdot \sum_{k=1}^N \sum_{j_1, \dots, j_{N-1}=1}^n p_{j_1} \dots p_{j_{N-1}}$$

Como  $\sum_{j_1, \dots, j_{N-1}=1}^n p_{j_1} \dots p_{j_{N-1}} = 1$  tendremos

$$-p_1 \cdot N \cdot 1 = -p_1 \cdot N \cdot (p_1 + \dots + p_n)^{N-1} = -N \cdot p_1$$

Entonces, en general

$$\begin{cases} \text{coef de } \log p_1 \rightarrow -Np_1 \\ \text{coef de } \log p_j \rightarrow -Np_j \end{cases} \implies H_{\text{para } \hat{S}} = -N \sum_{j=1}^n p_j \log p_j = N \cdot H$$

Por tanto tenemos:

$$H_{\text{para } \hat{S}} \leq l_N^* < H_{\text{para } \hat{S}} + 1 \implies HN \leq l_N^* < HN + 1 \implies H \leq \frac{l_N^*}{N} < H + \frac{1}{N}$$

□

**Recordatorio**  $C$  está en principio definido en  $S$  pero la definición se extiende a cadenas de símbolos concatenando resultados. Exigimos que  $C$  sea inyectiva actuando sobre cadenas.

**Ejemplo:**  $S = \{A, B, C\}$   $C(A) = 0$   $C(B) = 1$   $C(C) = 10$

$C$  no es un código válido ya que  $C(BA) = C(C) = 10$ .

$\tilde{C}(A) = 01$   $\tilde{C}(B) = 001$   $\tilde{C}(C) = 0001 \implies \tilde{C}(AC) = 010001$  si es un código válido.

**Ejemplo:**  $N = 10^6$ : el fichero en ASCII ocupa  $10^6$  bytes.

Del corolario V.2 obtenemos que el mejor código sólo permitiría llegar a  $l_N^*$  hasta  $NH$  bits =  $10^6 1$  bits  $\simeq 125000$  bytes.

Chamizo hizo unas pruebas en su ordenador en las que con archivos aleatorios los resultados fueron los siguientes:

algoritmo	tamaño fichero comprimido
gzip	159068 bits
bzip	160213 bits
rar	161495 bits
zip	159210 bits

**Tabla V.1:** Todos son aproximadamente un 30 % peores que el óptimo.

**Ejemplo:**  $S = \{0, 1\}$   $p_1 = p_2 = \frac{1}{2}$

$$1 = H \leq \frac{l_N^*}{N} \implies l_N^* \geq N \implies \text{no hay compresión}$$

**Ejemplo:** ¿Cuanto se puede comprimir un fichero con  $N$  bits con el 75 % de ceros y 25 % de 1s?

En este caso tendríamos el conjunto  $S = \{0, 1\}$  con las probabilidades asociadas  $p_1 = 3/4, p_2 = 1/4$  Podemos calcular su entropía a partir de las fórmulas vistas

anteriormente con lo que obtenemos

$$H = 0.811 \rightarrow l_N^* \simeq 0.8111N$$

Digamos que un fichero tiene tamaño  $M = 1000$  bits y su mejor codificación tiene un tamaño de  $R$  bits..

Si codificamos bit a bit tendremos  $N = 1$  al aplicar el corolario<sup>1</sup> visto antes nos queda:

$$0.811 < \frac{l_1^*}{1} < 1.811$$

$$\text{Como } R = M \cdot l_1^* \implies 811 \leq R < 1811$$

Si codificamos de 10 en 10 bits  $N=10$  y aplicamos nuevamente el corolario, entonces

$$0.811 < \frac{l_1^*}{10} < 0.911$$

$$\text{Como } R = \frac{M}{10} \cdot l_1^* \implies 811 \leq R < 911$$

Por lo tanto tomando bloques de bits grandes (lo cual en la práctica tiene límites) la "tasa de compresión" se acerca cuanto queramos a  $H$

## V.4. Codificación de Huffman

La prueba del *source coding theorem* es constructiva, es decir, en principio permitiría diseñar un código para el que  $l_N^*$  satisfaga la desigualdad que anuncia el mismo. Huffman, siendo un estudiante de doctorado, creó un algoritmo fácilmente programable para diseñar un código que verifique  $H \leq l(C) < H + 1$ . De hecho  $l(C) = L^*$

Se basa en la construcción de un árbol binario partiendo del conjunto  $S_0 = S$  y evolucionando hasta llegar al conjunto  $S_{n-1}$  que sólo tiene un elemento.

Las reglas para la construcción del árbol son:

1. Se toman los dos elementos de  $S_i$  con menos probabilidad y se ponen en el árbol como hijos de un padre al que se le asigna la suma de probabilidades.
2. Recursivamente definimos el conjunto:

$$S_{i+1} = (S_i \setminus \{\text{los hijos de antes}\}) \cup \{\text{padre}\}$$

<sup>1</sup>Como es lógico, en el caso  $N=1$  podemos aplicar tanto el corolario como el teorema

Veamos un ejemplo de la construcción de este árbol

**Ejemplo:**

$$S = \{a, b, c, d, e, f\}$$

Siendo  $a = \frac{1}{2}$ ,  $b, c, d = \frac{1}{8}$  y  $e, f = \frac{1}{16}$

Vemos que el padre de  $e$  y  $f$  ( $\widehat{ef}$ ) tiene probabilidad  $\frac{1}{8}$

Nos queda

$$S_1 = \{a, b, c, d, \widehat{ef}\}$$

Ahora vemos el padre de  $d$  con  $\widehat{ef}$ , nos queda:

$$S_2 = \{a, b, c, \widehat{df}\}$$

De forma que  $\widehat{df}$  tiene probabilidad  $\frac{1}{4}$

Siguiendo estos pasos llegamos a:

$$S_4 = \{a, \widehat{bf}\}$$

con las probabilidades de  $a$  y  $\widehat{bf} = \frac{1}{2}$  y la raíz tendría probabilidad 1.

Una vez que ya tenemos el árbol, partiendo de la raíz hasta las hojas codificamos con 0 ir a la izquierda y con 1 ir a la derecha.

$$\left\{ \begin{array}{l} a \rightarrow 0 \\ b \rightarrow 100 \\ c \rightarrow 101 \\ d \rightarrow 110 \\ e \rightarrow 1110 \\ f \rightarrow 1111 \end{array} \right. \implies \left\{ \begin{array}{l} l(C) = \frac{17}{8} \\ H = \frac{17}{8} \end{array} \right.$$

**Ejemplo:**

$$\text{Tenemos el conjunto } S = \{a, b, c, d\} \text{ con probabilidades } \left\{ \begin{array}{l} a = 0.35 \\ b = 0.25 \\ c = 0.24 \\ d = 0.16 \end{array} \right.$$

Tomamos los dos que tengan probabilidades más pequeñas y los juntamos como hermanos de forma que el padre de  $c$  y  $d$  ( $\widehat{cd}$ ) tiene probabilidad 0.4.

Luego agrupamos los dos siguientes elementos con probabilidades más pequeñas de forma que nos queda  $\widehat{ab}$  con probabilidad 0.6

El padre de todos ( $\widehat{abcd}$ ) tiene probabilidad 1.

La codificación quedaría:

$$\begin{cases} a \rightarrow 00 \\ b \rightarrow 01 \\ c \rightarrow 10 \\ d \rightarrow 11 \end{cases}$$

con longitud media  $l(C) = 2$  y  $H = 1.9472$

**Ejemplo:** Vamos a hacer una pequeña variación sobre el ejemplo anterior.

$$\text{Tomamos ahora } \begin{cases} a = 0.45 \\ b = 0.25 \\ c = 0.24 \\ d = 0.06 \end{cases}$$

Empezamos igual uniendo,  $c$  y  $d$ . Nos queda  $\widehat{cd}$  con probabilidad 0.30.

Ahora unimos  $\widehat{cd}$  con  $b$ . Entonces probabilidad de  $\widehat{bcd}$  es 0.55. Y finalmente unimos el nodo  $a$ .

$$\text{La codificación quedaría: } \begin{cases} a \rightarrow 0 \\ b \rightarrow 10 \\ c \rightarrow 110 \\ d \rightarrow 111 \end{cases}$$

La longitud media (lo que mide típicamente una cadena de bits) se calcularía:

$$l(C) = 0.45 \cdot 1 + 0.25 \cdot 2 + 0.24 \cdot 3 + 0.06 \cdot 3 = 1.91$$

Y la entropía  $H = 1.7560$

Llegados a este punto nos quedan dos cosas que demostrar:

1. Demostrar que este algoritmo nos lleva siempre a la obtención de un código válido
2. Demostrar que el código obtenido es óptimo.

### V.4.1. La codificación de Huffman da lugar a un código válido

La codificación de Huffman verdaderamente da lugar a un código válido (descodificable de manera única,  $C$  es inyectiva actuando sobre cadenas)

Vamos a verlo con el ejemplo anterior:

**Ejemplo:** Recordemos que teníamos la siguiente codificación

$$\begin{cases} a \rightarrow 0 \\ b \rightarrow 10 \\ c \rightarrow 110 \\ d \rightarrow 111 \end{cases}$$

De esta forma podemos cifrar la cadena  $abacd \rightarrow 010011010$  y podemos comprobar que no hay ambigüedad a la hora de llevar a cabo el proceso inverso.

Esto se debe básicamente a que se trata de un código prefijo:

Código prefijo

**Definición V.5 Código prefijo.** Sea una función  $C : S \rightarrow \{\text{cadena de bits}\}$  tal que si  $b_1b_2\dots b_N \in \text{Im}C$  entonces  $b_1b_2\dots b_k \notin \text{Im}C$  para  $k < N$  se dice que es un **código prefijo**

Es decir, dada una cadena de bits perteneciente a la imagen del código, si quitamos su último bit la cadena resultante no pertenece a la imagen del mismo. Un ejemplo de código prefijo es el **UTF-8**

Podemos comprobar de manera sencilla que, basándonos en la definición anterior, un código prefijo siempre será un código

*Demostración.*

$$C(S_{i1}S_{i2}\dots S_{ik}) = C(S_{j1}S_{j2}\dots S_{jk}) \implies C(S_{i1}) = C(S_{j1})$$

ya que de lo contrario se violaría la propiedad de prefijo, por tanto  $S_{i1} = S_{j1}$ , e iterando vamos obteniendo  $S_{i2} = S_{j2} \dots$

Es decir, queda claro que se trata de una función inyectiva. □

Con esto acabamos de ver porqué los codigos prefijos son códigos. Vamos ahora a ver **porqué los códigos de Huffman son códigos.**

Los códigos prefijos generan y provienen de árboles binarios (no necesariamente completos. Un padre puede tener un solo hijo). En concreto, la codificación Huffman procede de un árbol binario en el que interpretamos como las ramas como 0s o 1s según:

0 → rama a la izquierda

1 → rama a la derecha

**Ejemplo:** Dada la siguiente codificación:

$$\begin{cases} a \rightarrow 01 \\ b \rightarrow 001 \\ c \rightarrow 0001 \\ d \rightarrow 0000 \end{cases}$$

El árbol que nos queda es:

Con esta correspondencia tenemos que la codificación de Huffman es un código prefijo (porque proviene de un árbol)

### V.4.2. La codificación de Huffman es óptima

Vamos a ver que esta codificación es óptima entre el subconjunto de códigos prefijo. Como mencionaremos más adelante, en realidad siempre un código se puede transformar en código prefijo sin cambiar las longitudes. Por tanto **la codificación Huffman también minimiza entre todos los códigos.**

**Teorema V.3.** *El mínimo de  $l(C)$  sobre todos los códigos prefijo se alcanza con la codificación de Huffman*

**Teorema V.4** (Desigualdad de Kraft). *Dado un código prefijo*

$$C : S = \{S_1, \dots, S_n\} \rightarrow \{\text{cadenas de bits}\}$$

y sea  $l_i = l(C(S_i))$  entonces

$$\sum_{i=1}^n 2^{-l_i} \leq 1$$

Además, dados  $l_i \in \mathbb{Z}^+$  cualesquiera que cumplan la desigualdad, existe un código prefijo tal que  $l_i = l(C(S_i))$  con  $1 \leq i \leq n$

*Demostración.* Vamos a llevar a cabo la demostración del problema probando las dos direcciones de la doble implicación marcada por el mismo:

▪

$$l_i = l(C(S_i)) \implies \sum_{i=1}^n 2^{-l_i} \leq 1$$

Digamos que  $l_1 \leq l_2 \leq \dots \leq l_r < l_{r+1} = l_{r+2} = \dots = l_n$  y consideramos  $B = \{\text{cadenas de } l_n \text{ bits}\}$  de forma que

$$2^{l_n} = |B| = |B \cap \text{Im}C| + |B \setminus B \cap \text{Im}C| = n - r + \sum_{i=1}^r 2^{l_n - l_i} = \sum_{i=1}^n 2^{l_n - l_i}$$

La ecuación anterior procede del hecho de que  $B \cap \text{Im}C$  no contiene ninguna de las  $2^{l_n - l_i}$  cadenas de bits que comienzan por  $C(S_i)$

▪

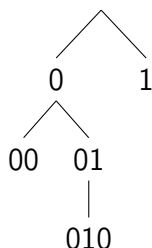
$$\sum_{i=1}^n 2^{-l_i} \leq 1 \implies l_i = l(C(S_i))$$

Esta parte de la demostración se basa en el algoritmo ilustrado con el siguiente ejemplo:

$$l_1 = 1, l_2 = 2, l_3 = 3$$

$$2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-3} \leq 1$$

Queremos un código prefijo con estas longitudes. Tomamos la longitud mayor  $l_3 = 3$  y dibujamos el árbol binario completo de altura esa logitud.



El algoritmo se basa en podar este árbol de la siguiente forma:

1. En  $l_1 = 1$  borramos los descendientes de un vértice que estén en altura/profundidad 1.
2. Luego hago lo mismo con  $l_2$ , con lo cual borramos los descendientes que estén en altura/profundidad 2.
3. Una vez hecho esto, si sobran algunas hojas que no corresponden a las longitudes, también las borramos (en nuestro caso nos quedan dos con longitud 3, y solo queremos 1, por lo tanto borramos la otra)

4. Las codificaciones que nos quedarían serían  $\begin{cases} 1 \\ 00 \\ 010 \end{cases}$

Necesitamos alguna condición para garantizar que el algoritmo se pueda llevar a cabo sin que se nos acaben los vértices.

Analizando con cuidado el ejemplo podemos observar que lo que hemos ido haciendo es comenzar con un árbol de 8 hojas al que le hemos quitado 4 y luego hemos quitado 2 para al final quedarnos con  $8 - 4 - 2 = 2$  hojas con lo que podíamos escoger el  $l_3$  que quisiéramos de altura 1.

En general, con la notación anterior  $l_1 \leq l_2 \leq \dots \leq l_r < l_{r+1} = \dots = l_n$  el algoritmo parte de un árbol con  $2^{l_n}$  hojas. De ellas borramos primero  $2^{l_n-l_1}$  y en sucesivos pasos  $2^{l_n-l_2}, \dots, 2^{l_n-l_r}$  y deben sobrnarnos, al menos,  $n - r$  de las hojas iniciales.

Entonces necesitamos que  $2^{l_n} - \sum_{i=1}^r 2^{l_n-l_i} \geq n - r$  para que el algoritmo funcione. Por tanto es necesario que

$$2^{l_n} \geq \sum_{i=1}^n 2^{l_n-l_i} \iff 1 \geq \sum_{i=1}^n 2^{-l_i}$$

□



**Observación:** La generalización de McMillan afirma que para cualquier código se cumple  $\sum_{i=1}^n 2^{-l_i} \leq 1$  aunque no sea prefijo.

Por tanto, cualquier código dado satisface la desigualdad de Kraft y por el recíproco de Kraft sabemos que existe un código prefijo con las mismas longitudes. Así, cualquier teorema que hable de las longitudes y sea cierto para códigos prefijo, lo será para todos.

Una vez que hemos visto esto podemos probar el teorema del Source Coding V.1. Para la demostración vamos a utilizar la desigualdad de Kraft:

*Demostración.* **Demostración del Source coding theorem**

Sea la función

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = - \sum_{i=1}^n p_i \log x_i$$

si la restringimos al *simplex*

$$\sum_{i=1}^n x_i = 1 \text{ con } 0 \leq x_i \leq 1$$

entonces  $f$  alcanza un mínimo cuando  $x_i = p_i$

Con la notación de la desigualdad de Kraft tomemos

$$x_i = \frac{2^{-l_i}}{\sum_{j=1}^n 2^{-l_j}}$$

Entonces

$$H = f(p_1, \dots, p_n) \leq f(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq f\left(\frac{2^{-l_1}}{\sum_{j=1}^n 2^{-l_j}}, \dots, \frac{2^{-l_n}}{\sum_{j=1}^n 2^{-l_j}}\right)$$

y, por la desigualdad de Kraft, llegamos a que:

$$f\left(\frac{2^{-l_1}}{\sum_{j=1}^n 2^{-l_j}}, \dots, \frac{2^{-l_n}}{\sum_{j=1}^n 2^{-l_j}}\right) \leq f(2^{-l_1}, \dots, 2^{-l_n}) = l(C)$$

Con esto ya tenemos la cota inferior para la longitud media. Vamos ahora a obtener la cota superior. Para ello tomamos  $l_i \in \mathbb{Z}^+ : -\log_2 p_i \leq l_i < 1 - \log_2 p_i$ . Así tenemos que

$$\sum_{i=1}^n 2^{l_i} \leq \sum_{i=1}^n 2^{\log_2 p_i} = \sum_{i=1}^n p_i = 1$$

El teorema de la desigualdad de Kraft nos garantiza que  $\exists$  código prefijo con  $l_i = l(C(S_i))$

$$l(C) = \sum_{i=1}^n p_i l_i < \sum_{i=1}^n p_i - \sum_{i=1}^n p_i \log_2 p_i = 1 + H$$

Con lo que ya tenemos la acotación de la longitud media que buscábamos:

$$H \leq l(C) \leq H + 1$$

□

## V.5. Métodos de diccionario

En español los caracteres tienen una entropía aproximada de 4.09. Lo que significa que dado un texto de  $M$  caracteres, puesto que:

$$4.09 = H \leq l^*(C) \quad \text{carácter} \rightarrow 1 \text{ byte} = 8 \text{ bits}$$

cabe esperar que la mejor compresión posible sea  $4.09M$  bits =  $\frac{4.09}{8}$  bytes  $\simeq$  la mitad de los bytes que teníamos en el texto original.

En cambio si comprobamos empíricamente con varios compresores comprobamos que superan la compresión óptima:

$$M = 1869610$$

algoritmo	tamaño fichero comprimido
gzip	730122 bytes
bzip	534165 bytes
rar	609319 bytes
zip	730264 bytes

Supongamos un tipo de ficheros en que cada byte tiene un 99% de posibilidades de ser igual al siguiente y un 1% de cambiar aleatoriamente<sup>2</sup>.

En un fichero grande de este tipo cada carácter aparecerá con probabilidad  $\simeq \frac{1}{256}$  lo que nos da una entropía:

$$H = \sum_{i=1}^{256} -\frac{1}{256} \log_2 \frac{1}{256} = 8$$

que, por el *Source Coding Theorem* indica que no hay compresión posible, cada byte requiere 8 bits.

Sin embargo hay un método muy fácil para comprimir este tipo de ficheros: RLE (run-length encoding). Este método consiste en sustituir los datos por grupos de dos bytes. En cada grupo está el número de repeticiones de un carácter y el carácter.

**Ejemplo:** *Veamos un pequeño ejemplo de este algoritmo*

$$50A200B = AA... 50 \text{ veces } ...ABB... 200 \text{ veces } ...B$$

$$200A100A200B = AA... 300 \text{ veces } ...AB... 200 \text{ veces } ...B$$

Con este método típicamente (por las probabilidades mencionadas anteriormente) pasaremos de 100 bytes a 2 bytes.

En el teorema  $S$  está fijado  $S = \{ \text{posibles bytes} \}$ . Si en su lugar empleásemos  $S = \{ \text{posibles cadenas de 100 bytes} \}$  el teorema sí aseguraría que hay compresión.

<sup>2</sup>Como una imagen rasterizada de un dibujo. Los cambios de color son raros porque hay grandes bloques iguales, como el fondo.

**Observación:** Aplicar el corolario con  $N = 100$  no refleja la situación de este tipo de ficheros porque allí se suponía la independencia entre los elementos de  $S$ .

Según el modelo del corolario:  $\text{Prob}(A \dots 100 \text{ veces} \dots A) = (1/256)^{100}$

Y en nuestro problema:  $(A \dots 100 \text{ veces} \dots A) = (1 - 0.01)^{100} \simeq 1/e$

En principio Huffman con  $S = \{ \text{cadenas de 100 bytes que aparecen en el fichero} \}$  sería ventajoso. Pero este  $S$  se basa en un conocimiento previo acerca de las estadísticas de aparición de las cadenas en el fichero. Es por esto que el algoritmo de Huffman no se suele aplicar en compresores "universales". En general los principales problemas de este algoritmo son:

- Requiere un estudio estadístico previo del fichero (para decidir  $S$  y  $p_i$ ) que es costosa.
- Hay que almacenar el árbol para comunicarlo al compresor y podría ser grande.

La idea ahora es buscar métodos "universales" creando diccionarios de forma dinámica que contengan referencias a las palabras.

Estos diccionarios son virtuales; no se almacenan separadamente al fichero, de hecho equivalen a él, y sólo aparecen explícitamente al ejecutar los algoritmos de compresión y descompresión.

Los algoritmos que se usan parten de un trabajo de J.Zip, A.Lempel de 1997 y dan lugar a tres variantes principales: LZ77, LZ78 y LZW.

En la práctica los 3 se usan con diferentes trucos y variantes, pero están todos en uso. A parte de en compresores, se usan en diferentes formatos de imagen.

### V.5.1. Algunos algoritmos de compresión de imagen

algoritmo	funcionamiento
bmp	sin compresión o RLE
png	LZ777 y Huffman (con filtrados previos)
gif	Fija una paleta de 256 colores (o más pequeñas) y LZW

### V.5.2. El algoritmo LZ78

Para simplificar, en los ejemplos pensamos en cadenas de caracteres que terminan con un símbolo de "fin de fichero" que escribiremos como #<sup>3</sup>. El algoritmo se basa en los siguientes principios:

1. Dividimos la cadena que se quiere comprimir en frases.
2. Cada frase consiste en añadir un caracter a una frase ya existente, sin repetirlas.
3. Inicialmente sólo tenemos la frase vacía.

Vemos el ejemplo de la palabra *rellena*. En este caso tenemos un problema y es que, después de añadir la primera *l*, no puedo añadir la segunda, porque no puedo añadir frases repetidas. Por lo tanto añado *le* como frase.

Estas frases en una lista numerada, comenzando por  $0 \rightarrow \emptyset$ , y siguiendo el orden, son el "diccionario".

**Ejemplo:** *Vamos a ver como sería la lista resultante de: "rellena la encuesta". Tenemos que recordar que al final tenemos el fin de documento, #.*

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \rightarrow \emptyset \\ 1 \rightarrow r \\ 2 \rightarrow e \\ 3 \rightarrow l \\ 4 \rightarrow le \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 10 \rightarrow nc \\ 11 \rightarrow u \\ 12 \rightarrow es \\ 13 \rightarrow t \\ 14 \rightarrow a\# \end{array} \right.$$

<sup>3</sup>Esta simplificación no es algo que nos inventemos. En la práctica se considera un carácter de final de fichero para determinar el fin de cada cadena.

**Ejemplo:** *Hacemos lo mismo con la frase "salsa salada"*

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \rightarrow \emptyset \\ 1 \rightarrow s \\ 2 \rightarrow a \\ 3 \rightarrow l \\ 4 \rightarrow sa \\ 5 \rightarrow (\text{el espacio}) \\ 6 \rightarrow sal \\ 7 \rightarrow ad \\ 8 \rightarrow a\# \end{array} \right.$$

Para codificar se sustituye cada frase por un par formado por un número y un carácter según la relación:

frase  $\rightarrow$  (n. de frase en el diccionario sin el último carácter, último carácter de la frase)

**Ejemplo:** *Vamos a ver la codificación de salsa salada.*

$$\left\{ \begin{array}{l} s \rightarrow (0, s) \\ a \rightarrow (0, a) \\ l \rightarrow (0, l) \\ sa \rightarrow (1, a) \\ (\text{espacio}) \rightarrow (0, \text{espacio}) \\ sal \rightarrow (4, l) \\ ad \rightarrow (2, d) \\ a\# \rightarrow (2, \#) \end{array} \right.$$

*En este ejemplo, si suponemos que los elementos ocupan 1 byte cada uno:*

*cadena original  $\rightarrow$  126 bytes*

*codificación  $\rightarrow 8 \cdot 2 = 16$  bytes*

Un ejemplo un poco más realista es el que hizo Chamizo con el texto de *La Regenta*.

El texto consta de 1869610 caracteres, el diccionario le salió de 281192 frases. Entonces:

$2^{19} > 281192 > 2^{18} \implies$  Necesitamos 19 bits para los números y 1 byte = 8 bits para el carácter. Así, cada frase ocupa 27 bits al codificar. La codificación completa ocupa 949023 bytes por lo que, efectivamente, **Hay compresión**

Para **descomprimir** vamos recuperando la lista del diccionario, partiendo de  $0 \rightarrow \emptyset$ , según leemos la codificación.

**Ejemplo:** *Vamos a decodificar la siguiente cadena:*

$$(0,e) (0,r) (2,e) (0, \text{espacio}) (0,t) (3,s) (0,\#)$$

$$\left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \text{Siempre empezamos por } 0 \rightarrow \emptyset \\ \\ \end{array} \right\} \begin{cases} (0,e) \implies 1 \rightarrow e \\ (0,r) \implies 2 \rightarrow r \\ (2,e) \implies 3 \rightarrow re \\ (0, \text{espacio}) \implies 4 \rightarrow \text{espacio} \\ (0,t) \implies 5 \rightarrow t \\ (3,s) \implies 6 \rightarrow res \\ (0,\#) \implies 1 \rightarrow e \end{cases}$$

Frase final: *erre tres*

### V.5.2.1. Nivel de compresión del algoritmo LZ78

El nivel de compresión depende del número de frases asociadas a la cadena/fichero inicial.

Por ejemplo en la cadena *rellenala ya* tenemos 10 frases. Las posiciones relativas a 10 frases ocupan 4 bits. Puesto que un carácter en ASCII ocupa 8 bits cada par está compuesto por la posición y un carácter. Puesto que la codificación requerirá 10 frases, la longitud en bits será  $10 \cdot (4 + 8)$

En general la longitud en bits al codificar una cadena *s* con **LZ78** es

$$l_{LZ}(s) = F \cdot (\lceil \log_2 F \rceil + b)$$

Siendo *b* el número de bits de un carácter.

¿Qué ocurre al aplicar el algoritmo a  $s = s_{i1} \dots s_{iN}$  donde  $s_{ij} \in S = s_1 \dots s_n$  ?

**Teorema V.5.** *Consideremos la longitud media*

$$l_{LZ}^*(N) = \sum_{i_1, \dots, i_N} p_{i_1} \dots p_{i_N} l_{LZ}(s_{i_1} \dots s_{i_N})$$

Entonces

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{l_{LZ}^*(N)}{N} = H$$

Con *H* entropía de *s*

**Observación:** Asintóticamente LZ78 es tan bueno como el algoritmo óptimo en el corolario del *source coding theorem*

### V.5.3. Algoritmo LZW

Es una variante de LZ78 que comienza predefiniendo un diccionario con todos los posibles caracteres (que pueden aparecer en la cadena).

La división de frases, un poco diferente a la de LZ78, se basa en los siguientes principios

1. Los caracteres individuales no forman frases porque ya están en el diccionario.
2. Cada caracter del final de una frase se incluye en el inicio de la siguiente.

**Codificación:** referencias de las frases sin el último carácter.

**Ejemplo:** *Tenemos la siguiente cadena:*

01110100001#

*Vamos a ver como será la división en frases. Primero vemos que en el diccionario ya tenemos*

$$\begin{cases} 0 \rightarrow 0 \\ 1 \rightarrow 1 \end{cases}$$

*Construimos el resto de frases de forma que el diccionario queda:*

$$\begin{cases} 0 \rightarrow 0 \\ 1 \rightarrow 1 \\ 2 \rightarrow 01 \\ 3 \rightarrow 11 \\ 4 \rightarrow 110 \\ 5 \rightarrow 010 \\ 6 \rightarrow 00 \\ 7 \rightarrow 000 \\ 8 \rightarrow 01\# \end{cases}$$

**Codificación:** *posición de cada frase al suprimir el último caracter.*

0, 1, 3, 2, 0, 6, 2

**Descodificación:** En cada paso añadimos al diccionario la última descodificación más el primer carácter de la que está en curso.

Aunque, como veremos, hay una excepción.

**Ejemplo:** *Supongamos el diccionario inicial:*

$$\begin{cases} 0 \rightarrow \text{espacio} \\ 1 \rightarrow e \\ 2 \rightarrow q \\ 3 \rightarrow r \\ 4 \rightarrow u \end{cases}$$

Y nos dan las siguiente cadena a descodificar:

1, 3, 3, 1, 0, 2, 4, 8, 5, 7

Empezamos a descodificar:

El  $1 \rightarrow e$ , lo siguiente es  $3 \rightarrow r$  pero si vemos la definición que hemos dado de cómo se descodifica, ahora tenemos que añadir al diccionario la última descodificación más el primer carácter de la que está en curso. por lo tanto también tenemos que añadir al diccionario  $5 \rightarrow er$

Vamos a seguir descodificando. Nos vuelve a tocar  $3 \rightarrow r$  y además añadimos al diccionario  $6 \rightarrow rr$

El siguiente es  $1 \rightarrow e$  y añadimos al diccionario  $7 \rightarrow re$

Pasamos al  $0 \rightarrow$  espacio y añadimos al diccionario  $8 \rightarrow$  espacio

Luego leemos  $2 \rightarrow q$  y añadimos  $9 \rightarrow$  espacio  $q$

Y así seguimos hasta terminar la cadena.

Para la descodificación, basta leer las frases descodificadas con cada número.

Finalmente nos queda la frase **erre que erre**

Antes hemos dicho que este método a veces no funciona, vamos a ver un ejemplo en el que no nos valga este algoritmo:

**Ejemplo:** En el ejemplo de ayer...

011....01#

Esto cuando lo codificamos queda

0, 1, 3, 2, 0, 6, 2

Si intentamos descodificarlo vemos que  $0 \rightarrow 0$ ,  $1 \rightarrow 1$  y añadimos  $2 \rightarrow 01$  y llegamos al 3... Pero el 3 no está en el diccionario.

¿Cómo seguimos? Pues vamos a creernos que  $3 \rightarrow 11$

Y sigo descodificando.

Leo  $2 \rightarrow 01$  y añado al diccionario  $4 \rightarrow 110$ .

Lo siguiente es  $0 \rightarrow 0$  y añado  $5 \rightarrow 010$

Y toca leer un 6, pero aún no tenemos el 6 en el diccionario.

Vamos a creernos que  $6 \rightarrow 00$

Y continuo hasta el final.

**¿Cómo hemos sacado la codificación del 3 y del 6 en el ejemplo anterior?**

Siempre que no podamos crear una entrada de diccionario (acabamos de crear la entrada  $k - 1$  y nos toca descodificar la  $k$ ) entonces escribimos :

$k \rightarrow$  última descodificación + primer carácter de esa descodificación



Es decir, en el caso del 6, justo antes habíamos descodificado el 0, miramos el diccionario y vemos que  $0 \rightarrow 0$ , por lo tanto la última descodificación es 0. Como la descodificación de 0 tiene sólo un carácter, el primer carácter de la descodificación vuelve a ser 0.

## V.6. El algoritmo ID3 de aprendizaje automático

# Apéndice A

## Ejercicios

### A.1. Hoja 1

**Ejercicio 1.1:** Una **fuerza central** es una fuerza que en  $\vec{x}$  tiene módulo que sólo depende de  $\|\vec{x}'\|$ . Por tanto  $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$  lleva a una ecuación del tipo

$$\vec{x}'' = g(\|\vec{x}'\|) \vec{x}$$

Calcula la derivada de  $\vec{x} \times \vec{x}'$  (el momento angular) y deduce de ello que cada curva solución está contenida en un plano. Otra forma (más complicada) de proceder es probar directamente que la torsión de la curva es nula. Investiga este procedimiento usando la fórmula de la torsión

Definimos la fuerza central (la fuerza que va del origen hasta  $x$ ) de la siguiente forma:

$$\vec{F} = g(\|\vec{x}'\|) \vec{x}$$

Como  $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$  entonces  $m \vec{x}'' = g(\|\vec{x}'\|) \vec{x}$

De esto último deducimos que  $\vec{x} \times \vec{x}'' = \vec{0}$  puesto que son vectores paralelos.

Por lo tanto  $\frac{d}{dt}(\vec{x} \times \vec{x}') = \vec{x}' \times \vec{x}' + \vec{x} \times \vec{x}'' = \vec{0} + \vec{0}$ .

Y con esto ya tenemos que  $\vec{x}$  está en un plano ya que:

$$\vec{x} \times \vec{x}' = \vec{V}_0 \text{ que es cte} \implies \vec{V}_0 \cdot \vec{x} = 0 \xrightarrow{V_0 \neq 0} \vec{x} \text{ está en un plano}$$

¿Qué ocurriría con  $V_0 = 0$ ?

$x'$  y  $x$  serían paralelos, es decir, la velocidad iría en la dirección de  $x \implies \vec{x}$  está en una recta.

La explicación de la última implicación se deja como ejercicio.

Otra forma de ver que  $\vec{x}$  está en un plano es utilizando la torsión:

Definimos la curva

$$t \mapsto \vec{x}(t)$$

y la torsión

$$T = \frac{(\vec{x}' \times \vec{x}'') \cdot \vec{x}'''}{\|\vec{x}' \times \vec{x}''\|}$$

Por la fórmula de la  $\vec{F}$  puedo escribir:

$$\vec{x}'' = \frac{1}{m}g(\|\vec{x}\|)\vec{x}$$

Y si derivamos:

$$\vec{x}''' = \frac{1}{m}g'(\|\vec{x}\|)\frac{\vec{x} \cdot \vec{x}'}{\|\vec{x}\|}\vec{x} + \frac{1}{m}g(\|\vec{x}\|)\vec{x}' = \frac{g'(\|\vec{x}\|)}{g(\|\vec{x}\|)} \cdot \frac{\vec{x} \cdot \vec{x}'}{\|\vec{x}\|}\vec{x}'' + \frac{1}{2}g(\|\vec{x}\|)\vec{x}''$$

Con esto podemos ver que  $\vec{x}'''$  es combinación lineal de  $\vec{x}''$  y  $\vec{x}'$  y por tanto:

$$(\vec{x}' \times \vec{x}'' \times \vec{x}''') = \det(\vec{x}', \vec{x}'', \vec{x}''') = 0 \quad \vec{x}' \times \vec{x}'' \neq 0 \quad T = 0 \implies \text{curva plana}$$

### Ejercicio 1.2:

*La estación espacial internacional orbita a unos 400 km de la superficie de la Tierra. Calcula en qué proporción ha disminuido la fuerza de la gravedad a esa altura. ¿Cuánto pesaría una persona de 80kg a esa altura? ¿Por qué entonces las imágenes que nos llegan muestran astronautas y objetos flotando ingravidos?*

Queremos ver el peso de una persona a 400 km de la Tierra

Llamamos M a la masa de la tierra; m, al peso de una persona y R, al radio de la Tierra.

Vemos la relación entre la fuerza que hay sobre la persona en la superficie de la Tierra y la fuerza a 400 km:

$$\frac{\frac{GMm}{R^2}}{\frac{GMm}{(R+400000m)^2}} \implies \frac{(R + 4 \cdot 10^5)^2}{R^2} = \left(\frac{67.8}{63.8}\right)^2$$

Por lo tanto, si m = 80, el peso a 400 km sería:

$$\frac{80}{\left(\frac{67.8}{63.8}\right)^2} = 70.84Kg$$

**Pregunta del profesor:** Los astronautas están flotando alrededor de la Tierra por la fza. centrífuga. ¿Porqué no ocurre lo mismo en la superficie?

**Ejercicio 1.3:** Prueba que la curva en polares  $r(\theta) = \frac{a^{-1} \cdot b^2}{1 + e \cos \theta}$  siendo

$$e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$$

describe la elipse  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  cuando el origen de las coordenadas polares está en uno de los focos.

Prueba también que la curva en polares

$$r(\theta) = \frac{l}{1 + e \cos(\theta)}$$

con  $e \geq 0$  y  $l > 0$  constantes, describe una circunferencia si  $e = 0$ , una elipse si  $0 < e < 1$ , una parábola si  $e = 1$  y una hipérbola si  $e > 1$ .

**Indicación:** Escribe  $r(1 + e \cos(\theta))$  en cartesianas.

Tenemos la elipse expresada en polares:

$$r(\theta) = \frac{a^{-1} \cdot b^2}{1 + e \cos \theta} \text{ siendo } e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$$

Y queremos llegar a:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Esto es la elipse en cartesianas cuando el origen está en uno de sus focos. Como es lógico buscamos el cambio a cartesianas y para ello reescribimos la ecuación:

$$r + er \cos \theta = a^{-1}b^2 \text{ con } \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ r \cos \theta = x \end{cases}$$

Despejando y elevando al cuadrado en ambos lados obtenemos:

$$(\sqrt{x^2 + y^2})^2 = (a^{-1}b^2 - ex)^2 \implies x^2 + y^2 = a^{-2}b^4 + e^2x^2 - 2a^{-1}b^2ex$$

Agrupamos los términos:

$$(1 - e^2)x^2 + y^2 = a^{-2}b^4 - 2a^{-1}b^2ex$$

Como  $1 - e^2 = \frac{b^2}{a^2}$  tenemos que

$$\frac{x^2}{a^2}b^2 + y^2 = a^{-2}b^4 - 2a^{-1}b^2ex$$

Viendo en la fórmula final el término  $\frac{y^2}{b^2}$ , dividimos por  $b^2$  en ambos lados de la ecuación y completamos cuadrados para  $x$  obteniendo:

$$\frac{(x + a \cdot e)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Este resultado sería el que nos piden si  $e$  vale cero ( $a > 0$ ), en cuyo caso es exactamente una circunferencia y el centro coincide con "los focos" tal y como se indica en el enunciado.

**Ejercicio 1.4:** Sea  $V$  el potencial de una fuerza  $\vec{F}$ , esto es  $\vec{F} = -\nabla V$ , que satisface  $\text{div} \vec{F} = 0$ . Demuestra que si  $V$  es una función radial (sólo depende de la distancia al origen), entonces necesariamente  $\vec{F} = K \|\vec{x}\|^{-3} \vec{x}$ , como con la ley de gravitación universal

Hecho por De Juan. No fiarse al 100 %

Podemos descomponer el potencial en una composición de 2 funciones:

$$d : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}, \text{ con } d(x, y, z) = \|\vec{x}\|.$$

$$f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}.$$

Con esta construcción, para alguna  $f$  tenemos  $V(\mathbf{x}) = f(d(\mathbf{x}))$ .

Si logramos demostrar que  $f$  tiene que ser de la forma  $f(x) = \frac{-KM}{x}$ , ya tendremos el ejercicio hecho puesto que su gradiente nos daría una fuerza con fórmula como la indicada.

Ahora sólo hay que derivar con cuidado:

$$-\vec{F} = \nabla V(\mathbf{x}) = f'(d(\mathbf{x})) \cdot \nabla d(\mathbf{x}) = f'(\|\mathbf{x}\|) \frac{1}{\|\mathbf{x}\|} \mathbf{x}$$

**Observación:** Hay que prestar especial atención al hecho de que al escribir  $x$  hacemos referencia a un vector y no a una variable.

Vemos que  $F : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ . Calculamos la divergencia de  $\vec{F}$

$$\text{div} \vec{F} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} \stackrel{\text{hip.}}{=} 0$$

Basándonos en la expresión de la fuerza calculada anteriormente tenemos:

$$\frac{\partial F(\mathbf{x})}{\partial x} = \left( \underbrace{\frac{\partial f'(d(\mathbf{x}))}{\partial x}}_{(1)} \cdot d(\mathbf{x}) - f'(d(\mathbf{x})) \frac{\partial d(\mathbf{x})}{\partial x} \right) \frac{x}{(d(\mathbf{x}))^2} + \frac{f'(d(\mathbf{x}))}{d(\mathbf{x})}$$

(1) =  $\frac{\partial d(\mathbf{x})}{\partial x} \cdot f''(d(\mathbf{x}))$  por la regla de la cadena.

Simplificando y utilizando el cálculo anterior, obtenemos:

$$\frac{\partial F(\mathbf{x})}{\partial x} = \frac{x^2}{(d(\mathbf{x}))^3} (f''(d(\mathbf{x}))d(\mathbf{x}) - f'(d(\mathbf{x}))) + \frac{f'(\mathbf{x})}{d(\mathbf{x})}$$

El cálculo es análogo para las derivadas respecto de  $y, z$ , con lo que la divergencia queda:

$$\operatorname{div} \vec{F} = (f''(d(\mathbf{x}))d(\mathbf{x}) - f'(d(\mathbf{x}))) \cdot \frac{x^2 + y^2 + z^2}{(d(\mathbf{x}))^3} + \frac{3f'(d(\mathbf{x}))}{d(\mathbf{x})}$$

Tomamos  $d(\mathbf{x}) = r$  y utilizamos  $x^2 + y^2 + z^2 = (\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^2 = d(\mathbf{x})^2$

$$\operatorname{div} \vec{F} = 0 = ((f''(r)r - f'(r)) + 3f'(r)) \frac{1}{r} = 0 \iff r f''(r) = -2f'(r)$$

Hemos llegado a una EDO cuya solución es  $g(x) = \frac{k}{x}$ , porque:

$$g(x) = \frac{k}{x} \implies g'(x) = \frac{-k}{x^2} \implies g''(x) = \frac{2k}{x^3}$$

Vemos que  $x g''(x) = x \frac{2K}{x^3} = \frac{2K}{x^2} = -2 \frac{-K}{x^2} = -2g'(x)$  que es la EDO que teníamos.

Por tanto ya tenemos el ejercicio resuelto, pues la  $f$  obtenida coincide exactamente con lo que esperábamos obtener. Veamos por que está  $f$  garantiza la fórmula para la fuerza que indica el enunciado.

$$V(\mathbf{x}) = f(d(\mathbf{x})) = \frac{K}{d(\mathbf{x})} = \frac{K}{\|\mathbf{x}\|}$$

Y para hallar la  $\vec{F}$ , utilizamos

$$\vec{F} = -\nabla V = -K \left( \frac{-x}{\|\mathbf{x}\|^3}, \frac{-y}{\|\mathbf{x}\|^3}, \frac{-z}{\|\mathbf{x}\|^3} \right)$$

Y reescribimos :

$$\vec{F} = -\nabla V = \frac{K}{\|\mathbf{x}\|^3} \mathbf{x}$$

**Ejercicio 1.5:** Explica por qué en el punto más cercano al Sol de la órbita de una planeta, digamos a distancia  $r_p$ , la velocidad  $v_p$  debe cumplir  $v_p = r_p \theta'$ . Recuerda que en el movimiento de un planeta  $h = r^2 \theta'$  es constante y que  $a(1 - e^2) = h^2/GM$  con  $a$  el semieje mayor y  $e$  la excentricidad. Deduce de todo ello que  $v_p = b r_p^{-1} \sqrt{GM/a}$

Para probar que  $v_p = r_p \dot{\theta}$  recordamos que estamos tomando  $v_p = \|\vec{v}\|_p$ .

Cogemos la fórmula general de  $v$  :

$$v = \|(\dot{x}, \dot{y})\| \implies v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$$

Hacemos el cambio de variables  $\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$  de forma que

$$v = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2}$$

Como en el punto más cercano al sol la distancia alcanza un mínimo  $\implies \dot{r} = 0$ , entonces

$$v = r\dot{\theta} \implies v_p = r_p \dot{\theta}$$

Ahora vamos a deducir:

$$v_p = \frac{b}{r_p} \cdot \sqrt{\frac{GM}{a}}$$

Por el enunciado sabemos que

$$v_p = \frac{h}{r_p} = \frac{\sqrt{GMa(1-e^2)}}{r_p}$$

Solo nos queda probar que  $\sqrt{a(1-e^2)} = \frac{b}{\sqrt{a}}$ , o lo que es lo mismo

$$a(1-e^2) = \frac{b^2}{a}$$

Utilizamos la relación de la excentricidad (e) con los semiejes (a,b).

Sabemos que  $e = \frac{c}{a}$ , siendo c la distancia focal  $\implies c = \sqrt{a^2 - b^2}$  entonces  $e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$ .

Sustituyendo:

$$a(1-e^2) = \frac{b^2}{a} \implies a\left(1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2}\right) = \frac{b^2}{a}$$

Vemos que es cierto, por lo tanto  $v_p = \frac{b}{r_p} \cdot \sqrt{\frac{GM}{a}}$

**Ejercicio 1.6:** Prueba que si el semieje mayor de la elipse de un planeta es a entonces su velocidad cuando está a distancia r del Sol es  $\sqrt{2GM/r - GM/a}$ .

**Indicación:** Utiliza el problema anterior y la conservación de la energía.

**Idea:** En  $v_p = \frac{b}{r_p} \cdot \sqrt{\frac{GM}{a}}$  (ejercicio anterior) hay información redundante, ya que b, a y  $r_p$  están relacionadas, no son independientes.

La conservación de la energía me dice que

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r} \text{ es cte}$$

Como tengo la velocidad en un punto ( $v_p$ ), me queda

$$\frac{1}{2}v^2 - \frac{GM}{r} = \frac{1}{2}v_p^2 - \frac{GM}{r}$$

Entonces

$$v = \sqrt{\frac{2GM}{r} + v_p^2 - \frac{2GM}{r_p}}$$

¿Cómo simplifico esto? mirando lo que queremos demostrar sólo queda probar que:

$$\frac{2GM}{r_p} - v_p^2 = \frac{GM}{a}$$

Sustituimos  $v_p$  por lo que teníamos en el ejercicio anterior:

$$\frac{2GM}{r_p} - v_p^2 = \frac{2GM}{r_p} - \frac{GMb^2}{ar_p^2} = \frac{GM}{r_p} \left( 2 - \frac{b^2}{ar_p} \right)$$

Para que la expresión se parezca más a lo que queremos demostrar pensamos qué relación hay entre  $r_p$  y  $a$ .

Como  $e = \frac{c}{a}$  y  $r_p = a - c$ , sustituyendo:

$$\frac{GM}{a(1-e)} \cdot \left( 2 - \frac{b^2}{a^2(1-e)} \right)$$

Para terminar bastaría comprobar que:

$$\frac{1}{(1-e)} \cdot \left( 2 - \frac{b^2}{a^2(1-e)} \right) = 1$$

Es fácil usando las siguientes propiedades:

$$e^2 = \frac{c^2}{a^2} = 1 - \frac{b^2}{a^2} \implies b^2 = a^2(1 - e^2)$$

Finalmente

$$\frac{1}{1-e} \cdot \left( 2 - \frac{1-e^2}{1-e} \right) = \frac{1}{1-e} \cdot (2 - (1+e)) = 1$$

Por tanto queda demostrado que

$$\frac{2GM}{r_p} - v_p^2 = \frac{GM}{a}$$

Y ya tenemos sustituyendo en la ecuación inicial que

$$v = \sqrt{\frac{2GM}{r} - \frac{GM}{a}}$$



**Ejercicio 1.7:** *El cometa Halley tiene distancias máxima y mínima al Sol dadas por  $5.25 \cdot 10^{12}m$  y por  $8.77 \cdot 10^{10} m$ , respectivamente. Calcula la fórmula de su elipse en coordenadas cartesianas, su valor de  $r^2\theta'$  y sus velocidades máxima y mínima.*

**Solución de clase**

$$\frac{(x+c)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad c = ae$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a + (1+e)a = 5.25 \cdot 10^{12} \\ a(1-e) = 8.77 \cdot 10^{10} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = 2.67 \cdot 10^{12} \\ e = 0.967 \end{array} \right.$$

Con esto calculamos  $c = ae = 2.58 \cdot 10^{12}$  y  $b = 6.80 \cdot 10^{11}$

**b)** clase (ver ej. 5)

$$\frac{h^2}{GM} = a(1-e^2) \quad h = r^2\theta'$$

$$h = r^2\theta' = \sqrt{GMa(1-e^2)} = 5.53 \cdot 10^{25}$$

**c)**  $v_{\max}$   $v_{\min}$

Hay que tener en cuenta que la velocidad máxima se alcanza en el perihelio (punto de la órbita con distancia más corta) y la mínima en el afelio (punto opuesto al perihelio).

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{2GM}{a(1-e)} - \frac{GM}{a}} \stackrel{a)}{=} 5.45 \cdot 10^4 m/s$$

$$v_{\min} = \sqrt{\frac{2GM}{a(1+e)} - \frac{GM}{a}} \stackrel{a)}{=} 9.14 \cdot 10^2 m/s$$

**Ejercicio 1.8:** *La excentricidad de la órbita de la Tierra es aproximadamente  $e = 0.017$ . Si en un libro de texto vemos la órbita dibujada con un eje mayor de  $20cm$ , ¿cuánto debería medir el eje menor?. Suponemos, consecuentemente, la órbita de la Tierra circular. Si en una galaxia lejana hay un planeta hermano de la Tierra con la misma órbita pero recorrida sólo en tres meses, ¿qué relación hay entre la masa de su estrella y la de nuestro Sol?*

Hecho por Pedro. No fiarse al 100 %

Puesto que la excentricidad sea calcula como  $e = c/a$  siendo  $c$  la mitad de la distancia focal y  $a$  el semieje mayor de la elipse, podemos deducir fácilmente que la semidistancia focal es

$$c = 0.17cm$$

y sabiendo ahora que  $a^2 = c^2 + b^2$ , con  $b$  es semieje menor, podemos despejar y obtener que

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{399.9711} = 19.99921 \text{ cm}$$

Puesto que la diferencia entre los semiejes de la elipse es mínima, tiene sentido considerar la órbita como circular.

Ya sabemos que podemos calcular el área de la órbita de un planeta como

$$A = \frac{1}{2}hT \text{ siendo } h = \text{cte dependiente del planeta}$$

Puesto que nuestro nuevo planeta y la Tierra tienen la misma órbita, aunque la recorran a distintas velocidades, su área será la misma.

Por tanto, puesto que nuestro nuevo planeta tiene un período 4 veces menor, tenemos que  $h_N = h_T \cdot 4$ .

Si recordamos el ejercicio 1.5 ya vimos que

$$a(1 - e^2) = \frac{h^2}{GM}$$

puesto que  $a, e, G$  no cambian al pasar de estudiar la Tierra a este nuevo planeta, tenemos que

$$h_N = \sqrt{a(1 - e^2)GM_{NS}} = 4h_T = \sqrt{16a(1 - e^2)GM} \implies \sqrt{M_{NS}} = \sqrt{16M}$$

es decir, el nuevo Sol tendrá 16 veces la masa del nuestro.

**Ejercicio 1.9:** Sabiendo que  $GM = 3.99 \cdot 10^{14} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}$  con  $M$  la masa de la Tierra, calcula a qué distancia de su superficie orbitan los satélites geostacionarios: los que están siempre sobre el mismo punto geográfico porque giran a al par que la Tierra, una vez cada 24 horas.

La 3ª ley de Kepler nos da una relación entre la distancia y el periodo orbital. En concreto:

$$\frac{T^2}{R^3} = \text{cte} = \frac{4\pi^2}{GM}$$

Para que sea geostacionario  $\rightarrow T = 24h = 24 \cdot 3600s$ .

$$R = \left( \frac{GMT^2}{4\pi^2} \right)^{1/3} = 4.23 \cdot 10^7 \text{ m}$$

$$R_s = R - \text{radio de la tierra} = 4.23 \cdot 10^7 - 6.38 \cdot 10^6 = 3.58 \cdot 10^7 \text{ m}$$

Aproximadamente 35.000 Km

**Ejercicio 1.10:** Usando la ley de Gauss, prueba que en un planeta esférico homogéneo hueco no hay gravedad en el interior.

Hecho por Pedro. No fiarse al 100 %

Según la ley de Gauss la fuerza de la gravedad en un punto de una superficie será proporcional al flujo del campo gravitatorio a través de dicha superficie.

Una vez tomamos un punto en el interior del planeta hueco, consideramos la esfera que lo contiene y que, a su vez, se contiene dentro del planeta.

Para calcular la fuerza de la gravedad en ese punto (o en cualquiera de la esfera que hemos construido, pues todos comparten el mismo valor de gravedad) basta con calcular el flujo del campo gravitatorio en torno a la esfera.

Puesto que esta esfera está hueca y las líneas de campo vienen desde el infinito hasta la superficie del planeta, no hay líneas de campo dentro del planeta por lo que no hay líneas de campo que atraviesen nuestra esfera, por lo que no hay flujo y por tanto, por el teorema de Gauss, no habrá gravedad.

**Ejercicio 1.11:** Newton resolvió el problema anterior con un bello argumento geométrico: Fijado un punto interior se considera un doble cono que lo tiene como vértice. El cono corta a la superficie interior del planeta en dos regiones que cuando se reducen a tamaño infinitesimal ejercen la misma atracción. Intenta elaborar este argumento hasta que te suene convincente.

**Ejercicio 1.12:** Utilizando las ecuaciones de Euler-Lagrange con coordenada generalizada la distancia desde el punto de partida, halla las ecuaciones de movimiento de un objeto de masa  $m$  que cae por un plano inclinado de ángulo  $\alpha$  partiendo del reposo. La energía potencia gravitatoria es  $mgy$  donde  $g = 9.8ms^{-2}$  e  $y$  es la altura.

Hecho por Pedro. No fiarse al 100 %

Tomemos nuestra variable  $z(t)$  que define la distancia en línea recta desde el punto de partida hasta la posición actual de la masa.

El Lagrangiano sería:

$$\int_a^b L = \int_a^b E_c - E_p = \int_a^b \frac{1}{2}m (z'(t))^2 + mgz(t) \sin(\alpha)$$

aplicando las ecuaciones de Euler-Lagrange llegamos a

$$\frac{\partial}{\partial t} m z'(t) = mg \sin(\alpha)$$

de donde podemos deducir que

$$z'(t) = g \sin(\alpha)t + C_1 \implies z(t) = \frac{1}{2}g \sin(\alpha)t^2 + C_1t + C_2$$

Así, la ecuación del movimiento de la partícula sería de la forma

$$(x(t), y(t)) = \left( x_0 + \frac{1}{4}g \sin(2\alpha)t^2 + \cos(\alpha)(C_1t + C_2), y_0 - \frac{1}{2}g \sin^2(\alpha)t^2 + \sin(\alpha)(C_1t + C_2) \right)$$

### Corrección de clase

Tenemos que

$$L = T - V$$

Siendo  $T$  la energía cinética y  $V$  energía potencial.

Llamamos  $H$  a la altura y  $q$  la trayectoria del objeto

$$\frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i}$$

Entonces escribimos

$$\begin{aligned} x &= q \cos \alpha \rightarrow \dot{x} = \dot{q} \cos \alpha \\ y &= H - q \sin \alpha \rightarrow \dot{y} = -\dot{q} \sin \alpha \end{aligned}$$

Y ahora la energía potencial y cinética

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 \\ V &= mg(H - q \sin \alpha) \end{aligned}$$

Con esto calculamos  $L$  y con las ecuaciones de  $\frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i}$  llegamos a

$$m\ddot{q}^2 = mg \sin \alpha \implies \ddot{q}^2 = g \sin \alpha$$

**Ejercicio 1.13:** Sea  $G_\alpha$  un giro en  $\mathbb{R}^3$  de ángulo  $\alpha$  alrededor de un eje dado por un vector unitario  $\mathbf{n}$  y sea  $f(\alpha) = G_\alpha(\mathbf{x})$  para un  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ . Prueba que  $f'(0) = \mathbf{n} \times \mathbf{x}$  y utiliza el teorema de Noether para deducir que si  $L = \frac{1}{2}m\|\mathbf{v}\|^2 - V(\|\mathbf{x}\|)$ , entonces el momento angular  $\mathbf{x} \times m\mathbf{v}$  se conserva.

Hecho por Pedro. No fiarse al 100 %

La matriz de giro de  $\alpha$  grados respecto al vector  $\mathbf{n}$  tiene la siguiente matriz:

$$\begin{bmatrix} \cos \alpha + n_x^2 (1 - \cos \alpha) & n_x n_y (1 - \cos \alpha) - n_z \sin \alpha & n_x n_z (1 - \cos \alpha) + n_y \sin \alpha \\ n_y n_x (1 - \cos \alpha) + n_z \sin \alpha & \cos \alpha + n_y^2 (1 - \cos \alpha) & n_y n_z (1 - \cos \alpha) - n_x \sin \alpha \\ n_z n_x (1 - \cos \alpha) - n_y \sin \alpha & n_z n_y (1 - \cos \alpha) + n_x \sin \alpha & \cos \alpha + n_z^2 (1 - \cos \alpha) \end{bmatrix}$$

Si ahora derivamos con respecto a  $\alpha$  obtenemos:

$$\begin{bmatrix} -\sin \alpha + n_x^2 (1 + \sin \alpha) & n_x n_y (1 + \sin \alpha) - n_z \cos \alpha & n_x n_z (1 + \sin \alpha) + n_y \cos \alpha \\ n_y n_x (1 + \sin \alpha) + n_z \cos \alpha & -\sin \alpha + n_y^2 (1 + \sin \alpha) & n_y n_z (1 + \sin \alpha) - n_x \cos \alpha \\ n_z n_x (1 + \sin \alpha) - n_y \cos \alpha & n_z n_y (1 + \sin \alpha) + n_x \cos \alpha & -\sin \alpha + n_z^2 (1 + \sin \alpha) \end{bmatrix}$$

y al evaluar esta derivada en  $\alpha=0$  tenemos:

$$\begin{bmatrix} n_x^2 & n_x n_y - n_z & n_x n_z + n_y \\ n_y n_x + n_z & n_y^2 & n_y n_z - n_x \\ n_z n_x - n_y & n_z n_y + n_x & n_z^2 \end{bmatrix}$$

Ahora nos fijamos en que calcular  $f'(0)$  es lo mismo que derivar la matriz con respecto a  $\alpha$ , evaluar en 0 y multiplicar por  $\mathbf{x}$ . Por tanto, para calcular el valor pedido sólo hace falta multiplicar por  $\mathbf{x}$

TO BE CONTINUED ...

No se cómo puñetas se acaba esta parte.

Vamos a por la segunda parte. Para poder empelar el teorema de Noether debemos encontrar las invariantes del Lagrangiano. En este ejemplo, podemos ver que si aplicamos la transformación  $(x, y, z) \rightarrow (x \cos h - y \sin h, x \sin h + y \cos h, z)$  el Lagrangiano conserva su valor<sup>1</sup>

Si escribimos el lagrangiano con la notación habitual vista en clase y desarrollada por Newton tenemos:

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \frac{Gmm}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

Si aplicamos ahora el teorema tenemos:

$$0 = \frac{\partial L}{\partial h} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2}m (2\dot{x} \cdot (-x \sin h - y \cos h) + 2\dot{y} \cdot (x \cos h - y \sin h) + 2\dot{z} \cdot 0) \right)$$

Evaluando en  $h = 0$  tenemos:

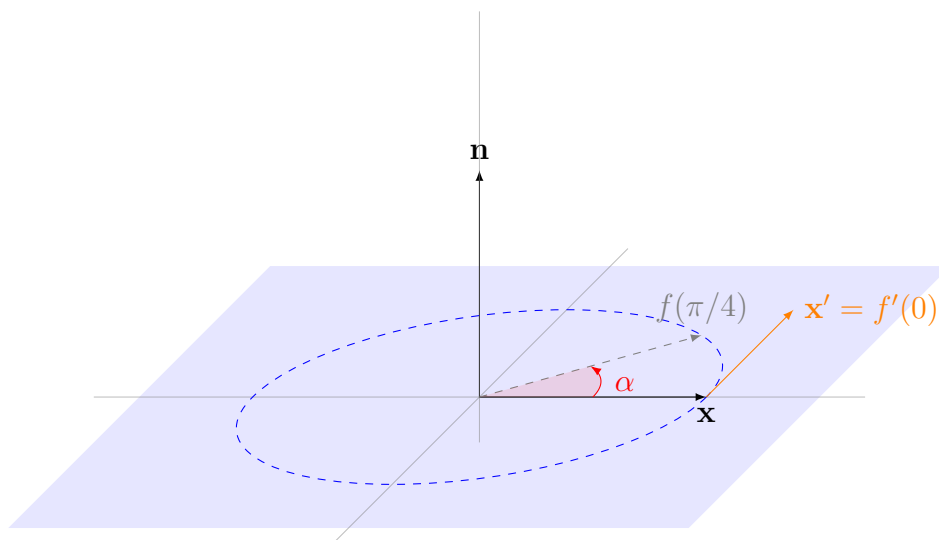
$$m(-\dot{x}y, \dot{y}x, 0) = \text{cte}$$

que coincide con la tercera componente del producto  $m\mathbf{x} \times \mathbf{v}$ . Repitiendo ahora este proceso con giros en torno a los otros ejes (el giro que hemos cogido rotaba en torno al eje  $Z$ ) obtendremos las demás componentes.

Guille: Propuesta de resolución más simple

Podemos suponer sin pérdida de generalidad que  $\mathbf{n} = (0, 0, 1)$ . Ya nos han asegurado que el vector normal al plano es unitario, por lo que si el vector no es el unitario en la dirección de  $Z$  simplemente tenemos que hacer giros y traslaciones que conservan ángulos y distancias. Es decir, que nos basta con considerar este caso para estudiar el problema. Por la misma razón, podemos suponer también que

<sup>1</sup>Estamos aplicando un giro a todo el sistema



**Figura A.1:** Giro del vector en el plano

$\mathbf{x} = \|\mathbf{x}\| \cdot (1, 0, 0)$  (un vector en la dirección del eje  $X$ ) y llamaremos  $r = \|\mathbf{x}\|$  por simplicidad.

Con estas simplificaciones nos encontramos en las condiciones de la figura A.1. Es fácil ver que, de esta forma, se puede expresar  $f(\alpha)$  como

$$f(\alpha) = (r \cos \alpha, r \sin \alpha, 0)$$

, que derivando nos da  $f'(\alpha) = (-r \sin \alpha, r \cos \alpha, 0)$ .

Por otra parte, si hallamos el producto vectorial vemos que  $\mathbf{n} \times f(\alpha) = (-r \sin \alpha, r \cos \alpha, 0)$ , exactamente lo mismo que antes. Concuere da con el dibujo ya que la dirección de giro tangente a la circunferencia es la misma dirección que la del producto vectorial.

La segunda parte se haría como ha propuesto Pedro, con la ventaja de que así probablemente saldría mucho más sencillo, aprovechando que el teorema de Noether nos dice que el Lagrangiano se conserva en cambios de coordenadas o algo así.

**Ejercicio 1.14:** Sabiendo que entre las superficies de revolución cuyos bordes son  $\{x^2 + y^2 = 4, z = \pm 1\}$  hay una de área mínima, prueba que es  $\sqrt{x^2 + y^2} = C \cosh(z/C)$  con  $C \approx 1.69$

**Indicación:** Recuerda (o demuestra) que si la gráfica de  $y = y(x)$ ,  $a \leq x \leq b$  gira alrededor del eje  $X$  el área de la superficie resultante es  $2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + (y')^2} dx$ . Después aplica el cálculo de variaciones preferentemente valiéndote de la energía.

Este problema es equivalente a hallar la superficie generada por dos aros con jabón que une ambos perímetros. La membrana generada intentará alcanzar un área mínima para tener tensión superficial mínima también.

La superficie buscada, en cilíndricas es  $r = r(z)$  (Las superficies de revolución son unión de circunferencias, basta tener el radio a lo largo del eje).

El área de una superficie de revolución se calcula con la fórmula:

$$2\pi \int r \sqrt{1 + (r')^2} dz$$

Para minimizar usamos las ecuaciones de Euler-Lagrange II.5:

$$L(r, r') = r \sqrt{1 + (r')^2} = r(z)$$

$$\frac{d}{dz} \left( \frac{\partial L}{\partial r'} \right) = \frac{\partial L}{\partial r}$$

Sale pero la ecuación es un poco fea. Así que probamos de otra manera (conservación de la energía):

Como ya hemos visto muchas veces junto al teorema de Lagrange, la energía:

$$E = r' \frac{\partial L}{\partial r'} - L$$

se conserva (es cte.). Por tanto

$$E = r' r \frac{r'}{\sqrt{1 + (r')^2}} - r \sqrt{1 + (r')^2} \stackrel{\text{milagro}}{=} \frac{-r}{\sqrt{1 + (r')^2}}$$

$$\Rightarrow r' = \sqrt{\left(\frac{r}{E}\right)^2 - 1}$$

Y resulta que:

$$\int \frac{dr}{\sqrt{\left(\frac{r}{E}\right)^2 - 1}} = \int dz$$

$$E \operatorname{arc} \cosh \frac{r}{E} = z + \text{cte.}$$

$$r = E \cosh \frac{z}{E} + \text{cte.}$$

Adicionalmente, para que pase por las circunferencias:

$$r(1) = 2 \quad r(-1) = 2 \quad \text{cte} = 0$$

$$2 = E \cosh \frac{1}{E} \Rightarrow \text{aproximado con el ordenador } E = 1.69$$

La constante debe ser nula

**Ejercicio 1.15:** Para lagrangianos unidimensionales  $L(x, \dot{x})$ , prueba directamente, únicamente con diversas formas de la regla de la cadena, que las ecuaciones de Euler-Lagrange son invariantes por cambios de variable  $y = y(x)$ .

Hecho por Pedro y Edu. No fiarse al 100 %

Según el cambio de variable que se indica en el enunciado, tenemos la siguiente relación:

$$\bar{L}(y, \dot{y}) = L(x, \dot{x}) \text{ con } y = y(x)$$

Como nos hará falta a continuación, vamos a ver que

$$\dot{y} = \frac{\partial}{\partial t} y(x(t)) = \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial y}{\partial x} \dot{x}$$

Vamos a escribir ahora las ecuaciones de Euler-Lagrange con  $\bar{L}$  con las variables  $y, \dot{y}$  y veremos que son equivalentes a las obtenidas trabajando con  $L$  con las variables  $x, \dot{x}$ .

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{x}} \right) = \frac{\partial \bar{L}}{\partial x} \implies \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{y}} \frac{\partial y}{\partial x} \right) = \frac{\partial \bar{L}}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{y}} \frac{\partial^2 y}{\partial^2 x} \dot{x} \implies$$

aplicando la regla de la cadena a la izquierda de la igualdad llegamos a:

$$\implies \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{y}} \right) \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{y}} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right) = \frac{\partial \bar{L}}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{y}} \frac{\partial^2 y}{\partial^2 x} \dot{x}$$

Si probamos que

$$\frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{y}} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right) = \frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{y}} \frac{\partial^2 y}{\partial^2 x} \dot{x}$$

podremos simplificar y obtendremos el resultado esperado. Vamos a ello.

$$\frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{y}} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right) = \frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{y}} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right) = \frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{y}} \frac{\partial^2 y}{\partial^2 x} \frac{\partial x}{\partial t}$$

con lo que ya lo tenemos.

## A.2. Hoja 2

**Ejercicio 2.1:** Una cadena de Markov con tres estados, 1, 2, 3, tiene probabilidades de transición  $p_{ij} = i/10$  para  $1 \leq i \leq 3$  y  $j \in 1, 2$ . Calcula  $\mathbb{P}\{X_1 = X_2 = 2 | X_0 = 1\}$ .



Las probabilidades de transición son por definición:

$$P_{ij} = \mathbb{P} \{X_{n+1} = j | X_n = i\}$$

Por Bayes sabemos que:

$$\mathbb{P} \{B \cap C | A\} = \mathbb{P} \{B | A\} \cdot \mathbb{P} \{C | A \cap B\}$$

Siendo

- $\mathbb{P} \{B \cap C | A\} = \frac{\mathbb{P}\{B \cap C \cap A\}}{\mathbb{P}\{A\}}$
- $\mathbb{P} \{B | A\} = \frac{\mathbb{P}\{B \cap A\}}{\mathbb{P}\{A\}}$
- $\mathbb{P} \{C | A \cap B\} = \frac{\mathbb{P}\{C \cap A \cap B\}}{\mathbb{P}\{A \cap B\}}$

Llamamos  $B = X_1 = 2$  y  $C = X_2 = 2$  de forma que:

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \{X_1 = X_2 = 2 | X_0 = 1\} &= \mathbb{P} \{X_1 = 2 \cap X_2 = 2 | X_0 = 1\} = \\ &= \mathbb{P} \{X_1 = 2 | X_0 = 1\} \cdot \mathbb{P} \{X_2 = 2 | X_0 = 1 \cap X_1 = 2\} \end{aligned}$$

Vemos que  $\mathbb{P} \{X_1 = 2 | X_0 = 1\}$  es la probabilidad de transición  $p_{12}$

La parte de  $\mathbb{P} \{X_2 = 2 | X_0 = 1 \cap X_1 = 2\}$  se puede escribir como  $\mathbb{P} \{X_2 = 2 | X_1 = 2\} = p_{22}$  ya que por definición, una cadena de Markov sólo depende del suceso anterior.

Por lo que nos queda que

$$\mathbb{P} \{X_1 = X_2 = 2 | X_0 = 1\} = p_{12} \cdot p_{22} = \frac{1}{10} \cdot \frac{2}{10} = \frac{1}{50}$$

**Ejercicio 2.2:** Considera la cadena de Markov con cuatro estados y con probabilidades de transición  $p_{12} = p_{24} = p_{43} = p_{32} = 1$ . Halla para qué distribuciones iniciales existe una distribución límite.

Primero construimos la matriz de transición:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Podríamos utilizar Jordan para calcular el límite, pero en este caso, al haber tantos ceros, es más fácil hacer las operaciones.

Cogemos una distribución inicial

$$(\Pi_0) = (x, y, z, t)$$

que por ser distribución de probabilidad tiene  $x + y + z + t = 1$

Ahora tenemos que ver si existe  $\lim(\prod_0)P^n$

Haciendo  $(\prod_0) \rightarrow (\prod_0) \cdot P \rightarrow (\prod_2) = (\prod_1) \cdot P = (\prod_0) \cdot P^2 \rightarrow \dots$

Nos queda que

$$(x, y, z, t) \rightarrow (0, x + z, t, y) \rightarrow (0, t, y, x + z) \rightarrow (0, y, x + z, t) \rightarrow \dots$$

Vemos que siempre va a oscilar de la manera  $(0, a, b, c) \rightarrow (0, b, c, a)$

Por lo tanto la única posibilidad de que converjan es que a,b,c sean iguales. Por lo tanto todas las distribuciones iniciales que estoy buscando tienen que cumplir.

$$\begin{cases} x + y + z + t = 1 \\ x + z = t = y \end{cases} \implies (\prod_0) = (x, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} - x) \text{ con } 0 \leq x \leq \frac{1}{3}$$

Y la distribución límite sería:

$$\left( \prod_n \right) = \left( 0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right)$$

**Ejercicio 2.3:** Lanzamos una moneda al aire y consideramos la variable aleatoria  $X_n$  que da el número de caras en las tiradas  $n$  y  $n - 1$ . ¿Es  $\{X_n\}_{n=1}^\infty$  una cadena de Markov?

Para saber si es una cadena de Markov lo que tenemos que ver es si el resultado del caso  $n$  depende de  $n - 1, n - 2, n - 3 \dots$  (caso en el que **no** sería Markov) o si solo depende de  $n$  y  $n - 1$

En otras palabras, si fuera cadena de Markov cumpliría:

$$\mathbb{P} \{X_{n+2} = 0 | X_{n+1} = 1 \cap X_n = 2\} = \mathbb{P} \{X_{n+2} = 0 | X_{n+1} = 1\}$$

Vamos a ver cada parte por separado:

■ Parte izquierda

- Que  $X_n = 2$  significa que en  $n$  y en  $n - 1$ , salió cara
- Que  $X_{n+1} = 1$  significa que: o en  $n$  salió cara o en  $n + 1$  salió cara. Como sabemos que en  $n$  salió cara tenemos que:

$$X_{n+1} = 1 \cap X_n = 2 \implies ccx(\text{ cara, cara, cruz})$$

- Como  $X_{n+2} = 0$  tenemos que:

$$\mathbb{P} \{X_{n+2} = 0 | X_{n+1} = 1 \cap X_n = 2\} = \mathbb{P} \{ccxx | ccx\} = \frac{1}{2}$$

■ Parte derecha

- Que  $X_{n+1} = 1$  puede significar  $xc$  o  $cx$  (sucesos  $n$  y  $n + 1$ )
  - $X_{n+2} = 0$  significa que tendríamos  $cx$
- Por lo que la parte derecha es:

$$\mathbb{P} \{X_{n+2} = 0 | X_{n+1} = 1\} = \mathbb{P} \{cx | xc \cup cx\} = \frac{1}{4}$$

Hemos obtenido las probabilidades:

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

Lo que refleja que no se trata de una cadena de Markov pues la probabilidad de un suceso depende de la historia anterior.

**Ejercicio 2.4:** Si la matriz  $P$  de probabilidades de transición de una cadena de Markov finita es simétrica y con todos sus elementos no nulos, explica por qué  $P^n$  tiende a una matriz con todos sus elementos iguales.

Recordamos que la suma de los elementos de cada fila de  $P$  es 1 y por lo tanto, los de  $P^n$  también.

De esto y de que todos los elementos de  $P^n$  son iguales deducimos que:

$$\lim P^n = \frac{1}{N} \begin{pmatrix} 1 & \dots & \dots & \dots & 1 \\ \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & \dots & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

**Ejercicio 2.5:** En una cadena de Markov hay tres estados y se sabe  $p_{11} = 3/4$ ,  $p_{13} = 1/2$ ,  $p_{21} = 3/4$  y  $p_{22} = p_{31} = p_{33} = 0$ . Halla el resto de las probabilidades de transición, justifica que hay una distribución límite y hállala.

Para calcular  $P$  utilizamos que la suma de todos los elementos de cada fila tiene que dar 1.

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \boxed{\frac{1}{3}} & \frac{1}{6} \\ \frac{3}{4} & 0 & \boxed{\frac{1}{4}} \\ 0 & \boxed{1} & 0 \end{pmatrix}$$

Para calcular el límite vamos a ver primero que sea regular porque regular  $\implies \exists \lim(\prod_0) \cdot P^n$  y además es la única distribución estacionaria.

Para ver que es regular vemos que cumpla que  $P^k$  tenga todos los elementos  $> 0$  para algún  $k$

$$P^2 = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/3 & 1/6 \\ 3/8 & 1/2 & 1/8 \\ 3/4 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}$$

Con esto ya está claro que para  $P^4$  todos los elementos son  $> 0$  (y probablemente también para  $P^3$ ) por lo tanto es regular.

Ahora vamos a calcular la distribución estacionaria y con eso ya tendríamos el valor del límite.

Sabemos que la distribución estacionaria  $(\Pi)$  va a cumplir que:

- $(\Pi) = (x, y, z)$
- $x + y + z = 1$
- $(x, y, z) \cdot P = (x, y, z)$

lo que nos da es siguiente sistema

$$\begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{3}{4}y = x \\ \frac{x}{3} + z = y \\ \frac{x}{6} + \frac{y}{4} = z \\ x + y + z = 1 \end{cases} \implies \text{Sol : } \lim \left( \begin{matrix} \Pi \\ 0 \end{matrix} \right) \cdot P^n = \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6} \right)$$

**Ejercicio 2.6:** *Tenemos cuatro páginas web: A,B,C y D. Cada una de ellas tiene dos enlaces: A y B enlazan ambas a C y a D, C enlaza a B y a D, y D enlaza a A y a B. Explica por qué la cadena de Markov correspondiente es regular. Navegando al hazar desde A, halla el número medio de clicks para la primera vuelta a A. ¿Cuáles son las páginas más y menos importantes?*

Hecho por Pedro y también en clase. Fiarse al 100% =D

Leyendo con atención el enunciado y considerando que la probabilidad de pinchar en cualquiera de los dos enlaces de una web es la misma, tenemos que la matriz de transición es:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Para poder confirmar que la cadena de Markov es regular, debemos ver que  $P^k$

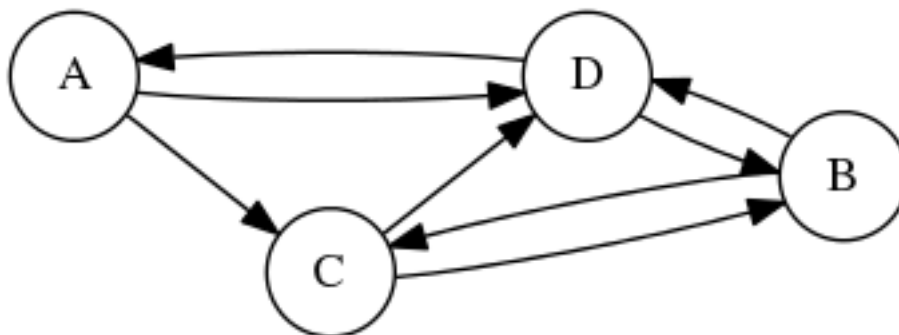
tiene todos sus elementos no nulos par algún  $k$ . Podemos comprobar fácilmente que

$$P^2 = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/2 & 0 & 1/4 \\ 1/4 & 1/2 & 0 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

y podemos ver a simple vista que  $P^4$  tendrá todos sus elementos no nulos, por lo que la cadena es regular.

Además esto nos dice que puedo llegar de cualquier vértice a cualquier vértice en 4 pasos. (y en 5, y en 6....)

Nos queda el siguiente grafo:



Para ver el tiempo medio de retorno a A, podríamos estudiar las probabilidades, pero es bastante lioso.

Como ya tenemos que es regular sabemos que es irreducible y podemos usar que:

*Tiempo medio de retorno al estado  $i$  = inverso de la  $i$ -ésima coordenada de la **distribución límite** = **única** distribución estacionaria. (es única porque es regular)*

Sabiendo esto calculamos la distribución estacionaria

$$\begin{cases} (\Pi)P = (\Pi) \\ (\Pi) = (x, y, z, t) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{t}{2} = x \\ \frac{z+t}{2} = y \\ \frac{x+y}{2} = z \\ \frac{x+y+z}{2} = t \\ x + y + z + t = 1 \end{cases}$$

Y resolviendo este sistema queda que:

$$(\Pi) = (x, y, z, t) = \left( \frac{1}{6}, \frac{5}{18}, \frac{2}{9}, \frac{1}{3} \right)$$

Por lo tanto el tiempo medio del primer retorno a A es : **6**.

Y fijándonos también en la distribución límite vemos que la página más "importante" es **D**, luego **B**, **C** y finalmente **A**.

**Ejercicio 2.7:** Recuerda que el algoritmo page rank sustituye la matriz de transición  $P$  por  $P_\varepsilon = (1 - \varepsilon)P + \varepsilon E$  donde  $E$  es la matriz  $N \times N$  con todos sus elementos  $1/N$ . Explica por qué  $P_\varepsilon$  es una matriz de transición lícita de una cadena de Markov regular cuando  $0 \leq \varepsilon \leq 1$ .

Hecho por Pedro. No fiarse al 100 %

Para empezar es evidente que, en caso de corresponderse con una cadena de Markov,  $P_\varepsilon$  representaría una cadena de Markov regular, pues ella misma tiene todos sus elementos no nulos (tendríamos  $k = 1$ ).

Puesto que todas las filas de  $P$  suman 1, tendremos que las filas de  $P_\varepsilon$  sumarán  $1 - \varepsilon + \varepsilon = 1$ , ya que los elementos de la matriz  $E$  también suman 1.

**Ejercicio 2.8:** Consideramos tres páginas web  $A, B$  y  $C$ . Las dos últimas están enlazadas entre ellas y  $A$  enlaza a  $B$ . Comprueba que la distribución límite cuando se aplica el algoritmo page rank viene dada por

$$\left( \frac{\varepsilon}{3}, \frac{1 - 2\varepsilon/3}{2 - \varepsilon}, \frac{1 - \varepsilon + \varepsilon^2/3}{2 - \varepsilon} \right)$$

Halla autovalores de  $P_\varepsilon$  y con ellos trata de explicar cómo varía la "velocidad" de convergencia en términos de  $\varepsilon$ . Por ejemplo, ¿es bueno o malo coger el número de iteraciones como el inverso de  $\varepsilon$ ?

La matriz de transición de este sistema, suponiendo que todos los enlaces tienen igual probabilidad de ser pulsados, es:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La matriz  $P_\varepsilon$  empleada por el algoritmo de page rank será de la forma

$$P_\varepsilon = (1 - \varepsilon) \cdot P + \varepsilon \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P_\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon/3 & 1 - 2\varepsilon/3 & \varepsilon/3 \\ \varepsilon/3 & \varepsilon/3 & 1 - 2\varepsilon/3 \\ \varepsilon/3 & 1 - 2\varepsilon/3 & \varepsilon/3 \end{pmatrix}$$

Puesto que  $P_\varepsilon$  tiene todos sus elementos no nulos, se trata de una cadena regular y por tanto su distribución límite coincide con la distribución estacionaria. Planteando las ecuaciones habituales para el cálculo de la distribución estacionaria obtenemos exactamente la distribución dada en el enunciado.

Es decir, bastaría con resolver el sistema

$$\mathbf{x}P_\varepsilon = \mathbf{x}$$

En vez de hacer ese cálculo tal cual lo mejor es hacerlo por trozos.

$$(\mathbb{I})P_\varepsilon = (1 - \varepsilon) (\mathbb{I})P + \frac{\varepsilon}{3} (\mathbb{I}) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = (\mathbb{I})$$

Entonces:

$$(1 - \varepsilon)(0, x + z, y) + \frac{\varepsilon}{3}(x + y + z)(1, 1, 1) = (x, y, z)$$

Si a esta ecuación le añadimos que  $x + y + z = 1$  obtenemos el sistema:

$$(1 - \varepsilon)(0, x + z, y) + \frac{\varepsilon}{3}(1, 1, 1) = (x, y, z) \rightarrow \begin{cases} \frac{\varepsilon}{3} = x \\ (1 - \varepsilon)(x + z) + \frac{\varepsilon}{3} = y \\ (1 - \varepsilon)y + \frac{\varepsilon}{3} = z \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

y el resultado es:

$$(x, y, z) = \left( \frac{\varepsilon}{3}, \frac{1 - 2\varepsilon/3}{2 - \varepsilon}, \frac{1 - \varepsilon + \varepsilon^2/3}{2 - \varepsilon} \right)$$

Para la parte de los **autovalores**: Podemos ver que los autovalores de esta matriz son  $1, 0, \varepsilon - 1$  y sus autovectores:

$$(1, 1, 1) \quad \left( 1 - \frac{3}{\varepsilon}, 1, 1 \right) \quad \left( 1, -\frac{-3 + \varepsilon}{-3 + 2\varepsilon}, 1 \right)$$

A la hora de estudiar la velocidad de convergencia, tenemos que el tiempo que tardará la matriz diagonal formada por los autovalores en estabilizarse cuando estamos calculando potencias.

En este caso tenemos dos autovalores constantes e idempotentes por lo que todo depende del último autovalor:  $\varepsilon - 1$ . Por tratarse de un número negativo ( $\varepsilon < 1$ ) va a oscilar en torno al 0. Cuanto mayor sea  $\varepsilon$  más se acercará al 0 y las oscilaciones serán cada vez menores, por lo que convergerá más rápido.

**Ejercicio 2.9:** *En una urna hay dos bolas blancas y otras dos negras. Escogemos dos al azar y las pasamos a otra urna. En cada instante se escoge al azar una bola de cada urna y se intercambian.*

*Considerando los estados dados por el número de bolas negras en la primera urna más uno, escribe la matriz de probabilidades de transición y halla la distribución límite, probando que existe*

Tenemos la matriz:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La matriz indica que si no tenemos ninguna bola negra en la primera urna, la probabilidad de hacer el movimiento indicado y seguir sin bolas negras en esa urna es 0 ( $p_{11}$ ). Si tenemos una bola negra, la probabilidad de seguir teniendo una bola negra es  $p_{22} = 1/2$  ya que podemos coger las dos blancas o las dos negras e intercambiarlas (dos de 4 opciones)

Podemos ver a simple vista que el cuadrado de esa matriz tendrá todos sus elementos no nulos, por lo que la cadena de Markov que estamos trabajando es regular y por tanto existe distribución límite, que coincide con la distribución estacionaria.

Procedamos pues a calcular esta distribución estacionaria, resolviendo el sistema  $(x, y, z)P = (x, y, z)$ :

$$(x, y, z) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = (x, y, z)$$

Que nos da el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \frac{1}{4}y = x \\ x + \frac{1}{2}y + z = y \\ \frac{1}{4}y = z \\ x + y + z = 1 \end{cases} \implies x = z = \frac{1}{6}, y = \frac{2}{3}$$

**Ejercicio 2.10:** *Suponemos que variamos el esquema del ejercicio anterior considerando las 4 bolas negras y numeradas. En cada paso elegimos un número al azar y cambiamos de urna la bola correspondiente (sin reemplazarla). Halla la distribución estacionaria.*

Aunque el enunciado dice que son numeradas, no lo hemos tenido en cuenta en clase, para no complicarlo demasiado.

En esta ocasión, el estado  $i$  representará la situación en que hay  $i$  bolas en la primera caja (el elemento de la matriz  $p_{02}$  representará la probabilidad de pasar de no tener ninguna bola a tener 2). Con esta consideración, la matriz de transición queda:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 3/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 3/4 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



Para buscar la solución estacionaria sólo tenemos que plantear el sistema de ecuaciones habitual:

$$\mathbf{x}P = \mathbf{x}$$

que, descompuesto en coordenadas, nos queda:

$$\begin{cases} a = \frac{1}{4}b \\ b = a + \frac{1}{2}c \\ c = \frac{3}{4}(b + d) \\ d = \frac{1}{2}c + e \\ e = \frac{1}{4}d \\ a + b + c + d + e = 1 \end{cases} \implies \dots \implies (a, b, c, d, e) = \frac{1}{16}(1, 4, 6, 4, 1)$$

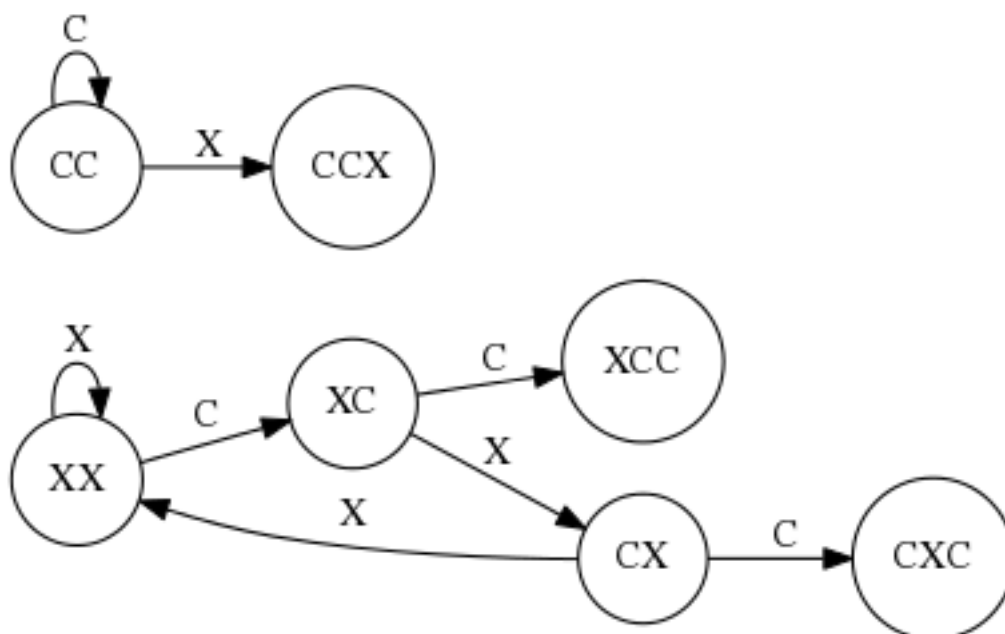
**Ejercicio 2.11:** Se lanza una moneda hasta que salga una de las secuencias XCC, CXC, CCX. ¿Por cuál de ellas apostarías?

Trata de formular el problema como una cadena de Markov (no irreducible) con estados {XX, XC, CX, CC, XCC, CXC, CCX}, donde los estados representan las dos últimas tiradas o el fin del juego. Calcula el número de tiradas esperado del juego.

Hecho por Pedro. No fiarse al 100 %

La primera pregunta es fácil, lo óptimo sería apostar a la que no apuesten **Solar** ni **Cazakas**.

La cadena de Markov de este ejercicio, con los estados indicados en el enunciado, sería:



Tal y como nos adelantaba el enunciado, la cadena obtenida no es irreducible. No podemos ir de cualquier estado a cualquier otro en un número finito de pasos.

TO BE CONTINUED...

No se como formular lo que viene ahora correctamente.

**Ejercicio 2.12:** *Da un ejemplo de una cadena de Markov finita regular tal que  $P^6$  tenga algún elemento nulo, donde  $P$  es la matriz de transición.*

Hecho por Pedro. No fiarse al 100 %

Basta con escribir un ejemplo tan absurdo como una cadena lineal en la que  $p_{ij} = 1 \iff i + 1 = j$  y  $P_{ij} = 0$  en otro caso.

Una cadena de este tipo, siempre que sea finita, será regular así que basta con hacerla con más de 6 nodos, de forma que no se pueda llegar del primer estado al último en 6 pasos, lo que provocaría un 0 en la matriz  $P^6$ .

**Ejercicio 2.13:** *Consideramos la cadena de Markov finita con estados en  $\mathbb{Z}$ , consistente en que en  $\mathbb{Z}^+$  damos un paso a la derecha con probabilidad 0.4 y a la izquierda con probabilidad 0.6, mientras que en  $\mathbb{Z}^-$  estas probabilidades están intercambiadas. Además, desde el 0 se alcanzan el 1 y el -1 con probabilidad 1/2.*

*Como el origen "atrae" a los otros estados, se puede probar que el tiempo medio de retorno es finito y la teoría asegura que existe una distribución estacionaria. ¿Cuál es? Por la simetría se puede suponer que toma los mismo valores en los negativos que en los positivos*

Hecho por Pedro. No fiarse al 100 %

Aunque la idea sería la de siempre, en este caso el sistema de ecuaciones nos queda con infinitas ecuaciones.

Vamos a restringirnos a los 2 primeros enteros positivos y negativos y el 0 y supondremos que para los que siguen la distribución será la misma que para los enteros 2 y 3.

Para representarlo en forma de matriz, consideramos que en los extremos tenemos tantas posibilidades de quedarnos fijos como posibilidades habría de llegar a esos valores desde estados que quedan excluidos de nuestra simplificación menos las probabilidades que había de salir de nuestra simplificación.

Podemos suponer, sin demasiado riesgo de equivocarnos, que en la distribución estacionaria tendremos los mismos valores en todos los enteros con valor absoluto mayor o igual que 2.

Por tanto, siendo  $a, b, c, d, e$  los valores de los estados  $-2, -1, 0, 1, 2$  respectivamente, simulando un movimiento y forzando la estacionalidad de esa

solución, tendremos:

$$\begin{cases} a = 0.6a + 0.4b \\ b = 0.6a + 0.5c \\ c = 0.6b + 0.6d \\ d = 0.5c + 0.6e \\ e = 0.4d + 0.6e \end{cases} \implies \begin{cases} a = b \\ 0.4b = 0.5c \\ c = 0.6b + 0.6d \\ 0.4d = 0.5c \\ e = d \end{cases} \implies a = b = c = d \quad c = 1.2a$$

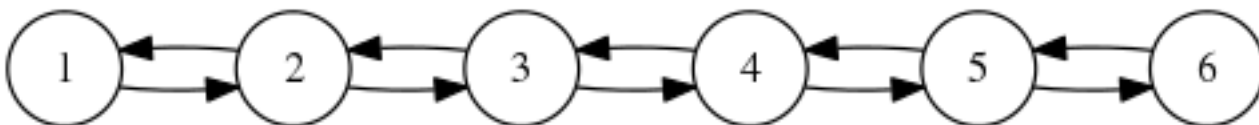
De modo que habría infinitas distribuciones estacionarias, que serían todas aquellas que cumplen esa relación:

$$(a, a, 1.2a, a, a)$$

**Ejercicio 2.14:** *El número total de partículas se conserva a lo largo del tiempo en el modelo discretizado de movimiento browniano (paseo aleatorio) en una dimensión. Traduce esto en alguna ley de conservación para la ecuación del calor en  $\mathbb{R}$  (con dato de decaimiento rápido) y demuéstrela*

Hecho por Pedro. No fiarse al 100 %

El movimiento browniano en una dimensión se corresponde con el análisis del sistema:



imaginando que se extendiera hasta el infinito por los laterales.

Consideramos que la probabilidad de coger cualquiera de los dos caminos que parten de un grafo es la misma, de modo que

$$\mathbb{P}\{X_{n+1} = j\} = \frac{1}{2}\mathbb{P}\{X_n = j - 1\} + \frac{1}{2}\mathbb{P}\{X_n = j + 1\}$$

Establezcamos que los valores de tiempo son  $0, 1h, 2h, \dots$  y que una partícula se mueve saltando entre los puntos de  $\varepsilon\mathbb{Z}$  (representados por los nodos de nuestro grafo). Consideramos  $S = \mathbb{Z}$  y  $X_n$  será la variable aleatoria que toma el valor  $j$  cuando la partícula está en la posición  $\varepsilon j$  en tiempo  $hn$ .

Como vimos en clase, el análisis combinatorio bien conocido del *paseo aleatorio* unidimensional muestra que, con esta notación, en tiempo  $hn = 1$  la partícula se aleja del origen del orden de  $\varepsilon\sqrt{n}$ .

Puesto que queremos que en  $hn = 1$  la distancia se mantenga acotada, deberíamos tomar  $h = \varepsilon^2/2^2$ . Nuestro objetivo será estudiar qué ocurre cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

<sup>2</sup>Consiguiendo que la distancia al origen sea  $\varepsilon\sqrt{n} = \varepsilon\sqrt{\frac{2}{\varepsilon^2}} = \sqrt{2}$ , que es constante

Una vez aclarado esto podemos escribir:

$$\frac{\mathbb{P}\{X_{n+1} = j\} - \mathbb{P}\{X_n = j\}}{h} = \frac{\mathbb{P}\{X_n = j - 1\} + \mathbb{P}\{X_n = j + 1\} - 2\mathbb{P}\{X_n = j\}}{\varepsilon^2}$$

Puede comprobarse que la igualdad es cierta de forma sencilla basándose en la relación:  $1/2 = h\varepsilon^2$ .

Esperamos que cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,  $\mathbb{P}\{X_n = j\}$  pueda expresarse como una función buena, que dependa del espacio y el tiempo,  $u(x, t)$  con  $x = j\varepsilon$  y  $t = hn$ . De esta forma la ecuación anterior conduce a:

$$\frac{u(x, t + h) - u(x, t)}{h} = \frac{u(x - \varepsilon, t) + u(x + \varepsilon, t) - 2u(x, t)}{\varepsilon^2}$$

y podemos observar de manera trivial que esta ecuación se corresponde con:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0$$

Y esta última ecuación no es otra que la **ecuación del calor**

**Ejercicio 2.15:** *Paseamos por  $\mathbb{Z}^2$  partiendo del origen y avanzando de uno en uno en una dirección: N, S, E, O, elegida al azar. Demuestra que el número de retornos al origen en a lo más  $2M$  pasos es en media:*

$$\sum_{n=1}^M 4^{-2n} \sum_{k+l=n} (2n)! / (k!)^2 (l!)^2$$

*Comprueba que esta serie diverge cuando  $M \rightarrow \infty$ , expresando la suma interior como*

$$4^{n-1} \pi^{-2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\sin(x) + \sin(y))^{2n} dx dy$$

### A.3. Hoja 3

**Ejercicio 3.1:** *Consideramos la función  $f : \mathbb{Z}_4 \mapsto \mathbb{C}$  definida por  $f(0) = 10$ ,  $f(\pm 1) = -2 \mp 2i$  y  $f(2) = -2$ . Calcula su desarrollo de Fourier discreto.*

Recordemos que el desarrollo discreto de Fourier se hacía siguiendo la fórmula:

$$f(n) = \frac{1}{N} \sum_m \hat{f}(m) \cdot e\left(\frac{nm}{N}\right) \quad \text{con} \quad \hat{f}(n) = \sum_m f(m) \cdot e\left(\frac{-nm}{N}\right)$$

En nuestro caso tenemos  $N = 4$  con  $m = 0, \pm 1$  y  $2$ . Empezamos calculando los coeficientes de Fourier:

$$\begin{cases} \hat{f}(0) = e(0) \cdot (f(0) + f(1) + f(-1) + f(2)) \\ \hat{f}(1) = f(0) \cdot e(0) + f(1) \cdot e\left(-\frac{1}{4}\right) + f(-1) \cdot e\left(\frac{1}{4}\right) + f(2) \cdot e\left(-\frac{1}{2}\right) \\ \hat{f}(-1) = f(0) \cdot e(0) + f(1) \cdot e\left(\frac{1}{4}\right) + f(-1) \cdot e\left(-\frac{1}{4}\right) + f(2) \cdot e\left(\frac{1}{2}\right) \\ \hat{f}(2) = f(0) \cdot e(0) + f(1) \cdot e\left(\frac{1}{2}\right) + f(-1) \cdot e\left(-\frac{1}{2}\right) + f(2) \cdot e(1) \end{cases} \implies$$

$$\implies \begin{cases} \hat{f}(0) = (10 + (-2 - 2i) + (-2 + 2i) - 2) \\ \hat{f}(1) = 10 + (-2 - 2i) \cdot (-i) + (-2 + 2i) \cdot i - 2 \cdot (-1) \\ \hat{f}(-1) = 10 + (-2 - 2i) \cdot i + (-2 + 2i) \cdot (-i) - 2 \cdot (-1) \\ \hat{f}(2) = 10 + (-2 - 2i) \cdot (-1) + (-2 + 2i) \cdot (-1) - 2 \cdot (1) \end{cases} \implies$$

$$\implies \begin{cases} \hat{f}(0) = 4 \\ \hat{f}(1) = 8 \\ \hat{f}(-1) = 16 \\ \hat{f}(2) = 12 \end{cases}$$

Una vez tenemos estos coeficientes calculamos el desarrollo discreto de Fourier:

$$f(n) = \frac{1}{4} \left( 4 + 8 \cdot e\left(\frac{n}{4}\right) + 16 \cdot e\left(-\frac{n}{4}\right) + 12 \cdot e\left(\frac{n}{2}\right) \right)$$

**Ejercicio 3.2:** Prueba que la convolución de dos funciones es una operación conmutativa.

Vamos a realizar la prueba considerando funciones  $f, g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$ . En el caso de funciones discretas o 1-periódicas la prueba sería similar.

Para ver que se trata de una operación conmutativa debemos comprobar que:

$$f * g = g * f$$

La definición de convolución nos permite escribir:

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x - t)g(t)dt$$

Pero mediante el cambio de variables lineal  $u = x - t$ , tenemos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x - t)g(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)g(x - u)du$$

Y aplicando nuevamente la definición de convolución llegamos a

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(u)g(x-u)du = (g * f)(x)$$

Con lo que queda probado

$$(f * g)(x) = (g * f)(x)$$

**Ejercicio 3.3:**

Consideramos las funciones 1-periódicas reales que en  $[0,1]$  coinciden, respectivamente con  $\min(x, 1-x)$  y con  $(-1)^{[2x]}$  donde  $[\cdot]$  indica la parte entera. Calcula sus coeficientes de Fourier. Expresar la primera serie de Fourier en términos de cosenos y la segunda en términos de senos.

La primera función parte del origen y asciende como  $y = x$  hasta llegar a  $x = y = 0.5$  y posteriormente desciende de forma lineal hasta llegar a  $x = 1, y = 0$ .

Vamos a calcular su desarrollo de Fourier, puesto que en esta ocasión tenemos  $f : \mathbb{T} \mapsto \mathbb{C}$  la fórmula que debemos aplicar es:

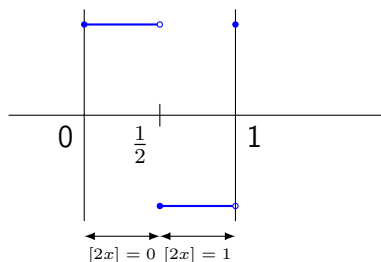
$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)e(n\pi x) \text{ donde } \hat{f}(n) = \int_0^1 f(x)e(-n\pi x)$$

Calculamos pues los coeficientes de fourier, que quedan de la forma:

$$\begin{aligned} \hat{f}(n) &= \int_0^{1/2} x e^{-2\pi n x i} dx + \int_{1/2}^1 \left(\frac{1}{2} - x\right) e^{-2\pi n x i} dx = \\ &= -\frac{e^{-2\pi i n x}(2\pi i n x + 1)}{(2\pi i n)^2} \Big|_0^{1/2} + \left( -\frac{e^{-2\pi i n x}}{4\pi i n} + \frac{e^{-2\pi i n x}(2\pi i n x + 1)}{(2\pi i n)^2} \right) \Big|_{1/2}^1 = \\ &= \dots = \frac{-e^{-\pi i n}(\pi i n + 1) - 1}{4\pi^2 n^2} - \frac{e^{-2\pi i n} - e^{-\pi i n}}{4\pi i n} + \frac{e^{-2\pi i n}(2\pi i n + 1) - e^{\pi i n}(\pi i n + 1)}{4\pi^2 n^2} = \\ &= \frac{-e^{-\pi i n}(\pi i n + 1) - 1 - e^{-2\pi i n}(\pi i n) + e^{-\pi i n}(\pi i n) + e^{-2\pi i n}(2\pi i n + 1) - e^{\pi i n}(\pi i n + 1)}{4\pi^2 n^2} = \\ &= \frac{-e^{\pi i n}(\pi i n) - 2e^{-\pi i n} + e^{-2\pi i n} - 1}{4\pi^2 n^2} = \frac{(-1)^{n+1}(\pi i n) + 2(-1)^{n+1}}{4\pi^2 n^2} \end{aligned}$$

Como no estoy nada seguro de estas cuentas no voy a seguir avanzando. Lo que habría que hacer a continuación es escribir el desarrollo de fourier sustituyendo  $\hat{f}$  por la última fracción calculada y basarnos en las ecuaciones de Euler para pasar de complejos a funciones que sólo contengan cosenos.

La segunda función oscila entre  $-1$  y  $1$  y podemos verla claramente representada en la siguiente gráfica.



Calculamos ahora los coeficientes de Fourier, con lo que tenemos:

$$\begin{aligned} \hat{f}(n) &= \int_0^1 f(x)e(-nx)dx = \int_0^{1/2} e(-nx)dx - \int_{1/2}^1 e(-nx)dx = \frac{-1}{2\pi in} e(-nx) \Big|_0^{1/2} + \frac{1}{2\pi in} e(-nx) \Big|_{1/2}^1 \\ &= \frac{-1}{2\pi in} \left( e\left(-\frac{n}{2}\right) - 1 \right) + \frac{1}{2\pi in} \left( 1 - e\left(-\frac{n}{2}\right) \right) \end{aligned}$$

Como  $e(-1/2) = e^{2\pi i(-1/2)} = -1$  nos queda:

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{\pi in} (1 - e(-n/2)) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ par} \\ \frac{2}{\pi in} & \text{si } n \text{ impar} \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{2}{\pi i} \sum_{n=-\infty \text{ y } 2 \nmid n}^{\infty} \frac{e(nx)}{n}$$

Teniendo en cuenta que

$$e(nx) = \cos(2\pi nx) + i \sin(2\pi nx) \text{ y } \frac{e(nx)}{n} + \frac{e(-nx)}{-n} = 2i \frac{\sin(2\pi nx)}{n}$$

Nos queda:

$$f(x) = \frac{2}{\pi i} \sum_{n=1 \text{ y } 2 \nmid n}^{\infty} 2i \frac{\sin(2\pi nx)}{n} = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(2\pi(2k+1)x)}{2k+1}$$

**Ejercicio 3.4:** *Calcula la transformada de Fourier de la función característica  $f$  de un intervalo  $[-a/2, a/2] \subset \mathbb{R}$ . Estudia qué ocurre con  $a^{-1}f$  y  $a^{-1}\hat{f}$  cuando  $a \rightarrow 0$ . Teniendo esto en cuenta, ¿cómo parece que habría que definir  $\int_{-\infty}^{\infty} e(\xi x) d\xi$ ? Esta fórmula se emplea con mucha frecuencia en Física sin más explicaciones.*

Es sencillo ver que

$$\lim_{a \rightarrow 0} a^{-1} f(x) = \lim_{a \rightarrow 0} a^{-1} \chi_{[-a/2, a/2]}(x) = 0 \quad \forall x \neq 0$$

puesto que si  $x \neq 0$ , en algún momento tendremos  $|a/2| < |x|$  de modo que la  $x$  estará fuera del conjunto sobre el que  $f$  es función característica y por tanto tendremos  $\lim_{a \rightarrow 0} a^{-1} \cdot 0 = 0$

Por otro lado

$$x = 0 \implies \lim_{a \rightarrow 0} a^{-1} f(x) = \lim_{a \rightarrow 0} a^{-1} = \infty$$

puesto que todos los intervalos  $[-a/2, a/2]$  contienen el 0 de modo que  $f(x) = 1$  siempre.

Podemos ver también que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} a^{-1} f(x) = 1$$

Por lo que, en cierto modo,  $a^{-1} \xrightarrow{a \rightarrow 0}$  delta de Dirac.

Vamos a estudiar ahora el comportamiento de  $a^{-1} \hat{f}$ :

$$\lim_{a \rightarrow 0} a^{-1} \hat{f}(\xi) = \lim_{a \rightarrow 0} a^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e(-x\xi) dx = \lim_{a \rightarrow 0} a^{-1} \int_{-a/2}^{a/2} e(-x\xi) dx = \lim_{a \rightarrow 0} a^{-1} \cdot 2 \cdot \frac{\sin(2\pi\xi a/2)}{2\pi\xi} = 1$$

Esto sugiere que  $\hat{\delta} = 1$

Aplicando ahora la fórmula de inversión tenemos

$$\delta(x) = \int_{-\infty}^{\infty} 1 \cdot e(x\xi) d\xi$$

con lo que parece que hemos alcanzado una definición posible para la integral pedida.

**Observación:** Como podemos observar, la integral no converge. Vale 0 en todo punto salvo en 1, que es  $\infty$ .

**Ejercicio 3.5:** *Para tratar de forma discreta ondas muy oscilatorias hay que tomar muestras muy grandes para limitar ambigüedades graves. Sea una señal  $f(x) = Ae(vx) + Be(-vx)$  con  $v \in \mathbb{R}^+$ . Supongamos que al extraer  $N$  muestras se obtiene  $f(j/N) = 0$  para  $0 \leq j < N$ , es decir, lo mismo que se obtendría muestreando la función nula. ¿Cuáles son los posibles valores de  $v$ ? Explica por qué esto sugiere que el número de muestras debe ser al menos el doble de la frecuencia de una señal (la generalización de esto es el Teorema de Nyquist)*

Tenemos una señal de la forma

$$f(x) = Ae(vx) + Be(-vx)$$



Puesto que tenemos que  $f(j/N) = 0$  para todo  $j$ , nos queda:

$$Ae\left(\frac{vj}{N}\right) + Be\left(-\frac{vj}{N}\right) = 0 \implies e\left(2\frac{vj}{N}\right) = -\frac{B}{A}$$

y, como en particular esto es cierto para  $j = 0$  tenemos que  $B = -A$ .

Puesto que  $B$  y  $A$  son constantes, tenemos que para cualquier valor de  $j$ ,  $e\left(2\frac{vj}{N}\right)$  debe valer siempre lo mismo. La única forma de que esto ocurra es que

$$\frac{2v}{N} \in \mathbb{Z}$$

ya que así, al descomponer la función  $e$  como combinación de senos y cosenos, tendremos coseno y seno de múltiplos enteros de  $2\pi$ , que nos garantiza la constancia en su valor.

Por tanto, nos queda la igualdad  $2v = NK$  siendo  $K$  un entero positivo. Para evitar que esto pueda producirse basta con tomar  $N > 2v$ .

**Ejercicio 3.6:** Si en una imagen en formato JPEG hacemos cero todos los coeficientes de Fourier excepto los  $a_{00}$  que corresponden a la función  $\phi_{00}$ , ¿qué ocurrirá?

La imagen se verá totalmente pixelada, pues para cada bloque de  $8 \times 8$  estaremos tomando el color que tenía el pixel  $(0, 0)$  del bloque.

**Ejercicio 3.7:** Halla los coeficientes antes de cuantificar una imagen JPEG que consta sólo de los píxeles de la primera columna en blanco (valor=255) y el resto negros (valor=0), tratando de expresarlos de manera lo más simple posible

*Hecho por Pedro. Se aceptan correcciones.*

corregido en clase

Podemos estudiar el desarrollo de Fourier de la función que nos da el color para cada uno de los tres colores básicos RGB que, en este ejemplo, serán los tres iguales.

Los resultados experimentales vistos en clase muestran que el resultado será una función real, es decir, que sólo dependerá de cosenos.

Aplicamos pues la transformada coseno discreta:

$$F = \sum_{n=0}^7 \sum_{m=0}^7 a_{nm} \phi_{nm} \text{ con } \phi_{nm}(l, k) = \cos\left(\frac{\pi n}{16}(2k+1)\right) \cos\left(\frac{\pi m}{16}(2l+1)\right)$$

Despejando podemos ver que los coeficientes se calculan según la siguiente fórmula, que aparece en los apuntes del profesor:

$$a_{nm} = \frac{\alpha_n \alpha_m}{64} \sum_{k=0}^7 \sum_{l=0}^7 F(k, l) \phi_{nm}(l, k) \text{ donde } \alpha_n = 2 \text{ si } n \neq 0 \text{ y } 1 \text{ si } n = 0$$

Todos los bloques que no estén en la frontera izquierda de la imagen tendrán todos sus coeficientes nulos puesto que al calcular  $a_{nm}$  tendremos  $F = 0$ .

Por tanto, el caso interesante lo constituyen los cuadrados fronterizos. Puesto que  $F(k, l) = 0 \forall l \neq 0$  podemos escribir:

$$a_{nm} = \frac{\alpha_n \alpha_m}{64} \sum_{k=0}^7 F(k, 0) \phi_{nm}(0, k) = \frac{\alpha_n \alpha_m}{64} \sum_{k=0}^7 F(k, 0) \cos\left(\frac{\pi n}{16}(2k+1)\right) \cos\left(\frac{\pi m}{16}\right)$$

Sabemos que todos los píxeles de la frontera tienen el mismo color, 255, de modo que  $F(k, l) = 255$  por lo que podemos simplificar la fórmula y escribir:

$$a_{nm} = \frac{\alpha_n \alpha_m}{64} \cdot 255 \cdot \sum_{k=0}^7 \cos\left(\frac{\pi n}{16}(2k+1)\right) \cos\left(\frac{\pi m}{16}\right)$$

Vemos que

$$\sum_{k=0}^7 \cos\left(\frac{\pi n}{16}(2k+1)\right) = \begin{cases} 8 & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{si } n \neq 0 \end{cases}$$

Entonces como la parte real del sumatorio de exponencial da el sumatorio de cosenos puedo calcular:

$$\sum_{k=0}^7 e\left(\frac{n}{32}(2k+1)\right)$$

que es una progresión geométrica.

Y luego cojo su parte real

Yo ya lo veo bastante simple

**Ejercicio 3.8:** Una imagen JPEG que consta de una línea horizontal negra gruesa de lado a lado en un fondo blanco no es invariante por traslaciones; es decir, el tamaño del fichero depende de la altura a la que está la línea. Explica este fenómeno. ¿Para qué grosores y posiciones habrá mayor compresión?

Hecho por Pedro. Se aceptan correcciones.

corregido en clase

El tamaño depende de la altura de la línea, vamos a ver porqué.

En JPEG se dividen los bloques en 8 y se interpretaba cada bloque por Fourier.

Pensemos primero en los casos de línea con grosor 8.

En la situación de que la línea esté justo en el centro de los bloques la función que analizamos Fourier en cada bloque es constante. Es decir  $a_{00} = algo$  y el resto nulos.

Si no cuadra con el bloque, por ejemplo cogemos un pixel de los bloques de arriba, vemos que en los 6 bloques restantes la función no es constante por lo tanto hay  $a_{ij} \neq 0$  y  $a_{00} \neq 0$  por lo tanto ocupa más.

Esto es porque en todos los cuadrados que contienen la línea, hay un cambio abrupto de blanco a negro en solo un pixel.

Para entender porqué es esto recordamos que JPEG expresaba cada cuadrado como combinación lineal de los cuadrados "base".

$$f(k, l) = \sum_{n,m=0}^7 a_{nm} \varphi(k, l)$$

**Ejercicio 3.9:** Demuestra que los polinomios de Chebyshev  $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$  son realmente polinomios para  $x \in [-1, 1]$  y que satisface

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) \text{ para } n \geq 1$$

*Hecho por Pedro. Se aceptan correcciones.*

Para empezar vamos a comprobar que se satisface la ecuación recursiva.

$$\begin{aligned} T_{n+1}(x) &= \cos((n+1) \arccos x) = \cos(n \arccos x) \cos(\arccos x) - \sin(n \arccos x) \sin(\arccos x) = \\ &= T_n(x)x - \sin(n \arccos x) \sqrt{1-x^2} \end{aligned}$$

Por otro lado tenemos:

$$\begin{aligned} T_{n-1}(x) &= \cos((n-1) \arccos x) = \cos(n \arccos x) \cos(\arccos x) + \sin(n \arccos x) \sin(\arccos x) = \\ T_n(x)x + \sin(n \arccos x) \sqrt{1-x^2} &\implies \sin(n \arccos x) \sqrt{1-x^2} = T_{n-1}(x) - T_n(x)x \end{aligned}$$

Y sustituyendo este resultado en la ecuación anterior obtenemos el resultado buscado.

Una vez hemos probado que la ecuación recursiva es cierta nos basta con fijarnos en que  $T_1(x) = \cos(\arccos(x)) = x$ . Sabiendo además que  $T_0(x) = 1$  queda perfectamente claro que la ecuación recursiva nos lleva a obtener polinomios.

**Otra forma de hacerlo (hecho en clase)**

Llamamos  $\arccos x = y$  entonces

$$T_n(x) = \cos(ny)$$

Intentamos relacionar  $T_{n+1}(x)$  con  $\cos(ny)$ . Para ello vemos que:

$$T_{n+1}(x) = \cos((n+1)y) = \cos(ny)\cos y - \sin(ny)\sin y$$

Vemos que  $\cos(ny) = T_n(x)$ , el  $\cos y = x$  y para los senos utilizamos las fórmulas de proculo de cosenos de forma que nos queda que:

$$\sin(ny)\sin y = \frac{\cos((n+1)y) - \cos((n-1)y)}{2} = \frac{T_{n+1}(x) - T_{n-1}(x)}{2}$$

Teniendo esto ya podemos ver que:

$$\implies T_{n+1} = x \cdot T_n + \frac{T_{n+1} - T_{n-1}}{2} \iff T_{n+1} = 2xT_n - T_{n-1}$$

**Ejercicio 3.10:** Prueba que para funciones impares los coeficientes con índice par en el desarrollo de Chebyshev-Fourier son nulos. Busca un análogo para funciones pares.

*Hecho por Pedro. Se aceptan correcciones.*

Recordemos que una función impar es cualquier función que satisface

$$f(-x) = -f(x)$$

El desarrollo de Chebyshev-Fourier de una función  $f(x)$  dada es de la forma:

$$f(x) = a_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n T_n(x) = a_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n \arccos x)$$

Por otro lado, el desarrollo de Chebyshev-Fourier de  $f(-x)$  tenemos:

$$\begin{aligned} f(-x) &= a_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n \arccos(-x)) = a_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n(\pi - \arccos x)) = \\ &= a_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n (\cos(n\pi) \cos(n \arccos x) + \sin(n\pi) \text{algo}^3) = a_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\pi) \cos(n \arccos x) = \\ &= a_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n (-1)^n \cos(n \arccos x) \end{aligned}$$

Sabiendo que  $f$  es una función impar, igualamos los dos desarrollos obtenidos invirtiendo el signo en el segundo. Así nos quedan dos desarrollos exactamente idénticos en los términos impares pero con signos opuestos en todos los pares. La única opción para que se mantenga la igualdad es que estos términos de índice par sean nulos.

Por otro lado las funciones pares son aquellas que cumplen

$$f(x) = f(-x)$$

En este caso, igualar los desarrollos anteriormente calculados (de  $f(x)$  y  $f(-x)$ ) nos quedarían dos series idénticas en los términos pares y con signos opuestos en los impares. La única forma de que ambas series sean idénticas es que esos términos impares sean nulos.

Otra forma de hacerlo (hecho en clase)

Tenemos que

$$a_n = \int_0^1 f(\cos(2\pi x)) \cos(2\pi n x) dx$$

Esto lo hemos sacado de la fórmula de los coeficientes de Fourier:

$$F(x) = f(\cos(2\pi x)) \rightarrow a_n = \int_0^1 F(x)e(-nx)dx$$

Vemos que **para f impar**  $\implies a_{2k} = 0$

Vamos a probar esto último:

Hacemos un cambio de variable en la integral de forma que  $x = t + \frac{1}{2}$

$$a_{2k} = \int_0^1 \dots = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(\cos(2\pi t + \pi)) \cdot \cos(2\pi 2kt + 2\pi k) dt$$

Vemos que  $\cos(2\pi 2kt + 2\pi k) = \cos(2\pi 2kt)$  y que  $f(\cos(2\pi t + \pi)) = f(-\cos(2\pi t)) = -f(\cos(2\pi t))$

Entonces

$$a_{2k} = - \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(\cos(2\pi t)) \cdot \cos(2\pi 2kt) dt$$

y por ser 1-periódica nos queda

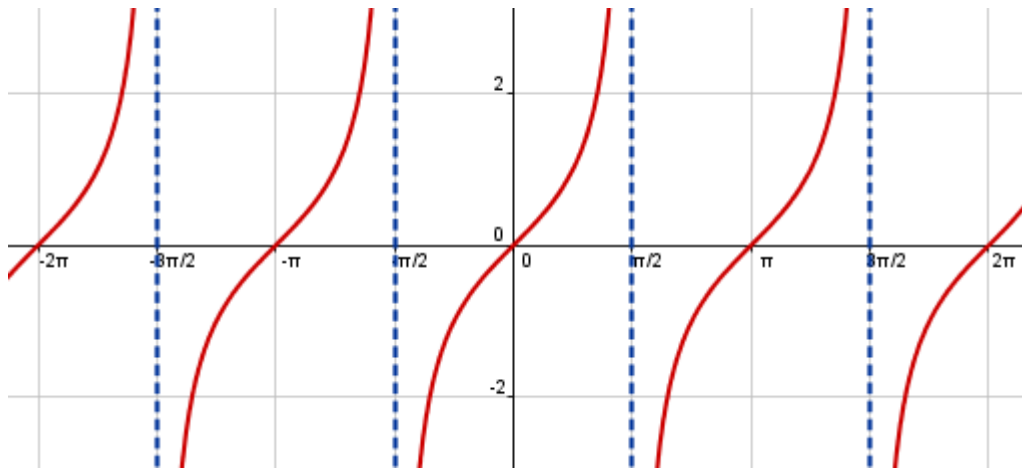
$$a_{2k} = - \int_a^{a+1} f(\cos(2\pi t)) \cdot \cos(2\pi 2kt) dt$$

y para  $a = 0$

$$\implies \int_0^1 \dots dx = - \int_0^1 \dots dt \implies \int_0^1 = 0 \implies a_{2k} = 0$$

**Ejercicio 3.11:** *Explica cómo calcularía la función tangente para cualquier valor real si tu calculadora sólo te permitiera evaluarla en  $[-\pi/4, \pi/4]$ . Consiera el desarrollo de Chebyshev-Fourier de  $f(x) = \tan(\pi x/4)$  truncando hasta los dos primeros coeficientes no nulos. Con ayuda de un ordenador, aproxima estos dos coeficientes con 6 cifras decimales y comprueba la precisión al aproximar  $\tan(3/4)$ . Compara el resultado obtenido al emplear dos términos no nulos de la siere de Taylor de  $f$*

Para empezar sabemos que la función tangente es una función  $\pi$ -periódica con la siguiente gráfica:



Podemos observar que el período no se da en  $[-\pi/4, \pi/4]$  sino en  $[-\pi/2, \pi/2]$ . No obstante, tenemos que

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{\sin(\pi/2 - x)}{\cos(\pi/2 - x)} = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} = \frac{1}{\tan(x)}$$

Así podemos obtener el valor de la tangente para un punto comprendido entre  $\pi/4$  y  $\pi/2$  puesto que al restarle  $\pi/2$  a un valor de este tipo caemos en la zona conocida:  $[-\pi/4, \pi/4]$

Sabemos que el desarrollo de Chebyshev-Fourier es de la forma:

$$f(x) = a_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n T_n(x) \text{ con } T_n(x) = \cos(n \arccos(x))$$

Puesto que nuestra función  $f$  es impar sabemos que los coeficientes con  $n$  par serán nulos

Calculamos  $a_1$  y  $a_3$ :

$$a_1 = \int_0^1 \tan\left(\frac{\pi}{4} \cos(2\pi x)\right) \cdot \cos(2\pi x) dx = 0.469225$$

$$a_3 = 0.028585$$

Entonces

$$\tan \frac{3}{4} = f\left(\frac{\pi}{3}\right) \simeq 2a_1 T_1\left(\frac{3}{\pi}\right) + 2a_3 T_3\left(\frac{3}{\pi}\right) = 0.931506$$

**Ejercicio 3.12:** Sabiendo que  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$  calcula la transformada de Fourier de  $f(x) = e^{-\alpha x^2}$ ,  $\alpha > 0$ , utilizando un cambio de variable  $x \rightarrow \mu x + v$ ,  $v \in \mathbb{C}$ . Justifica que este cambio complejo es lícito

Hecho por Pedro. Se aceptan correcciones.

Para calcular esta transformada de Fourier nos apoyaremos en la fórmula:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\varepsilon)e^{-\varepsilon x}d\varepsilon \text{ siendo } \hat{f}(\varepsilon) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-\varepsilon x}dx$$

Calculamos primero los coeficientes de la serie:

$$\hat{f}(\varepsilon) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e(\varepsilon x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2}e(-\varepsilon x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2 - i\varepsilon x}dx$$

Atendiendo a la indicación del enunciado, hacemos el cambio de variable  $x = \mu t + v$ , con lo que deberemos cambiar  $dx = \mu dt$  obteniendo:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2 - i\varepsilon x}dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha(\mu t + v)^2 - i\varepsilon(\mu t + v)}dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha\mu^2 t^2 - \alpha v^2 - 2\alpha\mu vt - i\varepsilon\mu t - i\varepsilon v}dx$$

El cambio de variable que hicimos tenía dos constantes que no hemos especificado y cuyo valor no altera los pasos seguidos hasta llegar a este punto. Si escogemos bien  $v$  podemos eliminar el término  $t$  del exponente.

Para ello necesitamos

$$-2\alpha\mu v = i\varepsilon\mu \implies v = \frac{i\varepsilon}{-2\alpha}$$

Además, dada la información que nos proporciona el enunciado, nos interesa que el coeficiente del término  $t^2$  sea 1. Para ello basta con tomar  $\mu = \sqrt{\alpha}$ .

Por tanto ya tenemos completamente identificado el cambio de variable que vamos a realizar. Con él, obtenemos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha\mu^2 t^2 - \alpha v^2 - 2\alpha\mu vt - i\varepsilon\mu t - i\varepsilon v}dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2 - \alpha v^2 - i\varepsilon v}dx = \sqrt{\pi} \cdot e^{\varepsilon^2/(4\alpha) - \varepsilon^2/(2\alpha)}$$

**Ejercicio 3.13:** *El filtro de convolución sharpen para imágenes se representa a veces con una matriz  $3 \times 3$  cuyos elementos son  $-1$ , excepto el central que es  $9$ . Intenta adivinar su efecto visual.*

**Ejercicio 3.14:** *Explica por qué si se sabe que la densidad es una función radial, entonces basta una proyección para reconstruirla por tomografía. Demuestra que en este caso una fórmula para hacerlo es*

$$\rho(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\pi} |r| \hat{P}_0(r) e(r \cos(\theta) \sqrt{x^2 + y^2}) d\theta dr$$

Tenemos la siguiente fórmula:

$$\rho(x, y) = \int_0^{2\pi} \int_0^\infty r \widehat{P}_\theta(r) e(xr \cos \theta + yr \sin \theta) dr d\theta$$

Lo que tenemos que utilizar es que para  $\rho$  radial  $\implies P_\theta = P_0$  (No depende de  $\theta$ ).

Entonces  $\widehat{P}_\theta = \widehat{P}_0$

$\rho$  radial  $\implies \rho(x, y) = \rho(\sqrt{x^2 + y^2}, 0)$

Entonces tenemos que

$$\rho(x, y) = \rho(\sqrt{x^2 + y^2}, 0) = \int_0^{2\pi} \int_0^\infty r \widehat{P}_0(r) e(\sqrt{x^2 + y^2} r \cos \theta) dr d\theta$$

Y ahora, para que nos quede como en el enunciado, podemos hacer dos cosas: La primera es hacer un cambio a un tipo de polares "raras"

La segunda es ver que tengo

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\infty r \dots = \int_0^\pi \int_0^\infty r \dots + \int_\pi^{2\pi} \int_0^\infty r \dots$$

Para transformar el segundo par de integrales lo que hago es transformar  $\theta \rightarrow \theta + \pi$ , que puedo hacerlo porque el coseno es periódico, y  $r \rightarrow -r$

El cambio de  $\theta$  me cambia los límites de la integral a  $\int_0^\pi$  y el segundo cambio me deja  $\int_{-\infty}^0 -r \dots$

Una vez que tenemos esto, al hacer la suma ya nos queda  $\int_0^\pi \int_{-\infty}^\infty |r| \dots dr d\theta$

**Ejercicio 3.15:** Halla  $P_\theta(t)$  al hacer tomografías de las secciones de:

- a) Una barra homogénea de densidad 1 y radio 1
- b) Esta barra vaciada hasta radio 1/2
- c) El resultado de rellenar el hueco central con un material de densidad 2

a)  $P_\theta(t) = \int_{r_{\theta,t}} \rho$

Justo debajo de la línea, donde  $t = 0$   $P_\theta(0) = 2$

Entonces la solución general sería

$$P_\theta(t) \begin{cases} 2\sqrt{1-t^2} & \text{si } -1 < t < 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

b) Mientras los rayos no atraviesen la parte vacía, el resultado es igual que el apartado anterior.

Cuando  $|t| \stackrel{?}{=} 1$  (osea que no pasa por la barra) es 0, igual que el apartado anterior.



Cuando si atravesamos la parte vacía tenemos el total  $2\sqrt{1-t^2}$  y le tenemos que restar la parte hueca  $2\sqrt{\frac{1}{2}-t^2}$

En general nos queda

$$P_\theta(t) = \begin{cases} 2\sqrt{1-t^2} & \text{si } \frac{1}{2} \leq |t| \leq 1 \\ 0 & \text{si } |t| \geq 1 \\ 2\sqrt{1-t^2} - 2\sqrt{\frac{1}{2}-t^2} & \text{si } |t| \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

**Ejercicio 3.16:** *Un modelo natural para la temperatura en el interior de la Tierra a profundidad  $x$  (pequeña) es que  $u(x, t)$  es periódica en  $t$  de periodo un año por efecto de las estaciones, y entonces*

$$u(x, t) = \sum c_n(x)e(nt)$$

Deduce  $c_n(x) = a_n e^{-x(1 \pm i)\sqrt{\pi|n|}}$  de la ecuación del calor  $u_t = u_{xx}$ , suponiendo  $u(+\infty, t) < \infty$ , con  $a_n$  los coeficientes de Fourier de la temperatura en la superficie y  $\pm$  el signo de  $n$ .

**Ejercicio 3.17:** *Halla  $u(x, t)$  en el problema anterior cuando  $u(0, t) = \lambda_0 + \sin(2\pi t)$  (el verano corresponde a  $t = 1/4$  y el invierno a  $t=3/4$ ). Deduce que las estaciones no actúan con la misma intensidad ni al mismo tiempo en la superficie que en el interior.*

**Ejercicio 3.18:** *Explica por qué si  $f : \mathbb{Z}_{2^k} \mapsto \mathbb{C}$  entonces  $f_p(n) = f(2n)$  y  $f_i(n) = f(2n+1)$  se pueden considerar funciones  $\hat{f} : \mathbb{Z}_{2^{k-1}} \mapsto \mathbb{C}$  y satisfacen  $\hat{f}(n) = \hat{f}_p(n) + e(-n/2^k)\hat{f}_i(n)$ . La iteración de esta fórmula da lugar a la importantísima FFT. Suponiendo los  $e(n/2^k)$  conocidos de antemano, explica por qué esto ahorra operaciones al calcular  $\{\hat{f}(n)\}_{n=1}^{2^k}$*

Hacemos el desarrollo de Fourier para  $f_p, f_i$ :

$$\hat{f}_p(n) = \sum_{m=0}^{2^{k-1}} f(2m)e\left(\frac{-mn}{2^{k-1}}\right)$$

$$\hat{f}_i(n) = \sum_{m=0}^{2^{k-1}} f(2m+1)e\left(\frac{-mn}{2^{k-1}}\right)$$

Vamos a multiplicar  $\hat{f}_i(n)$  por  $e(-n/2^k)$ . Para ello, vemos primero cómo nos quedan las exponenciales:

$$e\left(\frac{-mn}{2^{k-1}}\right) \cdot e\left(\frac{-n}{2^k}\right) = e\left(\frac{-2mn - n}{2^k}\right) = e\left(\frac{-n(2m+1)}{2^k}\right)$$

Vemos que lo que nos queda es como las exponenciales impares del desarrollo de  $\hat{f}(n)$ . De hecho, si multiplicamos por dos arriba y abajo en la exponencial de  $\hat{f}_p(n)$

$$e\left(\frac{-mn}{2^{k-1}}\right) = e\left(\frac{-2mn}{2^k}\right)$$

y entonces, la identidad del enunciado nos queda que

$$\hat{f}_p(n) + e\left(\frac{-n}{2^k}\right) \hat{f}_i(n) = \sum_{m=0}^{2^k-1} \left( f(2m) e\left(\frac{-2mn}{2^k}\right) + f(2m+1) e\left(\frac{-n(2m+1)}{2^k}\right) \right)$$

Si nos fijamos, tenemos exactamente todos los términos de  $\hat{f}(n)$ , así que ya lo tenemos todo listo.

## A.4. Hoja 4

**Ejercicio 4.1:** Sean  $0 \leq p \leq 1$  y  $q = 1 - p$ . Comprueba que la entropía de  $\{a, b\}$  con  $p_1 = p, p_2 = q$  es la mitad que la de  $\{A, B, C, D\}$  con  $p_1 = p^2, p_2 = p_3 = pq, p_4 = q^2$ . ¿Cómo se generaliza este hecho?

La entropía de  $\{a, b\}$  se calcula como:

$$H_1 = -p \log_2 p - q \log_2 q$$

Y la entropía del  $\{A, B, C, D\}$  es:

$$\begin{aligned} H_2 &= -p^2 \log_2 p^2 - 2pq(\log_2 p + \log_2 q) - q^2 \log_2 q^2 = \\ &= -2p^2 \log_2 p - 2pq \log_2 p - 2pq \log_2 q - 2q^2 \log_2 q \end{aligned}$$

Entonces

$$H_{S_2} = (-2p^2 - 2qp) \log_2 p + (-2q^2 - 2qp) \log_2 q$$

y como

$$\begin{aligned} -2p^2 - 2qp &= -2p(p + q) \underset{\substack{\uparrow \\ q=1-p, p+(1-p)=1}}{=} -2p \\ -2q^2 - 2qp &= -2q(q + p) = -2q \end{aligned}$$

Es fácil ver que

$$H_2 = 2H_1$$

¿Cómo se generaliza éste hecho?

La generalización de este hecho es que la entropía de una cadena de N símbolos es la entropía multiplicada por N.

*Hecho por Pedro. Se aceptan correcciones.*

Analizando las probabilidades dadas tenemos que el segundo conjunto representa las diferentes posibilidades al tomar dos elementos de  $\{a, b\}$  con sus probabilidades respectivas. Así, los elementos de ese segundo conjunto que nos dan representan:

$$A = a, a \quad B = a, b \quad C = b, a \quad D = b, b$$

La generalización de este hecho sería que dado un conjunto con ciertos elementos donde cada elemento tiene una cierta probabilidad de aparición, si tomamos el conjunto formado por las combinaciones posibles de dos elementos, la entropía se duplica.

**Ejercicio 4.2:** Tenemos una moneda trucada en la que sale cara sólo el 30 % de las veces. ¿Qué tiene más entropía (cantidad de información), lanzar un dado una vez o lanzar la moneda trucada tres veces?

Sea  $p$  la probabilidad de sacar cara con esta moneda tenemos:

$$p = 0.3$$

En un dado la probabilidad de cada número es

$$p_i = \frac{1}{6}$$

Vamos a calcular la dos entropías que se nos pide:

**1. Tirar una vez el dado**

$$H_1 = -\frac{1}{6} \log_2 \frac{1}{6} \dots - \frac{1}{6} \log_2 \frac{1}{6} = -\log_2 \frac{1}{6} = \log_2 6 \approx 2.5849^4$$

**2. Tirar 3 veces la moneda**

Se podría calcular  $H_2$  hallando las probabilidades de cada una de las 8 probabilidades. Pero vamos a hacerlo de forma más corta:

$$H_2 = 3H_{\text{tirando una vez la moneda}}$$

Esto se puede hacer porque los sucesos son independientes<sup>5</sup>.

$$H_2 = 3 \cdot (-0.3 \log_2 0.3 - 0.7 \log_2 0.7) \approx 2.6438$$

Podemos comprobar que tenemos una mayor entropía al lanzar la moneda trucada tres veces.

**Ejercicio 4.3:** Prueba que la entropía de un conjunto con probabilidades  $p_i$  cumple

$$H \leq -\sum p_i \log(q_i)$$

cualesquiera que sean  $q_i \in \mathbb{R}^+$  con  $\sum q_i \leq 1$ . Prueba también que la entropía es máxima en el caso de equidistribución (todas las probabilidades  $p_i$  son iguales).

Vamos a hacerlo usando los multiplicadores de Lagrange.

Llamamos a  $f(x_1, \dots, x_n) = -\sum p_i \log_2 x_i$

Demostrar la desigualdad del enunciado equivale a probar que el mínimo de  $f$  restringido a  $\sum x_i \leq 1, x_i > 0$  es  $H$ .

Puesto que  $\log_2 x_i$  es decreciente en  $x_i$ , si el mínimo se alcanzara con  $\sum x_i = \alpha < 1$ , multiplicando cada  $x_i$  por  $\frac{1}{\alpha}$ , se tendría un valor menor lo que nos llevaría a una contradicción.

<sup>4</sup>Recordatorio cambio de base del logaritmo:  $\log_b(x) = \frac{\log(x)}{\log(b)}$

<sup>5</sup>Puede deducirse a partir de la generalización del ejercicio anterior.

Por tanto podemos suponer  $\sum x_i = 1$ . El teorema de los multiplicadores de Lagrange nos dice que la función  $F$  definida a continuación

$$F(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n) - \lambda \sum_{i=1}^n x_i$$

tiene gradiente 0 al evaluarla en un  $f$ . Por tanto, para encontrar el mínimo que buscábamos derivamos  $F$  con respecto a cada  $x_i$  e igualamos a 0 con lo que obtenemos ecuaciones de la forma:

$$\frac{p_i}{x_i} = \lambda \quad \forall i$$

Luego

$$p_i = \lambda x_i \quad \forall i \implies \sum_i x_i = \sum_i \lambda p_i$$

Como  $\sum_i x_i = 1$ , y  $\sum_i p_i = 1$ , sacando factor común  $\lambda$ , obtenemos que

$$\lambda = 1 \implies x_i = p_i \quad \text{porque} \quad \frac{p_i}{x_i} = \lambda = 1 \quad \forall i.$$

Finalmente nos queda que

$$f(p_1, \dots, p_n) = H$$

□

**Ejercicio 4.4:** *Calcula la entropía de una distribución binomial  $B(4, 0.5)$ . Explica cómo la definirías para una distribución continua de probabilidad y calcúlala para la normal  $N(0, 1)$*

Puesto que tenemos una distribución binomial  $B(4, 0.5)$ , siendo el conjunto  $S = \{0, 1, 2, 3, 4\}$  tenemos que las probabilidades de cada elementos son:

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \rightarrow \binom{4}{0} (0.5)^4 = p_1 \\ 1 \rightarrow \binom{4}{1} (0.5)^4 = p_2 \\ 2 \rightarrow \binom{4}{2} (0.5)^4 = p_3 \\ 3 \rightarrow \binom{4}{3} (0.5)^4 = p_4 \\ 4 \rightarrow \binom{4}{4} (0.5)^4 = p_5 \end{array} \right.$$

Calculamos la entropía:

$$H = -p_1 \log_2 p_1 - p_2 \log_2 p_2 - \dots - p_5 \log_2 p_5 = 2.0306$$

Para la segunda parte del ejercicio queremos definir una distribución continua de probabilidad y calcularla para la normal  $N(0, 1)$ . Recordemos que la normal  $N(0, 1)$  tenía la siguiente función de densidad:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Podríamos coger<sup>6</sup>

$$H = - \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \log_2 f(x) dx$$

Calculamos pues la  $H$ , que en este caso podría alcanzar valores negativos:

$$H = \frac{-1}{(\log 2) \cdot \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} (-1) \left( \log \sqrt{2\pi} + \frac{x^2}{2} \right) dx$$

Para resolver esta integral usamos que

$$\int e^{-x^2} = \sqrt{\pi}$$

$$\int e^{-\alpha x^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

$$-\alpha \int x^2 \cdot e^{-\alpha x^2} dx = -\frac{1}{2} \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha^{\frac{3}{2}}}$$

Con lo que llegamos a:

$$H = \frac{1}{(\log 2) \sqrt{2\pi}} \left( \log(\sqrt{2\pi}) \sqrt{2\pi} - \frac{\sqrt{\pi}}{4(1/2)^{3/2}} \right) = \frac{1}{(\log 2)} \left( \log(\sqrt{2\pi}) - \frac{1}{2} \right)$$

**Ejercicio 4.5:** Consideramos el número de caras al tirar dos monedas. Encuentra el número medio de bits mínimo para almacenar los resultados de este experimento repetido cien veces y diseña un código que lo alcance.

En este caso tenemos  $S = \{0,1,2\}$  con  $p_1 = \frac{1}{4}$ ,  $p_2 = \frac{1}{2}$ ,  $p_3 = \frac{1}{4}$

Calculamos la entropía, que nos da una cota inferior.

$$H = -\frac{1}{4} \log_2 \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \log_2 \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \log_2 \frac{1}{4} = \frac{3}{2}$$

La entropía nos indica que  $\frac{3}{2}$  bits es la "cantidad de información" de cada experimento.

<sup>6</sup>Esta definición puede dar entropía negativa, eg: para normales con media 0 y varianza muy pequeña ( $\frac{1}{1000}$ ).

Para calcular el número medio de bits para 100 experimentos tenemos la siguiente cota, extraída del corolario del source coding theorem:

$$\frac{3}{2} \leq \frac{l^*(C)}{100} < \frac{3}{2} + \frac{1}{100}$$

En concreto tenemos que el número mínimo sería  $100 \cdot \frac{3}{2} = 150$  bits.

Ahora vamos a buscar un código que alcance este mínimo. El código óptimo asignará únicamente un bit al elemento con probabilidad  $1/2$  y dos bits a los otros<sup>7</sup>.

Tomamos

$$0 \rightarrow 10, 1 \rightarrow 0, 2 \rightarrow 11$$

que se trata de un código perfectamente descifrable e inyectivo.

Por tanto sólo nos queda confirmar que este código es óptimo. Para ello estudiamos su longitud media:

$$l(C) = 2 \frac{1}{4} + 1 \frac{1}{2} + 2 \frac{1}{4} = \frac{3}{2}$$

que coincide exactamente con la entropía, que era la cota inferior para la longitud media.

Para almacenar 100 veces este experimento necesitaremos un número medio de bits de 150 bits.

**Ejercicio 4.6:** *En la informática normalmente un caracter se codifica con un byte a través del código ASCII, usándose aproximadamente 40 posibilidades cuando se desprecian las mayúsculas, acentos y algunos símbolos poco comunes. En español, las vocales constituyen estadísticamente el 45.07% de los caracteres de un texto. Usando sólo este dato, ¿hasta cuánto se debería poder comprimir un fichero de un mega de texto en minúsculas sin acentos?*

Puesto que consideramos un alfabeto compuesto por sólo 40 elementos tenemos:

$$S\{s_1, s_2, \dots, s_{40}\}$$

Si las vocales están en  $s_1 \dots s_5$  entonces

$$p_1 + \dots + p_5 = 0.4507$$

$$p_6 + \dots + p_{40} = 1 - 0.4507$$

La mayor entropía (menos compresión) correspondería al caso equidistribuido.

$$p_1 = p_2 = \dots = p_5$$

$$p_6 = \dots = p_{40}$$

<sup>7</sup>Es evidente que con menos bits es imposible obtener un código.

En estas condiciones tendríamos

$$H = -0.4507 \log_2 \left( \frac{0.4507}{5} \right) - (1 - 0.4507) \log_2 \left( \frac{1 - 0.4507}{35} \right) = 4.85 \text{bits}$$

Aunque sea el "caso peor" no podemos suponer nada mejor, pues no se aporta más información en el enunciado. Por tanto, en base a esta entropía tenemos que un código de 1024 bytes podría reducirse hasta 4.85 Megabits = 0.6MBytes.

**Ejercicio 4.7:** *Mejora el resultado del problema anterior sabiendo que la estadística de las probabilidades de las diferentes vocales es:*

$$a \rightarrow 0.1253, e \rightarrow 0.1368, i \rightarrow 0.0625, o \rightarrow 0.0868, u \rightarrow 0.0393$$

*Hecho por Pedro. Se aceptan correcciones.*

Para ver si el resultado mejora basta con recalcular la entropía, sabiendo que el segundo sumando calculado anteriormente no varía.

Así, tenemos:

$$H = -0.1253 \log_2(0.1253) - 0.1368 \log_2(0.1368) - 0.0625 \log_2(0.0625) - 0.0868 \log_2(0.0868) - 0.0393 \log_2(0.0393) - (1 - 0.4507) \log_2 \left( \frac{1 - 0.4507}{35} \right) = 4.54 \text{bits}$$

Podemos ver que el resultado mejora levemente pero no se observa un cambio sustancial.

**Ejercicio 4.8:** *Escribe un ejemplo de un código definido en  $S = \{s_1, s_2, s_3, s_4\}$  que no tenga la propiedad de prefijo*

Debemos buscar una asociación de cada uno de los símbolos de  $S$  a una cadena binario que sea inyectiva y permita descifrar el código tal que  $C(s_i) + (1|0) = C(s_j)$  para algún  $i$  y algún  $j$ .

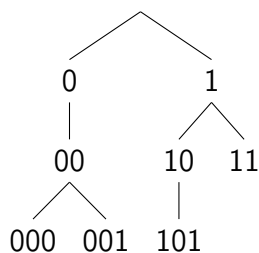
A ojo de buen cubero podemos escribir el código:

$$s_1 \rightarrow 01, s_2 \rightarrow 011, s_3 \rightarrow 0111, s_4 \rightarrow 01111$$

Podemos comprobar a simple vista que es describable y evidentemente no es prefijo.

**Ejercicio 4.9:** *Dibuja el árbol que corresponde a un código con  $IM(C) = \{11, 000, 001, 101\}$*





**Ejercicio 4.10:** Supongamos cierto tipo de ficheros en que los bytes representan números entre 1 y 4 con probabilidades respectivas:

$$p_1 = 0.35, p_2 = 0.34, p_3 = 0.3, p_4 = 0.01$$

Halla su codificación de Huffman y el tamaño medio en bytes que alcanzará un fichero de  $10^5$  bytes tras la codificación. Compara el resultado con la cota inferior de la entropía.

Para hallar la codificación de Huffman construiríamos el árbol partiendo de las hojas, que son los números que se pueden representar, y convirtiendo en hermanos a dos nodos que tengan la menor probabilidad en cada iteración. Así la codificación queda:

$$1 \rightarrow 0, 2 \rightarrow 10, 3 \rightarrow 110, 4 \rightarrow 111$$

La longitud media del código es:

$$l(C) = 0.35 \cdot 1 + 0.34 \cdot 2 + 0.3 \cdot 3 + 0.01 \cdot 4 = 1,96 \text{ bits}$$

de modo que, de cada byte pasamos a 1.96 bits. Por tanto, un fichero de  $10^5$  bytes pasará a 24500 bytes.

Calculamos ahora la entropía de esta codificación:

$$H = -0.35 \cdot \log_2(0.35) - 0.34 \cdot \log_2(0.34) - 0.3 \cdot \log_2(0.3) - 0.01 \cdot \log_2(0.01) = 1.64 \text{ bits}$$

Sabemos que

$$H \leq l(C) \leq H + 1$$

y, efectivamente, se cumple la igualdad. No obstante, puesto que el algoritmo de Huffman nos garantiza obtener el código mínimo, podemos concluir que la cota inferior es demasiado óptima y es imposible alcanzarla.

**Ejercicio 4.11:** ¿Qué aspecto tiene el árbol que corresponde a la codificación de Huffman para un conjunto de  $2^k$  elementos, todos ellos con la misma probabilidad? ¿Y qué aspecto tiene el árbol en la codificación de Huffman si las probabilidades  $p_i$  son proporcionales a los números de Fibonacci  $F_i$ ? En este último caso, intenta dar una prueba de lo que te sugieren tus ejemplos.

*Hecho por Pedro. Se aceptan correcciones.*

Si seguimos el algoritmo de Huffman, en cada iteración tenemos que unir bajo un mismo padre a los dos elementos con menor probabilidad y, en caso de empate, escoger dos al azar.

Este algoritmo, si todos los elementos tienen igual probabilidad, nos dará lugar a un árbol perfectamente balanceado y completo de profundidad  $k$ .

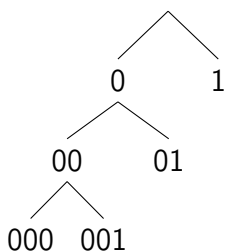
Si las probabilidades son números de Fibonacci, al juntar dos elementos, la probabilidad que asociemos al padre será igual a la probabilidad de otro elemento del conjunto (por definición de la serie de Fibonacci). Así, nos quedará un árbol nada balanceado en el que todo nodo (salvo la última hoja) tendrá dos hijos si es hijo izquierdo y ninguno si es hijo derecho.

La codificación de los elementos sería de la forma 0, 01, 001, 0001, ...

**Ejercicio 4.12:** *Da un ejemplo de un código sobre un conjunto de cuatro elementos tal que las longitudes de las codificaciones sean  $l_1 = 1$ ,  $l_2 = 2$ ,  $l_3 = l_4 = 3$ . ¿Es posible añadir un quinto elemento al conjunto sin modificar la codificación de los otros?*

El algoritmo a seguir consiste en partir de un árbol binario completo e ir podando ramas para que queden códigos con las longitudes indicadas.

Partiendo del árbol de profundidad 4, para forzar que haya un elemento cuya codificación tenga longitud 1 debemos podar a profundidad 1. Tras esto podamos a longitud 2 y dos veces a longitud 3, con lo que nos queda el árbol:



Si quisiéramos añadir un nuevo elemento deberíamos podar nuevamente el árbol. En caso de hacerlo estamos perdiendo otras codificaciones de modo que no podemos. La forma matemática de probar que es imposible añadir un nuevo elemento es observando la desigualdad de Kraft que dice que, para poder existir un código con determinadas longitudes es necesario que la suma de las inversas de estas longitudes sea menor que uno.

En este caso tenemos

$$2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-3} + 2^{-3} + 2^{-?} \leq 1 \implies 1 + 2^{-?} \leq 1$$

con lo que vemos que no hay posibilidad de añadir ningún nuevo elemento sin cambiar la codificación de los ya existentes.

**Ejercicio 4.13:** *Supongamos que queremos comprimir ficheros binarios que tienen un 80% de 1s. Calcula la tasa de compresión que se obtendría con la codificación de Huffman cuando los bits se agrupan de dos en dos. Es decir,  $S = \{00, 01, 10, 11\}$  con probabilidades respectivas  $0.2^2$ ,  $0.16$ ,  $0.16$ ,  $0.8^2$ , y cuando se agrupan de tres en tres*

*Hecho por Pedro. Se aceptan correcciones.*

Esta corregido en clase y la primera parte esta bien

Al hablar de la tasa de compresión lo que nos están pidiendo es la entropía. Vamos a calcularla:

$$H_2 = -0.2^2 \cdot \log 0.2^2 - 0.16 \cdot \log 0.16 - 0.16 \cdot \log 0.16 - 0.8^2 \cdot \log 0.8^2 = 1.44$$

Si representamos cada uno de los elementos de  $S$  por el número binario que representan tendríamos:

$$S = \{0, 1, 2, 3\}$$

y la codificación de Huffman (obtenida por medio de la construcción del árbol) sería

$$0 \rightarrow 111, 1 \rightarrow 110, 2 \rightarrow 10, 3 \rightarrow 0$$

La longitud media de esta codificación sería:

$$l(C) = 3 \cdot 0.2^2 + 0.16 \cdot 3 + 0.16 \cdot 2 + 0.8^2 \cdot 1 = 1.56$$

Al agrupar los elementos de 3 en tres nos queda:

$$S = \{000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111\} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

La entropía se calcula como:

$$H_3 = \sum_{i=0}^7 p_i \log_2 p_i = 2.16$$

Al aplicar el algoritmo de Huffman nos quedaría la compresión de la siguiente forma:

$$0 \rightarrow 11111111, 1 \rightarrow 11111110, 2 \rightarrow 1111110, 3 \rightarrow 111110, 4 \rightarrow 11110$$

$$5 \rightarrow 1110, 6 \rightarrow 110, 7 \rightarrow 10, 8 \rightarrow 0$$

En este caso la longitud media sería: (2.18, mirar las cuentas)

$$l(C) = 0.8^3 \cdot 1 + 0.8^2 \cdot 0.2(2 + 3 + 6) + 0.8 \cdot 0.2^2(7 + 8 + 5) + 0.2^3 \cdot 9 = 2.63$$

**Ejercicio 4.14:** *Escribe la lista de pares que corresponden a la codificación de la frase tres tristes tigres en LZ78. Obtén también la codificación con LZW de esta frase suprimiendo los espacios y empleando un diccionario inicial de seis letras:*

$$0 \rightarrow e, 1 \rightarrow g, 2 \rightarrow i, 3 \rightarrow r, 4 \rightarrow s, 5 \rightarrow t$$

*Hecho por Pedro. Se aceptan correcciones.*

■ **LZ78**

El diccionario nos queda:

Elemento	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Símbolo	t	r	e	s	_	tr	i	st	es	_t	ig	re	s#

Y la frase queda codificada como:

$(0, t), (0, r), (0, e), (0, s), (0, _), (1, r), (0, i), (4, t), (3, s), (5, t), (7, g), (2, e), (4, \#)$

■ **LZW**

El diccionario nos queda

Elemento	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
Símbolo	e	g	i	r	s	t	tr	re	es	st	tri	is	ste	est	ti	ig	gr	res

Y la frase queda codificada como:

5, 3, 0, 4, 6, 2, 9, 2, 1, 7

**Ejercicio 4.15:** *¿Qué dice*

$$(0, m), (0, i), (0, _), (1, a), (4, _), (1, e), (3, a), (4, .)$$

*codificado en LZ78?*

Según vamos descifrando construimos un diccionario dinámico que nos permite llevar a cabo este proceso de descifrado.

El diccionario nos queda

Elemento	1	2	3	4	5	6	7	8
Símbolo	m	i	_	ma	ma_	me	_a	ma.

Y la cadena es

mi mama me ama

que se obtiene simplemente con leer el diccionario de principio a final.

**Ejercicio 4.16:** *Supongamos el algoritmo LZW funcionando bit a bit con el diccionario inicial formado por 0 y 1. Calcula cuántos elementos tendría al final el diccionario cuando se comprime un fichero formado por 8000 bits, todos ellos iguales a 0.*

*Hecho por Pedro. Se aceptan correcciones.*

La idea es correcta pero me he hecho algo de jaleo con los números. Cuando me pare a hacerlo con calma lo corregiré

Al construir el diccionario seguiríamos los siguientes pasos

1. Empezamos leyendo 00, que se guarda en el diccionario en la posición 2.
2. Leemos 000, que se guarda en el diccionario en la posición 3
3. Leemos 0000, que se guarda en el diccionario en la posición 4...

En el primer paso hemos procesado los dos primeros bits de la cadena, en el segundo 4, en el tercero 8, y así sucesivamente. Por tanto tendremos que añadir elementos al diccionario hasta la iteración  $n$  en la que ya habremos procesado  $2^n$  elementos.

Si queremos haber procesado todo el diccionario necesitamos  $2^n > 8000 \implies n = 14$ . Es decir, nos quedará un diccionario con 15 elementos, cada uno de los cuales será una sucesión de ceros. Concretamente, en la posición  $i$  tendremos una cadena de  $i$  ceros, salvo en las dos primeras, donde tendremos un 0 y un 1 respectivamente.

**Ejercicio 4.17:** *Consideremos la cadena de bits  $c_k$  obtenida al concatenar todas las de longitud 1, todas las de longitud 2 y así hasta de longitud  $k$ , todas ellas ordenadas. Por ejemplo, para  $k = 3$  sería  $c_3 = 0100011011000001010011100101110111$ . Intuitivamente éste es el peor caso para la compresión LZ78. Calcula la longitud de  $c_k$  en bits y el número de pares de que constaría su codificación.*

*Hecho por Pedro. Se aceptan correcciones.*

Cuando vayamos dividiendo la cadena original en frases obtendremos que las frases son las mismas con las que se describe la cadena, es decir, tendremos las frases posibles de longitud 1, todas las posibles de longitud 2, las de longitud 3, etc.

Tendremos un total de  $\sum_{n=1}^k 2^n$  frases, lo que implicará que necesitaremos  $k+1$  bits para codificar el código dentro del par ( código , letra ) empleado en la codificación con este algoritmo. Además necesitaremos un byte para codificar esa letra final.

Por tanto necesitaremos un total de:

$$\left( \sum_{n=1}^k 2^n \right) \cdot (k + 9) \text{ bits} = (2^{k+1} - 1) \cdot (k + 9) \text{ bits}$$

con una codificación que constará de  $2^{k+1} - 1$  pares, cada uno de los cuales con  $k + 9$  bits.

**Ejercicio 4.18:** Para elegir al azar un número de 1 a  $2n$  podemos decidir primero aleatoriamente si queremos que esté en el subconjunto de los pares o de los impares y después coger un número al azar del subconjunto. Por tanto, si queremos que la entropía mida la cantidad de información es razonable exigir que cumpla:

$$H\left(\frac{1}{2n}, \dots, 2n \text{ veces } \dots, \frac{1}{2n}\right) = H = H\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) + H\left(\frac{1}{n}, \dots, n \text{ veces } \dots, \frac{1}{n}\right)$$

Utiliza un argumento similar para justificar la tercera propiedad exigida por Shannon.

*Hecho por Pedro. Se aceptan correcciones.*

La tercera propiedad exigida por Shannon es:

$$H\left(\frac{1}{n}, \dots, (n \text{ veces}) \dots, \frac{1}{n}\right) = H\left(\frac{b_1}{n}, \dots, (k \text{ veces}) \dots, \frac{b_k}{n}\right) + \sum_{i=1}^k \frac{b_i}{n} H\left(\frac{1}{b_i}, \dots, (b_i \text{ veces}) \dots, \frac{1}{b_i}\right)$$

y se deduce de la idea: "La cantidad de información no puede variar si subdividimos  $S$  en subconjuntos más pequeños de tamaño  $b_i$ ".

**Ejercicio 4.19:** Un código óptimo (en cuanto a la longitud media) sobre un conjunto de  $n$  elementos equiprobables, cuando  $n$  no es una potencia de dos, necesariamente da codificaciones de longitud  $\lceil \log_2(n) \rceil$  para algunos elementos y de longitud  $\lceil \log_2(n) \rceil + 1$  para otros. Prueba que los codificados con longitud mayor son exactamente  $2\left(n - 2^{\lfloor \log_2 n \rfloor}\right)$

# Índice alfabético

- 1ª Ley de Kepler, 4
- 2ª Ley de Kepler, 4
- 3ª Ley de Kepler, 4
  
- Análisis de Fourier en  $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ , 44
  
- Cálculo de variaciones, 13
- Código, 70
- Código prefijo, 77
- Cadena de Markov
  - Irreducible, 30
  - Regular, 30
- Cadena de markov, 26
- Convolución, 53
  
- Desigualdad de Kraft, 78
- Distribuciones estacionarias, 30
  
- Energía cinética, 16
- Energía potencial, 16
- Entropía, 69
- Entropía, 70
  
- Ley de Gauss, 11
- Ley de la probabilidad total, 27
- Longitud media, 71
  
- polinomios de Chebyshev, 62
- Principio básico de la mecánica (principio de Hamilton), 16
- Probabilidad de transición, 27
  
- Source Coding Theorem, 71
  
- Teorema
  - del Punto fijo de Brouwer, 31
- Teorema 1, 31
- Teorema 2, 32
- Teorema 3, 33
- Teorema 4, 39
- Tiempo medio de retorno, 39