UNIVERSIDAD AUTONOMA DE MADRID
Departamento de Matemáticas
J.R. Esteban

ÁLGEBRA LINEAL

Grado en Ingeniería de Tecnologías y Servicios de Telecomunicación, 2013-2014

Ejercicios 49 a 57

49. a) Sea $\mathbf{A}$ la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 & 0 & 4 & 1 \\ 4 & 2 & 4 & 4 & 1 & 5 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 4 & 3 \\ 6 & 3 & 4 & 8 & 1 & 9 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & 0 & 0 & 3 \\ 8 & 4 & 2 & 14 & 1 & 13 & 3 \end{bmatrix}.$$

Comprobar que $\mathbf{A}$ es el producto de la matriz formada con sus columnas fundamentales por la matriz formada con las filas no-nulas de $\mathbf{E_A}$.

b) Sea $\mathbf{A}$ uma matriz $m \times n$ de rango r . Sea $\mathbf{B}$ la matriz formada con las columnas fundamentales de $\mathbf{A}$ y sea $\mathbf{C}$ la matriz formada con las filas no nulas de $\mathbf{E_A}$.

1. Si la k-ésima columna de $\mathbf{A}$ es la j-ésima de las columnas fundamentales de $\mathbf{A}$, ¿cómo es la k-ésima columna de $\mathbf{C}$?
2. Si la k-ésima columna de $\mathbf{A}$ es redundante y tiene a su izquierda j columnas fundamentales de $\mathbf{A}$ ¿ cómo es la k-ésima columna de $\mathbf{C}$?
3. Demostrar que $\mathbf{B}$ y $\mathbf{C}$ son ambas de rango r y satisfacen $\mathbf{A} = \mathbf{BC}$.

50. Demostrar que la matriz $\mathbf{A}$ tiene rango 1 si y sólo si existen columnas no nulas $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ tales que $\mathbf{A} = \mathbf{u}\,\mathbf{v}^T$. Comprobar que en esta situación se verifica

$$\mathbf{A}^2 = \tau\,\mathbf{A}\,, \quad \text{siendo} \quad \tau = \operatorname{traza}\mathbf{A}\,.$$

51.

1. Averiguar si los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^4$ forman un subespacio vectorial :

b)
$$F_2 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 : \quad x_1 \cdot x_2 = 0\}.$$

c)
$$F_3 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 : \quad x_1 = 1\}.$$

2. Averiguar si los siguientes conjuntos de matrices $n \times n$ forman un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^{n\times n}$:

a)
$$F_1 = \left\{ \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n} : \quad \mathbf{A} \text{ es simétrica} \quad \right\}.$$

b)
$$F_2 = \left\{ \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n} : \quad \mathbf{A} \text{ es antisimétrica} \quad \right\}.$$

c)
$$F_3 = \left\{ \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n} : \quad \operatorname{traza} \mathbf{A} = 0 \quad \right\}.$$

d)
$$F_4 = \left\{ \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n} : \quad \operatorname{traza} \mathbf{A} = 1 \quad \right\}.$$

3. Averiguar si los siguientes conjuntos de polinomios de grado $\leq n$ forman un subespacio vectorial de $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$:

a)
$$F_1 = \left\{ \mathbf{p} \in \mathcal{P}_n(\mathbb{R}) : \quad \mathbf{p}(1) + 7\,\mathbf{p}'(0) = 0 \quad \right\}.$$

b)
$$F_2 = \left\{ \mathbf{p} \in \mathcal{P}_n(\mathbb{R}) : \quad \mathbf{p}'' + 3\,\mathbf{p}' - 2\,\mathbf{p} = \mathbf{0} \quad \right\}.$$

c)
$$F_3 = \left\{ \mathbf{p} \in \mathcal{P}_n(\mathbb{R}) : \quad \mathbf{p}''(-1) = \mathbf{p}''(1) \quad \right\}.$$

52. Se considera el espacio vectorial $\mathbb{C}^{2\times 2}$ de las matrices 2×2 de números complejos. Estudiar si los siguientes conjuntos son subespacios vectoriales de $\mathbb{C}^{2\times 2}$.

1.
$$F_1 = \{ \mathbf{A} \in \mathbb{C}^{2\times 2} : \quad \operatorname{rango} \mathbf{A} = 1 \quad \}.$$

2.
$$F_2 = \{ \mathbf{A} \in \mathbb{C}^{2\times 2} : \quad \det \mathbf{A} = 0 \quad \}.$$

4.
$$F_4 = \left\{ \mathbf{A} \in \mathbb{C}^{2\times 2} : \quad a_{11} + a_{12} + a_{21} + a_{22} = 0 \quad \right\}.$$

53. Dada la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 5 \\ -2 & -4 & 0 & 4 & -2 \\ 1 & 2 & 2 & 4 & 9 \end{bmatrix},$$

determinar una base de cada uno de los cuatro subespacios vectoriales

$$\operatorname{col} \mathbf{A}, \qquad \operatorname{nul} \mathbf{A}, \qquad \operatorname{col} \mathbf{A}^T, \qquad \operatorname{nul} \mathbf{A}^T,$$

así como las ecuaciones de cada uno de los subespacios.

54. Sea $\mathbf{A}$ una matriz 3×3 tal que

$$\operatorname{col} \mathbf{A} = \operatorname{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}, \qquad \operatorname{nul} \mathbf{A} = \operatorname{span} \left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

Considérese el sistema $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -7 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

1. ¿El sistema es compatible?
2. ¿Tiene solución única?

55. Sean

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & -4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 & -5 & 3 \\ -1 & 0 & 3 & -6 & 4 \\ -1 & 0 & 3 & -6 & 4 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -2 \\ -5 \\ -6 \\ -7 \\ -7 \end{bmatrix}.$$

¿Se verifica que $\mathbf{b} \in \operatorname{col} \mathbf{A}$?

a) ¿Generan las filas de $\mathbf{A}$ el mismo subespacio de $\mathbb{R}^3$ que las filas de $\mathbf{B}$?

b) ¿Coinciden los subespacios que generan las columnas de ambas matrices?

c) ¿Tienen $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ el mismo núcleo?

d) ¿Se verifica $\operatorname{nul}\mathbf{A}^T = \operatorname{nul}\mathbf{B}^T$?

57. Sea $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Demostrar las siguientes afirmaciones:

1. $\operatorname{nul}\mathbf{A}^T \cap \operatorname{col}\mathbf{A} = \{\mathbf{0}\}$.
2. Si $\mathbf{b}$ satisface $\mathbf{y}^T\mathbf{b} = \mathbf{0}$ para todo $\mathbf{y} \in \operatorname{nul}\mathbf{A}^T$, entonces el sistema $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es compatible.
3. Supongamos que el sistema $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es compatible. Si $\mathbf{a} \in \operatorname{col}\mathbf{A}^T$, entonces el valor del producto $\mathbf{a}^T\mathbf{x}$ es constante para toda solución $\mathbf{x}$ del sistema.