UNIVERSIDAD AUTONOMA DE MADRID
Departamento de Matemáticas
J.R. Esteban

ÁLGEBRA LINEAL

Grado en Ingeniería de Tecnologías y Servicios de Telecomunicación, 2013-2014

Ejercicios 125 a 132

125. Sabemos que la forma canónica de Jordan de la matriz **A** es

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & & & & & & \\ & 3 & 1 & & & & & \\ & & 3 & & & & & \\ & & & 3 & & & & \\ & & & & 7 & 1 & & \\ & & & & & 7 & & \\ & & & & & & 7 & 1 \\ & & & & & & & 7 \end{bmatrix}.$$

Se pide calcular los autovalores de **A** y para cada uno de ellos:

1. La multiplicidad algebraica de λ.
2. La multiplicidad geométrica de λ.
3. El índice k de $\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{I}$.
4. El rango de cada $(\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{I})^j$, donde $j \in \{1, 2, \ldots, k-1\}$.
5. La dimensión de cada uno de los espacios

$$E_j = \operatorname{nul}(\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{I}) \cap \operatorname{col}(\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{I})^j .$$

Razonar las respuestas.

126. Reducir a su forma diagonal la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} & & & 1 \\ & & 1 & \\ & 1 & & \\ 1 & & & \end{bmatrix}.$$

A. Hallar **P** invertible y **J** diagonal tales que $\mathbf{AP} = \mathbf{PJ}$.

127. Diagonalizar en una base ortonormal las matrices simétricas

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} -1 & 5 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}.$$

128. Dada la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 5 \\ -2 & -4 & 0 & 4 & -2 \\ 1 & 2 & 2 & 4 & 9 \end{bmatrix},$$

utilizar el algoritmo de Gram-Schmidt para calcular una base ortonormal de cada uno de los cuatro subespacios vectoriales

$$\operatorname{nul} \mathbf{A}^T, \qquad \operatorname{col} \mathbf{A}, \qquad \operatorname{nul} \mathbf{A}, \qquad \operatorname{col} \mathbf{A}^T.$$

Escribir las bases ortonormales de $\mathbb{R}^3$ y de $\mathbb{R}^5$ obtenidas a partir de las anteriores y la correspondiente factorización ortogonal

$$\mathbf{A} = \mathbf{U} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \\ & \mathbf{C} \end{bmatrix} \mathbf{V}^T$$

de la matriz $\mathbf{A}$, siendo $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ y $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ matrices ortogonales.

129. Sea la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

1. Obtener una base de $\mathbb{R}^6$ a partir de bases de los subespacios $\operatorname{nul} \mathbf{A}^T$ y $\operatorname{col} \mathbf{A}$.

4. Escribir la factorización

$$\mathbf{A} = \mathbf{U} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \\ & \mathbf{C} \end{bmatrix} \mathbf{V}^T$$

siendo $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{6\times 6}$ y $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{7\times 7}$ matrices ortogonales.

130. Calcular la factorización $\mathbf{A} = \mathbf{QR}$ de las matrices

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & -3 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

131. En una base ortonormal $\mathcal{B} = \{ \mathbf{u}_1 , \mathbf{u}_2 , \mathbf{u}_3 \}$ del espacio vectorial $\mathbb{C}^3$, la aplicación lineal $T \,:\, \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}^3$ tiene matriz

$$\mathbf{A} = [T]_{\mathcal{B},\mathcal{B}} = -\frac{\mathrm{i}}{2} \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

Hallar una base ortonormal que diagonaliza T .

132. Sea $\mathbf{A}$ una matriz $n \times n$. Demostrar :

1. Si $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, entonces $\mathbf{A}$ y $\mathbf{A}^T$ tienen los mismos autovalores.
2. Sea $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Se verifica

   λ es autovalor de $\mathbf{A}$ *si y sólo si* $\overline{\lambda}$ es autovalor de $\mathbf{A}^H$.

3. Sea $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Se verifica

   λ es autovalor de $\mathbf{A}$ *si y sólo si* $\overline{\lambda}$ es autovalor de $\mathbf{A}$.

4. Decimos que $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^N$, $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$, es un *vector propio por la izquierda* de $\mathbf{A}$ cuando existe μ tal que $\mathbf{u}^H \mathbf{A} = \mu\, \mathbf{u}^H$.